Uma abordagem geométrica da Teoria de Controle Ótimo

Gabriel Cueva Candido Soares de Araújo

Trabalho de formatura apresentado
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Bacharel em Matemática Aplicada

Programa: Bacharelado em Matemática Aplicada
Orientador: Prof. Dr. Pedro Aladar Tonelli

São Paulo, novembro de 2009

Resumo

Na presente monografia estudamos as teorias de controlabilidade e controle em tempo ótimo dos sistemas de controle lineares autônomos em dimensão finita sob um enfoque geométrico. O problema de controle aqui abordado utiliza a classe dos controles Lebesgue-mensuráveis com imagens contidas em um subconjunto convexo e compacto fixo do $\mathbb{R}^M$, a saber o cubo $[-1, 1]^M$, e com o objetivo de dirigir os estados à origem apenas. No estudo da controlabilidade dessa classe de problemas de controle, estudamos geometria de seus conjuntos controláveis e acessíveis demonstrando, em particular, que estes são convexos e compactos. Com relação à teoria de controle em tempo ótimo, estudamos a relação entre os controles ótimos e a geometria da fronteira dos conjuntos acessíveis e controláveis do sistema e, para esta particular classe de problemas de controle, demonstramos uma versão elementar do famoso Princípio do Máximo de Pontryagin.
Palavras-chave: teoria de controle, sistemas lineares autônomos, controle em tempo ótimo.

Abstract

In the present monograph we study the theories of controllability and time optimal control of finite dimensional autonomous linear systems under a geometric point of view. The control problem approached here uses the class of Lebesgue-measurable controls with range lying in a fixed compact convex subset of $\mathbb{R}^M$, namely the cube $[-1,1]^M$, and with target set the origin only. In the study of the controllability theory of this class of control problems, we study the geometry of its attainable and controllable sets proving, in particular, that they are compact and convex. With respect to the theory of time optimal control, we study the connection between time optimal controls and the boundary geometry of attainable and controllable sets of the system and, for this particular class of control problems, we proved an elementary version of the celebrated Pontryagin's Maximum Principle.

Keywords: control theory, autonomous linear systems, time optimal control.

Sumário

Lista de Abreviaturas

a.c.	(função) absolutamente contínua.
q.s.	quase sempre (na medida de Lebesgue).
FVP	fórmula de variação dos parâmetros.

Lista de Símbolos

Espaço $\mathbb{R}^N$.

$\lvert\cdot\rvert,\ \lvert\cdot\rvert_p$	Norma euclidiana e norma p, respectivamente ($1 \leq p \leq \infty$).
$\mathbb{M}_{N\times M}(\mathbb{R})$	Espaço das matrizes reais $N \times M$.
A^*	Transposta da transformação A.
$\lvert A\rvert$	Norma da transformação A.
σ	Função sinal.
$\mathbf{m}$	Medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^N$.
$\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^M)$	Conjunto das funções de Ω em $\mathbb{R}^M$ com derivadas parciais até ordem k contínuas.

Topologia.

$\mathscr{F}(X;Y)$	Conjunto das funções de X em Y.
$\mathcal{C}(X;Y)$	Conjunto das funções contínuas de X em Y.
$(L_2(T),\langle\cdot,\cdot\rangle_2)$	Espaço das funções mensuráveis em $[0,T]$ com quadrado integrável.
$(L_2^M(T),\langle\cdot,\cdot\rangle)$	Produto cartesiano de M cópias de $L_2(T)$.
X'	Dual topológico do espaço vetorial topológico X.
$\mathrm{Int}X,\ \partial X$	Interior e fronteira de X, respectivamente.
$\mathcal{P}(X)$	Conjunto das partes de X.
$\mathcal{P}_c(X)$	Conjunto das partes compactas não vazias de X.
$\mathscr{B}(x,r),\ \bar{\mathscr{B}}(x,r)$	Bolas (aberta e fechada, respectivamente) de centro x e raio r.
$]x,y[,\ [x,y]$	Segmentos (aberto e fechado, respectivamente) que ligam x a y.
ρ	Métrica de Hausdorff.
$N(A,\epsilon)$	Conjunto dos pontos cuja distância ao fechado A é menor que ϵ.

Subespaços afins.

$\mathscr{V}(A)$	O menor subespaço afim que contém o conjunto A.
$\mathscr{S}(A)$	O subespaço natural do conjunto A.
$v(A)$	Translação característica do conjunto A.
$\mathfrak{I}_A$	Isometria natural do conjunto A.
$\dim A$	Dimensão do conjunto A.
$\mathrm{Int}_r A, \partial_r A$	Interior e fronteira relativos do conjunto A.

Teoria de Controle.

$\mathscr{U}(T)$	Conjunto dos controles admissíveis em tempo T.
$\mathscr{U}$	Conjunto dos controles admissíveis.
$T(u)$	Tempo máximo de definição do controle admissível u.
$I(x,u)$	Intervalo maximal de definição da trajetória com condição inicial x e controle u.
$\mathbf{X}$	Fluxo da equação de controle.
D	Domínio do fluxo $\mathbf{X}$.
$\mathscr{T}$	Função objetivo (em geral $\mathscr{T}(t) = \{0\}$).
$\mathscr{A}(t,x)$	Conjunto acessível em tempo t a partir de x.
$\mathscr{A}(x)$	Conjunto acessível a partir de x.
$\mathscr{C}(t)$	Conjunto controlável em tempo t.
$\mathscr{C}$	Conjunto controlável.
$\mathscr{L}_t$	Dinâmica controlável em tempo t.
$M_{A,B}$	Matriz de Kalman.
$\mathscr{E}_t(x)$	Conjunto dos controles efetivos para x em tempo t.

Prefácio

Da filosofia desta monografia

Esta monografia é essencialmente fundamentada no livro de J. Macki e A. Strauss *Introduction to Optimal Control Theory* [MS82]. Mais especificamente, é uma revisão da teoria de controlabilidade e controle em tempo ótimo de sistemas lineares autônomos desenvolvida na supracitada referência.

Quanto ao enfoque deste trabalho, visei principalmente aqueles resultados mais geométricos e topológicos da teoria, talvez até com mais ênfase que [MS82]. Tomei ainda a liberdade de utilizar com mais peso resultados de Topologia Geral e de Análise Funcional, a fim de alcançar maior generalidade e abreviar demonstrações de muitos resultados. Com isso, minha abordagem aproximou-se naturalmente daquela de referências clássicas como [HL69], embora eu só o fosse descobrir mais tarde.

Os resultados aqui demonstrados, bem como as respectivas demonstrações são, com poucas exceções, os mesmos encontrados em [MS82]. Adotei, no entanto, uma filosofia bastante distinta daquela empregada pelos autores no decorrer do livro. Enquanto lá se enfatizam os resultados e as aplicações e exemplos, muitas vezes relegando rigor e referências explícitas aos teoremas e hipóteses empregados a um segundo plano, tornando até algumas demonstrações um tanto obscuras, no presente trabalho optei por enunciados e demonstrações o mais precisos e rigorosos que pude, aqui levando em conta a acepção matemática desses termos.

Essa tarefa de detalhação, creio, não deveu-se somente às questões do rigor e da completude dos enunciados e demonstrações, mas também àquela das referências bibliográficas. Ainda que de caráter introdutório quando pensamos na Teoria de Controle como um todo, a abordagem dos tópicos aqui estudados já requer vasta quantidade de ferramentas importadas das mais diversas áreas da matemática, muitas delas vistas pouco ou nada nos cursos de graduação em Matemática. A fim de preencher essa lacuna, Macki e Strauss desenvolvem em seu livro uma série de apêndices para apresentar os resultados e teorias utilizados. Aqui também adotei esta postura. No entanto, julguei muitas dessas exposições incompletas e com referências insuficientes para o meu próprio entendimento da teoria, e as quais então me propus a completar também.

Em particular, julguei necessário incluir uma seção de preliminares a respeito das equações diferenciais de Carathéodory, na qual expus, adaptada da melhor forma ao meu alcance, a teoria desenvolvida em [CL55], além de outros livros e artigos. Os originais, infelizmente, apresentam seus resultados em uma linguagem antiquada e difícil para o leitor atual, sendo esse julgamento resultado de minha experiência pessoal. Felizmente, o Prof. Pedro Tonelli encontrou a dissertação de mestrado da Priscila Goldenberg [Gol75], a qual, apesar de não ter havido tempo de incluí-la como uma das referências principais, sugiro como uma excelente referência alternativa para aquela seção. Para as questões de Topologia e Análise que se apresentaram não encontrei melhor referência que [Roy88], o qual possui boa ponderação entre completude e acessibilidade.

Nos apêndices ao fim deste trabalho reuni ainda os principais resultados e definições auxiliares que utilizei. Procurei explicitar apenas aquilo que julguei necessário, em particular aqueles tópicos que são mais raramente abordados nos cursos de graduação em Matemática e Matemática Aplicada do IME-USP, os quais eu próprio tive de estudar com algum detalhe a fim de entender as aplicações ao assunto principal. As definições que julguei pertinentes enunciei-as todas, e os teoremas utilizados omiti as provas sempre que possível, referindo o leitor à literatura de minha preferência, muitas vezes diversa daquela sugerida em [MS82]. Os resultados que, entretanto, não encontrei demonstração de entendimento razoável na literatura, procurei demonstrá-los aqui da forma mais simples possível.

Em suma, esta monografia é nada mais que uma revisão dos primeiros capítulos de [MS82] segundo minha visão pessoal, e uma exposição de toda aquela teoria e detalhes que necessitei, ao menos ao ponto de eu mesmo poder entender as demonstrações sem sombra de dúvidas, no máximo de rigor e simplicidade que alcancei. Aqui manifesto minha preocupação de ter sido excessivamente pedante em algumas passagens, mas acredito que muitos hão de concordar comigo que em se tratando de demonstrações matemáticas é preferível pecar pelo excesso do que pela falta.

Espero ainda que com meu esforço tenha tornado esta monografia acessível a colegas formandos que tenham tido bons cursos de Álgebra Linear, Topologia, Análise e Teoria da Medida.

Da organização dos conteúdos

A organização dos conteúdos ficou da seguinte forma. Iniciamos o Capítulo 1 com uma introdução à teoria das equações diferenciais de Carathéodory (Seção 1.1), que surgem naturalmente na formulação do problema da controlabilidade, enunciando os resultados fundamentais a respeito de existência, unicidade, extensão e dependência contínua nas condições iniciais de suas soluções, e direcionando o leitor à literatura pertinente. Para o entendimento adequado destas questões é necessária a introdução do conceito de função absolutamente contínua e da dedução de algumas propriedades dessas funções: fazemos isto à parte, no Apêndice C. Fazemos então um pequeno estudo da geometria do conjunto dos controles admissíveis (Seção 1.2), que são funções vetoriais a um parâmetro real com cada componente com quadrado integrável e imagem contida em um compacto fixo. Este estudo depende de algumas ferramentas mais sofisticadas de Análise Funcional (em particular o Teorema de Banach-Alaoglu), às quais dedicamos o Apêndice A. Para encerrar as preliminares, introduzimos a linguagem dos subespaços afins (Seção 1.3) e sua topologia de subespaço herdada do $\mathbb{R}^N$.

No Capítulo 2 introduzimos a noção de controlabilidade, primeiro aplicando os resultado da teoria de Carathéodory às equações diferenciais com controle (Seção 2.1) e depois demonstrando alguns resultados bem simples a respeito dos sistemas de controle não lineares autônomos (Seção 2.2). Na Seção 2.3 nos voltamos mais especificamente ao estudo dos sistemas lineares autônomos, demonstrando várias propriedades geométricas de seus conjuntos acessíveis e controláveis. Aqui, a fim de avaliar como estes conjuntos variam com o tempo já precisamos introduzir a métrica de Hausdorff, para a qual preparamos especialmente o Apêndice E. Fechamos então este capítulo com a demonstração de duas versões do Princípio do Bang-Bang (Seção 2.4), em cujas demonstrações invocamos uma versão bastante geral do Teorema de Krein-Milman, a qual enunciamos na Seção D.2 dos apêndices.

No Capítulo 3 chegamos ao foco principal deste trabalho. Enunciamos o problema do tempo ótimo, primeiro de forma bastante geral (para sistemas não lineares e não autônomos) e logo em seguida para sistemas lineares autônomos (Seção 3.1). Nesse contexto, definimos a noção de controles extremais e demonstramos uma versão do famoso Princípio do Máximo de Pontryagin para o nosso caso particular (Seção 3.1.1) para, em seguida, definir os sistemas normais (Seção 3.1.2) e deduzir várias de suas propriedades geométricas.

Concluímos esta monografia com o Capítulo 4, dedicado a três pequenos exemplos que ilustram aplicações da teoria desenvolvida: o problema de parada do carro motorizado (Seção 4.1), extraído de [MS82]; o problema da aterrissagem suave de um foguete (Seção 4.2), extraído de [Zab92]; e a análise de um satélite com controles em órbita circular (Seção 4.3), extraído de [Bro70].

Convenções e notações

Todos os espaços vetoriais com que trabalharemos serão $\mathbb{R}$-espaços, e então *espaço vetorial* será sinônimo de $\mathbb{R}$-*espaço vetorial*. O mesmo se aplica aos espaços da Análise Funcional: todo espaço vetorial topológico terá $\mathbb{R}$ como suporte. O termo *subespaço* é utilizado aqui como sinônimo de *subespaço vetorial*. Subespaços de outros tipos (topológicos, métricos, com medida, etc.) serão explicitamente indicados.

Em espaços vetoriais de dimensão finita $\mathbb{R}^N$ denotamos por $|\cdot|$ a norma euclidiana e por $|\cdot|_p$ a norma p para cada $1 \leq p \leq \infty$, de modo que $|\cdot| = |\cdot|_2$. Estas normas – assim como qualquer outra, como sabemos – determinarão a topologia métrica natural do $\mathbb{R}^N$, e todas as afirmações de caráter topológico dirão respeito a esta topologia.

A menos de afirmação explícita do contrário, consideraremos os espaços $\mathbb{R}^N$ munidos das respectivas bases canônicas. Posto isto, não faremos cerimônia em identificar *elementos* de $\mathbb{R}^N$ com *funcionais lineares* sobre $\mathbb{R}^N$: dado $y = (y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ definimos

$$\begin{array}{cccc} y^* & : & \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x_1, \ldots, x_N) & \longmapsto & \sum_{i=1}^N x_i y_i. \end{array}$$

Muitas vezes, por abuso de linguagem, falaremos em "funcional y" querendo dizer "funcional y^*". Nestas condições, notações do tipo $\ker y$ e $y(A)$ são auto-explicativas.

Frequentemente tomaremos uma postura mais geométrica e confundiremos mais uma vez funcionais lineares com produto interno, isto é, pensaremos na aplicação

$$(x, y) \mapsto y^* x$$

como o produto escalar sobre $\mathbb{R}^N$ (e usamos mesmo esta notação). Neste contexto, denotaremos mais uma vez, consistentemente, por $\ker y$ o subespaço ortogonal a y, por exemplo.

Denotando ainda o espaço das matrizes reais com M linhas e N colunas por $\mathbb{M}_{M\times N}(\mathbb{R})$, identificaremos mais uma vez $\mathbb{R}^N$ com $\mathbb{M}_{N\times 1}(\mathbb{R})$ e, denotando a matriz transposta de $A \in \mathbb{M}_{M\times N}(\mathbb{R})$ por $A^* \in \mathbb{M}_{N\times M}(\mathbb{R})$ temos

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_N \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{N\times 1}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^N \Rightarrow y^* = [y_1 \cdots y_N] \in \mathbb{M}_{1\times N}(\mathbb{R}) \cong (\mathbb{R}^N)^*.$$

Indicamos ainda a *norma* de uma matriz ou transformação linear $A \in \mathbb{M}_{M \times N}(\mathbb{R})$ por

$$|A| := \sup\{|Ax| : |x| \leq 1\}.$$

A medida sobre os espaços $\mathbb{R}^N$ é sempre a medida de Lebesgue, a qual será denotada por $\mathbf{m}$. Logo o termo *mensurável*, tanto para conjuntos quanto para funções, quando estivermos trabalhando nestes espaços, significará *Lebesgue mensurável*. Também a noção de *quase sempre* (resumidamente q.s.) diz respeito a esta medida. Todas as integrais que aparecem ao longo do texto são integrais de Lebesgue.

Se S é um subconjunto de um espaço topológico indicamos por $\mathrm{Int}S$ o interior de S e por ∂S a fronteira topológica de S.

Se x é um ponto de um espaço métrico e $r > 0$ indicamos por $\mathscr{B}(x, r)$ a bola aberta de raio r e centro em x e por $\bar{\mathscr{B}}(x, r)$ a bola fechada de raio r e centro em x. Observe que nem sempre a segunda corresponde ao fecho topológico da primeira.

Quando tivermos uma função representada por $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{N_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{N_p} \to \mathbb{R}^M$, suficientemente diferenciável em Ω aberto,

$$f = (f_1, \ldots, f_M)$$

e pontos $x_j = (x_{j,1}, \ldots, x_{j,N_j}) \in \mathbb{R}^{N_j}$, $1 \leq j \leq p$, utilizamos a notação $\partial_k f(x_1, \ldots, x_p)$, $1 \leq k \leq p$, para indicar a matriz real $M \times N_k$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{k,1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{k,N_k}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_{k,1}} & \cdots & \frac{\partial f_M}{\partial x_{k,N_k}} \end{bmatrix}$$

onde as derivadas parciais são calculadas em $(x_1, \ldots, x_p) \in \Omega$. Indicamos ainda por $\mathcal{C}^k(\Omega; \mathbb{R}^M)$ o conjunto de todas as funções $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$ que possuem todas as derivadas parciais até ordem k contínuas em Ω.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 A equação de Carathéodory

Antes de discutirmos o tópico principal do presente trabalho vamos investir algum tempo na tarefa de descrever um tipo especial de equação diferencial que aparece naturalmente na Teoria de Controle, a equação de Carathéodory. Esta difere fundamentalmente das equações diferenciais clássicas, para as quais supomos que a função que rege a equação é pelo menos contínua no domínio de definição do problema. Neste contexto clássico podemos utilizar os teoremas usuais de existência e, somando-se à continuidade algumas hipóteses adicionais, os teoremas de unicidade e dependência regular nos parâmetros para as soluções.

No âmbito da Teoria de Controle, entretanto, a perspectiva de se obter uma equação com lado direito contínuo é excessivamente exigente. Felizmente, a imposição (um pouco mais realista) de algumas hipóteses de mensurabilidade sobre o problema garantirá, neste contexto, resultados análogos àqueles que temos para as equações diferenciais clássicas.

Para as definições, resultados e motivações necessários à discussão que segue referimos o leitor ao Apêndice C.

Definição 1.1. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ um *domínio* (i.e. um conjunto aberto conexo) e $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$. Suponha que existe um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e uma função $\phi : I \to \mathbb{R}^N$ absolutamente contínua[1] tal que

1. $(t, \phi(t)) \in \Omega$ para todo $t \in I$;
2. $\phi'(t) = f(t, \phi(t))$ q.s. em I.

Nesse caso, dizemos que ϕ é uma *solução da equação diferencial*

$$x' = f(t, x) \tag{1.1}$$

no sentido estendido em I, ou simplesmente uma *solução* de (1.1) (quando estiver claro que não estamos nos referindo à definição clássica de solução).

A equação diferencial (1.1) que definimos acima denominamos *equação de Carathéodory* . Note que a equação de Carathéodory difere das EDOs clássicas apenas no que entendemos por uma

[1] Vide Definição C.1. Segue do Corolário C.5 que ϕ possui derivada quase sempre.

solução da equação. Vamos a seguir enunciar os principais resultados referentes às equações de Carathéodory, análogos aos teoremas fundamentais das EDOs clássicas.

Definição 1.2. Seja $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ aberto. Dizemos que $f : U \to \mathbb{R}^N$ satisfaz as *condições de Carathéodory* em U se

1. para cada x fixado a aplicação $t \mapsto f(t, x)$ é mensurável[2];

2. para cada t fixado a aplicação $x \mapsto f(t, x)$ é contínua;

3. existe uma função localmente integrável $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$|f(t, x)| \leq m(t)$$

   para todo $(t, x) \in U$.

Sejam agora $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ um domínio, $(t_0, x_0) \in \Omega$ e $a, b > 0$ tais que definindo

$$I_a := \{t \in \mathbb{R} : |t - t_0| \leq a\}$$
$$B_b := \{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| \leq b\}$$

tem-se $R := I_a \times B_b \subset \Omega$.

Teorema 1.3 (Existência de soluções)**.** *Suponha que $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ satisfaz as condições de Carathéodory em um aberto que contém R. Então existem $\alpha \in \,]0, a]$, um intervalo*

$$I_\alpha := \{t \in \mathbb{R} : |t - t_0| \leq \alpha\}$$

e uma função $\phi : I_\alpha \to \mathbb{R}^N$ a.c. que é solução de (1.1) em I_α e tal que

$$\phi(t_0) = x_0.$$

Demonstração. Vide [CL55], Capítulo 2, Teorema 1.1. □

A equação de Carathéodory desfruta de outras propriedades que esperaríamos de qualquer equação diferencial. Tais propriedades enunciaremos a seguir, mas não sem antes recordar uma definição de fundamental importância à teoria das equações diferenciais.

Definição 1.4. Dado um domínio $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ dizemos que $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ é *lipschitziana na segunda variável em* $(t_0, x_0) \in \Omega$ se existem uma vizinhança $V_0 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ de (t_0, x_0) contida em Ω e uma constante $K_0 > 0$ tais que

$$(t, x_1), (t, x_2) \in V_0 \Rightarrow |f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq K_0 |x_1 - x_2|. \tag{1.2}$$

[2] É fácil ver que para qualquer $x \in \mathbb{R}^N$ o conjunto $\{t \in \mathbb{R} : (t, x) \in U\}$ é aberto e, portanto, mensurável.

Se tal propriedade vale para para cada $(t_0, x_0) \in \Omega$ dizemos que f é *localmente lipschitziana na segunda variável em* Ω.

Teorema 1.5 (Boas propriedades)**.** *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ *um domínio, um ponto* $(t_0, x_0) \in \Omega$ *e* $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$*.*

1. Extensão*. Suponha que* f *satisfaz as condições de Carathéodory em* Ω*. Se* $\phi :]a, b[\to \mathbb{R}^N$ *for uma solução de (1.1) satisfazendo* $\phi(t_0) = x_0$ *tal que existe* $l := \lim_{t \to b^-} \phi(t)$ *e* $(b, l) \in \Omega$ *então existe* $\delta > 0$ *tal que* ϕ *pode ser estendida como solução de (1.1) em* $]a, b + \delta]$*. Um resultado análogo vale para* a*.*

   Isto implica em particular que o domínio máximo no qual uma solução define-se é necessariamente aberto.

2. Unicidade*. Se, ademais,* f *for lipschitziana na segunda variável em* (t_0, x_0) *então a solução de (1.1) satisfazendo* $\phi(t_0) = x_0$ *é única no seguinte sentido: quaisquer duas soluções* ϕ_1, ϕ_2*, definidas em seus domínios máximos* I_1, I_2 *respectivamente com* $t_0 \in I_1 \cap I_2$*, que satisfizerem* $\phi_1(t_0) = x_0 = \phi_2(t_0)$ *satisfazem*

$$\phi_1|_{I_1 \cap I_2} = \phi_2|_{I_1 \cap I_2}.$$

3. Dependência contínua*. Para cada* $(t, x) \in \Omega$ *denote por* $\phi_{t,x} : I_{t,x} \to \mathbb{R}^N$ *a única solução de (1.1) satisfazendo* $\phi(t) = x$*, onde* $I_{t,x} \ni t$ *é o intervalo de definição de* $\phi_{t,x}$*. Fixados* $(t_0, x_0) \in \Omega$ *e* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que se* $|(t_1, x_1) - (t_0, x_0)| < \delta$ *então* $(t_1, x_1) \in \Omega$*,* $I_{t_0,x_0} \subset I_{t_1,x_1}$ *e*

$$|\phi_{t_1,x_1}(t) - \phi_{t_0,x_0}(t)| < \epsilon \tag{1.3}$$

   para todo $t \in I_{t_0,x_0}$*.*

Demonstração. A parte referente a extensão de soluções pode ser encontrada em [CL55], Capítulo 2, Teorema 1.3.

Uma extensa discussão a respeito da unicidade das soluções de (1.1) pode ser encontrada em [Moy66].

A questão da dependência contínua pode ser encontrada em [CL55], Capítulo 2, Teoremas 4.1 e 4.2, e de forma muito mais geral e detalhada em [Fil88], Capítulo 1 (vide Teorema 6 em particular). □

Uma excelente referência alternativa para as questões discutidas acima, além de muitas outras referentes às equações de Carathéodory, é a dissertação de mestrado de Priscila Goldenberg [Gol75]. Para o leitor interessado, sugerimos os seguintes resultados da teoria das equações de Carathéodory que podem ser encontrados na supracitada dissertação:

1. *existência de soluções*: parte 1 do Teorema 5.1 do Capítulo II, páginas 26–27;

2. *unicidade de soluções*: parte 2 do Teorema 5.1 do Capítulo II, páginas 26–27;

3. *extensão a um domínio maximal*: Proposição 11.1 do Capítulo III, páginas 76–77;

4. *dependência contínua*: Teorema 14.1 do Capítulo IV, páginas 101–102.

1.2 A geometria dos conjuntos admissíveis

Introduziremos a seguir os conjuntos admissíveis que utilizaremos, cuja importância na Teoria de Controle será esclarecida no Capítulo 2. Os controles admissíveis representam, intuitivamente, estratégias possíveis para resolver um dado problema, em nosso caso modelado por uma equação diferencial. Tal equação possui um parâmetro livre, o qual pode ser escolhido convenientemente para condicionar o comportamento do sistema por ela representado. Nesse parâmetro livre entram os controles admissíveis, cuja escolha produz diferentes respostas do sistema. O objetivo da teoria é então caracterizar os controles segundo os comportamentos que eles induzem no sistema.

Definimos para cada $T \geq 0$

$$\mathscr{U}(T) := \{u : [0,T] \to [-1,1]^M : u \text{ é mensurável}\}.$$

Na definição acima identificaremos, quando for relevante, o conjunto $\mathscr{U}(0)$ com o conjunto $[-1,1]^M$.

Definição 1.6. Definimos o *conjunto dos controles admissíveis* por

$$\mathscr{U} := \bigcup_{T \geq 0} \mathscr{U}(T) \tag{1.4}$$

A cada $u \in \mathscr{U}$ chamamos de um *controle admissível*. Para cada $u \in \mathscr{U}$ definimos ainda $T(u)$ como o único elemento de $\mathbb{R}_+$ tal que $u \in \mathscr{U}(T(u))$. Ou seja

$$T = T(u) \Leftrightarrow u \in \mathscr{U}(T).$$

Os controles admissíveis que definimos acima representam uma particular escolha de controles possíveis. Esta escolha implicará em todos os resultados que demonstraremos nesta monografia: não seria absurdo esperar que outra escolha produzisse outra teoria com outros teoremas. *A possibilidade de escolhas alternativas para conjuntos admissíveis está fora do escopo deste trabalho, de modo que nossos conjuntos admissíveis serão sempre aqueles definidos acima.*

A seguinte observação nos será útil sempre que precisarmos estender mensuravelmente um controle, em particular na dedução das propriedades da equação de controle no Capítulo 2: dados $u \in \mathscr{U}(T)$ e $\delta > 0$ existe $\hat{u} : [-\delta, T] \to [-1,1]^M$ mensurável tal que $\hat{u}|_{[0,T]} = u$. Com efeito, podemos tomar

$$\hat{u}(t) := \begin{cases} u(t), & \text{se } t \in [0,T] \\ 0, & \text{se } t \in [-\delta, 0[\end{cases}$$

a qual é mensurável segundo a Proposição B.2. Observe que $\hat{u}$ não é um controle admissível e que esta extensão não é única.

Antes de tratarmos os aspectos mais particulares da Teoria de Controle vamos fazer um estudo preliminar do conjunto $\mathscr{U}(T)$. Mais especificamente, vamos muni-lo de uma particular topologia que, como veremos, nos ajudará na demonstração dos resultados geométricos mais importantes da teoria, especialmente quando tratarmos do *problema do tempo ótimo*.

Para cada $T \geq 0$ fixado denotaremos por $L_2(T)$ o conjunto das funções $v : [0,T] \to \mathbb{R}$ mensuráveis com quadrado integrável, identificadas pela relação de igualdade q.s. . Como é costume, pensaremos nesse espaço munido do produto interno

$$\langle v, w\rangle_2 := \int_0^T v(t)w(t)dt$$

o qual torna $(L_2(T), \langle,\rangle_2)$ um espaço de Hilbert separável.

Seja agora $L_2^M(T)$ o produto cartesiano de M cópias de $L_2(T)$. É fácil ver que, tomando $v = (v_1, \dots, v_M)$ e $w = (w_1, \dots, w_M)$ elementos de $L_2^M(T)$, a expressão

$$\begin{aligned}\langle v, w\rangle &:= \int_0^T v(t)^* w(t)dt \\ &= \sum_{i=1}^M \int_0^T v_i(t)w_i(t)dt \\ &= \sum_{i=1}^M \langle v_i, w_i\rangle_2\end{aligned}$$

define um produto interno sobre $L_2^M(T)$, o qual também torna $(L_2^M(T), \langle,\rangle)$ um espaço de Hilbert separável. Observe que para cada $T \geq 0$ temos $\mathscr{U}(T) \subset L_2^M(T)$, de modo que daqui para frente pensaremos sempre em $\mathscr{U}(T)$ como um subconjunto de $L_2^M(T)$, exceto quando houver menção explícita do contrário.

No que segue denotaremos por $\|\cdot\|$ a norma sobre $L_2^M(T)$ induzida pelo produto interno $\langle,\rangle$ acima definido, ou seja, dado $v \in L_2^M(T)$ temos

$$\|v\| = \left\{\int_0^T |v(t)|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

O Corolário A.10 do Teorema de Banach-Alaoglu (vide Apêndice A) implica que para cada $r > 0$ a esfera fechada

$$S(r) := \{v \in L_2^M(T) : \|v\| \leq r\}$$

é fracamente compacta, metrizável com respeito à topologia fraca e, portanto, fracamente sequencialmente compacta. Note ainda que se tomarmos arbitrariamente $u \in \mathscr{U}(T)$ temos que $|u(t)| \leq 2$

para todo $t \in [0,T]$ de onde segue que

$$\begin{aligned}\|u\|^2 &= \int_0^T |u(t)|^2 dt \\ &\leq 4\int_0^T dt \\ &= 4T\end{aligned}$$

ou seja, $u \in S(2T^{1/2})$: concluímos que $\mathscr{U}(T) \subset S(2T^{1/2})$.

Para a proposição a seguir precisaremos da seguinte definição: para cada $x \in \mathbb{R}$ definimos o *sinal de* x por

$$\sigma(x) := \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Estendemos a função sinal para vetores: dado $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ com $N > 1$ definimos

$$\sigma(x) := (\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_N)). \tag{1.6}$$

O seguinte fato que utilizaremos na próxima proposição é de demonstração elementar, e fica sob responsabilidade do leitor: se $f : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ é mensurável então $\sigma \circ f$ é mensurável.

Proposição 1.7. *Para cada $T \geq 0$ o conjunto $\mathscr{U}(T)$ é fracamente sequencialmente compacto e fracamente compacto.*

Demonstração. Seja $S := S(2T^{1/2})$. Como $\mathscr{U}(T) \subset S$ e S é metrizável com respeito à topologia fraca basta mostrar que $\mathscr{U}(T)$ é fracamente sequencialmente compacto.

Para tal tomemos uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathscr{U}(T)$. Como $u_n \in S$ para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos supor, sem perda de generalidade, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fracamente para um elemento $u \in S$: vamos provar que u é um controle admissível, e para isto é suficiente mostrar que $u(t) \in [-1,1]^M$ q.s. em $[0,T]$.

Seja $H := \{t \in [0,T] : u(t) \notin [-1,1]^M\}$: mostremos que $\mathbf{m}(H) = 0$. Se denotarmos

$$H_i := \{t \in [0,T] : |u_i(t)| > 1\}$$

teremos que $H = \bigcup_{1\leq i\leq M} H_i$, então vamos mostrar equivalentemente que $\mathbf{m}(H_i) = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, M\}$.

Suponha por absurdo que $\mathbf{m}(H_i) \neq 0$. Denotemos por $\chi_i : [0,T] \to \mathbb{R}$ a função característica de H_i e definamos $v = (v_1, \ldots, v_M) \in L_2^M(T)$ por

$$v_j := \begin{cases} \chi_i(\sigma \circ u_i), & \text{se } j = i \\ 0, & \text{se } j \neq i. \end{cases}$$

Como $u_n \xrightarrow{\omega} u$ temos que $\langle v, u_n\rangle \to \langle v, u\rangle$. Logo

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}(H_i) &= \int_0^T \chi_i(t)dt \\
&< \int_0^T \chi_i(t)|u_i(t)|dt \\
&= \int_0^T \chi_i(t)\sigma(u_i(t))u_i(t)dt \\
&= \langle v, u\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle v, u_n\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^T \chi_i(t)\sigma(u_i(t))u_{n,i}(t)dt
\end{aligned}$$

mas, por hipótese, $u_n(t) \in [-1,1]^M$ para todo $t \in [0,T]$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, o que implica que

$$\int_0^T \chi_i(t)\sigma(u_i(t))u_{n,i}(t)dt \leq \int_0^T \chi_i(t)dt = \mathbf{m}(H_i),$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}(H_i) &< \lim_{n\to\infty} \int_0^T \chi_i(t)\sigma(u_i(t))u_{n,i}(t)dt \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \mathbf{m}(H_i) \\
&= \mathbf{m}(H_i),
\end{aligned}$$

um absurdo. Logo $\mathbf{m}(H_i) = 0$. □

Proposição 1.8. *Para cada $T \geq 0$ vale que*

$$\mathcal{C}([0,T];\mathbb{R}^M) \cap \mathscr{U}(T)^\perp = \{0\}.$$

Demonstração. Suponha por absurdo que existe $v \in \mathcal{C}([0,T];\mathbb{R}^M)$ não identicamente nula tal que $\langle v, u\rangle = 0$ para todo $u \in \mathscr{U}(T)$.

A continuidade de v implica que existe $\alpha := \sup_{t\in[0,T]} |v(t)|$: defina $w := \frac{1}{\alpha}v$. Então w é contínua, não identicamente nula e um controle admissível que satisfaz

$$\langle w, u\rangle = \frac{1}{\alpha}\langle v, u\rangle = 0$$

para todo $u \in \mathscr{U}(T)$. Em particular $\langle w, w\rangle = 0$, o que implica que $w = 0$ e, logo, $v = 0$, o que contradiz a hipótese. □

Proposição 1.9. *Sejam* $y \in L_2^M(T)$ *e* $u \in \mathscr{U}(T)$. *Então*

$$\langle y, u \rangle = \sup\{\langle y, v \rangle : v \in \mathscr{U}(T)\}$$

se e somente se

$$u = \sigma \circ y \tag{1.7}$$

Neste caso temos ainda que

$$y(t)^* u(t) = \sup\{y(t)^* p : p \in [-1, 1]^M\} \text{ q.s. em } [0, T]. \tag{1.8}$$

Demonstração. Suponhamos inicialmente que $u \in \mathscr{U}(T)$ satisfaz (1.7). Então dado $v \in \mathscr{U}(T)$ temos que

$$\begin{aligned}
\langle y, v \rangle &= \sum_{i=1}^{M} \int_0^T y_i(t) v_i(t) dt \\
&\leq \sum_{i=1}^{M} \int_0^T |y_i(t)| dt \\
&= \sum_{i=1}^{M} \int_0^T y_i(t) \sigma(y_i(t)) dt \\
&= \sum_{i=1}^{M} \int_0^T y_i(t) u_i(t) dt \\
&= \langle y, u \rangle,
\end{aligned}$$

ou seja, $\langle y, u \rangle \geq \langle y, v \rangle$.

Suponhamos agora que v não é da forma (1.7). Logo existe $j \in \{1, \ldots, M\}$ tal que

$$A := \{t \in [0, T] : v_j(t) \neq \sigma(y_j(t))\}$$

tem medida positiva. Observe que se $t \in A$ é tal que $y_j(t) \neq 0$ então

$$\begin{aligned}
v_j(t) > \sigma(y_j(t)) \Rightarrow \sigma(y_j(t)) = -1 \Rightarrow y_j(t) < 0 \Rightarrow y_j(t) v_j(t) < y_j(t) \sigma(y_j(t)) \\
v_j(t) < \sigma(y_j(t)) \Rightarrow \sigma(y_j(t)) = 1 \Rightarrow y_j(t) > 0 \Rightarrow y_j(t) v_j(t) < y_j(t) \sigma(y_j(t))
\end{aligned}$$

de modo que se $Z := \{t \in [0, T] : y_j(t) \neq 0\}$ temos

$$t \in Z \cap A \Rightarrow y_j(t) v_j(t) < y_j(t) \sigma(y_j(t))$$

e portanto

$$\begin{aligned}\int_0^T y_j(t)v_j(t)dt &= \int_Z y_j(t)v_j(t)dt \\ &= \int_{Z\cap A} y_j(t)v_j(t)dt + \int_{Z\smallsetminus A} y_j(t)v_j(t)dt \\ &< \int_{Z\cap A} y_j(t)\sigma(y_j(t))dt + \int_{Z\smallsetminus A} y_j(t)\sigma(y_j(t))dt \\ &= \int_0^T y_j(t)\sigma(y_j(t))dt\end{aligned}$$

i.e. $\int_0^T y_j(t)v_j(t)dt < \int_0^T y_j(t)\sigma(y_j(t))dt$. Logo é fácil ver que $\langle y, v\rangle < \langle y, u\rangle$.

Nas condições acima, dado $p \in [-1,1]^M$ temos q.s. em $[0,T]$ que

$$\begin{aligned}y(t)^*p &= \sum_{i=1}^M y_i(t)p_i \\ &\leq \sum_{i=1}^M |y_i(t)| \\ &= \sum_{i=1}^M y_i(t)\sigma(y_i(t)) \\ &= \sum_{i=1}^M y_i(t)u_i(t) \\ &= y(t)^*u(t).\end{aligned}$$

isto é $y(t)^*p \leq y(t)^*u(t)$ q.s. em $[0,T]$. □

1.3 Subespaços afins

Vamos fazer agora uma pequena introdução à *teoria dos espaços afins* em $\mathbb{R}^N$. Precisamos dela para resolver o seguinte problema. Dado um subconjunto A de $\mathbb{R}^N$ pode ser que A esteja inteiramente contido em um hiperplano, o qual podemos identificar com um subespaço de $\mathbb{R}^N$ por uma translação. Nesse caso, sob o enfoque da topologia do $\mathbb{R}^N$ concluímos que $\mathrm{Int}A = \emptyset$ e $\partial A = A$ imediatamente, independentemente de qualquer outra particularidade da geometria do conjunto A. Isto ocorre apenas porque, em um sentido que tornaremos preciso, estamos colocando A em um espaço "grande demais", que ignora as propriedades de A. Nada mais justo que então consertar esse problema, colocando A no menor espaço que o contém, e cuja topologia reconhece as propriedades de A. Veremos abaixo a formalização dessas ideias através do conceito de subespaços afins.

Para esta seção, não encontrei nenhuma bibliografia que julgasse adequada a nossos propósitos. Dessa forma, as definições e notações que introduzimos abaixo não são universais e nem padrões: recomendamos fortemente sua leitura, a fim de que o leitor tome familiaridade com estes tópicos e principalmente com a simbologia.

Definição 1.10. Dizemos que $V \subset \mathbb{R}^N$ é um *subespaço afim* (ou uma *subvariedade linear*) se existem $x \in \mathbb{R}^N$ e $S \subset \mathbb{R}^N$ um subespaço tais que

$$V = x + S.$$

Logo, um subespaço afim é nada mais que um subespaço vetorial transformado por uma translação. Na proposição a seguir damos uma caracterização algébrica dos subespaços afins, a qual ilustra a relação entre estes conjuntos e os conjuntos convexos.

Proposição 1.11. *Um conjunto $V \subset \mathbb{R}^N$ é um subespaço afim se e somente se para quaisquer $x_1, x_2 \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ vale*

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in V.$$

Demonstração. Suponha que $V = x + S$ é um subespaço afim e sejam $x_1, x_2 \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então existem $y_1, y_2 \in S$ tais que

$$\begin{aligned} x_1 &= x + y_1 \\ x_2 &= x + y_2 \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 &= \lambda(x + y_1) + (1-\lambda)(x + y_2) \\ &= x + \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \end{aligned}$$

o qual pertence a V pois $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in S$, visto que S é um subespaço.

Suponha agora que V satisfaz

$$x_1, x_2 \in V,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in V.$$

Se $V = \emptyset$ então evidentemente V é um subespaço afim. Se $V \neq \emptyset$ tome $x \in V$ arbitrário. Mostraremos que $S := -x + V$ é um subespaço de $\mathbb{R}^N$. Com efeito, tome $y_1, y_2 \in S$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então existem $x_1, x_2 \in V$ tais que

$$\begin{aligned} y_1 &= -x + x_1 \\ y_2 &= -x + x_2 \end{aligned}$$

o que implica que

$$\begin{aligned} \lambda y_1 &= -\lambda x + \lambda x_1 \\ &= -x + \lambda x_1 + (1-\lambda)x \end{aligned}$$

pertence a S pois $x, x_1 \in V$ implica que $\lambda x_1 + (1-\lambda)x \in V$; também

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= -2x + x_1 + x_2 \\ &= 2\left(-x + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right) \end{aligned}$$

pertence a S pois

$$\begin{aligned} x_1, x_2 \in V &\Rightarrow \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \in V \\ &\Rightarrow -x + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \in S \\ &\Rightarrow 2\left(-x + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right) \in S \end{aligned}$$

onde na última implicação usamos a afirmação anterior com $\lambda = 2$. $\square$

A partir da caracterização acima, fica fácil deduzir que a intersecção de uma família qualquer de subespaços afins é também um subespaço afim: a demonstração dessa propriedade fica sob responsabilidade do leitor. Logo, dado $A \subset \mathbb{R}^N$ a família dos subespaços afins que contém A é não vazia – o $\mathbb{R}^N$ é um subespaço afim dele próprio! – e sua intersecção é um subespaço afim que contém A: denotaremos este subespaço afim por $\mathscr{V}(A)$. Em outras palavras, $\mathscr{V}(A)$ é o menor subespaço afim que contém A.

É intuitivo supor que um subespaço afim determina unicamente o subespaço do qual ele é a translação.

Proposição 1.12. *Se $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^N$ são subespaços e $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N$ são tais que*

$$x_1 + S_1 = x_2 + S_2$$

então $S_1 = S_2$.

Demonstração. Com efeito, neste caso $S_1 = x_2 - x_1 + S_2$: como $0 \in S_2$ temos que $x_2 - x_1 \in S_1$ o que implica que $x_1 - x_2 \in S_1$. Mas então

$$S_2 = x_1 - x_2 + S_1 = S_1.$$

$\square$

A proposição acima legitima a seguinte definição.

Definição 1.13. Seja $V \subset \mathbb{R}^N$ um subespaço afim não vazio. Definimos a *dimensão de V* como

$$\dim V := \dim S$$

onde $S \subset \mathbb{R}^N$ é o único subespaço tal que existe $x \in \mathbb{R}^N$ satisfazendo $V = x + S$.

Dado um conjunto não vazio $A \subset \mathbb{R}^N$ definimos a *dimensão de* A por

$$\dim A := \dim \mathscr{V}(A).$$

Embora um subespaço afim determine unicamente o subespaço do qual ele é uma translação, o mesmo não ocorre com a translação em si: dado um subespaço, translações dele por vários vetores distintos podem produzir o mesmo subespaço afim. Isso, felizmente, é apenas uma interpretação ingênua da geometria do problema, pois na verdade a translação é única no seguinte sentido: existe um único vetor de comprimento mínimo que produz a translação desejada, e todos os outros que fazem o mesmo trabalho são soma deste com um vetor do subespaço.

Dado $A \subset \mathbb{R}^N$ definimos a *translação característica de* A como o único vetor $v(A) \in A$ que satisfaz

$$|v(A)| = \inf\{|x| : x \in A\}$$

e o *subespaço natural de* A por $\mathscr{S}(A) := -v(A) + \mathscr{V}(A)$.

O subespaço $\mathscr{S}(A)$ herda de $\mathbb{R}^N$ seu produto interno canônico, o que torna $\mathscr{S}(A)$ um espaço vetorial com produto interno, o qual tem dimensão igual a $\dim A$. Logo, podemos identificar isometricamente os espaços $\mathscr{S}(A)$ e $\mathbb{R}^{\dim A}$, isto é, existe um isomorfismo $\mathscr{S}(A) \to \mathbb{R}^{\dim A}$ que preserva o produto interno. Como também as translações são homeomorfismos isométricos, concluímos que existe um homeomorfismo isométrico

$$\mathfrak{I}_A : \mathscr{V}(A) \to \mathbb{R}^{\dim A}$$

o qual chamaremos de *isometria natural de* A . Observe que $\mathfrak{I}_A$ não é um isomorfismo – $\mathscr{V}(A)$ não é um espaço vetorial – mas preserva também convexidade de ambos os lados.

Assim, $\mathscr{V}(A)$ fica munido de duas topologias métricas: uma é a topologia de subespaço herdada do $\mathbb{R}^N$ e outra é a induzida de $\mathbb{R}^{\dim A}$ através de $\mathfrak{I}_A$. No entanto $\mathfrak{I}_A$ é, como vimos, uma isometria, de modo que essas duas métricas coincidem: as duas topologias acima são idênticas. Chamamos essa topologia de *topologia relativa de* A.

Definimos então a *fronteira relativa* e o *interior relativo* de A, $\partial_r A$ e $\mathrm{Int}_r A$ respectivamente, como a fronteira e o interior de A na topologia relativa de A. É um exercício simples mostrar que

$$\partial_r A = \mathfrak{I}_A(\partial \mathfrak{I}_A^{-1}(A))$$
$$\mathrm{Int}_r A = \mathfrak{I}_A(\mathrm{Int}\mathfrak{I}_A^{-1}(A))$$

onde $\partial \mathfrak{I}_A^{-1}(A)$ e $\mathrm{Int}\mathfrak{I}_A^{-1}(A)$ são tomados com relação à topologia natural de $\mathbb{R}^{\dim A}$. A partir das observações acima fica fácil deduzir as seguintes relações, que usam apenas a definição de topologia de subespaço topológico e ficam sob responsabilidade do leitor: dado $A \subset \mathbb{R}^N$ valem

$$\partial_r A \subset \partial A$$
$$\mathrm{Int}A \subset \mathrm{Int}_r A.$$

Ademais, como $\mathfrak{I}_A$ é uma bijeção concluímos que $A = \partial_r A \cup \mathrm{Int}_r A$.

Creio que cabe aqui ser insistente quanto à notação, a fim de não gerar confusão. Dado A um subconjunto de $\mathbb{R}^N$ indicamos por $\partial_r A$ e $\mathrm{Int}_r A$ sua fronteira relativa e seu interior relativo, que são a fronteira e o interior de A com relação à topologia de subespaço topológico de $\mathscr{V}(A)$. Continuaremos a indicar por ∂A e $\mathrm{Int}A$ a fronteira e o interior de A com relação à topologia do espaço $\mathbb{R}^N$.

Se A é um subconjunto de um espaço topológico X ainda denotaremos por ∂A e $\mathrm{Int}A$ a fronteira e o interior de A com relação à topologia de X. Se X não for um espaço $\mathbb{R}^N$ com a topologia da norma não consideraremos os conceitos de interior e fronteira relativos de A.

A seguinte proposição vem para nos convencer de que procedemos corretamente na tentativa de colocar A no menor espaço que o contém.

Proposição 1.14. *Para qualquer $A \subset \mathbb{R}^N$ vale*

$$\mathscr{V}(\mathfrak{I}_A(A)) = \mathbb{R}^{\dim A}.$$

Demonstração. Suponha por absurdo que $\mathscr{V}(\mathfrak{I}_A(A)) \neq \mathbb{R}^{\dim A}$. Então

$$\mathfrak{I}_A(A) \subset \mathscr{V}(\mathfrak{I}_A(A)) \subset \mathbb{R}^{\dim A}$$

implica que

$$A \subset V \subset \mathscr{V}(A)$$

onde $V := \mathfrak{I}_A^{-1}(\mathscr{V}(\mathfrak{I}_A(A)))$. Vamos mostrar que V é um subespaço afim de $\mathbb{R}^N$. Como $A \subset V$ e evidentemente $V \neq \mathscr{V}(A)$, pois $\mathfrak{I}_A$ é bijetora, isto contradiz a minimalidade de $\mathscr{V}(A)$, o que nos leva a um absurdo.

Sejam $x_1, x_2 \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Como $A \subset V$ temos que $v(A) \in V$ e logo $S := -v(A) + V$ é um subespaço contido em $\mathscr{S}(A)$. Temos então que

$$-v(A) + x_1 \in S$$
$$-v(A) + x_2 \in S$$

o que implica que $\lambda(-v(A)+x_1)+(1-\lambda)(-v(A)+x_2) \in S$. Mas

$$\lambda(-v(A)+x_1)+(1-\lambda)(-v(A)+x_2) = -v(A)+\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$$

o que implica que $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2 \in V$. Isto implica que V é um subespaço afim, como queríamos. $\square$

Por fim, daremos um critério para decidir quando um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^N$ tem dimensão máxima.

Proposição 1.15. *Seja $A \subset \mathbb{R}^N$. Então $\dim A = N$ se e somente se nenhum funcional linear não nulo $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é constante sobre A.*

Demonstração. Suponha que existe um funcional linear não nulo f sobre $\mathbb{R}^N$ que é constante sobre A, digamos $f(a) = k \in \mathbb{R}$ para todo $a \in A$. É fácil ver que $f^{-1}(k) \subset \mathbb{R}^N$ é um subespaço afim que contém A (exercício para o leitor), o que implica que $\mathscr{V}(A) \subset f^{-1}(k)$ e, portanto, f é constante sobre $\mathscr{V}(A)$.

Como $\mathscr{V}(A) = v(A)+\mathscr{S}(A)$ então também f é constante sobre $\mathscr{S}(A)$ e como este é um conjunto simétrico e f é linear concluímos que f é identicamente nula sobre $\mathscr{S}(A)$, isto é, $\mathscr{S}(A) \subset \ker f$. Finalmente, como $f \neq 0$ temos que

$$\dim A = \dim \mathscr{S}(A) \leq \dim \ker f < N.$$

A recíproca é ainda mais fácil. Se $\dim A < N$ então $\dim \mathscr{S}(A) < N$ e logo existe um funcional linear não nulo f tal que $\mathscr{S}(A) \subset \ker f$. Rapidamente concluímos que f é constante sobre $\mathscr{V}(A)$ e logo também sobre A. $\square$

Capítulo 2

Controlabilidade

2.1 Existência de respostas e suas propriedades

Nosso objetivo inicial é determinar que condições deve satisfazer uma função $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$ para que a *equação diferencial com controle*

$$\begin{cases} x' &= f(t,x,u) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

possua soluções para quaisquer $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e $u \in \mathscr{U}$. Antes de mais nada, adotaremos a seguinte convenção: se $T(u) = 0$ então a equação acima possui solução se e somente se $t_0 = 0$ e, nesse caso, x_0 é sua única solução.

No caso em que $T(u) > 0$ e $t_0 \in [0, T(u)[$ queremos determinar quando é possível encontrar uma função $\phi : [0, \alpha[\to \mathbb{R}^N$ a.c. tal que

$$\phi'(t) = f(t, \phi(t), u(t)) \text{ q.s.}$$
$$\phi(t_0) = x_0.$$

Uma tal ϕ é chamada de uma *resposta* ou *trajetória* da equação (2.1).

Com a finalidade de determinar tais condições tomamos para cada controle $u \in \mathscr{U}(T)$ a aplicação

$$\begin{array}{rccc} f_u & : & [0,T]\times\mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ & & (t,x) & \longmapsto & f(t,x,u(t)) \end{array}$$

e então resolver a equação (2.1) é equivalente a resolver a equação

$$\begin{cases} x' &= f_u(t,x) \\ x(t_0) &= x_0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Observe que a equação (2.2) acima é “quase” uma equação de Carathéodory com condição inicial, exceto pelo seguinte problema técnico: f_u está definida em $[0,T]\times\mathbb{R}^N$, que não é aberto. Poderíamos pensar em tomar o interior de $[0,T]\times\mathbb{R}^N$, mas caso $t_0 = 0$ – um caso que será particularmente importante para nós, como veremos na definição de controlabilidade na Seção 2.2 – a condição inicial $(0, x_0)$ pertence precisamente à fronteira deste conjunto. Procederemos então da seguinte maneira: tomaremos uma extensão mensurável $v : [-\delta, T] \to [-1, 1]^M$ de u e tomando

$$\begin{array}{rccc} f_v & : & [-\delta, T] \times \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ & & (t, x) & \longmapsto & f(t, x, v(t)) \end{array}$$

vamos nos propor a resolver a equação alternativa

$$\begin{cases} x' &= f_v(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

tomando agora $\Omega := \,]-\delta, T[\, \times \mathbb{R}^N$. Tendo demonstrado a existência de uma solução para a equação (2.3) acima, mostraremos que a solução encontrada independe da particular extensão v quando restrita à semirreta positiva.

Teorema 2.1. *Suponha que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M; \mathbb{R}^N)$. Então a equação (2.2) possui uma única solução, que pode ser estendida a um domínio maximal aberto e que depende continuamente da condição inicial x_0.*

Demonstração. Vamos mostrar que a equação (2.3) possui uma única solução. Para isto, seja Ω o interior de $[-\delta, T] \times \mathbb{R}^N$, o que implica que $(t_0, x_0) \in \Omega$. Observe que f_v satisfaz as seguintes propriedades.

1. Fixado $x \in \mathbb{R}^N$, a continuidade de f em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ implica que

$$\begin{array}{rccc} h & : & [-\delta, T] \times [-1, 1]^M & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ & & (t, y) & \longmapsto & f(t, x, y) \end{array}$$

   é contínua. Claro que a aplicação identidade de $[-\delta, T]$ (a qual denotaremos por i) é contínua e, portanto, mensurável. Como também v é mensurável, temos que

$$\begin{aligned} f_v(t, x) &= f(t, x, v(t)) \\ &= h(i(t), v(t)) \end{aligned}$$

   é, como consequência da Proposição B.1, mensurável em $[-\delta, T]$.

2. Fixado $t \in [-\delta, T]$ a continuidade de f implica que a aplicação

$$x \in \mathbb{R}^N \mapsto f_v(t, x) = f(t, x, v(t)) \in \mathbb{R}^N$$

   é contínua.

3. A função f_v é limitada sobre compactos contidos em Ω. Com efeito, suponha que $K \subset \Omega$ é um compacto. Então $K \times [-1, 1]^M$ é um compacto e da continuidade de f segue que

$f(K \times [-1,1]^M) \subset \mathbb{R}^N$ é compacto e, portanto, limitado. Mas é fácil ver que $f_v(K) \subset f(K \times [-1,1]^M)$, o que mostra a afirmação.

Logo, verificamos as condições de Carathéodory para f_v sobre qualquer compacto K contido em Ω. Em particular tomando um retângulo compacto $R \subset \Omega$ centrado em (t_0, x_0) temos que as condições de Carathéodory estão verificadas sobre R, e segue então do Teorema 1.3 que a equação (2.3) possui pelo menos uma solução.

Vamos agora verificar as hipóteses do Teorema 1.5, que garantirá as propriedades de extensão, unicidade e dependência contínua.

1. Suponha que $\phi :]a,b[\to \mathbb{R}^N$, $-\delta < a < t_0 < b < T$, é uma solução da equação (2.3) tal que existe

$$l := \lim_{t \to b^-} \phi(t)$$

e $(b,l) \in \Omega$. Então o conjunto $\Gamma := \{(t,\phi(t)) : t_0 \leq t < b\} \cup \{(b,l)\}$ é um compacto contido em Ω, e logo existe um compacto K de interior não vazio tal que

$$\Gamma \subset \mathrm{Int} K \subset K \subset \Omega.$$

Como já observamos anteriormente, as condições de Carathéodory para f_v valem sobre $\Omega_0 := \mathrm{Int} K$ e então tomando a equação (2.3) restrita a Ω_0 podemos aplicar o Teorema 1.5 para garantir extensão de ϕ até b, valendo um argumento análogo para extensões até a.

2. Como f é de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ então para cada $t \in [-\delta, T]$ fixado a aplicação que associa cada $x \in \mathbb{R}^N$ à derivada parcial

$$\partial_2 f_v(t,x) = \partial_2 f(t,x,v(t))$$

é contínua. Segue então do Teorema do Valor Médio que f_v é lipschitziana na segunda variável em compactos e, portanto, localmente lipschitziana na segunda variável em Ω. Isto garante, pelo Teorema 1.5, a unicidade das soluções de (2.3).

3. A dependência contínua das soluções com relação à condição inicial x_0 segue agora imediatamente do Teorema 1.5, que não exige verificação de hipóteses adicionais.

Com isto mostramos que a equação (2.3) possui solução única com todas as boas propriedades que esperávamos. Agora vamos mostrar que esta solução não depende da particular escolha da extensão v, pelo menos na nossa região de interesse, isto é, a semirreta positiva $\mathbb{R}_+$. Mais rigorosamente, iremos mostrar que se v_1, v_2 são extensões mensuráveis de u e

$$\phi_1 : I_1 \to \mathbb{R}^N$$
$$\phi_2 : I_2 \to \mathbb{R}^N$$

são as soluções (únicas) de (2.3) associadas a v_1, v_2 respectivamente, então $\phi_1|_{I_1\cap\mathbb{R}_+} = \phi_2|_{I_2\cap\mathbb{R}_+}$.

Recordemos inicialmente que a argumentação que fizemos acima para justificar as boas propriedades da solução de (2.3) não depende da particular condição inicial t_0. Ou seja, para quaisquer $(t_1, x_1) \in \Omega$ a equação

$$\begin{cases} x' &= f_v(t,x) \\ x(t_1) &= x_1 \end{cases} \tag{2.4}$$

possui solução única para cada v. Então, tomando $t_1 > 0$ temos que v_1 e v_2 coincidem com u em uma vizinhança de t_1 (e, portanto, coincidem entre si nesta vizinhança), de modo que a equação (2.4) associada a v_1 e a v_2 é a mesma e logo, aplicando a unicidade de soluções, compartilham a mesma solução passando por (t_1, x_1). Caso $t_0 > 0$, este argumento conclui o teorema.

Caso $t_0 = 0$, utilizando as mesmas notações acima, tome $t_1 \in I_1 \cap I_2$ positivo e $x_1 := \phi_1(t_1)$ e concluímos que $\phi_2(t_1) = x_1 = \phi_1(t_1)$. Como $t_1 > 0$ é arbitrário, concluímos que ϕ_1 e ϕ_2 coincidem em $\mathbb{R}_+^*$. Como por definição $\phi_1(0) = x_0 = \phi_2(0)$, concluímos que ϕ_1 coincide com ϕ_2 em $\mathbb{R}_+$. $\square$

O teorema acima nos permite enunciar a seguinte

Definição 2.2. Dados $u \in \mathscr{U}$, $t_0 \in \mathbb{R}_+$ e $x_0 \in \mathbb{R}^N$ definimos a *resposta* associada ao controle admissível u e à condição inicial (t_0, x_0) como sendo a única solução $\phi_{t_0,x_0,u} : I(t_0, x_0, u) \to \mathbb{R}^N$ de (2.1) definida em seu intervalo maximal $I(t_0, x_0, u) \subset \mathbb{R}_+$.

Definimos ainda o *fluxo* de (2.1) por

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{X} : & D & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ & (t, t_0, x_0, u) & \longmapsto & \phi_{t_0,x_0,u}(t) \end{array} \tag{2.5}$$

onde

$$D := \{(t, t_0, x_0, u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \times \mathscr{U} : t \in I(t_0, x_0, u)\}. \tag{2.6}$$

Esta definição nos permite enunciar novamente a dependência contínua na condição inicial x que demonstramos no Teorema 2.1 como a seguinte

Proposição 2.3. *O fluxo $\mathbf{X} : D \to \mathbb{R}^N$ de (2.1) é contínuo nas variáveis (t_0, x_0). Rigorosamente isto quer dizer que, fixado $u \in \mathscr{U}$, vale o seguinte: fixado $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$ tal que $I(t_0, x_0, u) \neq \emptyset$ e dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $|(t_1, x_1) - (t_0, x_0)| < \delta$ então*

$$I(t_0, x_0, u) \subset I(t_1, x_1, u)$$

e

$$|\mathbf{X}(t, t_1, x_1, u) - \mathbf{X}(t, t_0, x_0, u)| < \epsilon$$

para todo $t \in I(t_0, x_0, u)$.

2.2 O problema da controlabilidade

Consideremos agora uma função $\mathscr{T} : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, a qual chamaremos de *função objetivo*. Enunciamos então o *problema da controlabilidade* como segue. O enunciado abaixo é bastante abstrato e bem mais geral do que utilizaremos aqui. Logo imporemos restrições a f e $\mathscr{T}$ para que este problema fique mais tratável.

Em primeiro lugar, sempre suporemos que f é de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$, para que valham os teoremas de existência, unicidade e dependência contínua nos parâmetros para as respostas da equação (2.1). Isto vai permitir que as definições abaixo façam sentido.

Em segundo lugar, fica registrado que as definições de controlabilidade, conjuntos acessíveis, conjuntos controláveis, etc. que descreveremos abaixo dependem diretamente do conjunto admissível $\mathscr{U}$, da função objetivo $\mathscr{T}$ e da dinâmica f, os quais serão sempre fixos. A possibilidade destes se modificarem foge do escopo desta monografia e, portanto, não será tratada aqui.

Definição 2.4 (Problema da controlabilidade)**.** Sejam $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$, $\mathscr{T} : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ uma função objetivo e $\mathscr{U}$ como na Definição 1.6. Dado $x \in \mathbb{R}^N$ encontrar, se possível, $u \in \mathscr{U}$ e $t \geq 0$ tais que $(t, 0, x, u) \in D$ e

$$\mathbf{X}(t, 0, x, u) \in \mathscr{T}(t) \tag{2.7}$$

onde $\mathbf{X}$ é o fluxo da equação

$$x' = f(t, x, u) \tag{2.8}$$

como na Definição 2.2. Caso isto seja possível, dizemos

- que o controle u *dirige* o ponto x ao objetivo $\mathscr{T}$ no instante t;
- que x é um *ponto controlável*;
- que u é um *controle efetivo* para x.

Definição 2.5. Introduzimos ainda as seguintes notações.

1. Para cada $t \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}^N$ o *conjunto dos pontos acessíveis em tempo t a partir de x* por

$$\mathscr{A}(t, x) := \{\mathbf{X}(t, 0, x, u) : u \in \mathscr{U} \text{ é tal que } (t, 0, x, u) \in D\} \tag{2.9}$$

   e o *conjunto dos pontos acessíveis a partir de x* por

$$\mathscr{A}(x) := \bigcup_{t \geq 0} \mathscr{A}(t, x). \tag{2.10}$$

2. Para cada $t \geq 0$ o *conjunto dos pontos controláveis em tempo t* por

$$\mathscr{C}(t) := \{x \in \mathbb{R}^N : \mathscr{T}(t) \cap \mathscr{A}(t, x) \neq \emptyset\} \tag{2.11}$$

e o *conjunto dos pontos controláveis* por

$$\mathscr{C} := \bigcup_{t \geq 0} \mathscr{C}(t). \tag{2.12}$$

Observe que se $t \notin I(0, x, u)$ para todo $u \in \mathscr{U}$ então $\mathscr{A}(t, x) = \emptyset$.

Intuitivamente, $\mathscr{A}(t, x)$ é o conjunto dos pontos que podemos alcançar a partir de x em tempo t (o tempo inicial é $t_0 = 0$) através de uma trajetória produzida por algum controle admissível. Vamos agora fixar algumas hipóteses adicionais que simplificarão a análise do problema da controlabilidade que estudaremos a seguir.

1. f é *autônoma*, isto é, f não depende explicitamente da variável t. Isto nos permite reescrevê-la como $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$ e a equação (2.1) como

$$x' = f(x, u). \tag{2.13}$$

2. f é de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$.

3. $t_0 = 0$. Em geral esta hipótese não implica em perda de generalidade pois na maioria das vezes trabalharemos com sistemas com a propriedade de *invariância temporal*: dados $u \in \mathscr{U}$ e $t_0 \geq 0$ é sempre possível encontrar $v \in \mathscr{U}$ tal que para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}^N$ vale

$$\mathbf{X}(t, t_0, x_0, u) = \mathbf{X}(t - t_0, 0, x_0, v)$$

para todo $t \in I(t_0, x_0, u)$. Exemplos de sistemas que possuem esta propriedades são os *sistemas lineares autônomos*, que discutiremos na Seção 2.3 a seguir. Tal convenção nos permite definir o fluxo da equação (2.13) como

$$\mathbf{X}(t, x, u) := \mathbf{X}(t, 0, x, u)$$

para todo $(t, x, u) \in D$, onde D agora é redefinido utilizando-se a mesma convenção. Também denotaremos $I(x, u) := I(0, x, u)$.

4. $f(0, 0) = 0$.

5. $\mathscr{T}(t) = \{0\}$ para todo $t \geq 0$, ou seja, daqui para frente nosso objetivo será dirigir pontos de $\mathbb{R}^N$ para a origem apenas. Observe que com esta convenção temos

$$\mathscr{C}(t) = \{x \in \mathbb{R}^N : 0 \in \mathscr{A}(t, x)\}$$

para todo $t \geq 0$.

Daqui para frente as hipóteses e notações adotadas acima serão utilizadas implícita e irrestritamente. Vamos a partir de agora deduzir as propriedades geométricas fundamentais dos conjuntos acessíveis e controláveis. Para tanto, deste ponto em diante utilizaremos mais intensamente a linguagem dos subespaços afins introduzida na Seção 1.3 das preliminares. Recomendamos fortemente ao leitor que ainda não o fez que consulte aquela seção a fim de tomar familiaridade com as notações, que não são universais.

Antes de mais nada mostraremos que, na verdade, os conceitos de conjunto acessível e conjunto controlável estão intimamente ligados: na verdade, o conjunto controlável é também um conjunto acessível, só que de outra equação.

Teorema 2.6. *Considere o sistema autônomo de controle*

$$x' = f(x,u) \tag{2.14}$$

e o sistema em tempo revertido *associado*

$$y' = -f(y,v). \tag{2.15}$$

Denote por $\mathbf{X}_1$*,* $\mathscr{C}_1(t)$ *e* $\mathscr{A}_1(t,x)$ *o fluxo e os conjuntos controláveis/acessíveis da equação (2.14) e por* $\mathbf{X}_2$*,* $\mathscr{C}_2(t)$ *e* $\mathscr{A}_2(t,x)$ *o fluxo e os conjuntos controláveis/acessíveis da equação (2.15). Então para quaisquer* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N$ *vale que*

$$x_1 \in \mathscr{A}_1(t,x_2) \Rightarrow x_2 \in \mathscr{A}_2(t,x_1)$$

para qualquer $t \geq 0$*.*

Observe que, por simetria, a recíproca da implicação acima também vale e, portanto, a equivalência. Tomando então $x_1 = 0$ *concluímos que*

$$\mathscr{C}_1(t) = \mathscr{A}_2(t,0)$$

para todo $t \geq 0$*.*

Demonstração. Suponha que $x_1 \in \mathscr{A}_1(t,x_2)$. Logo existe $u \in \mathscr{U}$ tal que $t \in I_1(x_2,u)$ e $\mathbf{X}_1(t,x_2,u) = x_1$. Seja

$$\begin{array}{rcccc} v & : & [0,t] & \longrightarrow & [-1,1]^M \\ & & s & \longmapsto & u(t-s) \end{array}$$

a qual é evidentemente mensurável (pois u o é), e logo $v \in \mathscr{U}$. Defina ainda

$$\begin{array}{rcccc} \phi & : & [0,t] & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ & & s & \longmapsto & \mathbf{X}_1(t-s,x_2,u) \end{array}$$

a qual é a.c. (vide Proposição C.2) e satisfaz q.s. em $[0,t]$

$$\begin{aligned}\phi'(s) &= -\partial_1 \mathbf{X}_1(t-s,x_2,u)\\ &= -f(\mathbf{X}_1(t-s,x_2,u),u(t-s))\\ &= -f(\phi(s),v(s))\end{aligned}$$

e também $\phi(0) = \mathbf{X}_1(t,x_2,u) = x_1$. Segue da definição do sistema em tempo revertido e da unicidade de soluções que $\phi(s) = \mathbf{X}_2(s,x_1,v)$ para todo $s \in [0,t]$, ou seja

$$\mathbf{X}_2(s,x_1,v) = \mathbf{X}_1(t-s,x_2,u)$$

para todo $s \in [0,t]$. Calculando em $s = t$ temos que

$$\mathbf{X}_2(t,x_1,v) = \mathbf{X}_1(0,x_2,u) = x_2$$

ou seja, $x_2 \in \mathscr{A}_2(t,x_1)$. $\square$

O teorema acima caracteriza os conjuntos controláveis de (2.13) como os conjuntos acessíveis, a partir da origem, de seu sistema em tempo revertido (2.15). Este já era um resultado esperado para os sistemas autônomos: se posso alcançar x_1 partindo de x_2 em tempo t, para alcançar x_2 a partir de x_1 em tempo t basta voltar pelo mesmo caminho no sentido contrário.

Outro resultado que poderíamos esperar, intuitivamente, para os sistemas autônomos é o seguinte. Suponha que x é um ponto controlável, isto é, pode ser dirigido à origem através de uma trajetória do sistema de controle, e seja y um ponto dessa trajetória. Ora, nada mais justo que esperar que y também seja controlável: basta seguir a mesma trajetória que dirige x a 0, agora porém a partir de y. Provamos esse resultado a seguir.

Proposição 2.7. *Sejam $x \in \mathscr{C}$ e $u \in \mathscr{U}$ efetivo para x. Se $t \in I(x,u)$ é tal que $\mathbf{X}(t,x,u) = 0$ então*

$$\mathbf{X}(s,x,u) \in \mathscr{C}$$

para todo $s \in [0,t]$.

Demonstração. Se $s = 0$ não há o que mostrar pois $\mathbf{X}(0,x,u) = x \in \mathscr{C}$. O caso $s = t$ também é fácil, bastando observar que como $f(0,0) = 0$ então 0 é um ponto estacionário de $\mathbf{X}$ (por causa da unicidade de soluções, usando o controle $u = 0$), ou seja $\mathbf{X}(s,0,0) = 0$ para todo $s \in I(0,0) = \mathbb{R}_+$. Isto mostra que $0 \in \mathscr{C}$ e portanto

$$\mathbf{X}(t,x,u) = 0 \in \mathscr{C}.$$

Suponha agora que $0 < s < t$ e defina $y := \mathbf{X}(s, x, u)$: vamos mostrar que $y \in \mathscr{C}$. Sejam

$$\begin{array}{rccc} \phi & : & [0, t-s] & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ & & \xi & \longmapsto & \mathbf{X}(\xi + s, x, u) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} v & : & [0, t-s] & \longrightarrow & [-1,1]^M \\ & & \xi & \longmapsto & u(\xi + s). \end{array}$$

Evidentemente v é mensurável e, portanto, $v \in \mathscr{U}(t-s)$. Ademais, segue das várias observações feitas na Proposição C.2 que ϕ é a.c. em $[0, t-s]$ e

$$\begin{aligned} \phi'(\xi) &= \partial_1 \mathbf{X}(\xi + s, x, u) \\ &= f(\mathbf{X}(\xi + s, x, u), u(\xi + s)) \\ &= f(\phi(\xi), v(\xi)) \end{aligned}$$

quase sempre em $[0, t-s]$. Como também temos que $\phi(0) = \mathbf{X}(s, x, u) = y$ segue da unicidade das trajetórias passando por $(0, y)$ que $[0, t-s] \subset I(y, v)$ e $\phi(\xi) = \mathbf{X}(\xi, y, v)$ para todo $\xi \in [0, t-s]$. Mas então

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t-s, y, v) &= \phi(t-s) \\ &= \mathbf{X}(t, x, u) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donde $y \in \mathscr{C}(t-s)$. □

Segue da demonstração da proposição anterior que $0 \in \mathscr{C}$.

Em vista da Proposição 2.7, podemos pensar no conjunto $\mathscr{C}$ como a reunião de todas as trajetórias que dirigem algum ponto controlável à origem. A imagem que nos vêm à mente é de um conjunto *conexo por caminhos*, isto é, dados quaisquer x_1, x_2 controláveis deve haver uma curva contínua com extremidades em x_1 e x_2, respectivamente, e integralmente contida em $\mathscr{C}$. De fato, deve bastar dirigir x_1 à origem por uma trajetória do sistema e depois voltar da origem ao ponto x_2 por uma trajetória em tempo revertido. Demonstramos este resultado abaixo, além de enunciar e demonstrar condições necessárias e suficientes para $\mathscr{C}$ ser um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$. Este último resultado seguirá do teorema de dependência contínua.

Teorema 2.8. *$\mathscr{C}$ é conexo por caminhos. Ademais $\mathscr{C}$ é aberto se e somente se $\mathrm{Int}\mathscr{C} \neq \emptyset$ e $0 \in \mathrm{Int}\mathscr{C}$ e, neste caso, $\mathscr{C}$ é conexo.*

Demonstração. Provaremos inicialmente que $\mathscr{C}$ é conexo por caminhos. Se $x_1, x_2 \in \mathscr{C}$ então existem, para $j \in \{1,2\}$, $u_j \in \mathscr{U}$ e $t_j \in I(x_j, u_j)$ tais que

$$\mathbf{X}(t_j, x_j, u_j) = 0.$$

Podemos então considerar a curva $\gamma : [0, t_1 + t_2] \to \mathbb{R}^N$ definida por

$$\gamma(t) := \begin{cases} \mathbf{X}(t, x_1, u_1), & \text{se } t \in [0, t_1] \\ \mathbf{X}(t_1 + t_2 - t, x_2, u_2), & \text{se } t \in [t_1, t_1 + t_2] \end{cases}$$

a qual é contínua, satisfaz

$$\gamma(0) = \mathbf{X}(0, x_1, u_1) = x_1$$
$$\gamma(t_1 + t_2) = \mathbf{X}(0, x_2, u_2) = x_2$$

e, portanto, conecta x_1 a x_2. Além disso, a Proposição 2.7 implica que $\{\gamma(t) : t \in [0, t_1 + t_2]\} \subset \mathscr{C}$, o que demonstra a afirmação.

Vamos mostrar agora que $\mathscr{C}$ é aberto se e somente se $0 \in \mathrm{Int}\mathscr{C}$. Sabemos que $0 \in \mathscr{C}$, e logo se $\mathscr{C}$ é aberto então $\mathscr{C} = \mathrm{Int}\mathscr{C}$, isto é, $0 \in \mathrm{Int}\mathscr{C}$. Suponha agora que $0 \in \mathrm{Int}\mathscr{C}$, de modo que existe $\epsilon > 0$ tal que $\mathscr{B}(0, \epsilon) \subset \mathscr{C}$. Seja $x \in \mathscr{C}$. Logo existem $u \in \mathscr{U}$ e $t \in I(x, u)$ tais que $\mathbf{X}(t, x, u) = 0$. Pela propriedade da dependência contínua existe $\delta > 0$ tal que se $y \in \mathscr{B}(x, \delta)$ então $I(x, u) \subset I(y, u)$ e

$$|\mathbf{X}(s, y, u) - \mathbf{X}(s, x, u)| < \epsilon$$

para todo $s \in I(x, u)$. Tomando $s = t$ temos que $z := \mathbf{X}(t, y, u) \in \mathscr{B}(0, \epsilon)$ e, como $\mathscr{B}(0, \epsilon) \subset \mathscr{C}$, segue que $z \in \mathscr{C}$.

Sejam agora $v \in \mathscr{U}$ e $s \in I(z, v)$ tais que $\mathbf{X}(s, z, v) = 0$. Definimos então $\phi : [0, t+s] \to \mathbb{R}^N$ por

$$\phi(\xi) := \begin{cases} \mathbf{X}(\xi, y, u), & \text{se } \xi \in [0, t] \\ \mathbf{X}(\xi - t, z, v), & \text{se } \xi \in [t, t+s] \end{cases}$$

e $w : [0, t+s] \to [-1, 1]^M$ por

$$w(\xi) := \begin{cases} u(\xi), & \text{se } \xi \in [0, t] \\ v(\xi - t), & \text{se } \xi \in]t, t+s]. \end{cases}$$

A Proposição B.2 implica que w é mensurável e portanto $w \in \mathscr{U}(t+s)$. Segue ainda da Proposição C.2 que ϕ é a.c. .

Temos ainda que q.s. em $[0,t]$ vale

$$\begin{aligned}\phi'(\xi) &= \partial_1 \mathbf{X}(\xi, y, u)\\ &= f(\mathbf{X}(\xi, y, u), u(\xi))\\ &= f(\phi(\xi), w(\xi))\end{aligned}$$

e da mesma maneira vale q.s. em $]t, t+s]$ que

$$\begin{aligned}\phi'(\xi) &= \partial_1 \mathbf{X}(\xi - t, z, v)\\ &= f(\mathbf{X}(\xi - t, z, v), v(\xi - t))\\ &= f(\phi(\xi), w(\xi))\end{aligned}$$

e, finalmente, $\phi(0) = \mathbf{X}(0, y, u) = y$. Novamente argumentando por unicidade das trajetórias temos que $[0, t+s] \subset I(y, w)$ e $\phi(\xi) = \mathbf{X}(\xi, y, w)$ para todo $\xi \in [0, t+s]$.

Então

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(t+s, y, w) &= \phi(t+s)\\ &= \mathbf{X}(s, z, v)\\ &= 0\end{aligned}$$

donde $y \in \mathscr{C}(t+s)$, isto é, y é controlável. Como $y \in \mathscr{B}(x, \delta)$ é arbitrário, segue que $\mathscr{C}$ é aberto. □

Como nos resultados anteriores, é razoável supor que com o passar do tempo os conjuntos controlável $\mathscr{C}(t)$ "cresçam" no sentido da inclusão: conforme o tempo passa nosso sistema deve poder controlar mais e mais pontos, sem perder aqueles que ele já controlava anteriormente.

Lema 2.9. *Se $0 \leq t_1 \leq t_2$ então $\mathscr{C}(t_1) \subset \mathscr{C}(t_2)$.*

Demonstração. O caso $t_1 = t_2$ é trivial, suponha que $t_1 < t_2$. Nestas condições sejam $x \in \mathscr{C}(t_1)$ e $u_1 \in \mathscr{U}$ tais que $t_1 \in I(x, u_1)$ e $\mathbf{X}(t_1, x, u_1) = 0$. Defina $u_2 : [0, t_2] \to [-1, 1]^M$ por

$$u_2(t) := \begin{cases} u_1(t), & \text{se } 0 \leq t \leq t_1 \\ 0, & \text{se } t_1 < t \leq t_2. \end{cases}$$

Segue então da Proposição B.2 que $u_2 \in \mathscr{U}$. Defina ainda $\phi : [0, t_2] \to \mathbb{R}^N$ por

$$\phi(t) := \begin{cases} \mathbf{X}(t, x, u_1), & \text{se } 0 \leq t \leq t_1 \\ 0, & \text{se } t_1 \leq t \leq t_2. \end{cases}$$

e então pelo item 4 da Proposição C.2 temos que ϕ é a.c. e, portanto, q.s. diferenciável. Note então que em $[0, t_1]$ vale q.s.

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= \partial_1 \mathbf{X}(t, x, u_1)\\ &= f(\mathbf{X}(t, x, u_1), u_1(t))\\ &= f(\phi(t), u_1(t))\\ &= f(\phi(t), u_2(t))\end{aligned}$$

e q.s. em $[t_1, t_2]$

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= 0\\ &= f(0, 0)\\ &= f(\phi(t), u_2(t))\end{aligned}$$

donde $\phi'(t) = f(\phi(t), u_2(t))$ q.s. em $[0, t_2]$. Como por definição temos que $\phi(0) = \mathbf{X}(0, x, u_1) = x$ então segue da unicidade de trajetórias que $\phi(t) = \mathbf{X}(t, x, u_2)$ para todo $t \in [0, t_2]$. Mas então

$$\mathbf{X}(t_2, x, u_2) = \phi(t_2) = 0$$

o que implica que $x \in \mathscr{C}(t_2)$ com controle efetivo u_2. $\square$

O lema acima é a última propriedade que demonstramos para sistemas de controle autônomos não lineares. A partir da próxima seção passaremos à teoria dos *sistemas lineares autônomos*, que evidentemente é um caso particular da teoria não linear, no sentido de que todos os resultados que mostramos até aqui são válidos para o caso linear.

2.3 Sistemas lineares autônomos

A fim de ilustrar os resultados e técnicas da Teoria de Controle para abordar o problema de controle enunciado na Definição 2.4 vamos estudar uma classe particular de problemas de controle: os *problemas lineares autônomos*. Neste caso, existem matrizes $A \in \mathbb{M}_{N\times N}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathbb{M}_{N\times M}(\mathbb{R})$ tais que

$$f(x, u) = Ax + Bu$$

para cada $(x, u) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$, e logo a equação que rege nosso problema de controlabilidade toma a seguinte forma:

$$x' = Ax + Bu. \tag{2.16}$$

O estudo da classe dos problemas lineares é fundamental, já que muitos resultados relacionados ao problema de controle não linear são obtidos via linearização deste último, para então inferir propriedades locais daquele.

Nesta seção e adiante, todas as afirmações e notações referentes a fluxos, conjuntos acessíveis, conjuntos controláveis, etc. e propriedades dos mesmos estarão restritas à classe dos problemas de controle lineares autônomos, ou seja, da equação (2.16).

Para equações lineares da forma acima, o fluxo $\mathbf{X}$ tem uma expressão conhecida, dada pela *fórmula de variação dos parâmetros.*

Proposição 2.10 (FVP). *Para $(t, x, u) \in D$ vale*

$$\mathbf{X}(t, x, u) = S(t)S(0)^{-1}x + \int_0^t S(t)S(s)^{-1}Bu(s)ds \tag{2.17}$$

onde $S : \mathbb{R} \to \mathbb{M}_{N\times N}(\mathbb{R})$ é qualquer solução fundamental da equação homogênea

$$x' = Ax.$$

Em particular, se impusermos $S(0) = I$ temos $S(t) = e^{tA}$ e, portanto, a equação (2.17) fica

$$\mathbf{X}(t, x, u) = e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds. \tag{2.18}$$

Demonstração. A demonstração é mais trabalhosa que instrutiva: os detalhes ficam sob responsabilidade do leitor. Observe que se $u \in \mathscr{U}(t_1)$ então a continuidade de $S(s)^{-1}$ implica que $s \mapsto S(s)^{-1}Bu(s)$ é mensurável e limitada pois dado $s \in [0, t_1]$ vale

$$|S(s)^{-1}Bu(s)| \leq |S(s)^{-1}||B||u(s)| \leq |B||S(s)^{-1}|$$

e $S(s)^{-1}$ mora em um compacto de $\mathbb{M}_{N\times N}(\mathbb{R})$. Logo o Teorema C.6 implica que

$$t \mapsto \int_0^t S(s)^{-1}Bu(s)ds$$

é uma função a.c. e é fácil ver que isto implica que

$$t \mapsto S(t)\int_0^t S(s)^{-1}Bu(s)ds$$

também será a.c. : em analogia à Proposição C.2, $S \in \mathcal{C}^1([a, b]; \mathbb{M}_{N\times N}(\mathbb{R}))$ implica que S é a.c. . Como $t \mapsto S(t)S(0)^{-1}x$ é de classe $\mathcal{C}^1$ então a função $\phi : [0, t_1] \to \mathbb{R}^N$ definida por

$$\phi(t) := S(t)S(0)^{-1}x + \int_0^t S(t)S(s)^{-1}Bu(s)ds$$

é a soma de uma função diferenciável e uma função a.c. e é, portanto, a.c. .

Agora, um cálculo simples mostra que

$$\phi'(t) = A\phi(t) + Bu(t) \text{ q.s. }.$$

Ademais, é claro que $\phi(0) = x$ e logo $\phi(t) = \mathbf{X}(t, x, u)$ para todo $t \in [0, t_1]$.

Observe por fim que mostramos que $I(x, u) = [0, t_1] = [0, T(u)]$ ou seja, para os sistemas lineares as respostas se estendem até onde for possível definir o controle correspondente u. Note que isto não contradiz a observação feita na parte 1 do Teorema 1.5 de que $I(x, u)$ é aberto: o espaço topológico em questão é o intervalo $[0, T(u)]$. □

A proposição acima implica que todo ponto x que pode ser dirigido a y em tempo t por algum controle u pode também ser dirigido a y em tempo t por outro controle v definido exatamente em $[0, t]$, e o qual produz a mesma trajetória até aquele ponto.

Corolário 2.11. *Suponha que* $(t, x, u) \in D$. *Então* $v := u|_{[0,t]} \in \mathscr{U}(t)$, $(t, x, v) \in D$ *e*

$$\mathbf{X}(s, x, v) = \mathbf{X}(s, x, u)$$

para todo $s \in [0, t]$.

A partir de agora, a fim de deduzir as principais propriedades geométricas dos conjuntos acessíveis e controláveis do sistema autônomo linear (2.16), adotaremos a seguinte estratégia. Utilizando a expressão analítica do fluxo $\mathbf{X}$, isto é a FVP, vamos definir uma transformação do espaço dos controles para o $\mathbb{R}^N$, a qual, como veremos na sequência, "transportará" as propriedades dos conjuntos admissíveis que deduzimos na Seção 1.2 para os conjuntos acessíveis e controláveis.

Para cada $t \geq 0$ definimos a *transformação de dinâmica controlável* $\mathscr{L}_t : L_2^M(t) \to \mathbb{R}^N$ por

$$\mathscr{L}_t(v) := \int_0^t e^{-sA} Bv(s) ds \tag{2.19}$$

de modo que a FVP torna-se simplesmente

$$\mathbf{X}(t, x, u) = e^{tA}x + e^{tA}\mathscr{L}_t(u).$$

Obtemos então a importante caracterização

$$\mathscr{A}(t, x) = e^{tA}x + e^{tA}\mathscr{L}_t(\mathscr{U}(t)). \tag{2.20}$$

Proposição 2.12. *A transformação* $\mathscr{L}_t$ *é fracamente contínua.*

Demonstração. Segundo a Proposição A.6 é suficiente mostrar que $\mathscr{L}_t$ é fortemente contínua, isto é, contínua na topologia métrica de $L_2^M(t)$, visto que esta é uma transformação linear. Mostraremos, equivalentemente, que cada componente de $\mathscr{L}_t$ é contínua. Denotando $\mathscr{L}_t = (l_1, \ldots, l_N)$ segue da linearidade de $\mathscr{L}_t$ que devemos mostrar que $l_i \in L_2^M(t)'$ para cada $i = 1, \ldots, N$.

Se definirmos $Y : [0,t] \to \mathbb{M}_{M\times N}(\mathbb{R})$ por $Y(s) := B^* e^{-sA^*}$ temos que $\mathscr{L}_t(v) = \int_0^t Y(s)^* v(s)ds$. Então

$$l_i(v) = \int_0^t Y_i(s)^* v(s)ds = \langle Y_i, v\rangle$$

onde Y_i é a i-ésima coluna de Y, a qual claramente é um elemento de $L_2^M(t)$. Isto prova que l_i é contínua. □

O que faremos agora é enunciar e demonstrar as principais propriedades geométricas dos conjuntos acessíveis e controláveis dos sistemas lineares autônomos, induzidas pela dinâmica controlável.

Corolário 2.13. *Sejam $t \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}^N$.*

1. *$x \in \mathscr{C}(t)$ se e somente se existe $u \in \mathscr{U}(t)$ tal que $x = -\mathscr{L}_t(u)$;*
2. *$\mathscr{C}(t) = \mathscr{L}_t(\mathscr{U}(t))$ é simétrico, convexo, compacto e não vazio;*
3. *$\mathscr{A}(t,x)$ é convexo, compacto e não vazio;*
4. *$\mathscr{C}$ é convexo, simétrico e não vazio.*

Demonstração. Os primeiros três itens seguem diretamente da FVP, da definição de $\mathscr{L}_t$ e da seguinte observação: $\mathscr{L}_t$ é uma transformação linear (leva conjuntos convexos em conjuntos convexos; conjuntos simétricos em conjuntos simétricos) e fracamente contínua (leva conjuntos fracamente compactos em conjuntos compactos) e $\mathscr{U}(t)$ é um conjunto convexo, simétrico e fracamente compacto.

Temos ainda pela definição de $\mathscr{C}$ e do Lema 2.9 que este é a reunião de uma família crescente de conjuntos simétricos e convexos e, portanto, também um conjunto simétrico e convexo. □

Concluímos que os conjuntos acessíveis do sistema linear autônomo (2.16) são elementos convexos de $\mathcal{P}_c(\mathbb{R}^N)$ (veja o Apêndice E).

Vamos agora dar uma caracterização algébrica, em termos das matrizes A e B, da propriedade de $\mathscr{C}$ ser aberto.

Definição 2.14. Definimos a matriz $M_{A,B} \in \mathbb{M}_{N\times NM}(\mathbb{R})$ por

$$M_{A,B} := [B \mid AB \mid A^2B \mid \cdots \mid A^{N-1}B] \tag{2.21}$$

a qual denominamos *matriz de Kalman* associada ao sistema linear autônomo (2.16).

Dizemos que o sistema linear autônomo (2.16) é *exato* se sua respectiva matriz de Kalman tem posto máximo, isto é

$$\text{posto } M_{A,B} = N.$$

Teorema 2.15. *Seja $y \in \mathbb{R}^N$. São equivalentes:*

1. y^* *é identicamente nulo sobre* $\mathscr{C}(t)$ *para algum* $t > 0$;
2. $y^* e^{-sA} B = 0$ *para todo* $s \in [0,t]$ *para algum* $t > 0$;
3. $y^* e^{-sA} B = 0$ *para todo* $s \in \mathbb{R}$;
4. y^* *é identicamente nulo sobre* $\mathscr{C}$;
5. $y^* M_{A,B} = 0$.

Demonstração. Suponhamos sem perda de generalidade $y \neq 0$, pois o caso complementar é trivial.

($1 \Rightarrow 2$) Como y^* é identicamente nulo sobre $\mathscr{C}(t)$ então para todo $u \in \mathscr{U}(t)$ vale

$$\int_0^t y^* e^{-sA} B u(s) ds = y^* \int_0^t e^{-sA} B u(s) ds = 0$$

e então a Proposição 1.8 implica que $y^* e^{-sA} B = 0$ para todo $s \in [0,t]$.

($2 \Rightarrow 3$) Observe que a função $s \in \mathbb{R} \mapsto y^* e^{-sA} B \in (\mathbb{R}^N)^*$ é uma função analítica real. Aplicando o Princípio dos Zeros Isolados somado à hipótese de que $y^* e^{-sA} B = 0$ para todo $s \in [0,t]$ para algum $t > 0$ concluímos facilmente que esta aplicação deve ser identicamente nula.

($3 \Rightarrow 4$) Dado $x \in \mathscr{C}$ não nulo existe $t > 0$ tal que $x \in \mathscr{C}(t)$. Então existe $u \in \mathscr{U}(t)$ tal que

$$y^* x = y^* \int_0^t e^{-sA} B u(s) ds = \int_0^t y^* e^{-sA} B u(s) ds = 0.$$

A implicação $4 \Rightarrow 1$ é imediata da definição de $\mathscr{C}$. Para terminar, vamos demonstrar a equivalência $3 \Leftrightarrow 5$.

($3 \Rightarrow 5$) Supondo que a aplicação

$$\begin{array}{rccc} g & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & (\mathbb{R}^N)^* \\ & & s & \longmapsto & y^* e^{-sA} B \end{array}$$

é identicamente nula temos, derivando g, que

$$\frac{d^n}{ds^n} g(s) = (-1)^n y^* A^n e^{-sA} B = 0$$

para todo $s \in \mathbb{R}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. Calculando em $s = 0$ obtemos $y^* A^n B = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue então da definição de $M_{A,B}$ que $y^* M_{A,B} = 0$.

($5 \Rightarrow 3$) Suponha que $y^* M_{A,B} = 0$. Logo $y^* A^n B = 0$ para todo $n \in \{0, \ldots, N-1\}$. Vamos mostrar que $y^* A^n B = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $p \in \mathbb{R}[\lambda]$ o polinômio característico da matriz A i.e.

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A).$$

Segue então do Teorema de Cayley-Hamilton que $p(A) = 0$ e logo a matriz A^N pode ser escrita como combinação linear de $\{A^k\}_{0\leq k<N}$, digamos

$$A^N = \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k A^k \tag{2.22}$$

onde $\beta_k \in \mathbb{R}$ para cada $k \in \{0, \ldots, N-1\}$, o que implica que

$$y^* A^N B = \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k y^* A^k B = 0.$$

Suponha por indução que $y^* A^k B = 0$ para todo $k \leq n$ com $n \geq N$. Aplicando (2.22) temos que

$$\begin{aligned} y^* A^{n+1} B &= y^* A A^n B \\ &= y^* A A^N A^{n-N} B \\ &= y^* A \left[\sum_{k=0}^{N-1} \beta_k A^k \right] A^{n-N} B \\ &= y^* \left[\sum_{k=0}^{N-1} \beta_k A^{k+1+n-N} \right] B \\ &= \sum_{k=1+n-N}^{n} \beta_k y^* A^k B \\ &= 0 \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue da hipótese de indução. Mostramos com isso que $y^* A^n B = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto implica que $y^* e^{-sA} B = 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$ já que, por definição de exponencial de uma matriz

$$e^{-sA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-s)^n}{n!} A^n$$

para todo $s \in \mathbb{R}$.

$\square$

Teorema 2.16. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *o sistema linear autônomo (2.16) é exato;*

2. *$\mathscr{C}$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$;*

3. *$0 \in Int\mathscr{C}$;*

4. $\dim \mathscr{C}(t) = N$ *para todo* $t > 0$.

Demonstração. A equivalência $2 \Leftrightarrow 3$ já foi estabelecida no Teorema 2.8. Vamos demonstrar as demais.

($2 \Rightarrow 1$) Suponhamos inicialmente que posto $M_{A,B} < N$. Isto implica que existe $y \in \mathbb{R}^N$ não nulo tal que $y^* M_{A,B} = 0$. Então pelo Teorema 2.15 temos que y^* é identicamente nulo sobre $\mathscr{C}$, isto é, $\mathscr{C} \subset \ker y$. Finalmente, observando que $y \neq 0$ implica que $\dim(\ker y) < N$ e, logo, $\mathrm{Int}(\ker y) = \emptyset$, temos que $\mathrm{Int}\mathscr{C} = \emptyset$ e, logo, $\mathscr{C}$ não é aberto.

($1 \Rightarrow 3$) Suponhamos agora que $0 \notin \mathrm{Int}\mathscr{C}$. Observe que $\bigcup_{t \geq 0} \mathrm{Int}\mathscr{C}(t) \subset \mathrm{Int}\mathscr{C}$ donde $0 \notin \mathrm{Int}\mathscr{C}(t)$ para todo $t \geq 0$. Já vimos na demonstração da Proposição 2.7 que 0 é um ponto estacionário de (2.16) e logo $0 \in \mathscr{C}(t)$ para todo $t \geq 0$ (basta tomar o controle identicamente nulo em $\mathscr{U}(t)$ e a resposta será o ponto estacionário $0 \in \mathbb{R}^N$).

Seja $t > 0$ fixado. A discussão acima implica que $0 \in \partial\mathscr{C}(t)$ e como sabemos este é um conjunto convexo, e então o Teorema D.3 implica que existe um hiperplano de suporte passando por 0, isto é, existe $y \in \mathbb{R}^N$ não nulo tal que $y^* x \leq y^* 0 = 0$ para todo $x \in \mathscr{C}(t)$. Como $\mathscr{C}(t)$ é simétrico, concluímos que y^* é identicamente nulo sobre $\mathscr{C}(t)$ e então pelo Teorema 2.15 concluímos que $y^* M_{A,B} = 0$, ou seja, posto $M_{A,B} < N$.

($1 \Rightarrow 4$) Suponha que para algum $t > 0$ temos $\dim \mathscr{C}(t) < N$. Nessas condições a Proposição 1.15 implica existe $y \in \mathbb{R}^N$ não nulo tal que y^* é constante sobre $\mathscr{C}(t)$. Como este conjunto é simétrico (Corolário 2.13) e y^* é linear concluímos que y^* é identicamente nulo sobre $\mathscr{C}(t)$. O Teorema 2.15 implica que $y^* M_{A,B} = 0$, isto é, o sistema (2.16) não é exato.

($4 \Rightarrow 1$) Suponha que existe $y \in \mathbb{R}^N$ não nulo tal que $y^* M_{A,B} = 0$. O Teorema 2.15 implica que y^* é constante sobre $\mathscr{C}(t)$ para algum $t > 0$ e logo a Proposição 1.15 implica que $\dim \mathscr{C}(t) < N$.

□

Corolário 2.17. *$\mathscr{C}$ é não vazio, simétrico e convexo. Ademais, $\mathscr{C}$ é aberto se e somente se o sistema linear autônomo (2.16) é exato.*

Demonstração. É a reunião do Corolário 2.13 e do Teorema 2.16. □

Corolário 2.18. *O sistema (2.16) é exato se e somente se*

$$\dim \mathscr{A}(t, x) = N$$

para cada $x \in \mathbb{R}^N$ *e cada* $t > 0$.

Demonstração. Suponha que para algum $x \in \mathbb{R}^N$ existe $t > 0$ tal que $\dim \mathscr{A}(t, x) < N$. A Proposição 1.15 implica existe $h \in \mathbb{R}^N$ não nulo tal que h^* é constante sobre $\mathscr{A}(t, x)$. Defina $y := e^{-tA^*} h$. É fácil ver que $y \neq 0$ e que y^* é constante sobre $\mathscr{C}(t)$. A Proposição 1.15 implica então que $\dim \mathscr{C}(t) < N$ e, pelo Teorema 2.16, temos que (2.16) não é exato.

A recíproca é simétrica e fica sob responsabilidade do leitor. □

Os resultados finais desta seção revelam como variam os conjuntos $\mathscr{A}(t,x)$ e $\mathscr{C}(t)$ com relação ao tempo t. Já vimos que estes conjuntos são sempre compactos e não vazios, isto é, pertencem a $\mathcal{P}_c(\mathbb{R}^N)$. Este espaço, como é discutido no Apêndice E, pode ser munido de uma métrica, a *métrica de Hausdorff*, definida pela equação (E.1). Sempre que falarmos do espaço $\mathcal{P}_c(\mathbb{R}^N)$ pensaremos nele munido da topologia induzida pela métrica de Hausdorff. Nesse sentido, mostraremos que os conjuntos $\mathscr{A}(t,x)$ e $\mathscr{C}(t)$ dependem continuamente de t.

Teorema 2.19. *A transformação*

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{C} \; : \; \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathcal{P}_c(\mathbb{R}^N) \\ t & \longmapsto & \mathscr{L}_t(\mathscr{U}(t)) \end{array} \tag{2.23}$$

é localmente lipschitziana e, portanto, contínua na métrica de Hausdorff.

Demonstração. Seja $l > 0$. Para quaisquer $t_1, t_2 \in [0,l]$ distintos, sem perda de generalidade $t_1 < t_2$, temos pelo Lema 2.9 que $\mathscr{C}(t_1) \subset \mathscr{C}(t_2)$. Ademais, dado $x \in \mathscr{C}(t_2)$ existe $u \in \mathscr{U}(t_2)$ tal que

$$\begin{aligned} x &= \int_0^{t_2} e^{-sA} Bu(s)ds \\ &= \int_0^{t_1} e^{-sA} Bu(s)ds + \int_{t_1}^{t_2} e^{-sA} Bu(s)ds \\ &= y + \int_{t_1}^{t_2} e^{-sA} Bu(s)ds \end{aligned}$$

onde evidentemente $y \in \mathscr{C}(t_1)$. Logo

$$\begin{aligned} |x-y| &\leq \int_{t_1}^{t_2} |e^{-sA}B||u(s)|ds \\ &< K|t_2 - t_1| \end{aligned}$$

onde $K := \sup\{|e^{-sA}B| : 0 \leq s \leq l\} + 1$. Isto implica que

$$d(x, \mathscr{C}(t_1)) < K|t_2 - t_1|$$

e, como $x \in \mathscr{C}(t_2)$ é arbitrário, temos que $\mathscr{C}(t_2) \subset N(\mathscr{C}(t_1), K|t_2 - t_1|)$.

Concluímos então que

$$\rho(\mathscr{C}(t_1), \mathscr{C}(t_2)) \leq K|t_2 - t_1|$$

e isto vale para quaisquer $t_1, t_2 \in [0,l]$. □

Proposição 2.20. *Para cada $x \in \mathbb{R}^N$ a transformação*

$$t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \mathscr{A}(t, x) \in \mathcal{P}_c(\mathbb{R}^N)$$

é contínua na métrica de Hausdorff.

Demonstração. Seja $t_1 > 0$: vamos mostrar que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow \rho(\mathscr{A}(t_1, x), \mathscr{A}(t_2, x)) < \epsilon.$$

Observemos inicialmente que, dado $t_2 > t_1$, o seguinte raciocínio segue. Tomando $z_1 \in \mathscr{A}(t_1, x)$ existe $y_1 \in \mathscr{C}(t_1)$ tal que $z_1 = e^{t_1 A}(x + y_1)$. Como também $y_1 \in \mathscr{C}(t_2)$, visto que $t_1 < t_2$, temos que

$$z_2 := e^{t_2 A}(x + y_1) = e^{(t_2 - t_1)A} z_1$$

é um elemento de $\mathscr{A}(t_2, x)$. Então

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2| &= |(e^{(t_2-t_1)A} - I)z_1| \\ &\leq |e^{(t_2-t_1)A} - I||z_1| \\ &\leq K|e^{(t_2-t_1)A} - I| \end{aligned}$$

onde $K := \sup\{|z| : z \in \mathscr{A}(t_1, x)\}$: concluímos da continuidade da exponencial que existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$t_1 < t_2 < t_1 + \frac{\delta_1}{2} \Rightarrow \mathscr{A}(t_1, x) \subset N(\mathscr{A}(t_2, x), \epsilon/2).$$

Se tomarmos agora $t_2 \in]t_1, t_1 + \delta_1/2[$ e $z_2 \in \mathscr{A}(t_2, x)$ temos que existe $u \in \mathscr{U}(t_2)$ tal que

$$\begin{aligned} z_2 &= e^{t_2 A}\left\{x + \int_0^{t_2} e^{-sA}Bu(s)ds\right\} \\ &= e^{t_2 A}\left\{x + \int_0^{t_1} e^{-sA}Bu(s)ds + \int_{t_1}^{t_2} e^{-sA}Bu(s)ds\right\} \\ &= e^{t_2 A}\left\{e^{-t_1 A}z_1 + \int_{t_1}^{t_2} e^{-sA}Bu(s)ds\right\} \end{aligned}$$

onde $z_1 \in \mathscr{A}(t_1, x)$. Logo

$$\begin{aligned}|z_2 - z_1| &= \left|(e^{(t_2-t_1)A} - I)z_1 + e^{t_2 A}\int_{t_1}^{t_2} e^{-sA}Bu(s)ds\right| \\ &\leq |e^{(t_2-t_1)A} - I||z_1| + |e^{t_2 A}|\int_{t_1}^{t_2} |e^{-sA}||B|ds \\ &\leq K|e^{(t_2-t_1)A} - I| + L_1|e^{t_2 A}||B||t_1 - t_2| \\ &\leq K|e^{(t_2-t_1)A} - I| + L_1 L_2|B||t_1 - t_2|\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}L_1 &:= \sup\{|e^{-sA}| : s \in [t_1, t_1 + \delta/2]\}, \\ L_2 &:= \sup\{|e^{sA}| : s \in [t_1, t_1 + \delta/2]\}.\end{aligned}$$

Concluímos que existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$t_1 < t_2 < t_1 + \frac{\delta_2}{2} \Rightarrow \mathscr{A}(t_2, x) \subset N(\mathscr{A}(t_1, x), \epsilon/2).$$

Tomemos então $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$.

O caso $t_2 < t_1$ é análogo: dado $z_1 \in \mathscr{A}(t_1, x)$ temos que existem $u \in \mathscr{U}(t_1)$ e $z_2 \in \mathscr{A}(t_2, x)$ tais que

$$z_1 = e^{t_1 A}\left\{e^{-t_2 A}z_2 + \int_{t_2}^{t_1} e^{-sA}Bu(s)ds\right\}$$

o que implica que

$$z_2 = e^{t_2 A}\left\{e^{-t_1 A}z_1 + \int_{t_1}^{t_2} e^{-sA}Bu(s)ds\right\}$$

e portanto

$$t_1 - \frac{\delta}{2} < t_2 < t_1 + \Rightarrow \mathscr{A}(t_1, x) \subset N(\mathscr{A}(t_2, x), \epsilon/2);$$

em contrapartida, dado $z_2 \in \mathscr{A}(t_2, x)$ existe $z_1 \in \mathscr{A}(t_1, x)$ tal que $z_2 = e^{(t_1-t_2)A}z_1$, ou seja, $z_1 = e^{(t_2-t_1)A}z_2$ e, portanto,

$$t_1 - \frac{\delta}{2} < t_2 < t_1 + \Rightarrow \mathscr{A}(t_2, x) \subset N(\mathscr{A}(t_1, x), \epsilon/2).$$

Concluímos que

$$|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow \rho(\mathscr{A}(t_1, x), \mathscr{A}(t_2, x)) < \epsilon.$$

A argumentação para o caso $t_1 = 0$ é análoga. □

2.4 O Princípio do Bang-Bang

Faremos agora uma breve interrupção em nossa tarefa de obter propriedades geométricas do sistema de controle linear autônomo para enunciar e demonstrar um resultado de caráter mais analítico: o Princípio do Bang-Bang, o qual nos garante que todo ponto alcançável por algum controle admissível pode ser alcançado também por um controle do tipo *bang-bang*, isto é, um controle que mora quase sempre nos pontos extremos de $[-1,1]^M$.

Este princípio é de fundamental importância à Teoria de Controle, tanto no âmbito prático como no âmbito teórico. Nas aplicações da Teoria de Controle, os controles do tipo *bang-bang* são mais fáceis de sintetizar, e correspondem aos controles que sempre utilizam a potência máxima disponível nos sistemas de controle mecânicos, por exemplo. Nas questões teóricas, por exemplo na teoria do *problema do tempo ótimo*, como veremos no Capítulo 3, a possibilidade de substituirmos qualquer controle efetivo por um controle *bang-bang* traz simplificações a várias demonstrações.

A demonstração do Princípio do Bang-Bang que expusemos aqui é bastante distinta daquela encontrada em [MS82]. Para esta parte inspiramo-nos, principalmente, em [Eva09], o qual utiliza o Teorema de Krein-Milman (Teorema D.7). Esta abordagem possui prós e contras. Contra ela, podemos argumentar que há o custo de introduzir ao nosso estudo novas e pesadas ferramentas de Análise Funcional, além de nova abstração, e inclusive [MS82] utiliza esse argumento para fazer uma demonstração bastante diferente da que apresentamos e que, apesar de mais longa, não utiliza o Teorema de Krein-Milman. A favor, argumentamos que o Teorema de Krein-Milman abrevia bastante a demonstração. Mais que isso, ele provê alguma intuição geométrica ao problema, além de ser uma generalização do resultado em dimensão finita, conhecido daqueles que já fizeram algum curso de Programação Linear em nível de graduação. Estes dois últimos argumentos foram decisivos para nossa escolha de empregar a abordagem em questão, a qual ilustramos no decorrer da presente seção.

Definição 2.21. Dizemos que $u = (u_1, \ldots, u_M) \in \mathscr{U}$ é um *controle tipo* bang-bang se para cada $i \in \{1, \ldots, M\}$ vale

$$|u_i(t)| = 1 \text{ q.s. em } [0, T(u)].$$

Dado $x \in \mathbb{R}^N$, denotaremos o *conjunto dos controles efetivos para x em tempo t* por

$$\mathscr{E}_t(x) := \mathscr{L}_t^{-1}(\{-x\}) \cap \mathscr{U}(t). \tag{2.24}$$

Claro que dado $u \in \mathscr{U}(t)$ temos que

$$\begin{aligned} u \in \mathscr{E}_t(x) &\Leftrightarrow \mathscr{L}_t(u) = -x \\ &\Leftrightarrow x + \mathscr{L}_t(u) = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{tA}(x + \mathscr{L}_t(u)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{X}(t, x, u) = 0 \end{aligned}$$

ou seja, $u \in \mathscr{E}_t(x)$ se e somente se u é efetivo para x. Ademais, $x \in \mathscr{C}(t)$ se e somente se $\mathscr{E}_t(x) \neq \emptyset$. A seguinte propriedade dos conjuntos efetivos é imediata.

Proposição 2.22. *Para todo $x \in \mathbb{R}^N$ o conjunto $\mathscr{E}_t(x) \subset \mathscr{U}(t)$ é convexo, fracamente compacto e, se $x \in \mathscr{C}(t)$, não vazio.*

Demonstração. Segue da linearidade de $\mathscr{L}_t$ que $\mathscr{L}_t^{-1}(\{-x\}) \subset L_2^M(t)$ é convexo e, como $\mathscr{U}(t)$ também o é, então $\mathscr{E}_t(x)$ é convexo.

Ainda de acordo com a Proposição 2.12, a transformação $\mathscr{L}_t$ é fracamente contínua, o que implica que $\mathscr{L}_t^{-1}(\{-x\}) \subset L_2^M(t)$ é fracamente fechado. Como $\mathscr{U}(t)$ é fracamente compacto e $L_2^M(t)$ é separado então $\mathscr{U}(t)$ é fracamente fechado. Logo $\mathscr{E}_t(x)$ é a intersecção de dois fechados na topologia fraca e, portanto, fechado nesta topologia. Como além disso $\mathscr{E}_t(x) \subset \mathscr{U}(t)$ é um fechado contido em um compacto então $\mathscr{E}_t(x)$ é compacto na topologia fraca. $\square$

Suponhamos então que $x \in \mathscr{C}(t)$. Recordando que a topologia fraca é localmente convexa, a proposição anterior em conjunto com o Teorema de Krein-Milman (Teorema D.7) implicam que $\mathscr{E}_t(x)$ possui um ponto extremo (veja o Apêndice D), isto é, existe $u \in \mathscr{E}_t(x)$ tal que para quaisquer $u_+, u_- \in \mathscr{E}_t(x)$ e $\lambda \in \,]0,1[$ temos

$$u \neq \lambda u_+ + (1-\lambda) u_-.$$

O que mostraremos na sequência é que estes pontos extremos são controles *bang-bang*.

Teorema 2.23. *Seja $u \in \mathscr{U}(t)$. Suponha que existe $i \in \{1, \dots, M\}$ tal que*

$$H := \{s \in [0,t] : |u_i(s)| < 1\}$$

tem medida positiva. Então existem $u_+, u_- \in \mathscr{U}(t)$ tais que

1. *para cada $j \neq i$ vale $u_{+,j} = u_j = u_{-,j}$;*
2. *$\mathscr{L}_t(u_+) = \mathscr{L}_t(u) = \mathscr{L}_t(u_-)$; e*
3. *$u \in \,]u_+, u_-[$.*

Demonstração. Vamos mostrar inicialmente que existe $\epsilon > 0$ tal que

$$G_\epsilon := \{s \in [0,t] : |u_i(s)| \leq 1 - \epsilon\}$$

tem medida positiva. Para tanto, suponha por absurdo que para todo $\epsilon > 0$ o conjunto G_ϵ tem medida nula. Logo

$$H = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left\{ s \in [0,t] : |u_i(s)| \leq 1 - \frac{1}{n} \right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} G_{1/n}$$

seria reunião enumerável de conjuntos de medida nula, o que contradiz $\mathbf{m}(H) > 0$. Logo existe um tal $\epsilon > 0$ que satisfaz a propriedade acima: até o fim da demonstração, $G := G_\epsilon$ tem medida positiva.

Defina

$$\begin{array}{rccc} \psi & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^M \\ & & x & \longmapsto & xe_i \end{array}$$

ou seja, para cada $x \in \mathbb{R}$ o vetor $\psi(x) \in \mathbb{R}^M$ tem a i-ésima componente igual a x e as demais nulas. Definimos ainda $\Psi : L_2(t) \to \mathbb{R}^M$ por

$$\Psi(\alpha) := \int_G e^{-sA} B\psi(\alpha(s))ds$$

Seja agora $\mathcal{B}$ o conjunto das funções $\alpha \in L_2(t)$ limitadas e que se anulam apenas em um conjunto de medida nula, o que implica que Ψ não é injetora sobre $\mathcal{B}$. Com efeito, todos os polinômios não nulos em $[0,t]$ pertencem a $\mathcal{B}$. Se Ψ fosse injetora sobre $\mathcal{B}$ então também o seria sobre o espaço de todos os polinômios. Isto é um absurdo, pois este espaço não é finitamente gerado e o contradomínio de Ψ, que é uma transformação linear, é um espaço de dimensão finita.

Mostramos que existe $\beta \in \mathcal{B}$ tal que $\Psi(\beta) = 0$. Note que, sem perda de generalidade, podemos tomar β limitada por 1. Redefinindo agora β como identicamente nula fora de G temos

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_t(\psi \circ \beta) &= \int_0^t e^{-sA} B\psi(\beta(s))ds \\ &= \int_G e^{-sA} B\psi(\beta(s))ds \\ &= \Psi(\beta) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Definimos agora $u_+, u_- \in L_2^M(t)$ por

$$\begin{aligned} u_+ &:= u + \epsilon(\psi \circ \beta) \\ u_- &:= u - \epsilon(\psi \circ \beta) \end{aligned}$$

para cada $s \in [0,t]$. Segue da definição de β que $u_+ \neq u \neq u_-$. Observe também que $u_+, u_- \in \mathscr{U}(t)$:

se $j \neq i$ ou $s \notin G$ então $\psi(\beta(s))_j = 0$ e então

$$\begin{aligned}|u_{\pm,j}(s)| &\leq |u_j(s)| + \epsilon|\psi(\beta(s))_j| \\ &= |u_j(s)| \\ &\leq 1\end{aligned}$$

mas se $s \in G$ vale

$$\begin{aligned}|u_{\pm,i}(s)| &\leq |u_i(s)| + \epsilon|\psi(\beta(s))_i| \\ &\leq 1 - \epsilon + \epsilon \\ &\leq 1.\end{aligned}$$

Também está claro que se $j \neq i$ vale $u_{+,j} = u_j = u_{-,j}$.

Para a segunda asserção, a linearidade de $\mathscr{L}_t$ implica que

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_t(u_\pm) &= \mathscr{L}_t(u) \pm \epsilon\mathscr{L}_t(\psi \circ \beta) \\ &= \mathscr{L}_t(u).\end{aligned}$$

Finalmente, observamos que

$$u = \frac{1}{2}(u_+ + u_-)$$

o que implica que $u \in \,]u_+, u_-[$. □

A demonstração do teorema acima foi extraída excepcionalmente de [Eva09] (veja o Teorema 2.10 dessa referência). O teorema anterior e a discussão que o precede implicam na seguinte versão do Princípio do Bang-Bang, a qual denominaremos informalmente *versão 1*.

Corolário 2.24 (O Princípio do Bang-Bang v.1)**.** *Se $x \in \mathscr{C}(t)$ então existe $u \in \mathscr{E}_t(x)$ do tipo* bang-bang*. Isto quer dizer que se x pode ser dirigido à origem em tempo t utilizando-se algum controle admissível, então também podemos dirigir x à origem em tempo t utilizando um controle do tipo* bang-bang*.*

Ademais, se $z \in \mathbb{R}^N$ e $y \in \mathscr{A}(t, z)$ então existe um controle do tipo bang-bang *que dirige z a y em tempo t.*

Demonstração. Já vimos que se $x \in \mathscr{C}(t)$ então $\mathscr{E}_t(x)$ é convexo, fracamente compacto e não vazio, e logo o Teorema de Krein-Milman implica que existe $u \in \mathscr{E}_t(x)$ um ponto extremo desse conjunto. Aplicando então a contra positiva do teorema anterior temos que para cada $i \in \{1, \ldots, M\}$ vale $|u_i(s)| = 1$ q.s. em $[0, t]$, isto é, u é do tipo *bang-bang*.

Para a segunda parte, se $y \in \mathscr{A}(t, z)$ então existe $x \in \mathscr{C}(t)$ tal que $y = e^{tA}(z + x)$. Logo para todo $u \in \mathscr{E}_t(x)$ vale que $y = e^{tA}(z - \mathscr{L}_t(u))$. Basta agora tomar $u \in \mathscr{E}_t(x)$ *bang-bang*, cuja existência a primeira asserção deste corolário garante-nos. □

Vamos agora empregar as mesmas ideias que utilizamos na demonstração do Princípio do Bang-Bang v.1 para deduzir uma versão mais forte deste princípio, da qual podemos adiantar o seguinte enunciado, o qual tornaremos preciso na sequência: todo controle admissível pode ser substituído por outro idêntico a ele a menos de uma componente, sendo que este novo controle é *bang-bang* nesta componente remanescente.

Dados $u \in \mathscr{U}(t)$ e $i \in \{1, \ldots, M\}$ fixados definimos

$$Q_i(u) := \{v \in \mathscr{U}(t) : \mathscr{L}_t(v) = \mathscr{L}_t(u) \text{ e } v_j = u_j \text{ para todo } j \neq i\}.$$

Observe que $Q_i(u) \subset \mathscr{E}_t(\{-\mathscr{L}_t(u)\})$, e que a convexidade deste último implica facilmente que $Q_i(u)$ é também convexo.

Proposição 2.25. *O conjunto $Q_i(u) \subset L_2^M(t)$ é fracamente compacto.*

Demonstração. Como $Q_i(u) \subset \mathscr{E}_t(\{-\mathscr{L}_t(u)\})$ basta mostrar que $Q_i(u)$ é fracamente fechado e, como neste contexto a topologia fraca é metrizável (veja a discussão na Seção 1.2), basta mostrar que esse conjunto é fracamente sequencialmente compacto.

Seja $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de $Q_i(u)$ fracamente convergente, digamos, para um elemento $v \in \mathscr{E}_t(\{-\mathscr{L}_t(u)\})$. Temos que mostrar que $v \in Q_i(u)$, ou seja, fixado $j \neq i$ devemos mostrar que $v_j = u_j$. A demonstração desse fato é fácil e usa as mesmas técnicas que vimos na Seção 1.2. Por conta disso, damos a seguir apenas um guia para a demonstração, deixando os detalhes sob responsabilidade do leitor.

Por exemplo, se para algum $j \neq i$ o conjunto

$$H := \{s \in [0, t] : v_j(s) - u_j(s) > 0\}$$

tem medida positiva, e considerando $\chi : [0, t] \to \mathbb{R}$ a função característica de H, definimos $w = (w_1, \ldots, w_M) \in L_2^M(t)$ por

$$w_k(s) := \begin{cases} \chi(s), & \text{se } k = j \\ 0, & \text{se } k \neq j \end{cases}$$

para cada $s \in [0, t]$. Como $v_n \xrightarrow{\omega} v$ então $\langle w, v_n \rangle \to \langle w, v \rangle$ e, portanto, $\langle w, v_n - u \rangle \to \langle w, v - u \rangle$. Mas algumas contas simples mostram que $\langle w, v_n - u \rangle = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ enquanto $\langle w, v - u \rangle > 0$, o que nos leva a uma contradição. □

Concluímos que o conjunto $Q_i(u)$ é convexo, fracamente compacto e não vazio, pois evidentemente $u \in Q_i(u)$. Aplicando o Teorema de Krein-Milman, concluímos que $Q_i(u)$ possui pontos extremos.

Proposição 2.26. *Suponha que $w \in Q_i(u)$ é um ponto extremo. Então $|w_i(s)| = 1$ q.s. em $[0, t]$.*

Demonstração. Argumentaremos por contradição. Se $\mathbf{m}(\{s \in [0,t] : |w_i(s)| < 1\}) > 0$ existem, segundo o Teorema 2.23, $u_+, u_- \in \mathscr{U}(t)$ tais que

1. para cada $j \neq i$ vale $u_{+,j} = w_j = u_{-,j}$,
2. $\mathscr{L}_t(u_+) = \mathscr{L}_t(w) = \mathscr{L}_t(u_-)$, e
3. $w \in]u_+, u_-[$.

Como por definição de $Q_i(u)$ temos também que $\mathscr{L}_t(w) = \mathscr{L}_t(u)$, as condições 1 e 2 acima implicam que $u_+, u_- \in Q_i(u)$. Mas, nesse caso, a condição 3 contradiz a extremalidade de $w \in Q_i(u)$. □

Corolário 2.27 (O Princípio do Bang-Bang v.2)**.** *Dados $u \in \mathscr{U}(t)$ e $i \in \{1, \ldots, M\}$ existe $w \in \mathscr{U}(t)$ tal que*

1. *para cada $j \neq i$ vale $w_j = u_j$;*
2. *$|w_i(s)| = 1$ q.s. em $[0,t]$; e*
3. *$\mathscr{L}_t(w) = \mathscr{L}_t(u)$*

Ou seja, todo controle admissível pode ser substituído por outro tão eficaz quanto ele e que é igual a ele exceto na i-ésima componente, e tal que esse novo controle é "do tipo bang-bang *somente na componente i".*

Capítulo 3

Controle em tempo ótimo

Neste capítulo estudaremos o *problema do tempo ótimo*: dado um ponto controlável x, o qual por definição pode ser dirigido ao objetivo em algum tempo utilizando um controle admissível, desejamos dirigi-lo ao objetivo o mais rápido possível, isto é, queremos encontrar um controle efetivo para x que o leve ao objetivo mais rápido que qualquer outro controle efetivo para x.

Assim como no Capítulo 2 nosso objetivo principal é investigar a teoria dos sistemas lineares autônomos: vamos estudar o problema do tempo ótimo do sistema (2.16). Entretanto, daremos abaixo uma definição mais abrangente deste problema, utilizando as mesmas notações da Seção 2.2.

Definição 3.1 (Problema do tempo ótimo)**.** No contexto do problema da controlabilidade (Definição 2.4) seja $x \in \mathscr{C}$. Queremos encontrar, se possível, $u_1 \in \mathscr{U}$ e $t_1 \geq 0$ tais que $(t_1, 0, x, u_1) \in D$, $\mathbf{X}(t_1, 0, x, u_1) \in \mathscr{T}(t_1)$ e

$$\left.\begin{array}{rcl} (t_2, 0, x, u_2) & \in & D \\ \mathbf{X}(t_2, 0, x, u_2) & \in & \mathscr{T}(t_2) \end{array}\right\} \Rightarrow t_1 \leq t_2.$$

Nesse caso, dizemos que u_1 é um *controle em tempo ótimo* para x, ou apenas um *controle ótimo* para x. Dizemos também que t_1 é o *tempo ótimo* para x.

Observe que assim como na definição de controlabilidade as definições de controle ótimo e de tempo ótimo dependem diretamente das nossas escolhas de conjunto admissível $\mathscr{U}$, função objetivo $\mathscr{T}$ e função de dinâmica f. Tal como anteriormente, consideraremos para todos os fins estas escolhas fixadas.

Note que, se por um lado

$$t_1 = \inf\{t \geq 0 : x \in \mathscr{C}(t)\}$$

e, portanto, o tempo ótimo para x, se houver, é único, por outro lado pode haver vários controles que dirigem x ao objetivo em tempo ótimo, isto é, vários controles ótimos para x.

Novamente neste capítulo adotaremos a simplificação $\mathscr{T}(t) = \{0\}$ para todo $t \geq 0$, de modo que se t_1 é o tempo ótimo para $x \in \mathscr{C}$ então

$$t_1 = \inf\{t \geq 0 : 0 \in \mathscr{A}(t, x)\}$$

e a recíproca vale desde que o ínfimo acima seja alcançado.

3.1 Controle ótimo linear autônomo

Nosso objetivo a partir de agora será estudar os controles em tempo ótimo do sistema linear autônomo (2.16). Em vista da Proposição 2.10 e do Corolário 2.11 temos a seguinte caracterização dos controles ótimos do sistema (2.16).

Proposição 3.2. *Dado $x \in \mathscr{C}$ temos que $u \in \mathscr{U}$ é um controle ótimo para x se e somente se u é efetivo para x e $T(u) \leq T(v)$ para todo controle v efetivo para x.*

Nestas condições, o tempo ótimo para x é exatamente $T(u)$.

O primeiro resultado fundamental desta seção, o qual já utiliza toda a instrumentação que desenvolvemos nas seções anteriores, é que todo ponto controlável admite um controle ótimo.

Teorema 3.3 (Existência de controles ótimos)**.** *Todo $x \in \mathscr{C}$ admite um controle ótimo.*

Demonstração. Defina

$$A := \{t \geq 0 : 0 \in \mathscr{A}(t, x)\}$$

o qual é não vazio (pois x é controlável) e evidentemente limitado inferiormente por 0, o que implica que existe $T := \inf A$. Provaremos que $T \in A$.

Suponha por absurdo que $0 \notin \mathscr{A}(T, x)$. Logo existe $r > 0$ tal que $\bar{\mathscr{B}}(0, r) \cap \mathscr{A}(T, x) = \emptyset$. Como a aplicação $t \mapsto \mathscr{A}(t, x)$ é contínua na métrica de Hausdorff temos, pela Proposição E.3, que existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} T < t < T + \delta &\Rightarrow \bar{\mathscr{B}}(0, r) \cap \mathscr{A}(t, x) = \emptyset \\ &\Rightarrow 0 \notin \mathscr{A}(t, x) \\ &\Rightarrow t \notin A \end{aligned}$$

o que contradiz a definição de T. Logo $0 \in \mathscr{A}(T, x)$ e, portanto, x admite um controle ótimo $u \in \mathscr{U}(T)$. □

3.1.1 Controles extremais e o Princípio do Máximo

O que faremos a seguir é um pequeno estudo da geometria da fronteira dos conjuntos acessíveis. Para tanto, introduziremos a noção de *controle extremal*, que são aqueles controles cuja respectiva trajetória mora sempre na fronteira relativa dos conjuntos acessíveis. Munidos desta ferramenta, ilustraremos a estrita relação entre as trajetórias ótimas e as fronteiras dos conjuntos acessíveis do sistema (2.16).

Definição 3.4. Dizemos que $u \in \mathscr{U}$ é um *controle extremal* para $x \in \mathbb{R}^N$ se

$$\mathbf{X}(t, x, u) \in \partial_r \mathscr{A}(t, x)$$

para todo $t \in [0, T(u)]$.

Note que a extremalidade de u não implica que este seja um controle efetivo para x. O seguinte lema mostra que para garantir a extremalidade de um controle basta verificar que o ponto final de sua trajetória está na fronteira relativa do respectivo conjunto acessível.

Lema 3.5. *Sejam $x \in \mathbb{R}^N$ e $u \in \mathscr{U}$. Se para algum $T \in [0, T(u)]$ vale*

$$\mathbf{X}(T, x, u) \in \partial_r \mathscr{A}(T, x)$$

então $\mathbf{X}(t, x, u) \in \partial_r \mathscr{A}(t, x)$ para todo $t \in [0, T]$.

Demonstração. Mostraremos a contra positiva. Suponha que existe $t_1 < T$ tal que $\mathbf{X}(t_1, x, u) \in \mathrm{Int}_r \mathscr{A}(t_1, x)$. Logo existe um aberto V_1 de $\mathscr{V}(\mathscr{A}(t_1, x))$ tal que $x_1 \in V_1 \subset \mathrm{Int}_r \mathscr{A}(t_1, x)$, onde $x_1 := \mathbf{X}(t_1, x, u)$, o que implica que cada $z \in V_1$ é acessível a partir de x em tempo t_1.

Para cada $z \in \mathbb{R}^N$ considere a equação de Carathéodory

$$\begin{cases} y' &= Ay + Bu \\ y(t_1) &= z \end{cases}$$

(observe que o controle u nesta equação é fixado). Analogamente à FVP (veja a demonstração da Proposição 2.10), mostra-se que a solução da equação acima é dada, para $t > t_1$, por

$$\phi_z(t) = e^{(t-t_1)A} z + \int_{t_1}^{t} e^{(t-s)A} B u(s) ds.$$

Note que para cada $t > t_1$ fixado a aplicação

$$z \in \mathbb{R}^N \mapsto \phi_z(t) \in \mathbb{R}^N$$

é aberta. Da unicidade de soluções – uma conta simples também comprova – temos também que $\phi_{x_1}(t) = \mathbf{X}(t, x, u)$ para cada $t > t_1$.

Observe agora que se $z \in \mathscr{A}(t_1, x)$ existe $v \in \mathscr{U}(t_1)$ tal que

$$z = \mathbf{X}(t_1, x, v) = e^{t_1 A} x + e^{t_1 A} \int_0^{t_1} e^{-sA} B v(s) ds$$

o que implica que

$$\begin{aligned} \phi_z(t) &= e^{(t-t_1)A} e^{t_1 A} x + e^{(t-t_1)A} e^{t_1 A} \int_0^{t_1} e^{-sA} B v(s) ds + e^{tA} \int_{t_1}^{t} e^{-sA} B u(s) ds \\ &= e^{tA} x + e^{tA} \int_0^{t_1} e^{-sA} B v(s) ds + e^{tA} \int_{t_1}^{t} e^{-sA} B u(s) ds \end{aligned}$$

o qual claramente pertence a $\mathscr{A}(t,x)$. Logo, para cada $t > t_1$ fixado a transformação

$$z \in \mathscr{A}(t_1,x) \mapsto \phi_z(t) \in \mathscr{A}(t,x)$$

está bem definida e é aberta. Logo

$$z \in \mathscr{A}(t_1,x) \mapsto \phi_z(T) \in \mathscr{A}(T,x)$$

leva abertos em abertos e portanto a imagem de V_1 por essa transformação é um aberto que contém $\mathbf{X}(T,x,u) = \phi_{x_1}(T)$ e que está inteiramente contido em $\mathscr{A}(T,x)$, o que resulta em

$$\mathbf{X}(T,x,u) \in \mathrm{Int}_r\mathscr{A}(T,x).$$

□

Corolário 3.6. *O controle admissível $u \in \mathscr{U}(T)$ é um controle extremal para $x \in \mathbb{R}^N$ se e somente se $\mathbf{X}(T,x,u) \in \partial_r\mathscr{A}(T,x)$.*

Proposição 3.7. *Seja $x \in \mathscr{C}$. Se $u \in \mathscr{U}$ é um controle ótimo para x então u é um controle extremal para x.*

Demonstração. Em vista do corolário anterior é suficiente mostrar que

$$0 = \mathbf{X}(T,x,u) \in \partial_r\mathscr{A}(T,x)$$

para $T = T(u)$. Como translações e exponenciais de matrizes são homeomorfismos do $\mathbb{R}^N$ então

$$\partial_r\mathscr{A}(T,x) = e^{TA}x + e^{TA}\partial_r\mathscr{C}(T).$$

Assim, em vez de mostrar que $0 \in \partial_r\mathscr{A}(T,x)$ vamos mostrar, equivalentemente, que $x \in \partial_r\mathscr{C}(T)$.

Suponha por absurdo que $x \in \mathrm{Int}_r\mathscr{C}(T)$. Recordemos que a aplicação $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \mathscr{C}(t) \in \mathcal{P}_c(\mathbb{R}^N)$ é contínua na métrica de Hausdorff. A transformação $\mathfrak{I}_{\mathscr{C}(T)} : \mathscr{V}(\mathscr{C}(T)) \mapsto \mathbb{R}^{\dim \mathscr{C}(T)}$ é uma isometria e portanto satisfaz todas as hipóteses da Proposição E.5, a qual implica que a transformação

$$K \in \mathcal{P}_c(\mathscr{V}(\mathscr{C}(T))) \mapsto \mathfrak{I}_{\mathscr{C}(T)}(K) \in \mathcal{P}_c(\mathbb{R}^{\dim \mathscr{C}(T)})$$

é contínua quando munimos os espaços de ambos os lados de suas respectivas métricas de Hausdorff. Temos ainda pelo Lema 2.9 que $\mathscr{C}(t) \subset \mathscr{C}(T)$ para todo $t \in [0,T]$ e, portanto

$$\mathscr{C}(t) \in \mathcal{P}_c(\mathscr{V}(\mathscr{C}(T)))$$

para todo $t \in [0,T]$. Isto nos permite definir a transformação

$$\begin{array}{rcccl} \mathfrak{C} & : & [0,T] & \longrightarrow & \mathcal{P}_c(\mathbb{R}^{\dim \mathscr{C}(T)}) \\ & & t & \longmapsto & \mathfrak{I}_{\mathscr{C}(T)}(\mathscr{C}(t)) \end{array}$$

a qual é, segundo a argumentação acima, contínua. Note que $\mathfrak{C}(t) \subset \mathbb{R}^{\dim \mathscr{C}(T)}$ é convexo para todo $t \in [0,T]$, pois $\mathscr{C}(t)$ o é.

Seja $\tilde{x} := \mathfrak{I}_{\mathscr{C}(T)}(x) \in \mathbb{R}^{\dim \mathscr{C}(T)}$, o que implica que $\tilde{x} \in \mathrm{Int}\mathfrak{C}(T)$, pois $x \in \mathrm{Int}_r\mathscr{C}(T)$ por hipótese. Aplicando agora a Proposição E.4 ao espaço $\mathbb{R}^{\dim \mathscr{C}(T)}$ temos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} T - \delta < t < T &\Rightarrow \tilde{x} \in \mathrm{Int}\mathfrak{C}(t) \\ &\Rightarrow x \in \mathscr{C}(t) \end{aligned}$$

o que implica que x pode ser dirigido à origem em tempo $t < T$, o que por sua vez contradiz a minimalidade de $T = T(u)$, absurdo. Logo $x \in \partial_r\mathscr{C}(T)$ como queríamos. □

Provaremos agora uma versão daquele teorema que na Teoria de Controle Ótimo é conhecido como o *Princípio do Máximo de Pontryagin*, cuja formulação mais geral foge do escopo da presente monografia. Nossa versão versará a respeito apenas dos sistemas lineares autônomos, fornecendo condições necessárias para um controle admissível desse sistema ser um controle ótimo. Desta forma, sempre que falarmos em Princípio do Máximo estaremos nos referindo a esta particular versão e não a qualquer outra.

Teorema 3.8. *Seja $x \in \mathbb{R}^N$. Então $u \in \mathscr{U}(T)$ é um controle extremal para x se e somente se existe $h \in \mathbb{R}^N$ não nulo tal que*

$$u(t) = \sigma(h^* e^{-tA} B) \text{ q.s. em } [0,T]. \tag{3.1}$$

Nesse caso temos, ainda, que

$$h^* e^{-tA} B u(t) = \sup\{h^* e^{-tA} B y : y \in [-1,1]^M\} \text{ q.s. em } [0,T]. \tag{3.2}$$

Demonstração. Suponhamos inicialmente que u é um controle extremal para x, isto é, para cada $t \in [0,T]$ temos

$$\phi(t) := \mathbf{X}(t,x,u) \in \partial_r\mathscr{A}(t,x).$$

Como $\partial_r\mathscr{A}(t,x) \subset \partial\mathscr{A}(t,x)$ temos que $\phi(t) \in \partial\mathscr{A}(t,x)$ para cada $t \in [0,T]$. Recordando que $\mathscr{A}(T,x)$ é um conjunto convexo temos que existe um hiperplano de suporte para $\mathscr{A}(T,x)$ passando por $\phi(T)$, isto é, existe $n \in \mathbb{R}^N$ não nulo tal que $n^*p \leq n^*\phi(T)$ para todo $p \in \mathscr{A}(T,x)$ ou, ainda,

$$\begin{aligned} n^*\phi(T) &= \sup\{n^*p : p \in \mathscr{A}(T,x)\} \\ &= \sup\{n^*\mathbf{X}(T,x,v) : v \in \mathscr{U}(T)\}. \end{aligned}$$

Temos, aplicando a FVP para $\phi(T)$ e para cada $p \in \mathscr{A}(T,x)$, que

$$n^*e^{TA}\int_0^T e^{-sA}Bu(s)ds = \sup\left\{n^*e^{TA}\int_0^T e^{-sA}Bv(s)ds : v \in \mathscr{U}(T)\right\}$$

e, definindo

$$\begin{aligned} h &:= e^{TA^*}n \\ y(s) &:= B^*e^{-sA^*}h \end{aligned}$$

temos $h \neq 0$ (pois e^{TA} é não singular) e $y \in L_2^M(T)$. Reescrevendo a equação acima, com as devidas simplificações, temos

$$\langle y, u\rangle = \sup\{\langle y, v\rangle : v \in \mathscr{U}(T)\}$$

e então pela Proposição 1.9 temos que

$$u(t) = \sigma(y(t)) = \sigma(h^*e^{-tA}B) \text{ q.s. em } [0,T].$$

Reciprocamente, se existe $h \neq 0$ tal que $u(t) = \sigma(h^*e^{-tA}B)$ q.s. em $[0,T]$ então segue da mesma Proposição 1.9 que

$$\int_0^T h^*e^{-sA}Bu(s)ds = \sup\left\{\int_0^T h^*e^{-sA}Bv(s)ds : v \in \mathscr{U}(T)\right\}$$

e que o supremo acima é alcançado apenas por $v = u$. Definindo então $n := e^{-TA^*}h \neq 0$ recuperamos

$$n^*e^{TA}\int_0^T e^{-sA}Bu(s)ds = \sup\left\{n^*e^{TA}\int_0^T e^{-sA}Bv(s)ds : v \in \mathscr{U}(T)\right\}$$

e, portanto,

$$n^*\phi(T) = \sup\{n^*\mathbf{X}(T,x,v) : v \in \mathscr{U}(T)\} = \sup\{n^*p : p \in \mathscr{A}(T,x)\}.$$

Observe ainda que a definição de n em conjunto com a Proposição 1.9 implica que n^* não é constante sobre $\mathscr{A}(T,x)$. Temos então segundo o Lema D.5 que $\phi(T) \in \partial_r\mathscr{A}(T,x)$, visto que $\mathscr{A}(T,x)$ é compacto. Finalmente, segue da definição de ϕ e da caracterização de extremalidade dada pelo Corolário 3.6 que u é um controle extremal para x.

Agora, a equação (3.2) segue da condição (1.8) da Proposição 1.9. □

Corolário 3.9 (Princípio do Máximo)**.** *Se* $u \in \mathscr{U}$ *é um controle ótimo para* $x \in \mathscr{C}$ *então existe* $h \neq 0$ *tal que*

$$u(t) = \sigma(h^* e^{-tA} B)$$
$$h^* e^{-tA} B u(t) = \sup\{h^* e^{-tA} B y : y \in [-1,1]^M\}$$

q.s. em $[0, T(u)]$.

3.1.2 Sistemas normais

Introduziremos agora a noção de *normalidade*, que é uma condição sobre o sistema linear autônomo (2.16) mais forte que a de este ser exato. Veremos que a condição de normalidade implica na unicidade dos controles ótimos, e em seguida, daremos duas caracterizações alternativas dessa condição: uma geométrica e outra algébrica.

Definição 3.10. Dizemos que o sistema linear autônomo (2.16) é *normal* se para cada $T > 0$ e para cada $h \neq 0$ nenhuma componente de $h^* e^{-tA} B$, $t \in [0, T]$, se anula em conjunto de medida positiva.

Observe que, fixado $T > 0$, cada componente da função

$$t \in [0, T] \mapsto h^* e^{-tA} B \in (\mathbb{R}^M)^*$$

é uma função analítica real. Aplicando então o Princípio dos Zeros Isolados à i-ésima componente, por exemplo, temos que o conjunto dos pontos em $[0, T]$ em que esta componente se anula é ou o intervalo total $[0, T]$ ou um subconjunto enumerável deste, o qual, portanto, tem medida nula. Logo, a condição de normalidade é equivalente à condição de que nenhuma componente de $h^* e^{-tA} B$ deva se anular identicamente.

Note também que o Teorema 2.15 implica que todo sistema normal é exato e, portanto, seus conjuntos acessíveis e controláveis possuem dimensão máxima, segundo o Teorema 2.16 e seu Corolário 2.18.

Proposição 3.11 (Unicidade sob normalidade)**.** *Sob a condição de normalidade cada* $x \in \mathscr{C}$ *admite um único controle ótimo, o qual é do tipo* bang-bang*.*

Demonstração. Já demonstramos a existência de controles ótimos. É imediato da definição de normalidade e do Princípio do Máximo que os controles ótimos associados a sistemas normais são do tipo *bang-bang*.

Para a unicidade, suponha que $v, w \in \mathscr{U}(T)$ sejam controles ótimos para x e, portanto, do tipo *bang-bang*. Como $\mathscr{U}(T)$ é convexo temos que $u := \frac{1}{2}(v + w) \in \mathscr{U}(T)$. Uma conta rápida mostra que u é um controle efetivo para x e, portanto, um controle ótimo para x. Isto implica que u é um controle *bang-bang*.

Entretanto, é fácil mostrar que se

$$v, \quad w, \quad \tfrac{1}{2}(v+w)$$

são *bang-bang* então $v = w$. □

O objetivo final deste trabalho, ao qual nos dedicaremos daqui em diante, é dar duas caracterizações alternativas para a condição de normalidade, uma algébrica e outra geométrica, e depois demonstrar que, sob algumas hipóteses adicionais, podemos garantir a recíproca do Princípio do Máximo.

Definição 3.12. Sejam $x \in \mathbb{R}^N$ e $y \in \mathscr{A}(T,x)$. Dizemos que *há um único caminho ligando x a y em tempo T* se para quaisquer $u, v \in \mathscr{U}(T)$ vale

$$\mathbf{X}(T,x,u) = y = \mathbf{X}(T,x,v) \Rightarrow \mathbf{X}(t,x,u) = \mathbf{X}(t,x,v) \ \forall t \in [0,T].$$

Lema 3.13. *Suponha que nenhuma coluna de B é identicamente nula.*

Sejam $x \in \mathbb{R}^N$ e $y \in \mathscr{A}(T,x)$. Então há um único caminho ligando x a y em tempo T se e somente se existe um único controle que dirige x a y em tempo T.

Demonstração. Claro que se existe um único controle que dirige x a y em tempo T então há um único caminho ligando x a y em tempo T – é precisamente aquele dado pela resposta associada ao supracitado controle, o qual por hipótese é único.

Suponha agora que $u, v \in \mathscr{U}(T)$ são controles distintos que dirigem x a y em tempo T i.e.

$$\mathbf{X}(T,x,u) = y = \mathbf{X}(T,x,v).$$

Vamos mostrar que há ao menos dois caminhos distintos ligando x a y em tempo T.

Já observamos anteriormente que dentre os controles admissíveis em tempo T

$$u, \quad v, \quad \tfrac{1}{2}(u+v)$$

ao menos um não é do tipo *bang-bang*: denotemo-lo por w. É fácil ver que como u e v dirigem x a y em tempo T então também o faz o controle $\frac{1}{2}(u+v)$ e, portanto, também w, ou seja, $\mathbf{X}(T,x,w) = y$. Como w não é do tipo *bang-bang* existe $i \in \{1,\dots,M\}$ tal que

$$H := \{t \in [0,T] : |w_i(t)| < 1\}$$

tem medida positiva. O Princípio do Bang-Bang v.2 (Corolário 2.27) garante a existência de $\tilde{w} \in \mathscr{U}(T)$ satisfazendo

1. para cada $j \neq i$ vale $\tilde{w}_j = w_j$,

2. $|\tilde{w}_i(t)| = 1$ q.s. em $[0,T]$ e

3. $\mathscr{L}_T(\tilde{w}) = \mathscr{L}_T(w)$

Pela condição 3 acima temos que $\mathbf{X}(T, x, \tilde{w}) = y$. Vamos mostrar que, entretanto, existe $t \in [0, T]$ tal que $\mathbf{X}(t, x, \tilde{w}) \neq \mathbf{X}(t, x, w)$, isto é, existem dois caminhos distintos ligando x a y em tempo T.

Suponha por absurdo que $\mathbf{X}(t, x, \tilde{w}) = \mathbf{X}(t, x, w)$ para todo $t \in [0, T]$. A FVP implica então que para cada t vale

$$\int_0^t e^{-sA} B\tilde{w}(s)ds = \int_0^t e^{-sA} Bw(s)ds$$

e portanto $\int_0^t e^{-sA} B(\tilde{w}(s) - w(s))ds = 0$ para todo $t \in [0, T]$. Segundo o Teorema C.6 a função $\psi : [0, T] \to \mathbb{R}^N$ dada por

$$\psi(t) := \int_0^t e^{-sA} B(\tilde{w}(s) - w(s))ds$$

é diferenciável q.s. em $[0, T]$ e vale

$$\psi'(t) = e^{-tA} B(\tilde{w}(t) - w(t)) = 0$$

q.s. em $[0, T]$, pois $\psi = 0$. Desta discussão concluímos que $B(\tilde{w}(t) - w(t)) = 0$ q.s. em $[0, T]$. Como $\tilde{w}$ e w têm as mesmas componentes, exceto possivelmente a i-ésima, concluímos que $b(\tilde{w}_i(t) - w_i(t)) = 0$ q.s. em $[0, T]$, onde $b \in \mathbb{R}^M$ é a i-ésima coluna de B.

Tomando $t \in H$ temos que $|w_i(t)| < 1$ e portanto

$$0 < |\tilde{w}_i(t)| - |w_i(t)| \leq \tilde{w}_i(t) - w_i(t)$$

para todo $t \in H$, exceto possivelmente sobre um subconjunto de H com medida nula. Concluímos que $\tilde{w}_i(t) - w_i(t) > 0$ sobre um conjunto de medida positiva, visto que $\mathbf{m}(H) > 0$ por hipótese e, portanto, $b = 0$. Mas isto contradiz a hipótese de que B não possui colunas identicamente nulas.

Logo existe $t \in [0, T]$ tal que $\mathbf{X}(t, x, \tilde{w}) \neq \mathbf{X}(t, x, w)$. □

Um comentário fundamental a respeito do lema acima é o de que não há perda de generalidade em supormos que nenhuma coluna de B é identicamente nula. De fato, se, por exemplo, a i-ésima coluna de B é nula, então nosso sistema de controle "ignora" a i-ésima coordenada de qualquer controle admissível que utilizarmos. Isto quer dizer que, na verdade, estamos escolhendo para o problema em questão um conjunto de controles admissíveis com uma coordenada excedente, e que para todos os efeitos não interfere nas respostas do sistema – uma coordenada inútil, que pode ser desconsiderada.

Em vista da discussão acima, consideraremos daqui em diante apenas sistemas (2.16) para os quais B não possui colunas identicamente nulas, de modo que o lema anterior valerá sempre.

Proposição 3.14. *Suponha que $y \in \mathscr{A}(T, x)$. Então há um único controle dirigindo x a y em tempo T se e somente se y é um ponto extremo de $\mathscr{A}(T, x)$.*

Demonstração. Suponha que há controles $u_+, u_- \in \mathscr{U}(T)$ distintos que dirigem x a y em tempo T. Pelo lema anterior, estes controles produzem caminhos distintos ligando x a y em tempo T e, portanto, existe $t \in]0, T[$ tal que, definindo

$$z_\pm := \mathbf{X}(t, x, u_\pm)$$

temos $z_+ \neq z_-$. Definimos $v, w : [0, T] \to [-1, 1]^M$ por

$$v(s) := \begin{cases} u_+(s), & \text{se } s \in [0, t] \\ u_-(s), & \text{se } s \in]t, T] \end{cases}$$
$$w(s) := \begin{cases} u_-(s), & \text{se } s \in [0, t] \\ u_+(s), & \text{se } s \in]t, T] \end{cases}$$

os quais claramente são controles admissíveis e satisfazem $v + w = u_+ + u_-$. Note que

$$\mathscr{L}_T(v) = \mathscr{L}_t(u_+) + \mathscr{L}_T(u_-) - \mathscr{L}_t(u_-)$$
$$\mathscr{L}_T(w) = \mathscr{L}_t(u_-) + \mathscr{L}_T(u_+) - \mathscr{L}_t(u_+)$$

o que implica que

$$\mathscr{L}_T(v + w) = \mathscr{L}_T(u_+) + \mathscr{L}_T(u_-)$$
$$\mathscr{L}_T(v - w) = 2(\mathscr{L}_t(u_+) - \mathscr{L}_t(u_-))$$

e portanto, se definirmos

$$p := \mathbf{X}(T, x, v)$$
$$q := \mathbf{X}(T, x, w)$$

temos claramente $p, q \in \mathscr{A}(T, x)$ e

$$\begin{aligned} p + q &= e^{TA}(2x + \mathscr{L}_T(v + w)) \\ &= e^{TA}(2x + \mathscr{L}_T(u_+) + \mathscr{L}_T(u_-)) \\ &= 2y \\ p - q &= e^{TA}\mathscr{L}_T(v - w) \\ &= 2e^{TA}(\mathscr{L}_t(u_+) - \mathscr{L}_t(u_-)) \\ &= 2e^{(T-t)A}(z_+ - z_-). \end{aligned}$$

Mostramos que $y = \frac{1}{2}(p + q)$ e $p - q \neq 0$, isto é, y não é um ponto extremo de $\mathscr{A}(T, x)$.

Para a recíproca, suponha que y não é um ponto extremo de $\mathscr{A}(T, x)$. Então existem $p, q \in$

$\mathscr{A}(T,x)$ distintos tais que $y = \frac{1}{2}(p+q)$, e então o Princípio do Bang-Bang v.1 implica que existem $v, w \in \mathscr{U}(T)$ distintos do tipo *bang-bang* tais que

$$\begin{aligned} p &= \mathbf{X}(T,x,v) \\ q &= \mathbf{X}(T,x,w). \end{aligned}$$

Mas então $u := \frac{1}{2}(v+w) \in \mathscr{U}(T)$ não é *bang-bang* e

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(T,x,u) &= e^{TA}(x + \mathscr{L}_T(u)) \\ &= e^{TA}\left(x + \frac{1}{2}(\mathscr{L}_T(v) + \mathscr{L}_T(w))\right) \\ &= \frac{1}{2}(p+q) \\ &= y \end{aligned}$$

isto é, u dirige x a y em tempo T. O Princípio do Bang-Bang v.1 garante, porém, que existe um controle *bang-bang* dirigindo x a y em tempo T, o qual deve ser distinto de u, já que este último, como vimos, não é *bang-bang*. □

Teorema 3.15 (Caracterização geométrica de normalidade)**.** *O sistema linear autônomo (2.16) é normal se e somente se for exato e para cada $x \in \mathbb{R}^N$ e para cada $T > 0$ o conjunto $\mathscr{A}(T,x)$ é estritamente convexo.*

Demonstração. Como $\mathscr{A}(T,x)$ é convexo, a Proposição D.4 implica que $\mathscr{A}(T,x)$ é estritamente convexo se e somente se todo $y \in \partial_r\mathscr{A}(T,x)$ é um ponto extremo.

Suponha normalidade. Isto implica que o sistema (2.16) é exato e, como vimos no Corolário 2.18, $\dim \mathscr{A}(T,x) = N$. Mostraremos agora que $y \in \partial_r\mathscr{A}(T,x)$ é um ponto extremo. Se $u \in \mathscr{U}(T)$ dirige x a y em tempo T então o Corolário 3.6 implica que u é um controle extremal para x, e então a hipótese de normalidade mais o Teorema 3.8 implicam que u é um controle *bang-bang*. Logo há um único controle dirigindo x a y em tempo T: caso houvesse dois controles admissíveis $u, v \in \mathscr{U}(T)$ distintos com essa propriedade, então o controle médio $\frac{1}{2}(u+v)$ também dirigiria x a y em tempo T, mas não seria *bang-bang*, o que é um absurdo.

Como há um único controle $u \in \mathscr{U}(T)$ que dirige x a y em tempo T, a Proposição 3.14 implica que y é um ponto extremo de $\mathscr{A}(T,x)$. Como $y \in \partial_r\mathscr{A}(T,x)$ é arbitrário, $\mathscr{A}(T,x)$ é estritamente convexo.

Suponhamos agora que $\mathscr{A}(T,x)$ é estritamente convexo e que $\dim \mathscr{A}(T,x) = N$. Suponhamos ainda por contradição que não vale a condição de normalidade. Neste caso existem $h \in \mathbb{R}^N$ não nulo e $i \in \{1,\ldots,M\}$ tais que a i-ésima componente de $h^* e^{-tA} B$ se anula identicamente em $[0,T]$, ou seja

$$h^* e^{-tA} b = 0$$

para todo $t \in [0,T]$, onde b é a i-ésima coluna de B. Defina

$$n := e^{-TA^*}h$$

o qual é não nulo, pois $h \neq 0$. Como $\dim \mathscr{A}(T,x) = N$ por hipótese e n^* é um funcional linear não nulo, a Proposição 1.15 garante que n^* não é constante sobre $\mathscr{A}(T,x)$. Ademais, $\mathscr{A}(T,x)$ é compacto, convexo e estritamente convexo, de modo que o Corolário D.6 garante a existência de um único $p \in \partial_r \mathscr{A}(T,x)$ tal que $n^*q \leq n^*p$ para todo $q \in \mathscr{A}(T,x)$. Tomemos $u \in \mathscr{U}(T)$ tal que $\mathbf{X}(T,x,u) = p$.

Seja agora $v \in \mathscr{U}(T)$ tal que

$$\begin{aligned} &v_i \neq u_i \\ &v_j = u_j, \ \forall j \neq i. \end{aligned}$$

Como $p \in \partial_r \mathscr{A}(T,x)$ e esse conjunto é por hipótese estritamente convexo então p é um ponto extremo de $\mathscr{A}(T,x)$. O Teorema 3.14 implica nestas condições que existe um único controle dirigindo x a p. Como $v \neq u$ concluímos que

$$\mathbf{X}(T,x,v) \neq \mathbf{X}(T,x,u).$$

No entanto

$$\begin{aligned} \int_0^T h^* e^{-tA} Bu(t)dt &= \int_0^T \sum_{j=1}^M h^* e^{-tA} Be_j u_j(t)dt \\ &= \int_0^T \sum_{j=1}^M h^* e^{-tA} Be_j v_j(t)dt \\ &= \int_0^T h^* e^{-tA} Bv(t)dt \end{aligned}$$

pois $h^* e^{-tA} Be_i = h^* e^{-tA} b = 0$ e por causa da definição de v. Logo

$$\begin{aligned} n^*p &= h^* e^{-TA} \mathbf{X}(T,x,u) \\ &= h^*x + \int_0^T h^* e^{-tA} Bu(t)dt \\ &= h^*x + \int_0^T h^* e^{-tA} Bv(t)dt \\ &= h^* e^{-TA} \mathbf{X}(T,x,v) \\ &= n^* \mathbf{X}(T,x,v) \end{aligned}$$

e portanto $n^*p = n^*\mathbf{X}(T,x,v)$. Pelo Lema D.5, $\mathbf{X}(T,x,v) \in \partial_r \mathscr{A}(T,x)$. Isto, porém, contradiz a unicidade de p como máximo de n^* em $\partial_r \mathscr{A}(T,x)$, absurdo. Logo vale a condição de normalidade.

□

Teorema 3.16 (Caracterização algébrica de normalidade)**.** *O sistema linear autônomo (2.16) é normal se e somente se para cada coluna $b_i := Be_i$ de B ($i \in \{1, \ldots, M\}$) o conjunto*

$$K_i := \{A^k b_i : 0 \leq k \leq N-1\} \subset \mathbb{R}^N$$

é linearmente independente.

Demonstração. Suponha que para algum $i \in \{1, \ldots, M\}$ o conjunto K_i seja linearmente dependente. Logo existe $h \in \mathbb{R}^N$ não nulo tal que $h^* A^k b_i = 0$ para todo $k \in \{0, \ldots, N-1\}$. Pelo Teorema de Cayley-Hamilton, A^N pode ser escrita como combinação linear de $\{A^k : 0 \leq k \leq N-1\}$ e portanto $A^N b_i$ pode ser escrito como combinação linear de K_i: concluímos que $h^* A^N b_i = 0$.

Utilizando um argumento semelhante ao do Teorema 2.15 concluímos que $h^* A^n b_i = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que implica, como naquele teorema, que $h^* e^{-tA} Be_i = h^* e^{-tA} b_i = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e, portanto, o sistema (2.16) não é normal.

Suponha agora que (2.16) não é normal, isto é, existem $h \neq 0$ e $i \in \{1, \ldots, M\}$ tais que $h^* e^{-tA} Be_i = 0$ para todo $t \geq 0$. Derivando obtemos

$$\frac{d^n}{dt^n} h^* e^{-tA} Be_i = (-1)^n h^* A^n e^{-tA} Be_i = 0$$

e, calculando cada termo em $t = 0$, obtemos $h^* A^n Be_i = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto mostra que K_i é linearmente dependente. □

O teorema acima dá uma nova demonstração de que todo sistema normal é exato.

Por fim, demonstraremos que para sistemas exatos vale a recíproca do Princípio do Máximo.

Teorema 3.17 (Recíproca do Princípio do Máximo)**.** *Suponha que o sistema (2.16) é exato. Se $u \in \mathscr{U}$ é um controle efetivo para $x \in \mathscr{C}$ tal que existe $h \neq 0$ satisfazendo*

$$h^* e^{-tA} Bu(t) = \sup\{h^* e^{-tA} By : y \in [-1, 1]^M\} \tag{3.3}$$

q.s. em $[0, T(u)]$ então u é um controle ótimo para x.

Demonstração. Suponha que $u \in \mathscr{U}(T_1)$ satisfaz as condições acima mas não é ótimo para x. Existe, entretanto, um controle ótimo para x, digamos, $v \in \mathscr{U}(T_2)$ com $T_2 < T_1$. Observe que

$$0 = \mathbf{X}(T_2, x, v) = e^{T_2 A} x + e^{T_2 A} \int_0^{T_2} e^{-tA} Bv(t) dt$$

o que implica que $h^* x = -\int_0^{T_2} e^{-tA} Bv(t) dt$. Defina

$$\begin{array}{rccc} \phi & : & [0, T_1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & h^* e^{-tA} \mathbf{X}(t, x, u) \end{array}$$

ou seja $\phi(t) = h^*x + \int_0^t h^*e^{-sA}Bu(s)ds$, de modo que

$$\begin{aligned}\phi(T_2) &= h^*x + \int_0^{T_2} h^*e^{-sA}Bu(s)ds \\ &= -\int_0^{T_2} h^*e^{-sA}Bv(s)ds + \int_0^{T_2} h^*e^{-sA}Bu(s)ds \\ &= \int_0^{T_2} h^*e^{-sA}B(u(s)-v(s))ds\end{aligned}$$

o que mostra que $\phi(T_2) \geq 0$, pois u satisfaz (3.3). Ademais, $\mathbf{X}(T_1, x, u) = 0$ implica que $\phi(T_1) = 0$ e portanto

$$\begin{aligned}0 &\leq \phi(T_2) \\ &= \phi(T_2) - \phi(T_1) \\ &= \int_{T_1}^{T_2} h^*e^{-sA}Bu(s)ds,\end{aligned}$$

implicando que $\int_{T_2}^{T_1} h^*e^{-sA}Bu(s) \leq 0$. Tomando $y = 0 \in [-1,1]^M$ a condição (3.3) implica que $h^*e^{-tA}Bu(t) \geq 0$ q.s. em $[0, T_1]$: concluímos que $\int_{T_2}^{T_1} h^*e^{-sA}Bu(s) = 0$ e, como o integrando é uma função não negativa, temos que

$$h^*e^{-tA}Bu(t) = 0 \text{ q.s. em } [T_2, T_1].$$

Novamente a condição (3.3) e a simetria de $[-1,1]^M$ implicam que dado $y \in [-1,1]^M$ vale que $-y \in [-1,1]^M$

$$\begin{aligned}h^*e^{-tA}By &\leq 0 \\ h^*e^{-tA}B(-y) &\leq 0\end{aligned}$$

q.s. em $[T_2, T_1]$ e, portanto, $h^*e^{-tA}By = 0$ q.s. em $[T_2, T_1]$, qualquer que seja $y \in [-1,1]^M$.

Agora, fixado $y \in [-1,1]^M$, a função

$$\begin{array}{rccc}\psi & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & h^*e^{-tA}By\end{array}$$

é uma função analítica que se anula q.s. em $[T_2, T_1]$. Isto implica que $\psi = 0$. Ainda, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\frac{d^n}{dt^n}\psi(t) = (-1)^n h^*A^n e^{-tA}By = 0$$

identicamente em $\mathbb{R}$. Calculando em $t = 0$ temos

$$h^* A^n B y = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como isto vale para qualquer $y \in [-1, 1]^M$, em particular para os elementos da base canônica de $\mathbb{R}^N$ – isto é, as colunas da matriz identidade – concluímos que

$$h^* A^n B = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

e, para o que nos convém, para $0 \leq n \leq N - 1$.

Como $h \neq 0$ o argumento acima prova que os sistema linear autônomo (2.16) não é exato. $\square$

Capítulo 4

Três pequenos exemplos

Dedicamos este último capítulo a três pequenos exemplos que ilustram a aplicação dos principais resultados demonstrados nesta monografia: o problema de parada do carro motorizado, extraído de [MS82]; o problema da aterrissagem suave de um foguete, extraído de [Zab92]; e a análise do movimento de um satélite com controles em órbita circular, extraído de [Bro70]. Não pretendemos aqui fazer uma análise profunda desses problemas, mas apenas verificar, quando possível, se os sistemas são exatos e/ou normais, e exibir os candidatos a controles em tempo ótimo utilizando o Princípio do Máximo.

4.1 O carro motorizado: problema de parada

Imagine um carro (pontual) deslocando-se sobre uma reta, para o qual controlamos diretamente a aceleração utilizando nossos controles admissíveis. Denotando a posição do carrinho no instante t por $x(t)$, sua dinâmica é regida pela equação com controle

$$x'' = u$$

onde $u \in \mathscr{U}$. Definindo $y := x'$ temos o sistema linear autônomo

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= u. \end{aligned}$$

Nosso problema consiste em, dadas posição e velocidade iniciais, estacionar o carro na origem em tempo ótimo, isto é, devemos dirigir o sistema à posição $x = 0$ com velocidade $y = 0$, ou, ainda, ao estado $(x, y) = (0, 0)$, e em tempo ótimo.

Neste caso, $N = 2$ e $M = 1$. As matrizes do sistema são

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$B := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como $A^2 = 0$ temos que para cada $t \in \mathbb{R}$ vale

$$e^{tA} = I + tA = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e então algumas contas nos levam à conclusão de que dados $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $u \in \mathscr{U}$ a FVP fica

$$\mathbf{X}(t, z, u) = \begin{bmatrix} x + ty + \int_0^t (t-s)u(s)ds \\ y + \int_0^t u(s)ds \end{bmatrix}.$$

Note que a matriz de Kalman do sistemas acima é

$$M_{A,B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a qual tem posto máximo, e logo nosso sistema é exato. Já podemos concluir várias propriedades do conjunto controlável $\mathscr{C}$, usando a teoria desenvolvida no Capítulo 2: é não vazio, convexo, simétrico e aberto (Corolário 2.17). Observe também que dado $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ não nulo temos que

$$h^* e^{-tA} B = -h_1 t + h_2, \ t \in \mathbb{R},$$

não se anula identicamente: nosso sistema é normal.

Segundo o Princípio do Máximo (Corolário 3.9), se $u \in \mathscr{U}$ é um controle em tempo ótimo para estacionar o carro com condições iniciais $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ então existe $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^N$ não nulo tal que

$$u(t) = \sigma(-h_1 t + h_2), \ t \in [0, T(u)]$$

e podemos supor sem perda de generalidade u contínua por partes, já que o lado direito da expressão acima define uma função desse tipo. Como o sistema é exato, podemos invocar a recíproca do Princípio do Máximo e concluir que os controles ótimos do sistema são dados pela expressão acima. Desta forma, os controles ótimos para se estacionar o carro trocam de sinal no máximo uma vez.

4.2 O foguete: aterrissagem suave

Suponha que tenhamos um foguete, o qual queremos aterrissar. Para tal, controlamos a vazão de combustível: denotando por $m(t)$ a massa total do foguete (carcaça mais combustível) no instante t, controlamos a variação de m na proporção k. Denotando ainda por $h(t)$ a altura do foguete no instante t e por g a aceleração da gravidade – a qual suporemos constante –, obtemos as equações para a dinâmica do foguete

$$mh'' = -gm + u$$
$$m' = -ku.$$

Nosso objetivo é, então, pousar o foguete ($h = h' = 0$) com uma determinada massa $m_0 > 0$. Gostaríamos ainda de efetuar essa manobra em tempo ótimo, escolhendo adequadamente um controle admissível u. Introduzindo as novas coordenadas

$$
\begin{aligned}
x_1 &:= h \\
x_2 &:= h' \\
x_3 &:= m - m_0
\end{aligned}
$$

podemos reescrever as equações de movimento como

$$
\begin{aligned}
x_1' &= x_2 \\
x_2' &= -g + \frac{u}{x_3 + m_0} \\
x_3' &= -ku
\end{aligned}
$$

ou, denotando

$$x := (x_1, x_2, x_3)$$

podemos escrever a equação acima como a equação de controle $x' = f(x,u)$, onde

$$f(x,u) := \begin{bmatrix} x_2 \\ -g + \frac{u}{x_3+m_0} \\ -ku \end{bmatrix}.$$

Observe que este sistema é não linear, de modo que a teoria que estudamos não se aplica diretamente. Estudaremos então o *sistema linearizado* ao redor de $(x,u) = (0,0)$: a diferencial de f é

$$Df = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{u}{(x_3+m_0)^2} & \frac{1}{x_3+m_0} \\ 0 & 0 & 0 & -k \end{bmatrix}$$

e, no ponto $(x,u) = (0,0)$ temos

$$Df(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_0} \\ 0 & 0 & 0 & -k \end{bmatrix}.$$

Nosso sistema linearizado ao redor da origem fica, então

$$\begin{aligned} x' &= Df(0,0)(x,u) \\ &= Ax + Bu \end{aligned}$$

onde

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_0} \\ -k \end{bmatrix}.$$

Antes de iniciar nossa análise, obtemos a exponencial de A:

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observando que a matriz de Kalman do sistema

$$M_{A,B} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m_0} & 0 \\ \frac{1}{m_0} & 0 & 0 \\ -k & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

não tem posto máximo, concluímos que este sistema não é exato e, portanto, não é normal. Constatamos novamente a não normalidade do sistema observando que

$$h^* e^{-tA} B = -\frac{h_1 t}{m_0} + \frac{h_2}{m_0} - kh_3,\ t \in \mathbb{R}$$

e tomando $h_1 = 0$ e $h_2 = m_0 k h_3, h_3 \neq 0$. De qualquer modo, o Princípio do Máximo implica que os controles ótimos do sistema linearizado são da forma

$$u(t) = \sigma(-h_1 t + h_2 - m_0 k h_3),\ t \in [0, T(u)]$$

onde $h = (h_1, h_2, h_3) \neq 0$.

4.3 O satélite com controles

Vamos agora estudar o movimento de um satélite descrevendo uma órbita circular plana ao redor da origem. Vamos supô-lo munido de dois controles: um radial e um tangencial. Para descrever as equações do movimento do satélite introduzimos as coordenadas polares

$$\begin{aligned} e_1(t) &:= (\cos\theta(t), \sin\theta(t)) \\ e_2(t) &:= (-\sin\theta(t), \cos\theta(t)). \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} e_1' &= \theta' e_2 \\ e_2' &= -\theta' e_1. \end{aligned}$$

A Lei da Gravitação Universal nos conta que a força gravitacional uma massa pontual na origem exerce sobre o satélite é

$$G(t) = -\frac{\mu}{|r(t)|^2} e_1(t)$$

onde $r(t)$ denota a posição do satélite no instante t e $\mu > 0$ é uma constante. Tomando

$$\rho(t) := |r(t)|$$

temos que a força resultante sobre o satélite, acrescentados os controles u_1 (radial) e u_2 (tangencial), é da forma

$$\begin{aligned} F &:= G + u_1 e_1 + u_2 e_2 \\ &= \left\{ -\frac{\mu}{\rho^2} + u_1 \right\} e_1 + u_2 e_2. \end{aligned}$$

A segunda lei de Newton nos diz então que

$$r'' = F$$

de onde deduziremos as equações do movimento do foguete:

$$\begin{aligned} r &= \rho e_1 \\ r' &= \rho' e_1 + \rho e_1' \\ &= \rho' e_1 + \rho\theta' e_2 \\ r'' &= \rho'' e_1 + \rho' e_1' + (\rho'\theta' + \rho\theta'') e_2 + \rho\theta' e_2' \\ &= (\rho'' - \rho\theta'^2) e_1 + (2\rho'\theta' + \rho\theta'') e_2 \end{aligned}$$

e igualando esta equação a F coordenada a coordenada temos

$$\begin{aligned}\rho'' - \rho\theta'^2 &= -\frac{\mu}{\rho^2} + u_1 \\ 2\rho'\theta' + \rho\theta'' &= u_2\end{aligned}$$

que são as equações que queríamos. Introduzindo as novas variáveis

$$\begin{aligned}\nu &:= \rho' \\ \omega &:= \theta'\end{aligned}$$

obtemos o sistema de primeira ordem

$$\begin{aligned}\rho' &= \nu \\ \nu' &= -\frac{\mu}{\rho^2} + \rho\omega^2 + u_1 \\ \theta' &= \omega \\ \omega' &= -2\frac{\nu\omega}{\rho} + \frac{u_2}{\rho}\end{aligned}$$

o qual, como no exemplo anterior, é não linear. Vamos então linearizá-lo ao redor de uma órbita de equilíbrio

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \rho_0 \\ \theta(t) &= \omega_0 t\end{aligned}$$

onde $\rho_0 > 0$ e $\omega_0 \neq 0$ são constantes. Observe que nesse caso devemos ter

$$-\frac{\mu}{\rho_0^2} + \rho_0\omega_0^2 = 0 \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{\mu}{\rho_0^3}.$$

Introduzindo as novas coordenadas

$$\begin{aligned}x_1(t) &:= \rho(t) - \rho_0 \\ x_2(t) &:= \nu(t) \\ x_3(t) &:= \theta(t) - \omega_0 t \\ x_4(t) &:= \omega(t) - \omega_0\end{aligned}$$

obtemos o novo sistema não linear de primeira ordem

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_2\\
x_2' &= -\frac{\mu}{(x_1+\rho_0)^2} + (x_1+\rho_0)(x_4+\omega_0)^2 + u_1\\
x_3' &= x_4\\
x_4' &= -2x_2\frac{x_4+\omega_0}{x_1+\rho_0} + \frac{u_2}{x_1+\rho_0}
\end{aligned}$$

ou, ainda, denotando

$$\begin{aligned}
x &:= (x_1, x_2, x_3, x_4)\\
u &:= (u_1, u_2)
\end{aligned}$$

temos $x' = f(x,u)$, onde

$$f(x,u) := \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{\mu}{(x_1+\rho_0)^2} + (x_1+\rho_0)(x_4+\omega_0)^2 + u_1 \\ x_4 \\ -2x_2\frac{x_4+\omega_0}{x_1+\rho_0} + \frac{u_2}{x_1+\rho_0} \end{bmatrix}.$$

Da forma como $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ foi definido, vamos linearizar f ao redor de $(x,u) = (0,0)$: sua diferencial é

$$Df = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\mu}{(x_1+\rho_0)^3} + (x_4+\omega_0)^2 & 0 & 0 & 2(x_1+\rho_0)(x_4+\omega_0) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2x_2\frac{x_4+\omega_0}{(x_1+\rho_0)^2} - \frac{u_2}{(x_1+\rho_0)^2} & -2\frac{x_4+\omega_0}{x_1+\rho_0} & 0 & -2\frac{x_2}{x_1+\rho_0} & 0 & \frac{1}{x_1+\rho_0} \end{bmatrix}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
Df(0,0) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\mu}{\rho_0^3} + \omega_0^2 & 0 & 0 & 2\rho_0\omega_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\frac{\omega_0}{\rho_0} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_0} \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\omega_0^2 & 0 & 0 & 2\rho_0\omega_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\frac{\omega_0}{\rho_0} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_0} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Obtemos o sistema linearizado $x' = Df(0,0)(x,u) = Ax + Bu$ onde

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega_0^2 & 0 & 0 & 2\rho_0\omega_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\frac{\omega_0}{\rho_0} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho_0} \end{bmatrix}$$

cuja matriz de Kalman é, então,

$$M_{A,B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2\omega_0 & \omega_0^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2\omega_0 & \omega_0^2 & 0 & 0 & -2\omega_0^2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_0} & -2\frac{\omega_0}{\rho_0} & 0 & 0 & -4\frac{\omega_0^2}{\rho_0} \\ 0 & \frac{1}{\rho_0} & -2\frac{\omega_0}{\rho_0} & 0 & 0 & -4\frac{\omega_0^2}{\rho_0} & -2\frac{\omega_0^3}{\rho_0} & 0 \end{bmatrix}$$

a qual tem posto máximo, isto é, o sistema acima é exato. Entretanto, observando que

$$A^3 B_1 = \omega_0^2 A B_1$$

temos, pela caracterização algébrica de normalidade (Teorema 3.16), que o sistema linearizado acima não é normal.

Apêndice A

Topologia fraca em espaços vetoriais normados

A fim de estudar a geometria dos conjuntos admissíveis $\mathscr{U}(T)$ são necessárias algumas ferramentas de Topologia e Análise Funcional, as quais por si só requerem a introdução de uma teoria e linguagem próprias. O objetivo principal deste apêndice é cobrir minimamente a teoria necessária para o entendimento e aplicação do Teorema de Banach-Alaoglu e seus corolários, em particular algumas aplicações à teoria dos espaços de Hilbert.

Proposição A.1. *Sejam X um conjunto não vazio, (Y, τ_Y) um espaço topológico e $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}(X;Y)$ uma família não vazia. Então*

$$\mathcal{B} := \left\{ \bigcap_{1 \leq j \leq n} g_j^{-1}(A_j) : g_j \in \mathscr{G}, A_j \in \tau_Y,\ 1 \leq j \leq n,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

é base de uma topologia τ sobre X tal que toda $g \in \mathscr{G}$ é contínua com respeito a esta topologia. Ademais, τ é minimal com respeito a esta propriedade, isto é, se τ' é uma topologia sobre X tal que toda $g \in \mathscr{G}$ é contínua com respeito a τ' então $\tau \subset \tau'$.

Demonstração. É claro que $\mathcal{B}$ é uma base pois é fechada por intersecções finitas e $g^{-1}(Y) = X$ para qualquer $g \in \mathscr{G}$.

Seja τ a topologia gerada por $\mathcal{B}$, isto é, o conjunto das reuniões arbitrárias de elementos de $\mathcal{B}$. Claro que toda $g \in \mathscr{G}$ é contínua nesta topologia pois dado qualquer $A \in \tau_Y$ temos que $g^{-1}(A) \in \mathcal{B}$.

Suponha agora que τ' é alguma topologia sobre X que torna cada $g \in \mathscr{G}$ contínua. Então $g^{-1}(A) \in \tau'$ para todo $A \in \tau_Y$ e para toda $g \in \mathscr{G}$. Como τ' é fechada por intersecções finitas segue que $\mathcal{B} \subset \tau'$, donde $\tau \subset \tau'$. □

Chamamos a topologia τ da proposição acima de *topologia induzida por $\mathscr{G}$* ou *$\mathscr{G}$-topologia* e escrevemos

$$\tau = [\mathscr{G}].$$

Sejam (X, τ) um espaço separado e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de X. Dizemos que

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* para $x \in X$ (na topologia τ), o que denotaremos por

$$x_n \xrightarrow{\tau} x,$$

se para cada vizinhança V de x existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$ para todo $n \geq n_0$. Segue da hipótese de separação deste espaço que se $x_n \xrightarrow{\tau} x$ e $x_n \xrightarrow{\tau} y$ então $x = y$, isto é, temos a unicidade do limite de sequências convergentes.

Dizemos que $K \subset X$ é *sequencialmente compacto* se toda sequência de elementos de K possui uma subsequência que converge (na topologia de subespaço) para algum elemento de K. É fácil ver que

Proposição A.2. *Sejam* (X, τ_X) *e* (Y, τ_Y) *espaços separados. Se* $f : X \to Y$ *leva sequências convergentes em sequências convergentes, ou seja,*

$$x_n \xrightarrow{\tau_X} x \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{\tau_Y} f(x),$$

então f *leva conjuntos sequencialmente compactos de* (X, τ_X) *em conjuntos sequencialmente compactos de* (Y, τ_Y)*.*

Em particular, funções contínuas entre espaços separados levam conjuntos sequencialmente compactos em conjuntos sequencialmente compactos.

Seja agora $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Denotaremos por X' seu dual topológico i.e. o conjunto de todos os funcionais lineares contínuos sobre X. Definimos a *topologia fraca* de $(X, \|\cdot\|)$ por

$$\omega := [X'].$$

É fácil ver que (X, ω) é um espaço separado (segue do Teorema de Hahn-Banach). Logo faz sentido falarmos em convergência de sequências neste espaço: se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de elementos de X, dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge fracamente* para $x \in X$ se $x_n \xrightarrow{\omega} x$.

Vamos dar uma caracterização analítica da topologia fraca sobre espaços normados. É imediato verificar que para cada $f \in X'$ a expressão

$$\|x\|_f := |f(x)|, \; x \in X,$$

define uma seminorma sobre X. A partir da família $\{\|\cdot\|_f : f \in X'\}$ podemos introduzir em X uma topologia gerada pelas *bolas*

$$\mathscr{B}_{f_1,\ldots,f_n}(a, \epsilon) := \{x \in X : \|x - a\|_{f_j} < \epsilon, \; 1 \leq j \leq n\} \tag{A.1}$$

onde $a \in X$, $\epsilon > 0$ e $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset X'$ é um conjunto finito. Dessa forma

$$\{\mathscr{B}_{f_1,\ldots,f_n}(a, \epsilon) : a \in X, \; \epsilon > 0, f_1, \ldots, f_n \in X', \; n \in \mathbb{N}\}$$

é base de uma topologia sobre X que o torna um espaço vetorial localmente convexo (a demonstração é simples e fica sob responsabilidade do leitor). O resultado que nos interessa é o seguinte.

Proposição A.3. *A topologia gerada pelas bolas (A.1) coincide com a topologia fraca sobre X.*

Demonstração. Denotemos temporariamente a topologia gerada pelas bolas por τ: vamos mostrar que $\tau = \omega$. Observe que

$$\mathscr{B}_f(a, \epsilon) = f^{-1}(\mathscr{B}(f(a), \epsilon))$$

onde $\mathscr{B}(f(a), \epsilon) \subset \mathbb{R}$ donde as bolas (A.1) são abertas na topologia fraca e logo $\tau \subset \omega$.

Para outra inclusão, note que se $A \subset \mathbb{R}$ é aberto e $x \in f^{-1}(A)$ temos que $f(x) \in A$ e logo existe $\epsilon > 0$ tal que $\mathscr{B}(f(x), \epsilon) \subset A$, o que implica por sua vez que $x \in f^{-1}(\mathscr{B}(f(x), \epsilon) \subset f^{-1}(A)$, ou seja

$$x \in \mathscr{B}_f(x, \epsilon) \subset f^{-1}(A)$$

donde $f^{-1}(A) = \bigcup_{x \in f^{-1}(A)} \mathscr{B}_f(x, \epsilon) \in \tau$. Como τ é fechado por intersecções finitas segue que $\mathcal{B} \subset \tau$ e, portanto, $\omega \subset \tau$. □

Corolário A.4. *(X, ω) é um espaço vetorial topológico localmente convexo separado.*

A seguinte caracterização da convergência fraca segue diretamente da caracterização da topologia fraca por seminormas.

Corolário A.5. *Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado, $x \in X$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de X. Então $x_n \xrightarrow{\omega} x$ se e somente se*

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$$

para todo $f \in X'$.

No contexto estabelecido acima, diremos que $K \subset X$ é *fracamente compacto* se K é compacto na topologia fraca; e *fracamente sequencialmente compacto* se toda sequência de elementos de K possui uma subsequência fracamente convergente para algum elemento de K.

Denotando por $\tau_{\|\cdot\|}$ a topologia usual de $(X, \|\cdot\|)$ temos que $\omega \subset \tau_{\|\cdot\|}$, o que implica que

- se $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ então $x_n \xrightarrow{\omega} x$;
- se $K \subset X$ é compacto / sequencialmente compacto então K é fracamente compacto / fracamente sequencialmente compacto.

Proposição A.6. *Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado e $f : X \to \mathbb{R}^N$ linear. Então f é fracamente contínua (contínua na topologia fraca) se e somente se f é fortemente contínua (contínua na topologia métrica).*

Demonstração. Claro que se f é fracamente contínua então f é fortemente contínua pois, como já observamos, $\omega \subset \tau_{\|\cdot\|}$. Para a recíproca observe que, se $f = (f_1, \ldots, f_N)$ é fortemente contínua então $f_i \in X'$ para cada $i = 1, \ldots, N$. Como cada f_i é então fracamente contínua segue que f é fracamente contínua. □

Recordemos que a norma $\|\cdot\|$ sobre X induz uma norma sobre X': dado $f \in X'$ definimos

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| : \|x\| \leq 1\}$$

a qual denominamos a *norma usual* sobre X'. Podemos então pensar em introduzir a topologia fraca sobre X', induzida pelo bidual X''.

Há uma terceira forma de introduzir uma topologia no dual de X. Sabemos que inclusão canônica $\Phi : X \to X''$ definida para cada $x \in X$ por

$$\begin{array}{rccc} \Phi(x) & : & X' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & f & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

é linear, contínua, injetora e tal que $\|\Phi(x)\| = \|x\|$, de modo que os espaços X e $\Phi(X) \subset X''$ são isometricamente isomorfos. Podemos então introduzir em X' a *topologia fraca** , definida por

$$\omega^* := [\Phi(X)].$$

Note que a topologia fraca* é em geral mais fraca que a topologia fraca sobre X' (isto é, aquela induzida por X''). Se Φ é sobrejetora, dizemos que $(X, \|\cdot\|)$ é um *espaço reflexivo* , e nesse caso é claro que $(X, \|\cdot\|)$ e $(X'', \|\cdot\|)$ são isometricamente isomorfos[1] e que, como $\Phi(X) = X''$, então a topologia fraca e a topologia fraca* de X' coincidem. Exemplos clássicos de espaços reflexivos são os espaços de Hilbert e os espaços L_p com $1 < p < \infty$.

Nosso interesse na topologia fraca e na topologia fraca* reside no seguinte resultado.

Teorema A.7 (Banach-Alaoglu)**.** *Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Então a esfera unitária fechada*

$$S^* := \{f \in X' : \|f\| \leq 1\}$$

é compacta na topologia fraca.*

Demonstração. Pode ser encontrada em [Roy88], Capítulo 10, Teorema 17, ou [Rud73], Teorema 3.15, em um contexto mais geral. É uma aplicação do Teorema de Tychonoff. □

O teorema acima possui aplicações particularmente interessantes na teoria dos espaços de Hilbert.

[1] Mas a recíproca não é necessariamente verdadeira: $(X, \|\cdot\|)$ e $(X'', \|\cdot\|)$ isometricamente isomorfos não implica que $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço reflexivo.

Proposição A.8. *Seja $(E, \langle , \rangle)$ um espaço de Hilbert. Então a esfera unitária fechada*

$$S := \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$$

é fracamente compacta.

Demonstração. O Teorema de Riesz nos diz que a aplicação $\Psi : E \to E'$ definida por

$$\begin{array}{rccc} \Psi(y) & : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \langle x, y \rangle \end{array}$$

é um isomorfismo isométrico (E' munido da topologia canônica)[2]. Observe agora que se $x \in E$ e $\xi \in E''$ então

$$\|\Psi(x)\|_\xi = \|x\|_{\xi \circ \Psi}$$

o que mostra que se munirmos ambos E e E' de suas respectivas topologias fracas, então Ψ é contínua nessas topologias. Argumento análogo mostra que no mesmo contexto Ψ^{-1} é contínua: mostramos que Ψ é um homeomorfismo entre E e E' também quando munidos de suas topologias fracas.

Seja agora S^* a esfera unitária fechada de E', a qual sabemos ser compacta na topologia fraca*, segundo o Teorema de Banach-Alaoglu. Como $(E, \langle , \rangle)$ é um espaço reflexivo então S^* também é compacta na topologia fraca. Como Ψ é uma isometria temos que $S = \Psi^{-1}(S^*)$. Ademais Ψ é um homeomorfismo nas topologias fracas e S^* é fracamente compacta: concluímos que S é também fracamente compacta. □

Podemos melhorar o resultado acima, utilizando para isto o seguinte teorema de metrização.

Teorema A.9. *Sejam $(X, \| \cdot \|)$ um espaço normado separável e $K \subset X'$ um conjunto compacto na topologia fraca*. Então K, munido da topologia fraca* herdada de X', é metrizável.*

Demonstração. É um caso particular do Teorema 3.16 de [Rud73]. □

Corolário A.10. *Se S é a esfera unitária de um espaço e Hilbert separável então S é fracamente compacta, metrizável na topologia fraca e, portanto, fracamente sequencialmente compacta.*

[2] Lembre-se que estamos tratando de espaços de Hilbert *reais*.

Apêndice B

Teoria da Medida

Demonstramos aqui dois pequenos resultados de Teoria da Medida que utilizamos recorrentemente neste trabalho. São resultados muito simples, mas como não os encontramos na literatura com exatamente o enunciado que precisávamos, demonstramo-los aqui para efeito de completude.

Proposição B.1. *Sejam* $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável e* $u_j : X \to \mathbb{R}$ *funções mensuráveis para cada* $j \in \{1, \ldots, N\}$. *Então* $f : X \to \mathbb{R}^N$ *definida por*

$$f(x) := (u_1(x), \ldots, u_N(x))$$

é mensurável.

Demonstração. Suponha que $R \subset \mathbb{R}^N$ é um paralelepípedo aberto com lados paralelos aos eixos, ou seja

$$R = I_1 \times \ldots \times I_N$$

onde cada $I_j \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. É fácil ver que

$$f^{-1}(R) = \bigcap_{1 \leq j \leq N} u_j^{-1}(I_j)$$

e como cada u_j é mensurável segue que $f^{-1}(R)$ é mensurável. Dado agora um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ existe uma família $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de paralelepípedos abertos com lados paralelos aos eixos tal que[1]

$$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n$$

de modo que $f^{-1}(\Omega) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(R_n)$ é mensurável. □

Proposição B.2. *Sejam* $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável,* (Y, τ) *um espaço topológico,* $A, B \in \mathcal{A}$ *e* $f : A \to Y$ *e* $g : B \to Y$ *funções mensuráveis tais* $f|_{A \cap B} = g|_{A \cap B}$. *Então a função* $h : A \cup B \to Y$

[1] Isto é, o espaço topológico $\mathbb{R}^N$ possui base enumerável.

dada por

$$h(x) := \begin{cases} f(x), & se\ x \in A \\ g(x), & se\ x \in B \end{cases}$$

é mensurável.

Demonstração. Basta observar que, dado $\Omega \subset Y$, temos que

$$h^{-1}(\Omega) = f^{-1}(\Omega) \cup g^{-1}(\Omega).$$

Tome agora $\Omega \in \tau$ e conclua que a mensurabilidade de f e g implica que $h^{-1}(\Omega) \in \mathcal{A}$. $\square$

Apêndice C

Continuidade absoluta

Uma noção fundamental ao estudo da equação de Carathéodory é a de *continuidade absoluta*. A principal referência para esta seção é [Roy88].

Definição C.1. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ é dita *absolutamente contínua* (a.c.) se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda família finita de subintervalos disjuntos $\{[x_i, x_i']\}_{1 \leq i \leq n} \subset \mathcal{P}([a,b])$ satisfazendo

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_i'| < \delta$$

vale que

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_i')| < \epsilon.$$

É fácil ver que, embora tenhamos utilizado a norma euclidiana $|\cdot|$ na definição acima, poderíamos ter utilizado qualquer outra, já que em espaços vetoriais de dimensão finita todas as normas são equivalentes. A demonstração deste fato fica sob responsabilidade do leitor.

Vamos agora explorar algumas propriedades da continuidade absoluta que serão importantes para nós, visto que aparecem recorrentemente em todo o desenvolvimento da teoria dos Capítulos 1 e 2, particularmente na discussão a respeito das equações de Carathéodory e suas propriedades e na construção de respostas da equação de controle.

Proposição C.2.

1. *Se* $f : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ *é a.c. então* f *é uniformemente contínua e, portanto, contínua.*

2. *Se* $f : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ *e* $g : [c,d] \to [a,b]$ *são a.c. então* $f \circ g : [c,d] \to \mathbb{R}^N$ *é a.c. .*

3. *O conjunto das funções* $f : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ *que são a.c. é um subespaço vetorial de* $\mathcal{C}([a,b]; \mathbb{R}^N)$*.*

4. *Se* $f_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ *e* $f_2 : [b,c] \to \mathbb{R}^N$ *são a.c. e tais que* $f_1(b) = f_2(b)$ *então* $f : [a,c] \to \mathbb{R}^N$ *definida por* $f|_{[a,b]} = f_1,\ f|_{[b,c]} = f_2$ *é a.c. .*

5. *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ *é lipschitziana então* f *é a.c. . Em particular se* f *é derivável em* $[a, b]$ *e* f' *é limitada (por exemplo, se* f' *for contínua i.e.* f *é de classe* $\mathcal{C}^1$*) então* f *é a.c. .*

Demonstração.

1. Basta tomar $n = 1$ na Definição C.1.

2. Segue diretamente da definição de continuidade absoluta.

3. Já vimos que toda função a.c. é contínua. Que o conjunto destas forma um subespaço segue diretamente das propriedades das normas: a homogeneidade implica que tal conjunto é fechado por multiplicação por escalar e a desigualdade triangular implica que tal conjunto é fechado pela soma.

4. Como f_1 e f_2 são contínuas segue que f é contínua. Sejam $\epsilon > 0$ e $\{[x_i, x_i']\}_{1 \leq i \leq n}$ uma família finita arbitrária de subintervalos disjuntos de $[a, c]$. Defina $A := \{i : [x_i, x_i'] \subset [a, b]\}$ e $B := \{i : [x_i, x_i'] \subset [b, c]\}$. Como f_1 e f_2 são a.c. existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$\sum_{i \in A} |x_i - x_i'| < \delta_1 \Rightarrow \sum_{i \in A} |f_1(x_i) - f_1(x_i')| < \frac{\epsilon}{3},$$
$$\sum_{i \in B} |x_i - x_i'| < \delta_2 \Rightarrow \sum_{i \in B} |f_2(x_i) - f_2(x_i')| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Se existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $b \in [x_k, x_k']$ (e portanto $k \notin A \cup B$) então segue da continuidade de f em b que existe $\delta_3 > 0$ tal que $|x_k - x_k'| < \delta_3$ implica $|f(x_k) - f(x_k')| < \epsilon/3$: tomando então $\delta := \min_{1 \leq j \leq 3} \delta_j$ temos que $\sum_{i=1}^n |x_i - x_i'| < \delta$ então

$$\sum_{i \in A} |x_i - x_i'| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - x_i'| < \delta \leq \delta_1$$
$$\sum_{i \in B} |x_i - x_i'| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - x_i'| < \delta \leq \delta_2$$
$$|x_k - x_k'| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - x_i'| < \delta \leq \delta_3$$

donde

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_i')| &= \sum_{i \in A} |f(x_i) - f(x_i')| + \sum_{i \in B} |f(x_i) - f(x_i')| + \\
&+ |f(x_k) - f(x_k')| \\
&= \sum_{i \in A} |f_1(x_i) - f_1(x_i')| + \sum_{i \in B} |f_2(x_i) - f_2(x_i')| + \\
&+ |f(x_k) - f(x_k')| \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon
\end{aligned}$$

ou seja $\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_i')| < \epsilon$, o que mostra a afirmação.

5. Sejam $L > 0$ uma constante de Lipschitz de f e $\epsilon > 0$. Se $\delta := \epsilon/L$ e $\{[x_i, x_i']\}_{1\leq i\leq n}$ é uma família de subintervalos disjuntos de $[a,b]$ que satisfaz $\sum_{i=1}^n |x_i - x_i'| < \delta$ então

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_i')| &\leq \sum_{i=1}^n L|x_i - x_i'| \\ &= L\sum_{i=1}^n |x_i - x_i'| \\ &< L\delta = \epsilon\end{aligned}$$

i.e. $\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_i')| < \epsilon$.

□

Teorema C.3. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é a.c. então f é q.s. diferenciável em $[a,b]$, ou seja, f' existe q.s. em $[a,b]$.*

Demonstração. Vide [Roy88], Capítulo 5, Corolário 12. □

Proposição C.4. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}^N$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_N(x))$ onde $f_j : [a,b] \to \mathbb{R}$ para cada $j \in \{1, \ldots, N\}$. Então f é a.c. se e somente se cada f_j é a.c. .*

Demonstração. No decorrer da demonstração $\{[x_i, x_i']\}_{1\leq i\leq n}$ será uma família finita arbitrária de subintervalos disjuntos de $[a,b]$.

Suponha inicialmente que cada f_j é a.c. e seja $\epsilon > 0$. Então para cada $j \in \{1, \ldots, N\}$ existe $\delta_j > 0$ tal que se $\sum_{i=1}^n |x_i - x_i'| < \delta_j$ então $\sum_{i=1}^n |f_j(x_i) - f_j(x_i')| < \frac{\epsilon}{N}$.

Seja $\delta := \min_j \delta_j$. Se $\sum_{i=1}^n |x_i - x_i'| < \delta$ então $\sum_{i=1}^n |f_j(x_i) - f_j(x_i')| < \frac{\epsilon}{N}$ para todo $j \in \{1, \ldots, N\}$ e logo

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_i')| &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N |f_j(x_i) - f_j(x_i')| \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n |f_j(x_i) - f_j(x_i')| \\ &\leq \sum_{j=1}^N \frac{\epsilon}{N} \\ &= N\frac{\epsilon}{N} = \epsilon\end{aligned}$$

ou seja $\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_i')| \leq \epsilon$, o que mostra que f é a.c. .

Para a recíproca, recordemos que todas as normas são equivalentes em $\mathbb{R}^N$ e portanto existe $K > 0$ tal que para todo $y = (y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ vale que

$$\sum_{j=1}^{N} |y_j| \leq K|y|$$

donde $|y_j| \leq K|y|$ para todo $j \in \{1, \ldots, N\}$. Logo, se f é a.c. e $\epsilon > 0$ então existe $\delta > 0$ tal que se $\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_i'| < \delta$ então $\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_i')| < \frac{\epsilon}{K}$. Logo, para cada j temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |f_j(x_i) - f_j(x_i')| &\leq \sum_{i=1}^{n} K|f(x_i) - f(x_i')| \\ &= K\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_i')| \\ &< K\frac{\epsilon}{K} = \epsilon \end{aligned}$$

donde f_j é a.c. . $\square$

O corolário que a seguir demonstramos é o foco de nosso interesse na continuidade absoluta e justifica a Definição 1.1.

Corolário C.5. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ é a.c. então f é q.s. diferenciável em $[a, b]$.*

Demonstração. Se $f = (f_1, \ldots, f_N)$ é a.c. então cada $f_j : [a, b] \to \mathbb{R}$ é a.c. e, portanto, q.s. diferenciável em $[a, b]$. Logo, para cada $j \in \{1, \ldots, N\}$ temos que

$$I_j := \{t \in [a, b] : f_j \text{ não é diferenciável em } t\}$$

tem medida nula, i.e. $\mathbf{m}(I_j) = 0$. Lembrando que fixado $t \in [a, b]$ temos que f é diferenciável em t se e somente se todas as f_j são diferenciáveis em t temos que

$$I := \{t \in [a, b] : f \text{ não é diferenciável em } t\} = \bigcup_{1 \leq j \leq N} I_j$$

donde temos que

$$\mathbf{m}(I) \leq \sum_{j=1}^{N} \mathbf{m}(I_j) = 0.$$

Ou seja, f é q.s. diferenciável em $[a, b]$. $\square$

Teorema C.6. *Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ é uma integral indefinida se e somente se f é a.c. . Neste caso, f é a integral indefinida de sua derivada. Ou seja, se $g : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ é mensurável e* *limitada então*

$$f(x) = \int_a^x g(t)dt \Leftrightarrow f' = g \ \ q.s. \ .$$

Demonstração. É o Teorema 14 e o Corolário 15 do Capítulo 5 de [Roy88]. □

Apêndice D

Análise convexa

Faremos agora uma breve digressão a respeito da análise de convexidade em espaços vetoriais de vários tipos. Nosso principal interesse reside na análise convexa em espaços vetoriais de dimensão finita. No entanto, buscando um maior grau de generalidade – enquanto tal atitude não prejudicar nosso entendimento desnecessariamente – enunciaremos os conceitos e resultados da forma mais geral possível. Seremos recompensados por essa abordagem, pois precisamos de um particular teorema, que vale em espaços bem gerais: o Teorema de Krein-Milman, que utilizamos na demonstração do Princípio do Bang-Bang.

Seja V um espaço vetorial. Dados $p, q \in V$ o *segmento fechado que liga* os pontos p e q é o conjunto

$$[p, q] := \{\lambda p + (1 - \lambda) q : \lambda \in [0, 1]\}.$$

Analogamente, definimos o *segmento aberto que liga* os pontos p e q:

$$]p, q[:= \{\lambda p + (1 - \lambda) q : \lambda \in]0, 1[\}.$$

Dizemos que $S \subset V$ é *convexo* se dados quaisquer dois pontos pertencentes a S então o segmento fechado que os liga está integralmente contido em S, isto é

$$p, q \in S \Rightarrow [p, q] \subset S.$$

Um resultado de verificação trivial é a seguinte

Proposição D.1. *Sejam V, W espaços vetoriais e $S \subset V$, $R \subset W$ conjuntos convexos.*

1. *Se $L : V \to W$ é uma transformação linear então $L(S) \subset W$ e $L^{-1}(R) \subset V$ são convexos.*

2. *Se $p \in V$ então $p + S \subset V$ é convexo.*

Ademais, a intersecção de qualquer família de subconjuntos convexos de V é um subconjunto convexo de V.

Apoiados na última observação da proposição acima, dado $E \subset V$ um conjunto qualquer definimos o *casco convexo* de E como a intersecção de todos os conjuntos convexos de V que contém

E, isto é,

$$[E] := \bigcap\{S \subset V : E \subset S \text{ e } S \text{ é convexo}\}.$$

É fácil mostrar que $[E]$ é sempre um conjunto convexo. Pode-se caracterizar $[E]$ como o menor convexo (no sentido da inclusão) que contém E.

Dado $S \subset V$ convexo dizemos que $p \in S$ é um *ponto extremo de* S se p não está entre quaisquer dois pontos de S, isto é,

$$x, y \in S \Rightarrow p \notin \,]x, y[\ .$$

D.1 Convexidade em espaços $\mathbb{R}^N$

Há dois resultados referentes à análise convexa em espaços vetoriais de dimensão finita que utilizamos recorrentemente na Teoria de Controle: aqueles que garantem a existência de hiperplanos separantes e de hiperplanos de suporte. Estes resultados podem ser generalizados (eventualmente sob adição de alguma hipótese adicional) para espaços bem mais gerais: veja, por exemplo, a Seção 7 do Capítulo 10 de [Roy88].

Optamos, no entanto, por enunciar nesta seção apenas as versões mais simples destes teoremas, para as quais referimos o leitor a [Lan87]. Isto deveu-se a alguns motivos. Em primeiro lugar, estes teoremas nesse particular formato são frequentemente vistos em cursos de Programação Linear, Programação Não Linear e, eventualmente, até em cursos de Álgebra Linear do IME-USP, mesmo em nível de graduação. Como não precisamos, neste trabalho, de versões mais gerais destes resultados, não há porquê desperdiçar o conhecimento adquirido de um leitor em potencial que mais provavelmente assistiu somente a alguma ou algumas dessas disciplinas do que a um curso mais avançado de Análise Funcional. Em segundo lugar, estes teoremas em dimensão finita são uma simples e bela aplicação da Álgebra Linear elementar, e mesmo aquele leitor que nunca teve contato com a teoria de convexidade mas domina Álgebra Linear deve ser perfeitamente capaz de acompanhar as demonstrações. Finalmente, o livro de S. Lang [Lan87] revelou-se uma excelente bibliografia para estes dois teoremas em particular, pois é sucinto, elegante e aborda exatamente o que precisamos nesta monografia, além de ser uma referência autossuficiente de Álgebra Linear, que é a única ferramenta necessária para desenvolvê-los.

Teorema D.2 (Existência de hiperplano separador)**.** *Dados $S \subset \mathbb{R}^N$ convexo e fechado e $p \notin S$ existe $h \in \mathbb{R}^N$ não nulo tal que $h^*q < h^*p$ para todo $q \in S$. Tal hiperplano denominamos um* hiperplano separador do conjunto S e do ponto p.

Demonstração. É o Teorema 2.1 do Capítulo XII de [Lan87]. □

Geometricamente o teorema acima nos diz que se S é convexo e fechado e p não pertence a S então existe um hiperplano H tal que $p \in H$ e S está integralmente contido em um dos semiespaços determinados por H.

Teorema D.3 (Existência de hiperplano de suporte)**.** *Dados* $S \subset \mathbb{R}^N$ *convexo e* $p \in \partial S$ *existe* $h \in \mathbb{R}^N$ *não nulo tal que* $h^* q \leq h^* p$ *para todo* $q \in S$.

Demonstração. É o Teorema 2.2 do Capítulo XII de [Lan87]. □

Respectivamente, se S é convexo e p pertence à fronteira de S então existe um hiperplano H tal que $p \in H$ e S está integralmente contido em um dos semiespaços determinados por H. Tal hiperplano denominamos um *hiperplano de suporte do conjunto* S *passando por* p.

Nos teorema acima temos que

$$H := \{q \in \mathbb{R}^N : h^* q = h^* p\}.$$

Observe ainda que podemos tomar, sem perda de generalidade, $|h| = 1$ em ambos os teoremas acima.

Dizemos que $S \subset \mathbb{R}^N$ é *estritamente convexo* se dados quaisquer dois pontos pertencentes a S então o segmento aberto que os liga está integralmente contido em $\mathrm{Int}_r S$, isto é

$$p, q \in S \Rightarrow \,]p, q[\, \subset \mathrm{Int}_r S.$$

Observe que todo subconjunto estritamente convexo de $\mathbb{R}^N$ é também convexo.

Proposição D.4. *Seja* $S \subset \mathbb{R}^N$ *um conjunto convexo. Então* S *é estritamente convexo se e somente se todo* $p \in \partial_r S$ *é um ponto extremo de* S.

Demonstração. Suponha que S é estritamente convexo e seja $p \in S$ um ponto não extremo de S: mostraremos que $p \notin \partial_r S$. Com efeito, nessas condições existem $x, y \in S$ tais que $p \in \,]x, y[$, mas a convexidade estrita de S implica que $]x, y[\subset \mathrm{Int}_r S$ e, portanto, $p \in \mathrm{Int}_r S$. Isto mostra que a fronteira relativa de S é constituída apenas de pontos extremos.

Reciprocamente, suponha que S não é estritamente convexo. Logo existem $x, y \in S$ e $p \in \,]x, y[$ tal que $p \notin \mathrm{Int}_r S$. Como S é convexo então $p \in S$ e, portanto, $p \in \partial_r S$. Mas por definição de p este não é um ponto extremo de S. □

Lema D.5. *Sejam* $K \subset \mathbb{R}^N$ *compacto,* $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *um funcional linear não nulo e* $p \in K$ *um ponto de máximo de* f *em* K*. Então* $p \in \partial K$ *e, se* f *não é constante sobre* K*, então* $p \in \partial_r K$.

Demonstração. Claro que f possui pontos de máximo em K, visto que K é compacto e f é contínua: seja $p \in K$ um desses pontos. Mostraremos que $p \in \partial K$.

Com efeito, se $p \in \mathrm{Int} K$ existiria $\epsilon > 0$ tal que $\mathscr{B}(p, \epsilon) \subset K$. Sabemos que existe $h \neq 0$ tal que $f(x) = h^* x$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Defina

$$q := p + \frac{\epsilon}{2} \frac{h}{|h|}$$

de modo que $|p-q| = \epsilon/2$, ou seja, $q \in K$. Ademais

$$h^*q = h^*p + \frac{\epsilon}{2}|h| > h^*p$$

ou seja, $f(q) > f(p)$, o que contradiz a maximalidade de p, um absurdo. Logo, $p \in \partial K$.

Suponha agora que f não seja constante sobre K. Defina $g : \mathbb{R}^{\dim K} \to \mathbb{R}$ por $g := f \circ \mathfrak{I}_K^{-1}$. Podemos mostrar, utilizando a linearidade de f, que g é uma transformação afim, no sentido de que existem $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\xi \in \mathbb{R}^{\dim K}$ tais que $g(y) = \alpha + \xi^* y$ para todo $y \in \mathbb{R}^{\dim K}$. Como f não é constante sobre K então g não é constante sobre $\mathfrak{I}_K(K)$ e, portanto, $\xi \neq 0$. Note ainda que como p é um ponto de máximo de f em K então $\mathfrak{I}_K(p)$ é um ponto de máximo de g – e, portanto, de ξ – em $\mathfrak{I}_K(K)$. Usando agora a primeira parte deste lema no espaço $\mathbb{R}^{\dim K}$, concluímos que $\mathfrak{I}_K(p) \in \partial \mathfrak{I}_K(K)$, ou seja, $p \in \partial_r K$. □

Corolário D.6. *Suponha que $K \subset \mathbb{R}^N$ seja convexo e compacto. Seja $h \in \mathbb{R}^N$ não nulo.*

1. *Existe $p \in \partial K$ tal que h é um hiperplano de suporte para K passando por p.*

2. *Se, ademais, h^* não é constante sobre K então existe $p \in \partial_r K$ tal que h é um hiperplano de suporte para K passando por p.*

3. *Se acrescentarmos ainda a hipótese de que K é estritamente convexo então $p \in \partial_r K$ no item anterior é único.*

Demonstração. Para os itens 1 e 2, segundo o lema anterior basta tomar p um ponto de máximo de h^* em K.

Para o item 3 suponhamos que existe $\tilde{p} \in \partial_r K$ distinto de p tal que $h^*\tilde{p} = h^*p$. Como K é convexo o ponto $q := \frac{1}{2}(p + \tilde{p})$ pertence a K e por linearidade de h^* vale $h^*q = h^*p$, isto é, q é um ponto de máximo de h^*. O lema anterior implica então que $q \in \partial_r K$, mas q não é um ponto extremo de K por definição, o que mostra que K não é estritamente convexo. □

D.2 O Teorema de Krein-Milman em espaços localmente convexos

Enunciaremos aqui o Teorema de Krein-Milman em sua versão para espaços localmente convexos. Neste caso a versão para espaços $\mathbb{R}^N$ – a qual é frequentemente demonstrada em disciplinas de Programação Linear, Programação Não Linear, etc. – não é suficiente: na demonstração do Princípio do Bang-Bang (fonte de nossa necessidade) toda a análise se passa no espaço $L_2^M(T)$ que, sabemos, não é finitamente gerado.

Seja (X, τ) um espaço localmente convexo. Definimos o *casco convexo fechado* de $E \subset X$ como a intersecção de todos os subconjuntos convexos e fechados de X que contém E, ou seja,

$$[[E]] := \bigcap \{S \subset X : E \subset S \text{ e } S \text{ é convexo e fechado}\}.$$

Novamente é fácil ver que $[[E]]$ é convexo e fechado, e é o menor subconjunto de X a satisfazer esta propriedade.

Teorema D.7 (Krein-Milman)**.** *Seja $K \subset X$ convexo e compacto. Então K é o casco convexo fechado de seus pontos extremos.*

Demonstração. É o Teorema 26 do Capítulo 10 de [Roy88]. $\square$

Corolário D.8. *Se $K \subset X$ é convexo, compacto e não vazio então K possui pontos extremos.*

Demonstração. Caso contrário $K = [[\emptyset]] = \emptyset$, contradição. $\square$

Apêndice E

A métrica de Hausdorff

Neste capítulo, mostraremos como um espaço métrico induz uma métrica no conjunto de suas partes compactas não vazias, a chamada *métrica de Hausdorff*. Este conceito é importante para nós porque os conjuntos controláveis e acessíveis dos sistemas de controle lineares autônomos são conjuntos compactos não vazios de $\mathbb{R}^N$ e que dependem do tempo. Gostaríamos então de estudar essa dependência temporal, e para isto devemos introduzir uma topologia no espaço onde moram estes conjuntos. A topologia correta para este problema é dada pela métrica de Hausdorff, no sentido de que é ela que torna a dependência deste conjuntos contínua com relação ao tempo.

Enfatizamos que apenas neste apêndice trataremos da métrica de Hausdorff em espaços métricos quaisquer: no resto do texto, sempre que nos referirmos à métrica de Hausdorff estaremos pensando que o espaço métrico ao qual ela se aplica é algum $\mathbb{R}^N$ ou algum subespaço métrico deste.

Dado um espaço métrico (M, d) denotaremos por $\mathcal{P}_c(M)$ o conjunto das partes compactas não vazias de M. Dados $A \in \mathcal{P}_c(M)$ e $\epsilon > 0$ definimos

$$N(A, \epsilon) := \{x \in M : d(x, A) < \epsilon\}$$

onde, como é costume definir,

$$d(x, A) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

A seguinte observação será útil.

Lema E.1. *Se $A, B, C \in \mathcal{P}_c(M)$ são tais que $A \subset N(C, \epsilon_1)$ e $C \subset N(B, \epsilon_2)$ então $A \subset N(B, \epsilon_1 + \epsilon_2)$.*

Demonstração. Com efeito, tome $a \in A$. Como $a \in N(C, \epsilon_1)$ então $d(a, C) < \epsilon_1$ e logo existe $c \in C$ tal que $d(a, c) < \epsilon_1$. Como $c \in N(B, \epsilon_2)$ existe $b \in B$ tal que $d(c, b) < \epsilon_2$. Segue então que

$$\begin{aligned} d(a, b) &\leq d(a, c) + d(c, b) \\ &< \epsilon_1 + \epsilon_2 \end{aligned}$$

donde concluímos que $d(a, B) < \epsilon_1 + \epsilon_2$, o que implica por sua vez que $A \subset N(B, \epsilon_1 + \epsilon_2)$. □

Proposição E.2. *A função $\rho : \mathcal{P}_c(M) \times \mathcal{P}_c(M) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\rho(A, B) := \inf\{\epsilon > 0 : A \subset N(B, \epsilon),\ B \subset N(A, \epsilon)\} \tag{E.1}$$

é uma métrica.

Demonstração. Que ρ é positiva e simétrica nos argumentos é trivial. Observando ainda que dado $A \in \mathcal{P}_c(M)$ vale que $A \subset N(A, \epsilon)$ para todo $\epsilon > 0$ concluímos que $\rho(A, A) = 0$. Ainda, se $\rho(A, B) = 0$ temos que $A \subset N(B, \epsilon)$ e $B \subset N(A, \epsilon)$ para todo $\epsilon > 0$, o que implica que $A \subset B$ e $B \subset A$, isto é, $A = B$. Concluímos que somente a desigualdade triangular não é imediata, então vamos prová-la.

Queremos mostrar que dados $A, B, C \in \mathcal{P}_c(M)$ quaisquer vale

$$\rho(A, B) \leq \rho(A, C) + \rho(C, B).$$

Vamos mostrar, equivalentemente, que se $\rho(A, C) < \epsilon_1$ e $\rho(C, B) < \epsilon_2$ então $\rho(A, B) \leq \epsilon_1 + \epsilon_2$, para quaisquer $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$. Suponha que $\rho(A, C) < \epsilon_1$ e $\rho(C, B) < \epsilon_2$. Segue da definição de ρ que $A \subset N(C, \epsilon_1)$ e $C \subset N(B, \epsilon_2)$, donde concluímos que $A \subset N(B, \epsilon_1 + \epsilon_2)$. Temos ainda que $B \subset N(C, \epsilon_2)$ e $C \subset N(A, \epsilon_1)$, o que implica que $B \subset N(A, \epsilon_1 + \epsilon_2)$. Estas duas conclusões implicam que $\rho(A, B) \leq \epsilon_1 + \epsilon_2$. □

Proposição E.3. *Sejam M_1, M_2 espaços métricos, $f : M_1 \to \mathcal{P}_c(M_2)$ uma função contínua (na métrica de Hausdorff) e $A \subset M_2$ fechado. Se $x \in M_1$ é tal que $f(x) \cap A = \emptyset$ então existe $\delta > 0$ tal que*

$$d(y, x) < \delta \Rightarrow f(y) \cap A = \emptyset.$$

Demonstração. Como $f(x) \cap A = \emptyset$ e A é fechado e $f(x)$ é compacto existe $\epsilon > 0$ tal que

$$N(f(x), \epsilon) \cap A = \emptyset.$$

Logo existe $\delta > 0$ tal que se $d(y, x) < \delta$ então $\rho(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{2}$ e logo

$$f(y) \subset N(f(x), \epsilon/2) \subset N(f(x), \epsilon).$$

Concluímos que nessas condições $f(y) \cap A = \emptyset$. □

Proposição E.4. *Sejam M um espaço métrico e $f : M \to \mathcal{P}_c(\mathbb{R}^N)$ contínua tal que $f(t)$ é convexo para cada $t \in M$. Se $x \in Intf(T)$ para algum $T \in M$ então existe $\delta > 0$ tal que*

$$d(t, T) < \delta \Rightarrow x \in Intf(t).$$

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ tal que $\mathscr{B}(x, \epsilon) \subset \mathrm{Int} f(T)$.

Suponha por absurdo não existe tal δ. Logo existe uma sequência $t_n \to T$ tal que $x \notin \mathrm{Int} f(t_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então há apenas dois casos a considerar: $x \in \partial f(t_n)$ e $x \notin f(t_n)$.

No primeiro caso, segue da convexidade e da compacidade de $f(t_n)$ que existe um hiperplano de suporte $h_n \neq 0$ tal que $|h_n| = 1$ e $h_n^* y \leq h_n^* x$ para todo $y \in f(t_n)$. No segundo caso, também da convexidade de $f(t_n)$ temos que existe um hiperplano separador $h_n \neq 0$ com $|h_n| = 1$ tal que $h_n^* y < h_n^* x$ para todo $y \in f(t_n)$. Concluímos que existe $h_n \neq 0$ tal que $|h_n| = 1$ e $h_n^* y \leq h_n^* x$ para todo $y \in f(t_n)$.

Defina agora $p_n := x + \frac{\epsilon}{2} h_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Note que $|x - p_n| = \frac{\epsilon}{2}|h_n| = \frac{\epsilon}{2}$ e, portanto, $p_n \in \mathscr{B}(x, \epsilon) \subset \mathrm{Int} f(T)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que $\mathscr{B}(p_n, \epsilon/4) \cap f(t_n) = \emptyset$.

Com efeito, dado $z \in \mathscr{B}(p_n, \epsilon/4)$ temos pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned} h_n^* p_n - h_n^* z &= h_n^*(p_n - z) \\ &\leq |h_n||p_n - z| \\ &< \frac{\epsilon}{4} \end{aligned}$$

mas $h_n^* p_n = h_n^* x + \frac{\epsilon}{2}|h_n|^2 = h_n^* x + \frac{\epsilon}{2}$ e logo

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{4} &> h_n^* p_n - h_n^* z \\ &= h_n^* x + \frac{\epsilon}{2} - h_n^* z \end{aligned}$$

o que implica que $h_n^* x < h_n^* z - \frac{\epsilon}{4} < h_n^* z$, donde certamente $z \notin f(t_n)$ (pela definição de h_n). Como z era arbitrário, concluímos que $\mathscr{B}(p_n, \epsilon/4) \cap f(t_n) = \emptyset$ e, portanto $p_n \notin N(f(t_n), \epsilon/4)$. Como também $p_n \in \mathrm{Int} f(T)$ temos que $\rho(f(T), f(t_n)) \geq \frac{\epsilon}{4}$, e isto vale para $n \in \mathbb{N}$ arbitrário, o que contradiz a continuidade da aplicação f. □

A proposição acima é uma generalização trivial do Lema 12.3 de [HL69], e a demonstração acima é essencialmente a mesma que a lá encontrada. Observe que a proposição acima não pode ser melhorada trocando-se "interior" por "interior relativo" nas passagens do enunciado. De fato, se $f : [0, 1] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ é dada por

$$f(t) := \{t\} \times [-1, 1]$$

então para todo $t \in [0, 1]$ vale que $f(t)$ é convexo, compacto e não vazio em $\mathbb{R}^2$, e é fácil mostrar que f é contínua na métrica de Hausdorff. Ademais, observe que

$$\begin{aligned} \mathrm{Int} f(t) &= \emptyset \\ \mathrm{Int}_r f(t) &= \{t\} \times]-1, 1[\end{aligned}$$

para todo $t \in [0, 1]$. Mas se tomarmos $x := (1/2, 0)$ então $x \in \mathrm{Int}_r f(1/2)$ e $x \notin f(t)$ para todo $t \neq 1/2$.

Para concluir esta seção, demonstraremos um resultado que nos permite criar, a partir de funções entre espaços métricos, funções entre as partes compactas desses espaços que são contínuas.

Proposição E.5. *Sejam M_1, M_2 espaços métricos e $\psi : M_1 \to M_2$ uma função bijetora e lipschitziana. Então a aplicação*[1]

$$K \in \mathcal{P}_c(M_1) \mapsto \psi(K) \in \mathcal{P}_c(M_2)$$

é uniformemente contínua quando munimos $\mathcal{P}_c(M_1)$ e $\mathcal{P}_c(M_1)$ de suas respectivas métricas de Hausdorff.

Demonstração. Seja $L > 0$ uma constante de Lipschitz para ψ. Seja $\epsilon > 0$ e defina $\delta := \frac{\epsilon}{2L} > 0$. Suponha que $K_1, K_2 \in \mathcal{P}_c(M_1)$ são tais que $\rho(K_1, K_2) < \delta$: mostraremos que $\rho(\psi(K_1), \psi(K_2)) < \epsilon$.

Com efeito, tome $x \in \psi(K_1)$: temos $\psi^{-1}(x) \in K_1 \subset N(K_2, \delta)$. Logo existe $\xi \in K_2$ tal que $d(\psi^{-1}(x), \xi) < \delta$ e, portanto,

$$\begin{aligned} d(x, \psi(\xi)) &\leq L d(\psi^{-1}(x), \xi) \\ &< L\delta \\ &= \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

o que implica que $x \in N(\psi(K_2), \epsilon/2)$. Provamos que $\psi(K_1) \subset N(\psi(K_2), \epsilon/2)$ e, por simetria do argumento, $\psi(K_2) \subset N(\psi(K_1), \epsilon/2)$. Isto implica que $\rho(\psi(K_1), \psi(K_2)) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. $\square$

[1] Observe que como ψ é lipschitziana então ψ é contínua e portanto leva compactos em compactos.

Referências Bibliográficas

[Bro70] R. W. Brockett. *Finite Dimensional Linear Systems*. John Wiley & Sons, Inc., 1970.

[CL55] E. A. Coddington and N. Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill Book Company Inc., 1955.

[Eva09] L. C. Evans. *An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory*. Notas de aula, versão 0.2. Disponível em http://math.berkeley.edu/~evans/control.course.pdf. Data de acesso: 03 de setembro de 2009.

[Fil88] A. F. Filippov. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Kluwer Academic Publishers, 1988.

[Gol75] P. Goldenberg. *Sobre os sistemas de Carathéodory*. Dissertação de Mestrado pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo – IME-USP. Setembro 1975.

[HL69] H. Hermes and J. P. LaSalle. *Functional Analysis and Time Optimal Control*. Academic Press Inc., 1969.

[Lan87] S. Lang. *Linear Algebra*. Springer-Verlag New York Inc., third edition, 1987.

[Moy66] R. D. Moyer. A general uniqueness theorem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 17(3):602–607, Junho 1966.

[MS82] J. Macki and A. Strauss. *Introduction to Optimal Control Theory*. Springer-Verlag New York Inc., 1982.

[Roy88] H. L. Royden. *Real Analysis*. Macmillan Publishing Company, third edition, 1988.

[Rud73] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill Book Company Inc., 1973.

[Zab92] J. Zabczyk. *Mathematical Control Theory: An Introduction*. Birkhäuser Boston, 1992.

Índice Remissivo