

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

RAFAEL FERNANDES PINHEIRO

**ESTUDO DA CONJECTURA DE AIZERMAN  
EM DIMENSÃO 2 E UM CONTRAEXEMPLO  
EM DIMENSÃO 4**

MONOGRAFIA APRESENTADA AO INSTITUTO DE MATEMÁTICA E  
ESTATÍSTICA PARA A CONCLUSÃO DO CURSO DE BACHARELADO EM  
MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL

HABILITAÇÃO: SISTEMAS E CONTROLE

ORIENTADOR: PEDRO ALADAR TONELLI

JANEIRO  
2010

## Dedicatória

*Dedico este trabalho aos meus Pais, Esposa e Filha, que apesar do sofrimento de minha constante ausência souberam compreender meus objetivos e sempre me apoiaram.*

# RESUMO

Utilizando técnicas da Teoria da Estabilidade, abordadas de forma sucinta neste texto, o objetivo deste trabalho é estudar um problema de estabilização que tem uma relação com a teoria de controle, o Problema de Aizerman. Em 1947 Aizerman [1] levantou uma questão fascinante aos olhos dos matemáticos da época que ficou conhecida na literatura como a Conjectura de Aizerman. Essa conjectura dizia que seria possível estudar estabilidade de sistemas não lineares apenas pelo estudo de sistemas lineares de EDO. Em 1953 Krasovskii [6] provou que de fato a conjectura era válida para sistemas de dimensão 2 e para alguns sistemas de dimensões superiores, criando a expectativa que talvez ela fosse sempre válida. Porém, em 1958, Pliss [10] apresentou um método de construção de contraexemplo em dimensão 3 invalidando a teoria inicial de Aizerman para casos gerais. Os trabalhos deixados pelos matemáticos, desde a época do surgimento da conjectura, na tentativa de validar e/ou ‘derrubar’ a suposição de Aizerman, são até hoje de valiosa contribuição para a Teoria da Estabilidade com aplicações principalmente no ramo da Engenharia, sendo, ainda, o Problema de Aizerman, um grande possibilitador de aprendizado e de novas descobertas.

# PREFÁCIO

A partir de uma Iniciação Científica, realizada no ano de 2007 com apoio financeiro do Programa Ensinar com Pesquisa, este texto consolida o conhecimento que adquiri naquele trabalho, cujo o tema do projeto foi “Estabilidade de Sistemas Dinâmicos em dimensão 2 e os Problemas de Aizerman e Lur’e no Plano” que tive como orientador o Prof. Dr. Pedro Aladar Tonelli (IME-USP). Podendo, agora, ser exposto com maior consistência, após concluídas as matérias da Habilitação (em Sistemas e Controle na POLI), bem como, todas as outras matérias do IME-USP, principalmente, aquelas ministradas pelo Departamento de Matemática Aplicada, ao longo do curso de Bacharelado em Matemática Aplicada e Computacional (BMAC).

O objetivo deste trabalho é estudar um problema de estabilização que tem uma relação com a teoria de controle, o Problema de Aizerman. Embora esse problema já esteja resolvido por completo em  $R^2$  por Krasovskii [6], em dimensões superiores, isto é, na versão geral, este problema nos remete ao Problema de Lur’e o qual ainda tem sido bastante estudado.

Para um melhor entendimento do Problema de Aizerman e afim de que seja atingido o objetivo proposto, este Trabalho de Formatura está dividido em quatro partes, a saber: Alguns Tópicos de Sistemas de EDO, Estabilidade Segundo Lyapunov, Funções de Lyapunov e por último o Problema de Aizerman.

Além do objetivo primordial deste trabalho, que é estudar o Problema de Aizerman, tomando como bibliografia principal a obra de Guzman [4], eu resolvi dar uma atenção especial, embora abordados de forma sucinta, aos capítulos 1, 2 e 3, assuntos dos quais foram objetos de longos estudos no meu projeto de Iniciação Científica e também muito explorados em algumas disciplinas do Departamento de Matemática Aplicada e da Habilitação em Sistemas e Controle da POLI.

Eu procurei fazer este trabalho de modo que pessoas com conhecimentos básicos de Álgebra Linear, Cálculo e EDO possam compreender o conteúdo aqui exposto, entretanto, para quem possui conhecimentos um pouco mais avançados em Equações Diferenciais Ordinárias, como por exemplo, para quem cursou matérias equivalentes à Técnicas em Teoria do Controle (MAP2321), Métodos Numéricos em Equações Diferenciais I (MAP2310) e seus pré-requisitos, poderão acompanhar este texto de forma bastante crítica.

E, ainda, para aqueles que se interessarem poderão se aprofundar, por meio das referências bibliográficas, na interessante teoria que faz surgir o contra-exemplo aqui exposto, passando, dessa fase, para uma possível pesquisa em grau de pós-graduação, tomando como linha inicial o Problema de Aizerman e em seguida o Problema de Lur'e [9], que introduziu pela primeira vez em 1945 o conceito de Estabilidade Absoluta.

Finalizando, aproveito a oportunidade para deixar meus sinceros agradecimentos, primeiramente, à Deus que me dá forças para superar os grandes desafios que surgem em minha vida, agradeço ao Professor Pedro, meu orientador, que de forma esplêndida com sua sabedoria, paciência e presteza conseguiu me passar conhecimentos fundamentais para que eu pudesse galgar as disciplinas do IME e POLI com maior facilidade, possibilitando-me, ainda, a abertura de novos horizontes no mundo acadêmico. Agradeço, também, à todos os professores do IME e POLI que em suas aulas, algumas um tanto que árduas, tentaram me transmitir seus sábios conhecimentos matemáticos e de vida. Enfim, agradeço, do fundo do meu coração, à todos que de forma direta ou indireta contribuíram para que eu conseguisse chegar ao fim deste curso.

# Sumário

<b>1</b>	<b>ALGUNS TÓPICOS DE SISTEMAS DE EDO</b>	<b>8</b>
1.1	INTRODUÇÃO . . . . .	8
1.2	MODELAGEM DO PÊNDULO . . . . .	8
1.3	AUTOVALORES E AUTOVETORES . . . . .	10
1.3.1	DEFINIÇÕES . . . . .	10
1.3.2	EXEMPLOS . . . . .	11
1.4	EXPONENCIAL DE MATRIZES . . . . .	13
1.4.1	PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS . . . . .	14
1.4.2	EXEMPLOS . . . . .	14
1.5	EXPONENCIAL DE MATRIZES PELA FORMA CANÔNICA DE JORDAN (a matriz J) . . . . .	16
1.5.1	EXEMPLOS . . . . .	18
1.6	SOLUÇÃO PARA SISTEMA DE EDO LINEAR COM COEFICIENTES CONSTANTES . . . . .	21
1.6.1	EXEMPLO . . . . .	21
<b>2</b>	<b>ESTABILIDADE SEGUNDO LYAPUNOV</b>	<b>23</b>
2.1	INTRODUÇÃO . . . . .	23
2.2	DEFINIÇÕES . . . . .	23
2.3	ESTABILIDADE PARA EDO COM COEFICIENTES CONSTANTES . . . . .	26
2.3.1	EXEMPLO . . . . .	27
<b>3</b>	<b>FUNÇÕES DE LYAPUNOV</b>	<b>28</b>
3.1	INTRODUÇÃO . . . . .	28
3.2	A FUNÇÃO DE LYAPUNOV . . . . .	28
3.2.1	EXEMPLOS . . . . .	29

3.3	FUNÇÃO DE LYAPUNOV PARA SISTEMAS AUTÔNOMOS . . . . .	31
3.3.1	EXEMPLOS . . . . .	32
3.4	MÉTODO DIRETO DE LYAPUNOV . . . . .	34
<b>4</b>	<b>O PROBLEMA DE AIZERMAN</b>	<b>36</b>
4.1	INTRODUÇÃO . . . . .	36
4.2	APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA DE AIZERMAN EM DIMENSÃO 2 . . . . .	36
4.3	UM RESULTADO PARA A DIMENSÃO 2 . . . . .	39
4.3.1	EXEMPLO . . . . .	41
4.4	UM CONTRAEXEMPLO . . . . .	42

# Capítulo 1

## ALGUNS TÓPICOS DE SISTEMAS DE EDO

### 1.1 INTRODUÇÃO

No capítulo 1 temos a apresentação de alguns métodos relacionados a como se obter soluções de sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares. Iniciaremos na seção 1.2, como motivação, com o problema de modelagem do pêndulo simples o qual mais adiantes nos remeterá a um problema de controle. Em seguida, na seção 1.3 temos algumas definições a respeito de autovalores e autovetores, logo após na seção 1.4, com o objetivo de se obter soluções para Sistemas de EDO, temos o conceito de Exponencial de Matrizes que é uma ferramenta fundamental para a resolução de Sistemas de Equações Diferenciais. A partir desse conceito veremos, na seção 1.5, como obter soluções de sistemas de equações diferenciais lineares.

### 1.2 MODELAGEM DO PÊNDULO

Muitos problemas reais trazem equações diferenciais que admitem uma aproximação linear que, geralmente, é suficiente para muitos propósitos.

Observe o pêndulo simples, que consiste de uma partícula de massa  $m$ , um fio ideal de comprimento  $l$  e  $\theta$  o ângulo do fio com a vertical.

Usando a Lei de Newton e lembrando que a derivada segunda corresponde à aceleração temos:



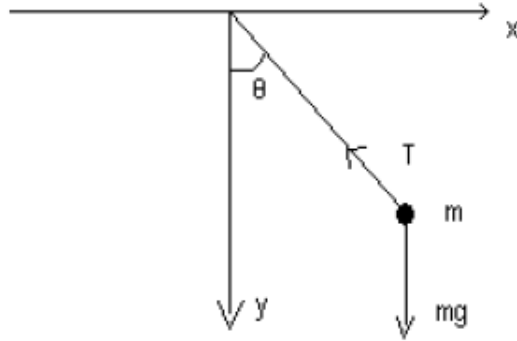


Figura 1.1: Pêndulo Simples

$$m\ddot{x} = -T\sin\theta \quad (1.1)$$

e

$$m\ddot{y} = mg - T\cos\theta \quad (1.2)$$

Eliminando T:

$$\ddot{x}\cos\theta - \ddot{y}\sin\theta = -g\cos\theta \quad (1.3)$$

Como  $x = l\sin\theta$  e  $y = l\cos\theta$ , e sabendo que  $\frac{df}{dx} = \frac{df}{d\theta} \frac{d\theta}{dx}$  obtemos:

$$\ddot{y} = -l(\cos\theta)\dot{\theta}^2 - l(\sin\theta)\ddot{\theta} \quad (1.4)$$

Aplicando (1.3) e (1.4) em (1.2), temos:

$$l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0 \quad (1.5)$$

Que é a equação do pêndulo em relação ao tempo. No momento vamos considerar o caso das pequenas oscilações do pêndulo o que nos permite fazer uma aproximação  $\sin\theta \cong \theta$ , portanto a equação do pêndulo se torna:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta \quad (1.6)$$

Agora, fazendo  $\theta = x$  e  $\dot{\theta} = y$  temos a seguinte equação matricial

$$\dot{X} = AX \quad (1.7)$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Logo adiante, teremos condições de encontrar soluções para esse tipo de problema, bem como, fazer uma análise de sua estabilidade.

## 1.3 AUTOVALORES E AUTOVETORES

Nesta seção encontraremos alguns tópicos relacionados à Teoria Espectral dos autovalores de uma matriz, bem como, alguns exemplos.

### 1.3.1 DEFINIÇÕES

**Definição 1** *Seja uma matriz  $A \in R^{n \times n}$  e  $\lambda \in C$ . Dizemos que  $\lambda$  é autovalor de  $A$  se existe  $x \in R^n$   $x \neq 0$  tal que  $Ax = \lambda x$ , isto é, o operador  $A - \lambda I$  não é inversível. Sendo o polinômio característico de  $A$  definido por:*

$$\det(A - \lambda I) \tag{1.9}$$

**Definição 2** *O espectro de  $A$  (conjunto de autovalores de  $A$ ) denotado por  $\sigma(A)$  pode ser obtido fazendo-se:*

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{1.10}$$

**Definição 3** *Dizemos que qualquer  $x \in R^n$  tal que  $Ax = \lambda x$  é Autovetor de  $A$  (correspondente ao autovalor  $\lambda$ ).*

**Definição 4** *O conjunto de autovetores de  $A$  é denominado auto-espço de  $A$  e será denotado por:*

$$N(\lambda, 1) = \{x \in R^n : (A - \lambda I)x = 0\} \tag{1.11}$$

**Definição 5** *Definimos multiplicidade ( $mult(\lambda)$ ) de um autovalor  $\lambda \in \sigma(A)$  sendo a multiplicidade de  $\lambda$  como uma raiz do polinômio característico de  $A$*

**Definição 6** *Definimos dimensão de um autovalor  $dim(N(\lambda, 1))$  como sendo a dimensão do seu auto-espço.*

**Definição 7** *Se ocorrer  $dim(N(\lambda, 1)) < mult(\lambda)$  deve ser introduzido o seguinte subespço:*

$$N(\lambda, k) = \{x \in R^n : (A - \lambda I)^k x = 0\} \tag{1.12}$$

onde  $\{0\} = N(\lambda, 0), N(\lambda, 1), N(\lambda, 2) \dots$  é uma cadeia estritamente crescente e para algum  $\nu(\lambda)$  em  $N(\lambda, \nu(\lambda)) = N(\lambda, \nu(\lambda) + 1)$  então a cadeia se estaciona em  $N(\lambda, \nu(\lambda))$ . Assim definiremos que para cada  $\lambda \in C$  existe um inteiro mínimo  $\nu(\lambda)$ , denominado índice de  $\lambda$ .

### 1.3.2 EXEMPLOS

**Exemplo 1.** Obter os autovalores e autovetores da seguinte matriz  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Para obter os autovalores,  $\sigma(A)$ , fazemos:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 4 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(3 - \lambda) - 8 = 0$$

resolvendo essa equação, temos  $\lambda_1 = 5$  (com  $\text{mult}(\lambda_1) = 1$ ) e  $\lambda_2 = -1$  (com  $\text{mult}(\lambda_2) = 1$ ), logo,  $\sigma(A) = (5, -1)$ .

Para obter os autovetores, devemos encontrar os auto-espacos de cada autovalor:

- $N(5, 1) = \{x \in R^2 : (A - 5I)x = 0\}$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

assim  $4x_1 - 2x_2 = 0$  ou  $-4x_1 + 2x_2 = 0$ , então  $x_2 = 2x_1$ . Portanto o autovetor associado ao autovalor  $\lambda_1 = 5$  é

$$N(5, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1$$

Com  $\dim(N(5, 1)) = 1$ . Note que  $\nu(5) = 1$  pois  $N(5, 1) = N(5, 2)$ .

- $N(-1, 1) = \{x \in R^2 : (A + I)x = 0\}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

assim  $4x_1 + 4x_2 = 0$  ou  $2x_1 + 2x_2 = 0$ , então  $x_2 = -x_1$ . Portanto o autovetor associado ao autovalor  $\lambda_2 = -1$  é

$$N(-1, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} x_1$$

Com  $\dim(N(-1, 1)) = 1$ . Note que  $\nu(-1) = 1$  pois  $N(-1, 1) = N(-1, 2)$ .

**Exemplo 2.** Obter os autovalores e autovetores da seguinte matriz:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Onde o polinômio característico é dado por  $p(\lambda) = (2 - \lambda)^3(-3 - \lambda)$ .

Obtendo os autovalores, para esse caso temos:  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$  (com  $\text{mult}(2) = 3$ ) e  $\lambda_4 = -3$  (com  $\text{mult}(-3) = 1$ ), logo,  $\sigma(T) = (2, -3)$ .

Obtendo os autovetores:

- $N(2, 1) = \{x \in R^4 : (T - 2I)x = 0\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ -x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_3 - 4x_4 = 0 \end{array}$$

então  $x_2 = 0$  e  $x_3 = x_4$  com  $x_1$  qualquer. Portanto os autovetores associados ao autovalor  $\lambda = 2$  são

$$N(2, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_3$$

Com  $\dim(N(2, 1)) = 2$ . Como  $\dim(N(2, 1)) < \text{mult}(2)$ , devemos introduzir o subespaço  $N(2, 2) = \{x \in R^4 : (T - 2I)^2 x = 0\}$ , então:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & -20 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{array}{l} 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ -20x_3 + 20x_4 = 0 \end{array}$$

então  $x_3 = x_4$  com  $x_1$  e  $x_2$  quaisquer. Portanto os autovetores associados ao autovalor  $\lambda = 2$  são

$$N(2, 2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_3$$

Pode ser verificado que  $\nu(2) = 2$ , pois  $N(2, 2) = N(2, 3)$ .

- $N(-3, 1) = \{x \in R^4 : (T + 3I)x = 0\}$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \\ 4x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_3 + x_4 = 0 \end{array}$$

então  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  e  $x_4 = -4x_3$ . Portanto o autovetor associado ao autovalor  $\lambda = -3$  é

$$N(-3, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} x_3$$

Com  $\dim(N(-3, 1)) = 1$ . Note que  $\nu(-3) = 1$  pois  $N(-3, 1) = N(-3, 2)$ .

## 1.4 EXPONENCIAL DE MATRIZES

Seja uma matriz  $A \in R^{n \times n}$ , então dizemos que a exponencial de  $A$  é dada por:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \quad (1.13)$$

A seguir veremos algumas técnicas de como se obter a Exponencial de Matriz por meio das propriedades fundamentais.

## 1.4.1 PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS

1.  $A = 0$ ,  $0 \in R^{n \times n}$  (matriz nula), então  $e^A = I$ ,  $I \in R^{n \times n}$  (identidade).
2.  $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ , então  $e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}$ .
3. Se  $A$  é uma matriz nilpotente, ou seja,  $A^l = 0$  então  $A^{l+k} = 0$ , temos que  $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{A^k}{k!}$ .
4.  $e^{A+B} = e^A e^B$ ,  $A \in R^{n \times n}$  e  $B \in R^{n \times n}$  (válida somente se  $A$  e  $B$  comutam).
5. Seja  $A = P J P^{-1}$  para  $J$  equivalente a  $A$  e  $P \in R^{n \times n}$  invertível, temos:  $e^A = P e^J P^{-1}$ .
6.  $\frac{de^{At}}{dt} = A e^{At}$ .

## 1.4.2 EXEMPLOS

**Exemplo 1.**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Utilizando a propriedade 2 temos:  $e^A = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}$

**Exemplo 2.**  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Podemos abrir a matriz  $A$  em duas:  $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  e  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Como essas duas matrizes comutam, isto é,  $A_1 A_2 = A_2 A_1$ , podemos aplicar a propriedade 4, assim:

$e^A = e^{(A_1 + A_2)} = e^{A_1} e^{A_2}$  dessa forma basta apenas calcular  $e^{A_1}$  utilizando a propriedade 2 e  $e^{A_2}$  utilizando a propriedade 3:

$$e^{A_1} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}$$

Como  $A_2$  é nilpotente de ordem 2, isto é,  $(A_2)^2 = 0$  temos

$$e^{A_2} = \sum_{k=0}^1 \frac{(A_2)^k}{k!} = I + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Concluimos que:

$$e^A = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & 3e^2 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}$$

**Exemplo 3.** Considere a matriz da equação do pêndulo citada na seção 1.2:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix}$$

Vamos obter a exponencial dessa matriz considerando  $g = l$ :

$$A^0 = I$$

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -A$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A \dots$$

Assim, utilizando a fórmula (1.13), constatamos que:

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{2!} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{3!} + \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{4!} + \dots$$

Logo

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} \dots & 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} \dots \\ -1 + \frac{1}{3!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} \dots & 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 1 & \operatorname{sen} 1 \\ -\operatorname{sen} 1 & \cos 1 \end{pmatrix}$$

Observando, agora, a propriedade 5 veremos na próxima seção que essa propriedade traz uma enorme quantidade de assuntos que trata de conceitos de análise matricial, bem como, da teoria espectral de operadores em espaços de dimensão finita (estudo de autovalores).

## 1.5 EXPONENCIAL DE MATRIZES PELA FORMA CANÔNICA DE JORDAN (a matriz J)

Seja uma matriz  $A \in R^{n \times n}$ , a partir da seção 1.3 podemos obter uma matriz  $J$  conhecida como Forma Canônica de Jordan tal que  $A = P J P^{-1}$ , onde  $P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$  é a matriz de autovetores de  $A$ .

Para obter  $P$  devemos escolher, para cada  $\lambda$ , um vetor  $H(\nu(\lambda) - 1)$  complementar de  $N(\lambda, \nu(\lambda) - 1)$  em  $N(\lambda, \nu(\lambda))$ , ou seja,

$$N(\lambda, \nu(\lambda)) = N(\lambda, \nu(\lambda) - 1) \oplus H(\nu(\lambda) - 1) \quad (1.14)$$

de forma que

$$H(\nu(\lambda) - 1) \in N(\lambda, \nu(\lambda)) - N(\lambda, \nu(\lambda) - 1) \quad (1.15)$$

Tomamos então

$$H(\nu(\lambda) - 1) = P_1 = \begin{pmatrix} P_1^1 \\ P_1^2 \\ \vdots \\ P_1^{h_1} \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

Se  $\dim(N(\lambda, 1)) = \text{mult}(\lambda)$  partimos para o próximo autovalor, caso contrário, obtemos  $P_2$  fazendo:

$$P_2 = (A - \lambda I)P_1 \in N(\lambda, \nu(\lambda) - 1) - N(\lambda, \nu(\lambda) - 2) \quad (1.17)$$

Até que seja atingida a multiplicidade de  $\lambda$ , assim:

$$\begin{pmatrix} P_1^1 & (A - \lambda I)P_1^1 & (A - \lambda I)^2 P_1^1 & \dots & (A - \lambda I)^{\nu(\lambda)-1} P_1^1 \\ P_1^2 & (A - \lambda I)P_1^2 & (A - \lambda I)^2 P_1^2 & \dots & (A - \lambda I)^{\nu(\lambda)-1} P_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{pmatrix} \quad (1.18)$$



A partir desses conceitos, vejamos o enunciado do teorema da decomposição de Jordan onde sua prova pode ser verificada em Guzman [4] e Lipschutz [8].

**Teorema 1** *Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  de elementos  $C$ . Existe então uma matriz não singular  $P$  tal que  $A = PJP^{-1}$ , sendo  $J$  da forma:*

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_n \end{pmatrix}$$

Onde cada  $J_i$  é da forma:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Sendo  $\lambda_i$  um autovalor de  $A$ , para  $i = 1, 2, \dots, h$  onde:

i)  $\nu(\lambda_i)$  é o número máximo de vezes que cada  $\lambda_i$  aparece em cada bloco  $J_i$ ;

ii) O número de blocos  $J_i$  relacionados a cada autovalor  $\lambda_i$  é igual à dimensão do autoespaço de  $\lambda_i$ . Então a quantidade  $n$  de blocos  $J_i$  é dada por  $n = \sum_{i=1}^h \dim N(\lambda_i, 1)$ .

Consideramos que a forma de Jordan é de relevada importância, pois decompondo uma matriz numa forma canônica conseguimos com maior facilidade obter a exponencial de uma matriz. Em consequência, podemos obter  $e^{Jt}$  fazendo:

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{J_n t} \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

sendo

$$e^{J_i t} = e^{\lambda_i t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t/1! & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ t^2/2! & t/1! & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ t^{n-1}/(n-1)! & t^{n-2}/(n-2)! & t/1! & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

dessa forma temos:

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1} \quad (1.21)$$

### 1.5.1 EXEMPLOS

**Exemplo 1.** Obter a exponencial da seguinte matriz  $A$  ( $t = 1$ ):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Conforme seção 1.3.2 temos  $\sigma(A) = (5, -1)$  ambos com multiplicidade 1. O autovetor associado ao autovalor  $\lambda_1 = 5$  é

$$P_1 = N(5, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1$$

O autovetor associado ao autovalor  $\lambda_2 = -1$  é

$$P_2 = N(-1, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} x_1$$

dessa forma obtemos a matriz

$$P = [P_1, P_2] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

A forma de Jordan pode ser obtida fazendo simplesmente  $J = P^{-1}AP$  ou então utilizando o teorema 1.1: como  $\dim(N(5, 1)) = 1$  temos um bloco  $J_1$  e  $\nu(5) = 1$ , isto é, o autovalor  $\lambda_1 = 5$  aparece apenas uma vez no bloco, assim  $J_1 = (5)$ , analogamente,  $J_2 = (-1)$ . Logo

$$J = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Conforme propriedade fundamental 2, temos:  $e^J = \begin{pmatrix} e^5 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix}$ . Portanto

$$e^A = Pe^JP^{-1}$$

$$e^A = \begin{pmatrix} 49,716 & 49,348 \\ 98,697 & 99,065 \end{pmatrix}$$

**Exemplo 2.** Obter a exponencial da seguinte matriz ( $t = 1$ ):

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Conforme exemplo 2 da seção 1.3.2 os autovalores são  $\sigma(T) = (2, -3)$  com  $\text{mult}(2) = 3$  e com  $\text{mult}(-3) = 1$ .

Os autovetores associados ao autovalor  $\lambda = 2$  são

$$N(2, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_3$$

Para completar o autoespaço de  $\lambda_1 = 2$ , temos:

$$N(2, 2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_3$$

logo,

$$P_1 = H(\nu(\lambda_1) - 1) \in N(\lambda_1, \nu(\lambda_1)) - N(\lambda_1, \nu(\lambda_1) - 1)$$

$$P_1 = H(1) \in N(2, 2) - N(2, 1)$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$P_2 = (T - 2I)P_1 \in N(2, 1) - N(2, 0)$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e conseqüentemente

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Assim completamos o autoespaço de  $\lambda_1 = 2$ .

O autovetor associado ao autovalor  $\lambda_2 = -3$  é

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Com isso temos

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Os blocos da forma de Jordan, pelo teorema, são:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ com } e^{J_1} = e^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ e^2 & e^2 \end{pmatrix}$$

$$J_2 = (2) \text{ com } e^{J_2} = (e^2)$$

$$J_3 = (-3) \text{ com } e^{J_3} = (e^{-3})$$

$$\text{Logo, } J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ com } e^J = \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 & 0 \\ e^2 & e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-3} \end{pmatrix}$$

Portanto

$$e^T = Pe^JP^{-1}$$

Com base nos estudos anteriores temos, agora, condições de obter soluções para todo o tipo Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares.

## 1.6 SOLUÇÃO PARA SISTEMA DE EDO LINEAR COM COEFICIENTES CONSTANTES

Seja uma matriz  $A \in R^{n \times n}$  real e  $x_0 \in R^n$ . Consideremos o seguinte sistema autônomo e homogêneo:

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.22)$$

Conforme a propriedade fundamental 6 temos:

$$\frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At} \quad (1.23)$$

em particular:

$$\frac{de^{At}x_0}{dt} = Ae^{At}x_0 \quad (1.24)$$

sendo  $x(t) = e^{At}x_0$  e  $x(t_0) = e^{At_0}x_0 \rightarrow x_0 = \frac{x(t_0)}{e^{At_0}}$ , portanto  $e^{At}(e^{At_0})^{-1}$  é a solução que satisfaz a condição inicial e pode ser escrita como:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 \quad (1.25)$$

Agora, para resolvermos o problema não homogêneo:

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.26)$$

Utilizamos a fórmula de Lagrange:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}b(s)ds \quad (1.27)$$

A partir dos conceitos expostos até aqui, temos condições de obter soluções para todo o tipo de sistemas de EDO lineares autônomos. Na sequência temos um exemplo simples que nos remeterá à Teoria da Estabilidade.

### 1.6.1 EXEMPLO

Considere um sistema nas condições de (1.22):

onde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

temos

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

e sejam as condições iniciais dadas por:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Temos como solução utilizando a equação (1.25):

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{A(t-t_0)} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Obtendo a Exponencial da Matriz A, para  $t_0 = 0$ :

$$e^{A(t)} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Logo, observada a condição inicial, temos a solução:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t}x_0 \\ e^{-2t}y_0 \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

## Capítulo 2

# ESTABILIDADE SEGUNDO LYAPUNOV

### 2.1 INTRODUÇÃO

O que pode acontecer com a solução do sistema (1.28) com o passar do tempo, será que a solução obtida se **aproxima** da solução trivial (ponto de equilíbrio)? ou será que o sistema **permanece** num estado próximo à trivialidade? Ou, ainda, será que a solução do sistema se **afasta** da solução trivial causando um desequilíbrio ao sistema?

O estudo dessas questões se originou com LAGRANGE, DIRICHLET, e mais recentemente com A. M. LYAPUNOV e POINCARÉ, formando a Teoria da Estabilidade ou Teoria Geométrica de Equações Diferenciais Ordinárias.

Conforme vimos no último exemplo do capítulo anterior, surge a questão sobre a estabilidade de soluções de uma Equação Diferencial Ordinária. Para destacar a importância deste assunto podemos citar um exemplo clássico de um problema que talvez tenha colaborado para dar origem a Teoria da Estabilidade, o Sistema Solar, é estável ou poderá atingir uma situação crítica, provocada por pequenas perturbações que produzam seu desmembramento?

### 2.2 DEFINIÇÕES

Consideremos, a partir de agora, as seguintes condições:

A equação  $x'(t) = f(t, x(t))$ , onde  $f : [t_0, +\infty) \times R^n \rightarrow R^n$ , que satisfaz condições que garantem que o problema:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

tenha solução única e que será entendida por  $x(t; t_0, x_0)$  definida em  $[t_0, +\infty)$ .

Considerando o sistema do exemplo anterior surgem, na questão imposta, três palavras que traduzem algo sobre estabilidade. Vejamos agora duas definições que nos dará uma idéia geral a respeito da estabilidade.

**"Permanece"**, esta palavra nos traz a idéia de uma solução estável que pode ser definida da seguinte forma:

**Definição 8** *Diremos que  $x(t; t_0, x_0)$  é estável se para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $x_1$  com  $|x_1 - x_0| < \delta$  se tem que  $x(t; t_0, x_0)$  existe e está definida em  $[t_0, +\infty)$  e se verifica:*

$$|x(t; t_0, x_1) - x(t; t_0, x_0)| \leq \epsilon \quad (2.2)$$

**"Aproxima"**, aqui nós temos a idéia de algo que converge, com isso, podemos enunciar a definição de solução assintoticamente estável:

**Definição 9** *Diz-se que  $x(t; t_0, x_0)$  é assintoticamente estável se é estável e existe  $\eta > 0$  tal que se  $|x_1 - x_0| \leq \eta$ , então*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t; t_0, x_1) - x(t; t_0, x_0)| = 0 \quad (2.3)$$

Logo, a solução que não é estável dizemos que a mesma é instável o que nos lembra da palavra mencionada anteriormente quando a solução do sistema se **"afasta"** da solução trivial.

Com essas definições temos condições de falar, agora, sobre a estabilidade do exemplo 1.5.1. Analisemos, através de um plano de fases, o comportamento do sistema em pontos próximos a solução trivial quando  $t$  vai para infinito.



Condições Iniciais

Soluções

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t}x_0 \\ e^{-2t}y_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{i} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{ii} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{iii} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{iv} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{v} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{vi} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{vii} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{viii} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Com a análise anterior fica claro que o sistema é assintoticamente estável, pois em todos os casos quando  $t \rightarrow \infty$  a solução  $(x, y) \rightarrow 0$ . Podemos, também, obter o plano de fazes relacionando a solução (1.29) da seguinte forma:

$$x = e^{-t}x_0 \rightarrow e^{-t} = \frac{x}{x_0}$$

e

$$y = e^{-2t}y_0 \rightarrow (e^{-t})^2 = \frac{y}{y_0}$$

Temos:

$$y = \frac{y_0 x^2}{x_0^2} \tag{2.4}$$

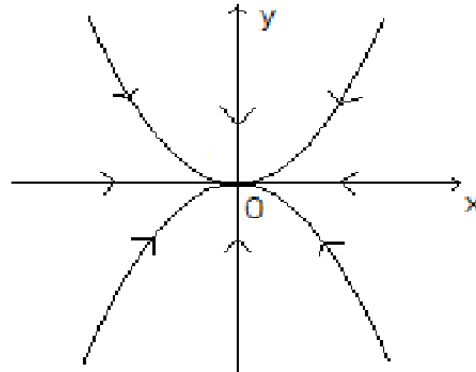


Figura 2.1: Plano de Fases

## 2.3 ESTABILIDADE PARA EDO COM COEFICIENTES CONSTANTES

Sendo analisado todos os casos possíveis para diferentes tipos de autovalores, conforme colocado na seção anterior, verifica-se resultados que relaciona autovalores da matriz  $A$  com a estabilidade do sistema. Esses resultados encontram-se no teorema seguinte, onde sua demonstração utiliza a Forma Canônica de Jordan podendo se encontrada em Guzman [4].

**Teorema 2** *Consideremos o problema*

$$(P) \quad \begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

*sendo  $A$  uma matriz real  $n \times n$  e seja  $\sigma(A)$  o espectro de  $A$ , ou seja, o conjunto de autovalores de  $A$ .*

- (a) Se  $\mu = \max[\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in (A)] < 0$ , então o sistema  $(\mathbf{P})$  é assintoticamente estável.
- (b) Se  $\mu = \max[\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in (A)] = 0$ , então o sistema  $(\mathbf{P})$  é estável.
- (c) Se  $\mu = \max[\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in (A)] > 0$ , então o sistema  $(\mathbf{P})$  é instável.

### 2.3.1 EXEMPLO

Para um sistema nas condições de (P) onde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

O polinômio característico é:  $p(\lambda) = (2 - \lambda)^3(-3 - \lambda)$ .

então:  $\sigma(A) = (2, -3)$ .

Portanto, conforme o teorema, o sistema é instável.

# Capítulo 3

## FUNÇÕES DE LYAPUNOV

### 3.1 INTRODUÇÃO

Após expostas algumas noções sobre estabilidade de Sistemas Lineares de EDO, neste capítulo, seguiremos este trabalho trazendo alguns tópicos relevantes sobre funções de Lyapunov, conhecido também como Segundo Método de Lyapunov, que traz resultados de extrema importância para a Teoria de Estabilidade de Sistemas Não-lineares de EDO. As demonstrações dos teoremas apresentados neste capítulo constam na obra de Guzman [4].

### 3.2 A FUNÇÃO DE LYAPUNOV

Dado um problema do tipo

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Onde  $f$  satisfaz as condições do teorema 3, e obtida uma determinada função, chamada função de Lyapunov, essa função, se satisfizer as condições do teorema seguinte, nos fornecerá informações sobre a estabilidade da solução trivial.

A construção de uma função de Lyapunov geralmente não segue um método universalmente válido, o que temos em mãos são algumas normas e principalmente a experiência para a obtenção dessa função.

O teorema a seguir, praticamente, define a função de Lyapunov trazendo consigo um resultado fornecido pela própria função.

**Teorema 3** *Consideremos a equação  $x'(t) = f(t, x(t))$ , onde*

$$f : [t_0, \infty) \times G \subset R \times R^n \rightarrow R^n$$

*( $G$  é uma bola aberta de origem em  $R^n$ ) é uma função contínua em seu domínio de definição e  $f(t, 0) \equiv 0$  para todo  $t_0$ .*

*Suponhamos que exista uma função*

$$V : [t_0, \infty) \times B(0, r) \subset R \times G \rightarrow [0, \infty)$$

*tal que*

- 1)**  $V(t_0, x_0) \rightarrow 0$  para  $|x_0| \rightarrow 0$ .
- 2)**  $V(t, x_0) \geq a(|x_0|)$  para todo  $t \in [t_0, \infty)$ ,  $|x_0| \leq r$ , sendo  $a : [0, r] \rightarrow [0, \infty)$  uma função contínua, estritamente crescente e tal que  $a(0) = 0$ .
- 3)** Para toda solução local a direita  $x(t)$  de  $x'(t) = f(t, x(t))$  tal que  $|x(t_0)| \leq r$  se verifica que a função  $V^*(t) = V(t, x(t))$  é função não crescente de  $t$  onde está definida.

*Então a solução trivial é estável em  $[t_0, \infty)$ .*

Esse Teorema nos diz que dada uma função  $V$  que satisfaz as condições **1**, **2** e **3** garantindo a existência da função de Lyapunov, então a solução trivial é estável.

Para que possamos nos familiarizar um pouco mais com o teorema acima apresentamos, a seguir, um exemplo de aplicação desse teorema.

### 3.2.1 EXEMPLOS

**Exemplo 1.)** Dado o pêndulo simples, visto na seção 1.1:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Seja  $V(t, x, y) = x^2 + y^2$  um função que satisfaz as condições **1** e **2** do teorema, para que seja satisfeita a condição **3** devemos ter:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} \leq 0$$

Aplicando a regra da cadeia acima em (3.1), temos:

$$\frac{dV}{dt} = 2xy + 2y(-x) = 0$$

Dessa forma, verificamos que a função de Lyapunov existe, logo, o sistema é estável.

**Exemplo 2.)** Obter uma função de Lyapunov para o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x'(t) = a(x(t))^3 + by(t) \\ y'(t) = -cx(t) + d(y(t))^3 \end{cases} \quad (3.2)$$

Para facilitar as notações, a partir de agora, onde se lê  $(x, y)$  entenda-se por  $(x(t), y(t))$ .

Seja  $(x, y)$  solução e utilizando o método de equações separáveis, temos

$$V^* = V_1(x) + V_2(y) \quad (3.3)$$

partindo da condição **1** do teorema 3, para termos (3.3) não crescente precisamos que

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V_1}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V_2}{\partial y} \frac{dy}{dt} \leq 0 \quad (3.4)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V_1}{\partial x}(ax^3 + by) + \frac{\partial V_2}{\partial y}(-cx + dy^3) \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V_1}{\partial x}(ax^3) + \frac{\partial V_1}{\partial x}(by) + \frac{\partial V_2}{\partial y}(-cx) + \frac{\partial V_2}{\partial y}(dy^3) \end{aligned} \quad (3.5)$$

se

$$\frac{\partial V_1}{\partial y}(by) + \frac{\partial V_2}{\partial y}(-cx) = 0 \quad (3.6)$$

teremos chances de obter a condição (3.4)

Para que (3.6) aconteça temos que:

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = (cx) \text{ e } \frac{\partial V_2}{\partial y} = by \quad (3.7)$$

logo

$$V_1 = \int (cx)dx = \frac{cx^2}{2} \quad \text{e} \quad V_2 = \int (by)dy = \frac{by^2}{2} \quad (3.8)$$

portanto

$$V = \frac{cx^2}{2} + \frac{by^2}{2} \quad (3.9)$$

Que satisfaz as condições **1** e **2** do teorema 3 se  $c > 0$  e  $b > 0$  ou  $c < 0$  e  $b < 0$ , nesse caso,  $V = -(\frac{cx^2}{2} + \frac{by^2}{2})$  portanto:

$$bc > 0 \quad (3.10)$$

Para verificarmos a condição **3** do teorema basta substituímos (3.7) em (3.5):

$$\frac{dV^*}{dt} = cxx^3 + cxy - bycx + bydy^3 = acx^4 + bdy^4$$

com isso, para satisfazer (3.4) temos que fazer:

$$ac \leq 0 \quad e \quad bd \leq 0 \quad (3.11)$$

Portanto, para que a função de Lyapunov exista (3.9) e, conseqüentemente, a solução trivial de (3.2) seja estável devemos observar as condições (3.10) e (3.11).

### 3.3 FUNÇÃO DE LYAPUNOV PARA SISTEMAS AUTÔNOMOS

A seguir temos um teorema importante que garante estabilidade assintótica, devido a Barbashin-Krasovskii [2]. A última parte é um complemento devido a LaSalle [7].

**Teorema 4** *Consideremos a equação autônoma*

$$x'(t) = f(x(t)), x : R \rightarrow R^n$$

Onde  $f : R \rightarrow R^n$  é de classe  $C^1(R^n)$  e tal que  $f(0) = 0$ . Suponhamos que existe uma função  $V : R^n \rightarrow [0, \infty)$ ,  $V \in C^1(R^n)$

tal que:

- 1)  $V(x_0) > 0$  se  $x_0 \neq 0$ ,  $V(0) = 0$ , sendo  $x_0 \in R^n$ .
- 2)  $V(x_0) \rightarrow \infty$  para  $|x_0| \rightarrow \infty$ .
- 3) Se  $x(t)$  é uma solução qualquer distinta da trivial, e  $V^*(t) = V(x(t))$ , e

$$\frac{dV^*}{dt}(t) < 0 \quad \forall t$$

Então, a solução trivial é assintoticamente estável, ou seja, sendo  $x(t)$  uma solução qualquer então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Podemos, em lugar da condição **3**, verificar a seguinte condição:

$$4) \quad \frac{dV^*}{dt}(t) = \left\langle \frac{dV}{dx_0}(x(t), f(x(t))) \right\rangle \leq 0$$

No conjunto

$$M = \left\{ x_0 \in R^n : \left\langle \frac{dV}{dx_0}(x_0), f(x_0) \right\rangle = 0 \right\}$$

É tal que para nenhuma solução  $x(t)$  distinta da trivial se verifica:

$$\{x(t) : t \geq t_0\} \subset M$$

para nenhum  $t_0$ , então, a conclusão também é válida.

### 3.3.1 EXEMPLOS

**Exemplo 1)**

#### APLICAÇÃO A SISTEMAS LINEARES DE EDO

Vamos aplicar o teorema acima em um Sistema Linear. Considere a seguinte função:

$$V(t) = x^2 + y^2$$

É fácil verificar que a função acima satisfaz as condições **1** e **2** do teorema 4. Agora, considere o exemplo visto anteriormente na seção 1.5:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

que é o mesmo que

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -2y \end{cases}$$



Verificaremos agora a condição **3** do teorema 4 no problema acima, fazendo,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} \leq 0$$

Temos

$$\frac{dV}{dt} = 2x(-x) + 2y(-2y)$$

$$\frac{dV}{dt} = -2(x^2 + y^2)$$

Com isso, concluímos que  $V(t) = x^2 + y^2$  é uma função de Lyapunov para o problema visto acima e portanto, conforme o teorema 4, esse sistema é assintoticamente estável.

Pode-se observar a validade do teorema 4 também para Sistemas Lineares de EDO, levando em conta que, para este caso, podemos obter o mesmo resultado com o teorema 3.

### Exemplo 2)

## UM PROBLEMA DE CONTROLE NÃO-LINEAR

O Pêndulo Invertido é um processo mecânico absolutamente instável, ou seja, está sujeito a cair em qualquer direção a menos que uma força adequada seja aplicada na sua base a fim de mantê-lo em equilíbrio.

Considere o modelo do pêndulo invertido:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = \frac{g}{l} \sin z_1 - \frac{\alpha}{lm} z_2 + u \end{cases} \quad (3.12)$$

para  $m, g, l, \alpha > 0$

Vamos projetar uma realimentação estabilizante  $u$  (torque aplicado na base do pêndulo) com o auxílio da função de Lyapunov  $V = \delta z_1^2 + \frac{1}{2} m l^2 z_2^2$  ( $\delta > 0$ ), de modo que  $\dot{V} = -\gamma z_2^2$ .

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial z_1} \frac{dz_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z_2} \frac{dz_2}{dt}$$

$$\dot{V} = 2\delta z_1 z_2 + m l^2 z_2 \left( \frac{g}{l} \sin z_1 - \frac{\alpha}{lm} z_2 + u \right) \quad (3.13)$$

$$\dot{V} = z_2 (2\delta z_1 + m l g \sin z_1 - \alpha l z_2 + m l^2 u) \quad (3.14)$$

da equação (3.14) obtemos  $\dot{V} = -\gamma z_2^2 = z_2(-\gamma z_2)$ :

$$-\gamma z_2 = (2\delta z_1 + mlg \sin z_1 - \alpha l z_2 + ml^2 u) \quad (3.15)$$

Dessa forma obtemos o controle desejado:

$$u = \frac{-2\delta z_1 - mlg \sin z_1 + \alpha l z_2 - \gamma z_2}{ml^2} \quad (3.16)$$

o sistema com o controle é dado por:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = & z_2 \\ \dot{z}_2 = & \frac{-2g}{ml^2} z_1 + \left(\frac{-\alpha}{ml} + \frac{\alpha l}{ml^2} - \frac{\gamma}{ml^2}\right) z_2 \end{cases} \quad (3.17)$$

Como  $\dot{V} = -\gamma z_2^2$  só depende de  $z_2$ , é possível garantir apenas que  $\frac{dV^*}{dt}(t) \leq 0$ , logo não é possível garantir pela condição **3** do teorema que o sistema é assintoticamente estável, no entanto, aplicando a condição **4** observamos que não existe outra solução além da trivial tal que

$$\frac{dV^*}{dt} = 0$$

Portanto temos o sistema estabilizado com o controle  $u$ .

Para finalizar o assunto sobre funções de Lyapunov, apresentaremos um método que auxilia na obtenção de funções de Lyapunov para sistemas lineares.

## 3.4 MÉTODO DIRETO DE LYAPUNOV

Desejamos construir uma função tal que

$$V(x_0) = \langle x_0, Bx_0 \rangle$$

onde  $B$  é uma matriz real simétrica  $n \times n$ , e a matriz  $B$  pode ser obtida resolvendo a seguinte equação:

$$A^t B + B A = -C \quad (3.18)$$

Sendo  $A \in R^{n \times n}$  matriz de coeficientes de um sistema linear de EDO.  
C é uma matriz tal que  $C = C^t$  e definida positiva, isto é,  $\langle Cx, x \rangle > 0$ .  
Satisfeitas essas condições e resolvida a equação (51) obtemos a função de Lyapunov, de modo que

$$V(x_0) = \langle x_0, Bx_0 \rangle = \langle Bx_0, x_0 \rangle \quad (3.19)$$

# Capítulo 4

## O PROBLEMA DE AIZERMAN

### 4.1 INTRODUÇÃO

Após Aizerman [1] em 1947 ter levantado uma questão que ficou conhecida como a Conjectura de Aizerman, em 1953 Krasovskii [6] provou que de fato a conjectura era válida para sistemas de dimensão 2 e para alguns sistemas de dimensões superiores, criando a expectativa que talvez ela fosse sempre válida. Porém, em 1958, Pliss [10] apresentou um contraexemplo em dimensão 3 invalidando a teoria inicial de Aizerman a qual seria fascinante, pois ela dizia que seria possível estudar estabilidade de sistemas não lineares apenas pelo estudo de sistemas lineares de EDO. Neste Capítulo será apresentado o Problema de Aizerman para dimensão 2 com um resultado que conclui estabilidade assintótica. Em seguida construiremos um contraexemplo em dimensão 4, significando que a conclusão obtida em dimensão 2 não é a mesma para a dimensão 4.

### 4.2 APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA DE AIZERMAN EM DIMENSÃO 2

Considere o sistema de equações diferenciais abaixo com coeficientes constantes  $a, b, c, d \in R$ .

$$(P) \quad \begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases}$$

Colocando o sistema na forma matricial e analisando a estabilidade, temos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

sendo  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , logo o polinômio característico é determinado por:

$$\det(A - \lambda I)$$

então,

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc$$

com isso obtemos o polinômio característico de A:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a + b)\lambda + (ad - bc)$$

Onde  $\lambda$  é autovalor de A.

Consideremos, agora, que queremos condições para que um sistema seja assintoticamente estável. Seja:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a + b)\lambda + (ad - bc)$$

tomando

$$\lambda^2 - (a + b)\lambda + (ad - bc) = 0$$

Para que o sistema (P) seja assintoticamente estável, conforme Teorema 2, devemos ter  $(\lambda_1, \lambda_2)$  negativos.

Com isso, analisando a equação acima temos as seguintes condições:

$$\begin{aligned} \lambda_1, \lambda_2 \text{ têm o mesmo sinal se } \mathbf{ad-bc > 0} \\ \text{ambas as raízes são negativas se } \mathbf{a+d < 0} \end{aligned}$$

Agora, pela condição anterior, suponhamos  $b, c, d$ , fixos, sendo  $d \neq 0$  e  $\frac{bc}{d} < -d$ , com isso verificamos:

$$\frac{bc}{d} < a < -d$$

Ou seja, o gráfico da reta  $\eta = a\xi$  do plano  $(\xi, \eta)$  se encontra na região angular entre

$$\eta = \frac{bc}{d}\xi \quad \text{e} \quad \eta = -d\xi$$

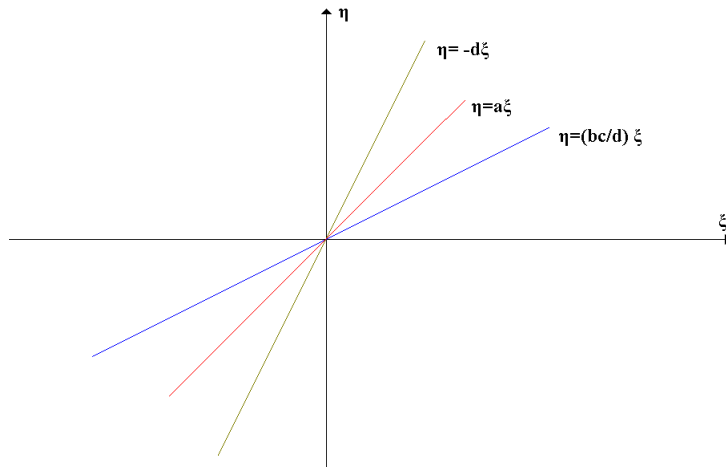


Figura 3: Gráfico Linear

Suponhamos agora que substituindo o termo linear  $a(x)$  de  $(P)$  por outro  $f(x(t))$  não linear, sendo  $f : R \rightarrow R$  uma função contínua tal que  $f(0) = 0$ , de modo que

$$\frac{bc}{d}\xi < f(\xi) < -d\xi \quad \text{para} \quad \xi \neq 0$$

ou seja, que o gráfico da função  $\eta = f(\xi)$  no plano  $(\xi, \eta)$  permaneça na mesma região angular que antes:

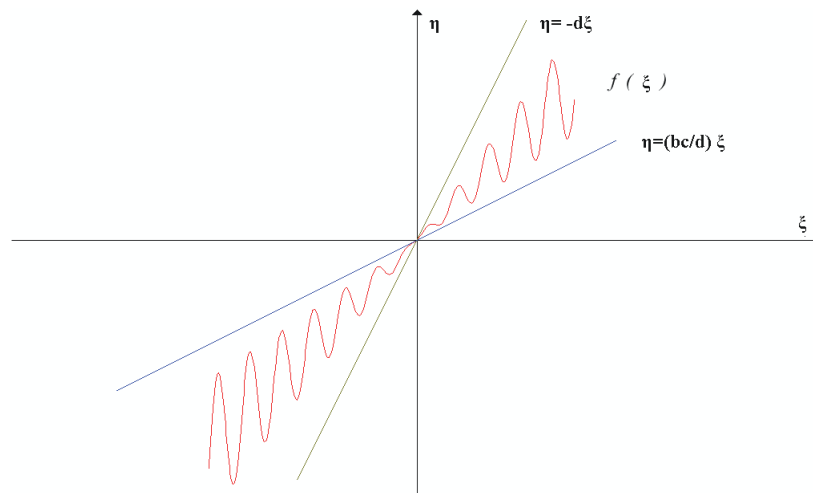


Figura 4: Gráfico Não-Linear

Exposto isso, cabe, agora, a seguinte pergunta:

**Será que a solução trivial de**

$$(P^*) \quad \begin{cases} x'(t) = f(x(t)) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases}$$

**tem o mesmo tipo de estabilidade que antes, ou seja, é assintoticamente estável ?**

A mesma consideração podemos fazer para os demais termos lineares obtendo , por exemplo, o seguinte problema:

$$(\mathbf{Q}^*) \quad \begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = g(x(t)) + dy(t) \end{cases}$$

Com isso, finalizamos a apresentação do conteúdo do problema de Aizerman em dimensão 2.

A seguir temos um teorema cuja sua demonstração é uma aplicação direta do teorema 4.

### 4.3 UM RESULTADO PARA A DIMENSÃO 2

**Teorema 5** *Considere o sistema*

$$(\mathbf{P}^*) \quad \begin{cases} x'(t) = f(x(t)) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases}$$

onde  $f : R \rightarrow R$  é contínua e tal que

$$f(0) = 0, \quad \frac{f(\xi)}{\xi} + d < 0, \quad d \frac{f(\xi)}{\xi} - bc > 0$$

Supondo  $b \neq 0$ . Então a solução trivial é assintoticamente estável.

Demonstração:

A demonstração consiste em encontrar uma função que satisfaça as condições do teorema 4. Então, considere a função:

$$V(x, y) = \int_0^x (f(s)d - bcs)ds + \frac{1}{2}(dx - by)^2 \quad (4.1)$$

Essa função pode ser obtida aplicando o método direto de Lyapunov ao sistema  $(\mathbf{P})$  e em seguida introduzindo a função  $V$  ao sistema  $(\mathbf{P}^*)$ .

**Verificando a condição 1:**

$V(x_0) > 0$  se  $x_0 \neq 0$ ,  $V(0) = 0$ , sendo  $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Fazendo  $(x, y) = (0, 0)$ , é imediata a condição acima.

**Verificando a condição 2:**

Pela hipótese  $(f(s)d - bcs) > 0$ , portanto a integral, que só depende de  $x$ , vai para infinito quando  $x$  vai a infinito. Logo,

$$V(x, y) \rightarrow \infty \quad \text{para} \quad |x, y| \rightarrow \infty$$

**Verificando a condição 3**

Se  $(x(t), y(t))$  é solução de  $(\mathbf{P}^*)$  e  $V^*(t) = V(x(t), y(t))$ , então:

$$\frac{dV^*}{dt}(t) = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (4.2)$$

$$\frac{dV^*}{dt}(t) = (f(x)d - bcx)x' + (dx - by)(dx' - by') \quad (4.3)$$

$$\frac{dV^*}{dt}(t) = (f(x)d - bcx)(f(x) + by) + (dx - by)(df(x) + by) - b(cx + dy) \quad (4.4)$$

Logo,

$$\frac{dV^*}{dt}(t) = df(x)^2 - bcxf(x) + d^2xf(x) - bc dx^2 = df(x)(f(x) + dx) - bcx(f(x) + dx) \quad (4.5)$$

E finalmente,

$$\frac{dV^*}{dt}(t) = (f(x) + dx)(df(x) - bcx) \quad (4.6)$$

Observando as condições impostas pelo teorema:

$$f(x) + dx < 0 \quad \text{e} \quad df(x) - bc > 0$$

Concluimos que



$$\frac{dV^*}{dt}(t) \leq 0 \quad (4.7)$$

Como a equações acima só depende de  $x$ , é possível garantir apenas que  $\frac{dV^*}{dt}(t) \leq 0$ , logo não é possível garantir pela condição **3** do teorema que o sistema é assintoticamente estável.

Sendo assim, vamos aplicar a condição **4** na esperança de que não existe outra solução além da trivial tal que

$$\frac{dV^*}{dt} = 0$$

#### Verificando a condição 4:

Note que o conjunto  $M$  é o conjunto de todos os pontos da solução  $(x(t), y(t))$  onde

$$\frac{dV^*}{dt}(t) = 0$$

Consideremos a solução  $(0, y(t))$  e vejamos se existe alguma solução além da trivial

tal que

$$\begin{aligned} & \frac{dV^*}{dt} = 0 \\ (\mathbf{P}^*) \quad & \begin{cases} x'(t) = f(x(t)) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases} \Rightarrow 0 = f(0) + by(t) \Rightarrow y(t) = 0 \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto  $M$  é composto somente da solução trivial, então para todo  $t$  e pelas condições impostas a solução trivial de  $(\mathbf{P}^*)$  é **assintoticamente estável**.

### 4.3.1 EXEMPLO

Considere o sistema do pêndulo com amortecimento:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\frac{g}{l} \sin x - y \end{cases}$$

Para esse caso com  $g, l > 0$  temos que satisfazer as seguintes condições:  $f(0) = 0$ ,  $a + d < 0$  e  $da - b\frac{f(\xi)}{\xi} > 0$ , como  $a = 0$ ,  $b = 1$  e  $d = -1$ , segue que:

$$a + d < 0$$

$$1 + \frac{g}{l} \frac{f(\xi)}{\xi} > 0$$

Dessa forma as condições são satisfeitas, portanto o sistema é assintoticamente estável.

Uma análise análoga pode ser feita para o pêndulo invertido, porém constatamos que o sistema do pêndulo invertido não satisfaz as condições do teorema 5, fato que é óbvio pois o pêndulo invertido é instável.

## 4.4 UM CONTRAEXEMPLO

Nesta seção apresentaremos a construção de um contraexemplo em dimensão 4 para a Conjectura de Aizerman devido a Willems [12].

Considere a equação diferencial:

$$x^{(4)}(t) + 10x^{(2)}(t) + 9x(t) + \epsilon [\alpha x^{(3)}(t) + \beta x^{(2)}(t) + \gamma x^{(1)}(t) + \delta x(t)] + \epsilon f(x^{(2)}(t)) = 0$$

passando para a forma de sistemas e tomando  $x(t) = y_1$ , temos:

$$\begin{cases} x^{(1)}(t) = \dot{y}_1 = y_2 \\ x^{(2)}(t) = \dot{y}_2 = y_3 \\ x^{(3)}(t) = \dot{y}_3 = y_4 \\ x^{(4)}(t) = \dot{y}_4 = (-9 - \epsilon\delta)y_1 - \epsilon\gamma y_2 + (-10 - \epsilon\beta)y_3 - \epsilon f(y_3) - \epsilon\alpha y_4 \end{cases} \quad (4.8)$$

Podemos observar que esse sistema é o modelo de um típico Problema de Aizerman em dimensão 4 com não linearidade em  $y_3$ .

Desconsiderando, agora, a não linearidade vamos analisar o polinômio característico a fim de obter condições para estabilidade assintótica:

$$\lambda^4 + 10\lambda^2 + 9 + \epsilon(\alpha\lambda^3 + \beta\lambda^2 + \gamma\lambda + \delta) + \epsilon K\lambda^2$$

Para  $\epsilon$  suficientemente pequeno e  $K$  limitado, temos estabilidade assintótica se

$$\epsilon > 0, \quad \alpha > 0, \quad \gamma > 0, \quad e \quad (\gamma - \alpha)(\gamma - 9\alpha) < 0 \quad (4.9)$$

ou

$$\epsilon < 0, \quad \alpha < 0, \quad \gamma < 0, \quad e \quad (\gamma - \alpha)(\gamma - 9\alpha) < 0 \quad (4.10)$$

Para estabelecer um contraexemplo a partir de (4.8) para o Problema de Aizerman, deve-se mostrar que (4.8), através de um sistema equivalente, possui solução periódica dadas certa condições. O sistema equivalente pode ser obtido da seguinte forma:

Considere o sistema (4.8) colocado na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -9 & 0 & -10 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} - \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta & \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} - \epsilon \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} f(y_3)$$

Admitindo inicialmente  $\epsilon = 0$  façamos a seguinte transformação:

$$A = PJP^{-1}$$

$$\dot{y} = PJP^{-1}y$$

$$P^{-1}\dot{y} = JP^{-1}y$$

onde  $J$  é a forma real de Jordan da matriz  $A$ , tomando  $y = Pz$ , temos:

$$P\dot{z} = APz - \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta & \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} Pz - \epsilon \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} f(z_1 + z_3)$$

logo:

$$\dot{z} = P^{-1}APz - \epsilon \left[ P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta & \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} P \right] z - \epsilon P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} f(z_1 + z_3) \quad (4.11)$$

que é o mesmo que:

$$\dot{z} = P^{-1}APz - \epsilon \left[ P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (\delta \quad \gamma \quad \beta \quad \alpha) P \right] z - \epsilon P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} f(z_1 + z_3) \quad (4.12)$$

A matriz  $P$  é a matriz de autovetores relacionados aos autovalores da matriz  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -9 & 0 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

o polinômio característico de  $A$  é:

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 10\lambda^2 + 9$$

Sendo  $\sigma(A) = \{i, -i, 3i, -3i\}$ . Obtendo seus autovetores temos:

$$N(\pm i, 1) = \{x \in R^4 : (A \pm iI)x = 0\}$$

$$N(\pm i, 1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 1 \\ i \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 \pm i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_3$$

$$N(\pm 3i, 1) = \{x \in R^4 : (A \pm 3iI)x = 0\}$$

$$N(\pm 3i, 1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3}i \\ 1 \\ 3i \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 \pm i \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} x_3$$

Logo a matriz de autovetores  $P$  é dada por:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{9} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

substituindo essa matriz em (4.12) temos:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} +$$

$$-\epsilon \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{8} \\ 0 \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\delta + \beta \\ -\gamma + \alpha \\ -\frac{1}{9}\delta + \beta \\ -\frac{1}{3}\gamma + 3\alpha \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} - \epsilon \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{8} \\ 0 \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix} f(z_1 + z_3) \right]$$

Organizando mais uma vez o sistema, temos finalmente:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} +$$

$$\frac{\epsilon}{8} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta - \beta \\ \gamma - \alpha \\ \frac{1}{9}(\delta - 9\beta) \\ \frac{1}{3}(\gamma - 9\alpha) \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} f(z_1 + z_3) \right] \quad (4.13)$$

Com esse sistema é possível mostrar a existência da solução periódica por meio de um método conhecido como ‘Averaging Theory’, podendo ser apresentado da seguinte maneira:

Considere o sistema:

$$\dot{z}(t) = Az(t) + \epsilon\phi(z(t), \xi, \epsilon) \quad (4.14)$$

Onde  $z(t) \in R^n$ ,  $A$  é uma matriz tal que  $A \in R^{n \times n}$ ,  $\xi \in R^m$ ,  $\epsilon$  é um parâmetro escalar e  $\phi : (R^n \times R^m \times R) \rightarrow R^n$  tal que para todo  $R$ ,  $\epsilon_0$  e  $M$  existe uma constante  $B(R, \epsilon_0, M)$  (a constante de Lipschitz) tal que  $\|\phi(z_1, \xi, \epsilon) - \phi(z_2, \xi, \epsilon)\| \leq B\|z_1 - z_2\|$  para todo  $\|z_1\|, \|z_2\| \leq R$ ,  $|\epsilon| \leq \epsilon_0$  e  $\|\xi\| \leq M$ .

**Teorema 6** Assumindo que  $e^{AT_0} = I$  (i.e., que todas as soluções de  $\dot{z}(t) = Az(t)$  são periódicas com período  $T_0$ ), e que  $\phi(z(t), \xi, \epsilon)$  é uma função contínua de  $z, \xi$  e  $\epsilon$  que tem primeira derivada parcial contínua em relação a  $z$  e  $\xi$  para  $\epsilon$  suficientemente pequeno (i.e.,  $\forall \epsilon$  com  $|\epsilon| \leq \epsilon_0$  e algum  $\epsilon_0 > 0$ ) Seja:

$$\Phi(z, \xi, \epsilon) = \int_0^{T_0} e^{-A\sigma} \phi(e^{A\sigma} z, \xi, \epsilon) d\sigma$$

e assumindo as seguintes hipóteses:

1.  $\Phi(z, \xi, \epsilon) = 0$
2. a matriz  $\frac{\partial \Phi}{\partial z, \partial \xi}(z_0, \xi_0, 0)$  tem posto completo.

Então existem funções contínuas  $\xi(\epsilon)$  tal que para  $\epsilon$  suficientemente pequeno (i.e.,  $\forall \epsilon$  com  $|\epsilon| \leq \epsilon_1$  e algum  $\epsilon_1 > 0$ ) a equação diferencial (4.13) tem uma solução periódica  $z^*(t, \epsilon)$  com:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \xi(\epsilon) = \xi_0 \quad e \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} z^*(t, \epsilon) = e^{At} z_0.$$

A aplicação desse método no sistema (4.13) nos mostra que existem funções contínuas  $\alpha(\epsilon), \beta(\epsilon), \gamma(\epsilon)$  e  $\delta(\epsilon)$  tais que o sistema considerado tem uma solução periódica  $z^*(t, \epsilon)$ , com

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \alpha(\epsilon), \beta(\epsilon), \gamma(\epsilon), \delta(\epsilon) = \alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$$

e

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} z^*(t, \epsilon) = e^{At} \begin{pmatrix} z_{1,0} \\ z_{2,0} \\ z_{3,0} \\ z_{4,0} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Se:

$$1. (\gamma_0 - \alpha_0)z_{1,0} + (\beta_0 - \delta_0)z_{2,0} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \phi(z_{1,0} \cos \sigma + z_{2,0} \sin \sigma + z_{3,0} \cos 3\sigma + z_{4,0} \sin 3\sigma) \sin \sigma d\sigma = 0$$

$$(\beta_0 - \delta_0)z_{1,0} + (\gamma_0 - \alpha_0)z_{2,0} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \phi(z_{1,0} \cos \sigma + z_{2,0} \sin \sigma + z_{3,0} \cos 3\sigma + z_{4,0} \sin 3\sigma) \cos \sigma d\sigma = 0$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\gamma_0}{3} - 3\alpha_0\right)z_{3,0} + \left(\beta_0 - \frac{\delta_0}{9}\right)z_{4,0} + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \phi(z_{1,0} \cos \sigma + z_{2,0} \sin \sigma + z_{3,0} \cos 3\sigma + z_{4,0} \sin 3\sigma) \sin 3\sigma d\sigma = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\beta_0 - \frac{\delta_0}{9}\right)z_{3,0} + \left(\frac{\gamma_0}{3} - 3\alpha_0\right)z_{4,0} + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \phi(z_{1,0} \cos \sigma + z_{2,0} \sin \sigma + z_{3,0} \cos 3\sigma + z_{4,0} \sin 3\sigma) \cos 3\sigma d\sigma = 0 \end{aligned}$$

e

$$2. (z_{1,0}^2 + z_{2,0}^2)(z_{3,0}^2 + z_{4,0}^2) \neq 0$$

A partir dessas condições segue um teorema que será fundamental para estabelecer o contraexemplo para a Conjectura de Aizerman.

**Teorema 7** *Se  $f(\sigma)$  não é identicamente igual a  $k\sigma$  para qualquer constante  $k$ , então existe uma solução periódica, diferente de zero, da equação (4.13) para  $\epsilon$  suficientemente pequeno (i.e,  $\forall \epsilon$  com  $|\epsilon| \leq \epsilon_0$  e algum  $\epsilon_0 > 0$ ) e escolha adequada das funções  $\alpha(\epsilon)$ ,  $\beta(\epsilon)$ ,  $\gamma(\epsilon)$  e  $\delta(\epsilon)$ .*

*Além disso, as funções  $\alpha(\epsilon)$  e  $\gamma(\epsilon)$  que geram esta solução satisfazem a desigualdade:*

$$(\gamma(\epsilon) - \alpha(\epsilon))(\gamma(\epsilon) - 9\alpha(\epsilon)) < 0$$

Infelizmente, esse resultado não será demonstrado neste texto, podendo ser consultado na íntegra, inclusive a ‘Averaging Theory’, em Willems [12].

Retornando para o sistema sem a não linearidade temos a técnica de linearização (4.9) e (4.10) que oferece estabilidade assintótica para o sistema linear. Escolhendo, agora, uma não linearidade tal que  $K_t(\sigma)$ ,  $K_i(\sigma)$  e  $K_d(A)$  onde:

$$\begin{aligned} & f : R \rightarrow R, \quad e \quad f(0) = 0 \\ & K_t(\sigma) = \frac{f(\sigma)}{\sigma}, \quad K_i(\sigma) = \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma} \quad \text{para} \quad (\sigma \neq 0) \\ & K_d(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \cos t) \cos t dt \end{aligned}$$

satisfazendo  $0 \leq K \leq 1$  (ex.  $f(\sigma) = \tanh(\sigma)$ ), seria claro que, conforme a suposição de Aizerman, para  $\epsilon$  suficientemente pequeno ( $\epsilon > 0$ ) e valores de

$\alpha > 0$  e  $\gamma > 0$  tais que  $(\gamma - \alpha)(\gamma - 9\alpha) < 0$  teríamos estabilidade assintótica para o sistema não linear. Isto, entretanto, é uma contradição pois o sistema não linear (4.13) possui solução periódica. Com isso, ficam estabelecidas as condições para a obtenção de um contraexemplo para a Conjectura de Aizerman.



# Referências Bibliográficas

- [1] Aizerman M.A. (1947): *On the Effect of Nonlinear Functions of Several Variables on the Stability of Automatic Control Systems*. Autom. i Telemekh, VIII(1).
- [2] Barbashin-Krasovskii, E. A. e N.N. (1952): *On the Stability of Motion in the Large*. Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 86, 453-456.
- [3] Figueiredo, D. G. e Neves, A. F. (2007): *Equações Diferenciais Aplicadas*. IMPA.
- [4] Guzman, M. (1975): *Equaciones Diferenciales Ordinarias, Teoria de estabilidad y control*. Alhambra.
- [5] Hahn, W. (1956): *Equation of Motion*.
- [6] Krasovskii, N. N. (1953): *On the Stability of the solutions of a System of Two Differential Equations*. Prikl. Matem. i Mekh., XVII(6).
- [7] LaSalle, J. P. (1961): *Stability by Liapounov's Direct Method*. Academic Press, New York.
- [8] Lipschutz, S. (1974): *Álgebra Linear*, 2a. ed., McGraw-Hill.
- [9] Lur'e, A. I., and Postnikov, V. N. (1945): *On the Theory of Stability of Control Systems*. Prikl. Mat. i Mekh., IX(5).
- [10] Pliss, V. A. (1958): *O problema de Aizerman para dimensão 3*. Dokl. Akad. Nauk. Tom 121, n.3 (em russo).
- [11] Sanchez, D. A. (1979): *Ordinary Differential Equations and Stability Theory: An Introduction*.
- [12] Willems, J. C. (1971): *The Analysis of Feedback Systems*. The Massachusetts Institute of Technology.