

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA  
BACHARELADO EM MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL

**Alocação Estratégica Intertemporal de Ativos para  
Otimização de Carteiras de Renda Fixa**

**Victor Hideki Obara**

**Orientador: Prof. Dr. Nelson Ithiro Tanaka**

São Paulo  
2007

# **Alocação Estratégica Intertemporal de Ativos para Otimização de Carteiras de Renda Fixa**

**Victor Hideki Obara**

Trabalho de Formatura

MAP - 2040

**Orientador: Prof. Dr. Nelson Ithiro Tanaka**

São Paulo

2007

# Resumo

Quando falamos de mercado financeiro estamos nos referindo a centenas de produtos de diversos segmentos econômicos e de milhares de investidores que movimentam seus capitais de acordo com suas convicções e expectativas sobre a economia.

Para o mercado brasileiro, e mais especificamente para o que é indexado à taxa de juros, denominado de mercado de renda fixa nacional, esta realidade não é diferente.

Apesar de existirem alguns modelos de controle de exposição ao risco, como o VaR e o Stress Test, detalhes em Jorion (1997), no mercado, ainda há uma carência sobre um tratamento matemático robusto para auxílio nas decisões estratégicas de alocação de capital.

Esta carência é a motivação para o estudo de um modelo matemático de otimização de um investimento no mercado de renda fixa nacional, onde o objetivo é determinar qual a carteira de renda fixa que maximiza o retorno financeiro dado o comportamento da taxa de juros e a reação do investidor frente ao risco. A atuação na escolha da alocação é intertemporal, o que significa dizer que as intervenções ocorrem ao longo do tempo em que a carteira está em vigência.

## **Agradecimentos**

Agradeço aos meus pais Fernando e Mariko Obara que me deram a base e formação de caráter necessária para que pudesse chegar até aqui.

Agradeço à Professora Sonia Regina Garcia, idealizadora do curso de Matemática Aplicada e Computacional, que durante todo o curso nos auxiliou e norteou nossas dúvidas e anseios.

Por fim, agradeço ao Professor Nelson Ithiro Tanaka por sua enorme paciência e boa vontade na orientação deste trabalho. Com certeza sua ajuda me acrescentou muito, tanto na conclusão deste trabalho quanto nas lições e conhecimento que levo comigo daqui para frente.

# Índice

<b>Introdução</b> .....	<b>1</b>
<b>1. Conceitos Básicos de Renda Fixa</b> .....	<b>3</b>
1.1 Introdução .....	3
1.2 Taxa de Juros .....	3
1.3 Taxa de Juros Forward .....	6
1.4 Medidas de Risco em Taxa de Juros .....	8
1.5 Análise de Componentes Principais .....	11
<b>2. Modelagem da Taxa de Juros</b> .....	<b>16</b>
2.1 Introdução .....	16
2.2 Classificação dos Modelos de Taxas de Juros Taxa de Juros .....	16
2.3 Modelo de Merton .....	18
2.4 Modelo de Vasicek .....	19
2.5 Modelo de Cox-Ingersoll-Ross .....	21
2.6 Modelo de Ho-Lee .....	22
2.7 Modelo de Hull-White .....	23
2.8 Modelo de Black-Karasinski .....	25
2.9 Modelo de Heath-Jarrow-Morton .....	26
<b>3. Teoria da Utilidade</b> .....	<b>29</b>
3.1 Introdução .....	29
3.2 Conceito de Utilidade .....	29
3.3 Função Utilidade .....	32
3.4 Propriedades Econômicas da Função Utilidade .....	35
3.5 Aversão ao Risco do Investidor .....	37
3.6 Exemplos .....	39

<b>4. Programação Dinâmica</b> .....	<b>43</b>
4.1 Introdução .....	43
4.2 Conceitos Básicos .....	43
4.3 Princípio de Otimalidade de Bellman .....	44
4.4 Programação Dinâmica .....	45
4.5 Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman .....	46
<b>5. Otimização em Carteiras de Renda Fixa</b> .....	<b>51</b>
5.1 Introdução .....	51
5.2 O problema da Alocação de Ativos de Renda Fixa .....	51
5.3 Modelagem da Carteira de Renda Fixa Ótima .....	52
<b>6. Simulação em Carteiras de Renda Fixa</b> .....	<b>63</b>
6.1 Introdução .....	63
6.2 Análise das Variáveis do Modelo .....	63
6.3 Simulações em Gestão de Carteiras de Renda Fixa .....	70
<b>Conclusão</b> .....	<b>76</b>
<b>Bibliografia</b> .....	<b>78</b>

# Introdução

O mercado financeiro movimenta um enorme volume de operações todos os dias. O dinheiro vem de investidores do mundo inteiro que tem diferentes objetivos, diferentes expectativas e diferentes perfis e é esta diferença que torna o comportamento de fluxo de capitais imprevisível. É impossível saber com certeza se a bolsa de valores vai estar em alta daqui a algum tempo, se o dólar vai cair ou se os juros vão subir. Esta incerteza torna o investimento no mercado financeiro um jogo que, todos os dias, beneficia uns e penalizam outros.

Dentro deste mercado financeiro que contam com centenas de produtos em diferentes segmentos da economia, existe um mercado que acompanha a taxa de juros, seja ela acordada e fixada no início de contrato ou que acompanhe alguma taxa de juros já existente no mercado nacional (Selic, CDI, etc) ou internacional (Libor, etc). Aos investimentos que acompanham este mercado dá-se o nome de mercado de renda fixa.

Como em qualquer outro mercado, os investidores do mercado de renda fixa desejam maximizar o retorno financeiro dos seus investimentos e para isso, como em um jogo, apostam em palpites sobre o comportamento da taxa de juros para direcionar seu capital. Obviamente, às vezes acertam, outras não.

O presente trabalho é uma transcrição livre de Tai (2003). A estrutura de apresentação dos conceitos e resultados foi mantida, porém, adaptações de conceitos e atualizações de bases de dados, gerando resultados mais atuais, foram consideradas.

O objetivo deste trabalho é apresentar um modelo matemático para otimização de retornos financeiros em um investimento em renda fixa. O princípio é que dado um modelo de comportamento da taxa de juros, dado o perfil de um investidor, isto é, o quanto ele tem propensão ou aversão ao risco, apresentaremos um modelo que maximiza os lucros em um investimento unicamente no mercado de renda fixa.

Para esta modelagem, primeiramente são introduzidos alguns conceitos básicos do mercado de renda fixa como taxa de juros, taxas de juros forward, taxa de juros livre de risco, duration e convexidade.

O segundo passo é estudar alguns modelos de comportamento da taxa de juros já existentes no mercado como os Modelos de Merton, Vasicek, Hull-White, entre outros. Estes modelos tentam reproduzir o comportamento aleatório da taxa de juros por meio de equações diferenciais estocásticas.

Depois estudamos o comportamento do investidor frente ao risco. Se um investidor tem aversão ao risco, se essa aversão varia conforme seu nível de riqueza. A modelagem desta aversão é feita utilizando a Teoria da Utilidade.

O passo seguinte é a apresentação dos conceitos do Princípio de Otimalidade de Bellman e da Programação Dinâmica. Estes conceitos serão ferramentas que permitem transformar o processo de otimização em intervenções pontuais em determinados instantes de tempo, intervenções estas definidas a partir de equações diferenciais.

Reunindo os conceitos e ferramentas apresentadas até então, escolhendo um modelo de comportamento da taxa de juros, uma função utilidade que reflete o comportamento do investidor frente ao risco e utilizando as técnicas de otimização, podemos apresentar a solução que maximiza o retorno financeiro do investidor.

Finalmente, para checar a verossimilhança do modelo obtido, são feitas algumas simulações em diversos cenários econômicos, arbitrariamente escolhidos, para diferentes perfis de investidores.

No Capítulo 1 introduzimos os conceitos básicos do mercado de renda fixa. O Capítulo 2 discute os diversos modelos de taxas de juros disponíveis na literatura. No Capítulo 3 a Teoria da Utilidade é estudada, ressaltando a aversão ao risco do investidor. O Capítulo 4 é dedicado à Programação Dinâmica. No Capítulo 5 reunimos os conceitos desenvolvidos nos capítulos anteriores para montar e solucionar o problema de alocação ótima. O Capítulo 6 apresenta simulações dos comportamentos do modelo de otimização em várias situações criadas.

# Capítulo 1

## Conceitos Básicos de Renda Fixa

### 1.1 Introdução

O investimento no mercado de renda fixa é caracterizado por uma aplicação do capital onde se espera um retorno financeiro que acompanhe uma taxa de juros. Esta taxa pode ser tanto fixada no início do investimento (pré-fixada) quanto seguir alguma taxa existente no mercado (pós-fixada), como por exemplo, a taxa de juros Selic.

Este capítulo é dedicado à introdução dos conceitos básicos do importante mercado de renda fixa, onde serão abordados algumas terminologias e conceitos como: Taxa de Juros, Taxas de Juros Forward, Taxa de Juros Livre de Risco, Análise de Componentes Principais, Duration e Convexidade. Estes conceitos serão ferramentas que utilizaremos nos capítulos posteriores e podem ser vistos mais detalhadamente em Securato (2005).

### 1.2 Taxa de Juros

Se uma instituição, inclusive o governo, deseja captar recursos no mercado, ela emite títulos, tornando-se devedora de quem os compra. A quem compra este título, o credor, a instituição deve pagar ao fim de um certo período de tempo o valor principal depositado pelo credor mais uma certa remuneração, referente à desvalorização do capital neste período de tempo, além do risco de crédito da instituição. Esta remuneração sobre valor investido inicialmente denomina-se taxa de juros.

Neste capítulo adotaremos algumas hipóteses em relação aos títulos estudados: eles não têm pagamento de intermediários (no mercado são

usualmente conhecidos como títulos “zero-cupons”) e não há risco de crédito, ou seja, com certeza o emissor do título honrará com seu compromisso.

Definimos como  $T$  o vencimento de um título de renda fixa, e seja o horizonte de tempo definido em  $[0, T]$ , a data corrente analisada será denotada por  $t$ , portanto,  $0 < t < T$ .

Vamos definir como  $P(t,T)$  o preço de um título no instante  $t$  cujo vencimento é no instante  $T$ , para uma unidade de moeda. Deste modo o valor de  $P(t,T)$  é crescente, atingindo seu valor máximo no seu vencimento  $T$ . Desse modo,  $P(T,T) = 1$  e  $P(t,T) < 1$ , para  $t < T$ .

Chamaremos de taxa de juros  $\{Y(t,T)\}$  o rendimento dos juros sobre o título em questão. Então,  $Y(t,T)$  é a taxa de juros, no instante  $t$ , de um título que vence em  $T$ .

O preço de um título (satisfeitas as hipóteses iniciais acima) no instante  $t$ , com vencimento em  $T$ , capitalizado  $m$  vezes ao ano, sujeito a uma taxa de juros  $Y(t,T)$  é dado por:

$$P(t,T) = \left(1 + \frac{Y(t,T)}{m}\right)^{-m(T-t)}. \quad (1.1)$$

Quando o título é capitalizado de modo contínuo, o preço será dado por:

$$P(t,T) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{Y(t,T)}{m}\right)^{-m(T-t)}. \quad (1.2)$$

Portanto,

$$P(t,T) = e^{-Y(t,T)(T-t)}. \quad (1.3)$$

A partir de (1.3) obtemos:

$$Y(t,T) = \frac{-\ln P(t,T)}{(T-t)}. \quad (1.4)$$

A equação (1.4) descreve a taxa de juros. Essa taxa é influenciada por inúmeros fatores do mercado, como a situação econômica do país, a volatilidade das taxas de mercado e a confiança dos investidores. Modelar este comportamento requer um tratamento estocástico e é um dos grandes desafios da modelagem em Finanças.

Estudaremos agora a situação em que o vencimento  $T$  se aproxima de  $t$ , ou seja, o intervalo de tempo  $(t,T)$  tende a zero. Deste modo, existe um intervalo de tempo infinitesimal,  $dt$ , cujo vencimento  $T$  é dado por  $T = t + dt$ .

Neste caso a taxa de juros é chamada de “taxa de juros livre de risco” pois neste pequeno intervalo todas as influências externas descritas acima estarão sendo desprezadas:

$$r_t = \lim_{T \rightarrow t} Y(t,T) = Y(t,t). \quad (1.5)$$

Também é usual chamar  $r_t$  de taxa de juros instantânea.

Se tivermos um investimento em renda fixa que pague justamente essa taxa de juros instantânea, assumindo que em  $t = 0$  invistamos  $B_0 = 1$  então, chamando de  $B_t$  o retorno do investimento no instante  $t$ , podemos modelar a variação de  $B_t$  pela equação:

$$dB_t = r_t B_t dt. \quad (1.6)$$

A equação acima é uma Equação Diferencial Ordinária, análoga à equação de crescimento populacional, o que faz todo sentido, pois mostra que o

crescimento marginal do retorno do investimento de um ativo aplicado em renda fixa é proporcional à taxa livre de risco e ao montante disponível no instante  $t$ .

A resolução desta EDO resulta em,

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right). \quad (1.7)$$

Note que nos dois últimos parágrafos estamos considerando apenas a variação determinística.

### 1.3 Taxa de Juros Forward

Diferentemente da taxa de juros convencional, a Taxa de Juros Forward, conhecida no mercado como FRA (Forward Rate Agreement), é uma taxa acordada hoje que só terá vigor em um tempo posterior e seu fim no vencimento. Estamos, portanto, falando de três instantes de tempo diferentes:

$t$ : o instante de tempo em que a taxa é acordada;

$T$ : o instante de tempo em que o vigor da taxa terá seu início;

$S$ : o instante de tempo em que o vigor da taxa terá seu fim.

Logo,  $t < T < S$ .

Vamos imaginar dois títulos, o primeiro cujo vencimento ocorre em  $T$ , e o segundo cujo vencimento ocorre em  $S$ , com  $T < S$ . Supomos também que estamos no instante  $t$ . Da equação (1.3) temos que:

$$P(t, T) = e^{-Y(t, T)(T-t)} \quad (1.8)$$

é o preço, por unidade de moeda, do primeiro título no instante  $t$  e

$$P(t, S) = e^{-Y(t, S)(S-t)} \quad (1.9)$$

é o preço de segundo título, também no instante  $t$ .

Vamos definir  $F(t,T,S)$ , a taxa forward, que é interpretada como sendo a taxa de variação, por unidade de tempo, da proporção da variação do preço no instante  $t$ , do título que vence em  $S$  em relação ao título que vence em  $T$ ,

$$F(t,T,S) = \frac{1}{(S-T)} \left( \frac{P(t,S)}{P(t,T)} - 1 \right), \quad (1.10)$$

onde  $t < T < S$ .

Se o comprimento do intervalo  $(T,S)$  tende a zero,  $S$  é descrito como sendo o instante  $T$  mais um incremento de tempo infinitesimal  $dT$ , decorrido de  $T$ , ou seja,  $S = T + dT$  e então definimos a taxa de juros forward livre de risco como

$$\lim_{s \downarrow T} F(t,T,S) = \lim_{s \downarrow T} \frac{1}{P(t,T)} \frac{P(t,S) - P(t,T)}{(S-T)} = -\frac{1}{P(t,T)} \frac{\partial P(t,T)}{\partial T} = -\frac{\partial \ln P(t,T)}{\partial T}.$$

Portanto;

$$f(t,T) = \lim_{s \downarrow T} F(t,T,S) = -\frac{\partial \ln P(t,T)}{\partial T}. \quad (1.11)$$

Da equação acima:

$$\partial \ln P(t,T) = -f(t,T) \partial T \Rightarrow \ln P(t,T) = -\int_t^T f(t,s) ds$$

e, portanto:

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,s) ds\right). \quad (1.12)$$

Ou seja, o preço do ativo  $P(t,T)$  depende do acumulo da taxa de juros forward instantânea  $f(t,T)$  no intervalo de tempo entre  $t$  e  $T$ .

## 1.4 Medidas de Risco em Taxa de Juros

Quando compramos ou vendemos diferentes tipos de ativos de renda fixa, como títulos, debêntures, etc; com diferentes períodos de vencimento, dizemos que montamos uma carteira. Esta carteira de renda fixa está sujeita as variações da taxa de juros do mercado, podendo ser prejudicada ou beneficiada com a oscilação da taxa de juros.

As medidas de risco nos fornecem uma noção da exposição da carteira em relação à variação na taxa de juros corrente.

Para os itens em 1.4.1 e 1.4.2 usaremos a seguinte notação:

$PV_j$ : valor do título  $j$  no presente;

$C_j$ : valor do título  $j$  na data do seu vencimento;

$i$ : taxa de juros paga pelo título;

$t_j$ : tempo até o vencimento do título  $j$ .

### 1.4.1 Duration

Duration é uma média dos prazos dos ativos dentro de uma carteira, ponderada pelo valor trazido ao presente desses títulos. Dado um título cujo valor no vencimento é dado por  $C_j$ , o cálculo do valor presente deste título é dada por

$$PV_j = \frac{C_j}{(1+i)^{t_j}} . \quad (1.13)$$

Com isso, o cálculo da duration é,

$$D = \frac{\sum_{j=1}^n PV_j t_j}{\sum_{j=1}^n PV_j} . \quad (1.14)$$

Além de nos dar uma noção de tempo, a duration pode ser interpretada como uma medida de sensibilidade da carteira em relação à taxa de juros.

Para vermos isso, suponhamos que possamos representar a carteira inteira como sendo um único título, que denominaremos de “título sintético”.

Usaremos a seguinte notação:

PV: valor da carteira no presente;

FV: valor da carteira na data do vencimento;

I: taxa de juros paga pelo título sintético;

D: duration da carteira.

Então:

$$PV = \frac{FV}{(1+I)^D}. \quad (1.15)$$

Queremos estudar a variação no valor presente da carteira (dPV) em relação à variação da taxa de juros do título sintético (dI). Portanto, por derivação,

$$\frac{dPV}{dI} = -D \frac{FV}{(1+I)^{D+1}}. \quad (1.16)$$

Desenvolvendo,

$$\frac{dPV}{PVdI} = -D \frac{FV}{PV} \frac{1}{(1+I)^{D+1}} \Rightarrow \frac{dPV}{PVdI} = -D(1+I)^D \frac{1}{(1+I)^{D+1}}.$$

Portanto:

$$\frac{dPV}{PV} = -D \frac{dI}{(1+I)}. \quad (1.17)$$

A equação (1.17) nos permite interpretar a duration como uma medida de sensibilidade. Ela estima a variação relativa do valor presente da carteira em relação a uma variação relativa na taxa de juros.

### 1.4.2 Convexidade

Juntamente com a duration, a convexidade é uma medida de sensibilidade que tenta captar o efeito da mudança na taxa de juros no valor presente da carteira.

A convexidade estuda a variação relativa dos preços em função da variação da taxa de juros ( $\frac{dPV}{PV} \times dl$ ), ou seja, ela estuda a curvatura (ou convexidade) da variação dos preços em relação à variação da taxa de juros. Quanto maior for essa curvatura (quanto mais convexa), maior será a sensibilidade da carteira ou do ativo em relação a mudanças na taxa de juros.

Do Cálculo sabemos que quando queremos estudar a curvatura devemos olhar a segunda derivada da função. Portanto, a medida da convexidade é dada da seguinte forma:

$$C = \frac{1}{PV} \frac{\partial^2 PV}{\partial l^2}. \quad (1.18)$$

Usando (1.15), obtemos,

$$C = \frac{1}{PV} \frac{\partial^2}{\partial l^2} \left( \frac{FV}{(1+l)^D} \right), \quad (1.19)$$

e, portanto,

$$C = \frac{1}{PV} \frac{D(D+1)FV}{(1+l)^{D+2}} . \quad (1.20)$$

## 1.5 Análise de Componentes Principais

Seja  $\mathbf{J}$  um vetor aleatório de distribuição  $D$ , com média  $\boldsymbol{\mu}$  e variância  $\boldsymbol{\Sigma}$ . Podemos representar isso da seguinte maneira:

$$\mathbf{J} \sim D(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \quad (1.21)$$

onde  $\boldsymbol{\mu}$  é um vetor de médias e  $\boldsymbol{\Sigma}$  é uma matriz de variância-covariância, e portanto assumimos como sendo positiva definida e de posto completo.

A Análise de Componentes Principais (ACP) consiste em achar uma matriz  $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , tal que  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_n]$  de modo que  $\mathbf{a}_1 \mathbf{J}$  produza a maior explicação das variâncias em  $\boldsymbol{\Sigma}$ , isto é,  $Var(\mathbf{a}_1 \mathbf{J})$  é a mais próxima possível da soma das variâncias em  $\boldsymbol{\Sigma}$ . Em seguida,  $\mathbf{a}_2 \mathbf{J}$  deve produzir a maior explicação das variâncias em  $\boldsymbol{\Sigma}$  subtraído o efeito de  $\mathbf{a}_1$ , e assim por diante. Deste modo, construímos  $\mathbf{a}_i$ 's ortogonais, ou seja, se  $i \neq j$ , então  $\mathbf{a}_i' \mathbf{a}_j = 0$ .

Seja  $\mathbf{X} = \mathbf{A}' \mathbf{J}$ , então temos,

$$\begin{aligned} Var[\mathbf{X}] &= E[\mathbf{X}\mathbf{X}'] - E[\mathbf{X}]E[\mathbf{X}'] = E[\mathbf{A}'\mathbf{J}(\mathbf{A}'\mathbf{J})'] - E[\mathbf{A}'\mathbf{J}]E[(\mathbf{A}'\mathbf{J})'] \\ &= E[\mathbf{A}'\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}] - E[\mathbf{A}'\mathbf{J}]E[\mathbf{J}'\mathbf{A}] = \mathbf{A}'E[\mathbf{J}\mathbf{J}']\mathbf{A} - \mathbf{A}'E[\mathbf{J}]E[\mathbf{J}]\mathbf{A} \\ &= \mathbf{A}'(E[\mathbf{J}\mathbf{J}'] - E[\mathbf{J}]E[\mathbf{J}'])\mathbf{A} \\ &= \mathbf{A}'Var[\mathbf{J}]\mathbf{A} \\ Var[\mathbf{X}] &= \mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A} . \end{aligned} \quad (1.22)$$

Como por hipótese  $\Sigma$  é uma matriz positiva definida, pelo Teorema da Decomposição Espectral sabemos que existe uma matriz  $\mathbf{P}$  ortonormal e uma matriz diagonal  $\Lambda$  formada pelos auto-valores de  $\Sigma$  tal que,

$$\Sigma = \mathbf{P} \Lambda \mathbf{P}', \quad (1.23)$$

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P}^{-1}, \quad (1.24)$$

onde denotaremos por  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  os autovalores de  $\Sigma$ , com  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ .

Como queremos  $\mathbf{A}$  tal que suas colunas sejam ortogonais, isto é, se  $i \neq j$ , então  $\mathbf{a}_i' \mathbf{a}_j = 0$ , temos,

$$\text{Var}[\mathbf{X}] = \text{Var}[\mathbf{A}'\mathbf{J}] = \mathbf{A}'\Sigma\mathbf{A} = \mathbf{A}'\mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}'\mathbf{A} = \mathbf{P}'\mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}'\mathbf{P} \text{ se escolhermos } \mathbf{A} = \mathbf{P}.$$

Portanto,

$$\text{Var}[\mathbf{X}] = \Lambda, \quad (1.25)$$

onde,

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n). \quad (1.26)$$

Por outro lado, a soma das variâncias da matriz de variâncias-covariâncias  $\Sigma$  é o traço da matriz. Deste modo,

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = \text{tr}(\Sigma) = \text{tr}(\mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}') = \text{tr}(\Lambda\mathbf{P}'\mathbf{P}) = \text{tr}(\Lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i. \quad (1.27)$$

ou seja, a soma dos auto-valores  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$  é o traço da matriz  $\Sigma$ .

Primeiramente queremos  $\mathbf{a}_1$ , tal que:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 a_1^2 \dots a_1^k \\ \vdots \\ a_1^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_k \end{pmatrix} = \mathbf{a}_1^t \mathbf{J} = a_1^1 J_1 + a_1^2 J_2 + \dots + a_1^k J_k \quad (1.28)$$

explique o máximo da variância em  $\Sigma$ , ou seja, queremos  $\mathbf{a}_1$  tal que:

$$\text{Var}(\mathbf{a}_1^t \mathbf{J}) = \mathbf{a}_1^t \text{Var}(\mathbf{J}) \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1^t \Sigma \mathbf{a}_1 \quad (1.29)$$

produza a maior explicação das variâncias de  $\Sigma$ .

A primeira componente principal,  $\mathbf{a}_1$ , será o auto-vetor associado ao maior auto-valor, e como,

$$\text{Var}(\mathbf{a}_1^t \mathbf{J}) = \lambda_1, \quad (1.30)$$

a explicação que esta componente representa do vetor  $\Sigma$  é diretamente proporcional ao valor de seu auto-valor, ou seja, a porcentagem de explicação será,

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{k \times n}}. \quad (1.31)$$

Analogamente, a explicação dada por seus dois primeiros componentes principais será,

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{k \times n}}. \quad (1.32)$$

e seus componentes principais serão os auto-vetores associados à  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  respectivamente.

Repetimos o processo até achar o número de componentes principais que explique uma porcentagem satisfatória da variância de  $\Sigma$ . Esta porcentagem pode variar de acordo com os objetivos da análise, de acordo com o grau de precisão e da dificuldade de trabalhar com uma nova componente principal.

Ligando a ACP com os juros trabalhados aqui, temos que na prática, a volatilidade da taxa de juros é explicada por uma série de componentes como a volatilidade do mercado internacional, as reuniões do COPOM, a inflação, a bolsa de valores, o saldo das contas correntes, o mercado cambial, e outros fatores.

Agora utilizaremos a ACP para achar combinações linearmente independentes das taxas de juros que expliquem o máximo da volatilidade do nível da taxa de juros.

Primeiramente tomemos as informações nos instantes de tempos  $t_i, i=1,2,\dots,n+1$ . Chamaremos de  $r_{t_i}(\tau_j)$ ,  $j=1,\dots,k$ , a taxa de juros no instante  $t_i$  para o ativo  $\tau_j$ .

Vamos definir uma variável aleatória  $d_j$ , cujas observações serão as diferenças:

$$d_{i,j} = r_{t_{i+1}}(\tau_j) - r_{t_i}(\tau_j). \quad (1.33)$$

Ou seja, esta variável  $d$  está medindo a diferença entre a taxa de juros instantânea  $r$  de uma ativo  $\tau_j$  nos instantes  $t_i$  e  $t_{i+1}$ .

Para cada instante de tempo temos que:

$$\mathbf{d}_i = \begin{pmatrix} d_{i1} \\ d_{i2} \\ \vdots \\ d_{ik} \end{pmatrix}, \quad i=1,\dots,n \quad (1.34)$$

Vamos considerar o vetor com os  $\mathbf{d}_i$ 's sobrepostos, um acima do outro, isto é,

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{d}_n \end{pmatrix}. \quad (1.35)$$

A matriz de variâncias-covariâncias de  $\mathbf{d}$  será,

$$\mathbf{\Sigma} = Cov(\mathbf{d}), \quad (1.36)$$

ou seja,

$$\mathbf{\Sigma} = (\mathbf{\Sigma}_{ij}), \text{ onde } \mathbf{\Sigma}_{ij} = Cov(\mathbf{d}_i, \mathbf{d}_j), i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.37)$$

Ao aplicarmos a ACP na variável  $d_{i,j} = r_{t_{i+1}}(\tau_j) - r_{t_i}(\tau_j)$ , estamos achando combinações linearmente independentes das variáveis descritas acima que expliquem satisfatoriamente, de acordo com os critérios da análise, o traço da matriz de variâncias-covariâncias  $\mathbf{\Sigma}$ , ou seja, estamos tentando achar as combinações lineares dos juros em número menor que o total das variáveis que explicam a maior porcentagem possível da variação da taxa de juros entre dois instantes de tempo consecutivos para cada ativo. Esta é a grande vantagem de utilizarmos a ACP no estudo do comportamento da taxa de juros. Maiores detalhes sobre Análise de Componentes Principais podem ser encontrados em Johnson & Wichern (2007).

# Capítulo 2

## Modelagem da Taxa de Juros

### 2.1 Introdução

Para podermos falar em maximizar os lucros provindos de determinada carteira de renda fixa, primeiramente devemos estudar modelos que tentam reproduzir o comportamento da taxa de juros em um determinado período de tempo. Isto porque o rendimento de uma carteira está diretamente atrelado aos juros.

Este capítulo é dedicado a uma breve apresentação de alguns dos mais importantes modelos de taxa de juros utilizados no mercado. Os modelos serão apresentados de forma resumida, onde serão apontadas as principais diferenças entre eles, levando-se em conta conceitos como o de equilíbrio e o de não arbitragem. Uma abordagem mais detalhada dos modelos de taxa de juros pode ser encontrada em Brigo & Mercúrio (2002) e Elliott & Koop (2005).

### 2.2 Classificação dos Modelos de Taxas de Juros

Inicialmente temos duas vertentes de modelos a serem estudados: os Modelos de Equilíbrio e os Modelos de Não Arbitragem.

Os modelos de equilíbrio supõem que a taxa de juros é resultado de um equilíbrio econômico, ou seja, dadas as variáveis que compõem o equilíbrio econômico, a variável “taxa de juros” é endógena, sendo um resultado do modelo. Por esta razão, a taxa determinada por um modelo de equilíbrio não precisa necessariamente corresponder às taxas efetivamente observadas e precificadas

no mercado. Deste modo, não é confiável a utilização deste tipo de modelo no apreçamento de ativos e derivativos de taxa de juros.

Por outro lado, outra categoria de modelos de taxa de juros é o de não arbitragem. Estes modelos possuem termos dependentes no tempo, o que permite a entrada no modelo de dados efetivamente observados no mercado. Esta característica torna os modelos de não arbitragem menos viesados e, portanto, mais aceitos no mercado.

Por arbitragem iremos entender se existir uma probabilidade não nula de um investimento zero em um determinado instante de tempo que resulte com certeza em um retorno positivo em um instante posterior. Os modelos de não arbitragem supõem esta situação ser impossível.

Outra classificação atribuída entre os modelos é em relação ao número de variáveis de estado dentro do modelo. Uma variável é denominada de estado se ela é responsável pela composição da estrutura a termo da taxa de juros. As variáveis de estado mais comuns são: o preço do título,  $P(t,T)$ ; a taxa de juros instantânea,  $r_t$ ; e a taxa de juros forward instantânea  $f(t,T)$ .

Se no modelo somente uma variável é variável de estado, então denominamos o modelo de unifatorial. Falar que um modelo é unifatorial significa dizer que a variável de estado (geralmente a taxa de juros livre de risco,  $r_t$ ) é uma estatística suficiente para toda a estrutura a termo da taxa de juros, ou seja, ela é perfeitamente correlacionada com todos os vencimentos da curva de juros.

Se um modelo tem mais que uma variável de estado, então ele é denominado de multifatorial.

Existem resultados empíricos, utilizando a técnica de Análise de Componentes Principais (ACP), que mostram que 85% a 90% da variação da taxa de juros é explicada pela primeira componente, o nível da taxa de juros. Esta praticidade em se ter um nível de explicação relativamente alto lançando mão de uma única componente justifica o fato de grande parte dos modelos serem unifatoriais.

Por outro lado, resultados também conhecidos mostram que, em geral, 90% a 95% da variação da taxa de juros é explicada pelas duas primeiras componentes principais, o nível da taxa de juros e sua inclinação, que representa sua tendência.

Quando se trata de derivativos de taxa de juros que dependem da correlação entre os vencimentos ou entre a taxa instantânea e a forward, os modelos multifatoriais são melhores opções para a modelagem da curva de juros.

Descrevemos a seguir alguns dos modelos de taxas de juros mais populares na prática do mercado.

### 2.3 Modelo de Merton

O modelo de Merton (1973) foi um dos pioneiros na tentativa de modelagem do processo estocástico da taxa de juros. Segundo o modelo, o nível da taxa de juros é reproduzido pela seguinte equação diferencial estocástica:

$$dr_t = \mu dt + \sigma dW_t \quad (2.1)$$

onde o tempo  $t$  é descrito de modo contínuo;  $\mu$  e  $\sigma$  são constantes positivas representando média e desvio padrão, respectivamente, e  $W_t$  é o Movimento Browniano, responsável pela incerteza aleatória do comportamento da taxa de juros.

O modelo é unifatorial pois só possui uma variável de estado,  $r_t$ , e é de equilíbrio pois a determinação da curva de juros é endógena, através da componente  $\mu$ .

O modelo diz que a variação da taxa de juros é explicada através de um fator determinístico, a taxa média do mercado no equilíbrio mais uma componente estocástica, a variação em torno desta média (descrita pelo Movimento Browniano  $W_t$ ).

Podemos notar que se estivermos em tempos de turbulência, com volatilidade alta e um cenário de stress de mercado, a diferença entre as taxas observadas no mercado e as estimadas pelo modelo aumenta.

Calculando a solução da equação acima temos o seguinte resultado:

$$r_t = r_s + \int_s^t \mu dv + \sigma \int_s^t dW_u \quad (2.2)$$

onde pela propriedade browniana,

$$\sigma(W_t - W_s) \sim Normal(0, \sigma^2(t - s)) \quad (2.3)$$

O fato da distribuição ser Gaussiana gera a possibilidade das taxas de juros assumirem valores negativos. Além disso, como discutido anteriormente, a determinação da taxa de juros é endógena e não reproduz as taxas efetivamente observadas no mercado.

Outro ponto importante é que a variância do modelo depende diretamente da diferença  $(t - s)$ , e a medida que essa diferença cresce indefinidamente, a variância tende a infinito.

Estes fatores são desvantagens do modelo e faz com que ele seja menos usual na prática do mercado.

## 2.4 Modelo de Vasicek

Vasicek (1977) propôs uma nova modelagem para a taxa de juros, usando o princípio de reversão à média de Ornstein-Uhlenbeck:

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t \quad (2.4)$$

onde  $k, \theta$  e  $\sigma$  são constantes positivas,  $W_t$  é o Movimento Browniano e  $r_t$  é a taxa de juros instantânea (ou no curto prazo).

A evolução em relação ao modelo anterior é a presença da componente  $\theta$ , que é a expectativa da taxa de juros no longo prazo. A componente determinística da equação diferencial acima  $(\theta - r_t)$  expressa a reversão da taxa de juros  $r_t$  à expectativa  $\theta$ . Se  $r_t$  for menor (maior) que  $\theta$ , a diferença  $(\theta - r_t)$  é positiva (negativa) e tanto maior será essa diferença quanto menor (maior) for  $r_t$  em relação a  $\theta$ . Por outro lado, sendo  $k(\theta - r_t)$  a componente determinística da equação, ela indica a velocidade de crescimento (decréscimo) de  $r_t$ , e portanto quanto maior for  $|\theta - r_t|$  mais rápido  $r_t$  se dirigirá em direção a  $\theta$ .

Este comportamento de reversão à média faz com que o problema de uma variância explosiva, presente no modelo anterior, seja solucionado.

Resolvendo a equação diferencial estocástica (2.4) temos:

$$r_t = r_s e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-k(t-u)} dW_u . \quad (2.5)$$

Por  $r_t$  ter uma distribuição normal, as medidas de média e variância são fechadas e respectivamente,

$$E[r_t | r_s] = r_s e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)}) \quad (2.6)$$

e

$$Var[r_t | r_s] = \frac{\sigma^2}{2k} [1 - e^{-2k(t-s)}] . \quad (2.7)$$

Significa dizer, que num prazo muito longo ( $t \rightarrow \infty$ ), a taxa média dos juros tenderá para  $\theta$  e sua variância tenderá para  $\frac{\sigma^2}{2k}$ .

Outra abordagem, em termos de preço, pode ser descrita como:

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = (r_t + b(t,T)\lambda\sigma)dt - b(t,T)\sigma dW_t, \quad (2.8)$$

onde  $\lambda$  é uma constante positiva e,

$$b(t,T) = \frac{1}{k}(1 - e^{-k(T-t)}), \quad (2.9)$$

é chamada de duration do modelo de Vasicek.

O modelo de Vasicek também é um modelo unifatorial e de equilíbrio. Mesmo sendo uma evolução em relação ao modelo de Merton, a determinação da taxa de juros continua sendo endógena, e pelo fato de  $r_t$  ser Gaussiana, a presença de valores negativos continua sendo um problema para sua utilização na prática.

## 2.5 Modelo de Cox-Ingersoll-Ross

O modelo de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) (1985) propõe um cenário de equilíbrio econômico onde temos um equilíbrio entre a produção e as oportunidades de trabalho, a evolução da tecnologia e um equilíbrio entre a oferta e a demanda dos ativos da economia.

Dentro deste cenário, a equação que reproduz a dinâmica da taxa de juros é,

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t, \quad (2.10)$$

onde o tempo  $t$  é descrito de modo contínuo;  $k, \theta$  e  $\sigma$  são constantes positivas; e  $W_t$  é o Movimento Browniano.

O modelo CIR também é um modelo unifatorial e de equilíbrio. Apresenta reversão à média como o modelo de Vasicek.

A evolução em relação aos modelos anteriores se dá pela presença da componente estocástica  $\sigma\sqrt{r_t}$ , que não permite que a taxa de juros seja negativa. A variância de  $r_t$  aumenta à medida que  $r_t$  aumenta. Quando  $r_t$  se aproxima de zero a parte estocástica se evanesce.

Neste modelo,  $r_t$  apresenta uma distribuição Qui-Quadrado, e da Estatística sabemos que seus valores esperados de média e variância são:

$$E[r_t | r_s] = r_s e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)}) \quad (2.11)$$

e

$$Var[r_t | r_s] = r_s \frac{\sigma^2}{k} (e^{-k(t-s)} - e^{-2k(t-s)}) + \theta \frac{\sigma^2}{2k} (1 - e^{-k(t-s)})^2. \quad (2.12)$$

Podemos observar que quando a diferença (t-s) tende a infinito, a esperança  $E[r_t | r_s]$  se aproxima de  $\theta$ , e a variância  $Var[r_t | r_s]$  se aproxima de  $\theta \frac{\sigma^2}{2k}$ . Isso significa que a taxa de juros no longo prazo é  $\theta$ , e a variação (também no longo prazo) em torno dessa média é  $\theta \frac{\sigma^2}{2k}$ .

Apesar da evolução em relação aos modelos anteriores, o modelo CIR ainda não reproduz as taxas observadas no mercado, sendo o nível da taxa de juros resultado do modelo, portanto endógena. Por essa razão não é comum a sua utilização na prática do mercado.

## 2.6 Modelo de Ho-Lee

Um grande avanço na construção dos modelos de taxa de juros foi a passagem dos modelos de equilíbrios para os de não arbitragem. O modelo de Ho-Lee (1986) foi o primeiro dessa linha e segundo sua proposta,

$$dr_t = \theta_t dt + \sigma dW_t \quad (2.13)$$

onde a novidade surge com a componente  $\theta_t$ , ou seja, a componente da equação que antes era uma taxa média de longo prazo esperada no equilíbrio econômico, agora é uma função do tempo de modo que podemos ajustá-la para que se reproduza a taxa observada no mercado.

O modelo é muito semelhante ao de Merton e analogamente, o tempo  $t$  é descrito de modo contínuo,  $\sigma$  é a volatilidade da taxa de juros no curto prazo, e  $W_t$  é responsável pela componente estocástica da taxa de juros.

A distribuição do modelo também é Normal, o que por um lado facilita o cálculo para preços e taxas dentro do modelo, mas por outro, permite que as taxas de juros assumam valores negativos. Além disso, analogamente ao modelo de Merton, o modelo de Ho-Lee não possui a reversão à média, o que permite que a variância possa ter um comportamento explosivo.

## 2.7 Modelo de Hull-White

Na mesma linha do modelo de Ho-Lee, o modelo proposto por Hull-White (1990) é de não arbitragem e unifatorial pois sua variável de estado continua sendo o nível da taxa de juros  $r_t$ .

A proposta inicial de modelagem é,

$$dr_t = [\vartheta_t - a_t r_t] dt + \sigma_t dW_t \quad (2.14)$$

Podemos notar que, analogamente ao modelo de Ho-Lee, a componente  $\vartheta_t$  é uma função do tempo, o que permite ajustar a taxa do modelo para as taxas observadas no mercado.

Por outro lado temos algumas evoluções em relação ao modelo anterior: a componente estocástica  $\sigma_t$ , responsável pela volatilidade do modelo, também é

uma função do tempo; e analogamente ao modelo de Vasicek, a componente determinística  $\vartheta_t - a_t r_t$  é responsável pela reversão à média, não permitindo o comportamento explosivo da variância, como no modelo de Ho-Lee. Neste caso,  $a_t$  é uma função do tempo que determina a velocidade de reversão à média.

O fato de a variância ser uma função do tempo é uma evolução do modelo, pois além das taxas médias o modelo permite reproduzirmos as volatilidades da taxa de juros efetivamente observadas no mercado. Por outro lado, este grau de precisão adquirido nem sempre é necessário. Ativos com pouca volatilidade ou pouco líquidos no mercado não necessitam de um tratamento tão preciso. Neste caso, a velocidade de reversão à média pode ser considerada constante.

Dentro destas hipóteses, vamos nos concentrar no seguinte modelo,

$$dr_t = [\vartheta_t - a_t r_t]dt + \sigma dW_t, \quad (2.15)$$

onde  $a$  e  $\sigma$  são constantes positivas e,

$$\vartheta_t = \frac{\partial f(0,t)}{\partial T} + af(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}). \quad (2.16)$$

Resolvendo a equação diferencial estocástica (2.15) obtermos:

$$r_t = r_s e^{-a(t-s)} + \alpha_t - \alpha_s e^{-a(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_u \quad (2.17)$$

onde,

$$\alpha_t = f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}[1 - e^{-2a(t-s)}]. \quad (2.18)$$

Como  $r_t$  tem distribuição normal, a média e a variância são respectivamente,

$$E[r_t | r_s] = r_s e^{-a(t-s)} + \alpha_t - \alpha_s e^{-a(t-s)} \quad (2.19)$$

e

$$\text{Var}[r_t | r_s] = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2a(t-s)}) . \quad (2.20)$$

Embora o modelo de Hull-White tenha resolvido o problema de variância com comportamento explosivo, pelo fato de  $r_t$  ter distribuição normal, ainda existe o problema de uma taxa de juros negativa.

## 2.8 Modelo de Black-Karasinski

O modelo de Black-Karasinski (1991) também é um modelo unifatorial (a variável de estado é o nível da taxa de juros) e de não arbitragem. Este modelo continua incorporando a reversão à média. A taxa média de longo prazo e a volatilidade são funções do tempo de modo que podemos ajustar o modelo de forma a captar as observações no mercado.

A forma diferencial do modelo é dada por,

$$d \ln(r_t) = [\theta_t - a_t \ln(r_t)] dt + \sigma_t dW_t . \quad (2.21)$$

Na equação diferencial estocástica acima  $\theta_t$  é a taxa de juros de longo prazo e é uma função do tempo, de modo a se adaptar às taxas observadas no mercado. Analogamente, a componente estocástica  $\sigma_t$  é a variância em torno desta taxa média da componente estocástica e também é uma função do tempo. Assim, pode se adaptar às volatilidades dos ativos efetivamente observados no mercado. O termo  $a_t$  é a função que determina a velocidade de reversão a média. No caso particular de,

$$a_t = \frac{\frac{\partial \sigma_t}{\partial t}}{\sigma_t}, \quad (2.22)$$

ou seja, a velocidade de reversão é proporcional a taxa de variação relativa da variância em relação ao tempo, o modelo também é conhecido como **Modelo de Black-Derman-Toy (1990)**.

No modelo de Black-Karasinski,  $d \ln(r_t)$  tem distribuição normal, e portanto a variável que mensura o nível da taxa de juros  $r_t$ , tem distribuição log-normal.

Se por um lado a hipótese de log-normalidade de  $r_t$  dificulta soluções analíticas para a equação, de ponto de vista financeiro é uma grande avanço em relação aos modelos anteriores, pois resolve, sem custo, o problema da ocorrência de taxas de juros negativas.

## 2.9 Modelo de Heath-Jarrow-Morton

O modelo de Heath-Jarrow-Morton (1992) representa uma grande evolução na modelagem da taxa de juros. Trata-se de um modelo de não arbitragem, o que mantém a possibilidade da entrada de dados observados no mercado dentro do modelo, mas a novidade é que permite o estudo concomitante de várias variáveis de estado. Portanto, ele é um modelo multifatorial. Vamos nos referir a este modelo por HJM.

Como mencionado na Seção 2.2, no caso de existirem duas componentes principais (o nível da taxa de juros e sua inclinação) para a explicação da variação da taxa de juros, implica que a estrutura a termo não depende somente do nível desta taxa e assim, não é perfeitamente correlacionada com a variável de estado. Neste caso, podemos ter alterações de movimentos na curva de juros ao longo do tempo o que permite maior precisão na modelagem. Por exemplo, se quiséssemos precificar um derivativo de renda fixa que fosse influenciado pela correlação entre

os vencimentos dos títulos então o modelo unifatorial não atenderia aos requisitos e nesse caso modelo de HJM é uma solução.

A formulação original, em termos da taxa forward, pode ser escrita como,

$$df(t, T) = \left( \sum_{i=1}^n \sigma_i(t, T) \int_t^T \sigma_i(t, s) ds \right) dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i(t, T) dW_i(t), \quad t < T. \quad (2.23)$$

A abordagem em termos de preços é representada por,

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = r_t dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i(t, T) dW_i(t). \quad (2.24)$$

A equação diferencial estocástica (2.21) é conhecida como Equação de HJM, e é a mais completa dentre os modelos apresentados até agora. Podemos tratar todos os demais modelos vistos até então como casos particulares deste último.

Por exemplo, se assumirmos:

$$\sigma(t, T) = \sigma = cte \quad (2.25)$$

e substituindo em (2.21) temos,

$$df(t, T) = \left( \sigma \int_t^T \sigma ds \right) dt + \sigma dW(t) = \sigma^2 (T - t) dt + \sigma dW(t) = \theta_t dt + \sigma dW_t, \quad (2.26)$$

onde chegamos no modelo de Ho-Lee, conforme a equação (2.13).

Outro exemplo é se assumirmos,

$$\sigma(t, T) = \sigma e^{-k(T-t)}, \quad (2.27)$$

então temos,

$$df(t, T) = (\sigma e^{-k(T-t)} \int_t^T \sigma e^{-k(s-t)} ds) dt + \sigma e^{-k(T-t)} dW(t) = \frac{\sigma^2}{k} (e^{-k(T-t)} - e^{-2k(T-t)}) dt + \sigma e^{-k(T-t)} dW(t). \quad (2.28)$$

Resolvendo a equação (2.28) temos,

$$f(t, T) = f(0, T) + \sigma \int_0^t e^{-k(T-s)} dW_s - \frac{\sigma^2}{2k^2} (1 - e^{-k(T-t)})^2 + \frac{\sigma^2}{2k^2} (1 - e^{-kT})^2 \quad (2.29)$$

onde chegamos ao modelo de Hull-White, segundo as equações (2.17) e (2.18),

$$r_t = r_s e^{-a(t-s)} + \alpha_t - \alpha_s e^{-a(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_u \quad (2.30)$$

sendo que,

$$\alpha_t = f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} [1 - e^{-2a(t-s)}]. \quad (2.31)$$

# Capítulo 3

## Teoria da Utilidade

### 3.1 Introdução

Para maximizarmos o lucro de um investimento em renda fixa, primeiramente temos que analisar os objetivos do investidor. Se um investidor não aplica em ativos que ele considera arriscado, ou se à medida que ele aumenta seus lucros ele investe mais ou menos, tudo depende do seu perfil de investimento. Todos estes fatores têm que ser levados em conta na hora de construirmos a carteira do investidor. Este conceito é traduzido na teoria da utilidade. Primeiramente, vamos introduzir uma abordagem geral deste conceito. Em seguida, vamos mostrar uma aplicação deste conceito na teoria econômica e na prática de investimentos. Também analisaremos algumas funções de utilidade conhecidas e as propriedades econômicas inerentes a estas funções. Um estudo mais aprofundado sobre Teoria da Utilidade pode ser encontrado em Pratt, Raiffa & Schlaifer (1995).

### 3.2 Conceito de Utilidade

A utilidade pode ser interpretada como a satisfação proporcionada ao consumidor pelo consumo de uma determinada quantidade de bens, ou seja, a utilidade é uma forma de mensurar o quão útil um determinado bem é para um consumidor ou um grupo de consumidores.

Quando o consumidor racionaliza as suas necessidades em função dos seus recursos, ele tenta maximizar a sua satisfação. Falar em aumento de satisfação do consumidor gerada pela utilização de um determinado bem é

equivalente a falar em redução do estado de insatisfação do consumidor. A utilidade marginal de um bem significa a variação da sua utilidade em relação ao seu consumo. Deste modo, quando o estado de insatisfação tende a zero a utilidade atinge seu ponto máximo. Também é fácil notar que quanto mais necessário é um determinado bem, a sua utilidade aumenta e do mesmo modo à medida que o consumo deste bem aumenta, menor a utilidade atribuída a novos incrementos, isto é, menor a utilidade marginal.

De modo análogo, podemos fazer o mesmo estudo do comportamento da utilidade para dois bens distintos. Se um consumidor tem a necessidade de consumo de dois bens, e se ele admite que uma determinada combinação entre esses bens é igualmente satisfatória que uma outra combinação, esta gama de combinações que proporcionam a mesma satisfação ao consumidor é chamada de curva de indiferença. Em outras palavras, a curva de indiferença é composta de todas as combinações entre dois bens distintos que geram a mesma satisfação ao consumidor.

A figura abaixo é um exemplo de algumas curvas de indiferença entre um determinado bem 1 e outro bem 2:

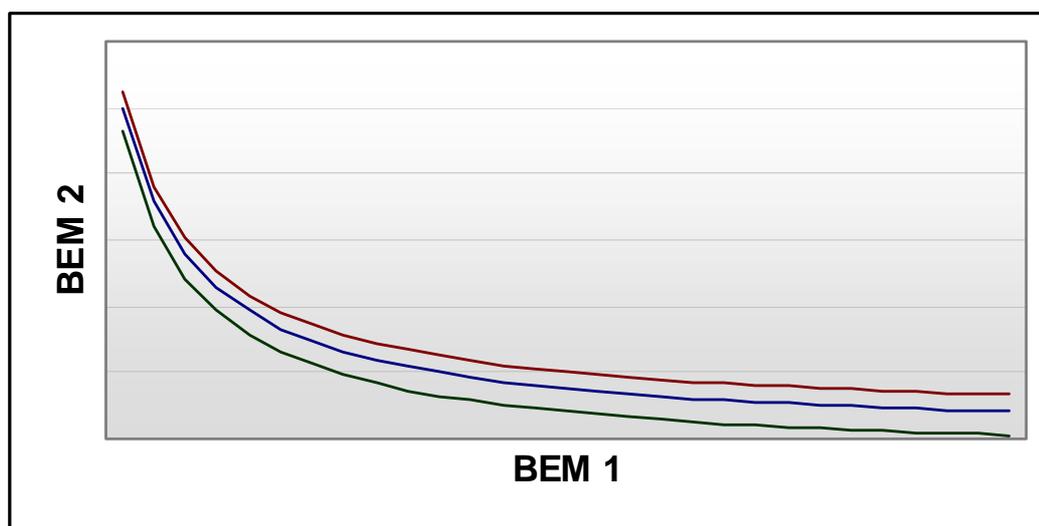


Figura 3.1: Curvas de indiferença ao consumidor

Seja  $U = f(q_1, q_2)$ , uma função que mensura a utilidade de modo contínuo, e  $(q_1, q_2)$  a quantidade disponível do bem 1 e do bem 2, respectivamente; as curvas de indiferença nada mais são que as curvas de nível de  $U$  para as combinações de  $(q_1, q_2)$ .

Ao deslocarmos a curva de nível para uma direção contrária a origem, o que no gráfico em  $\mathfrak{R}^2$  significa se deslocar a noroeste, estamos aumentando a utilidade da curva de indiferença, ou seja, para este conjunto de combinações entre dois bens distintos a utilidade aumenta à medida em que as curvas de níveis cruzam a seta na direção noroeste em pontos mais distantes da origem.

Este fato está visualizado na Figura 3.2.

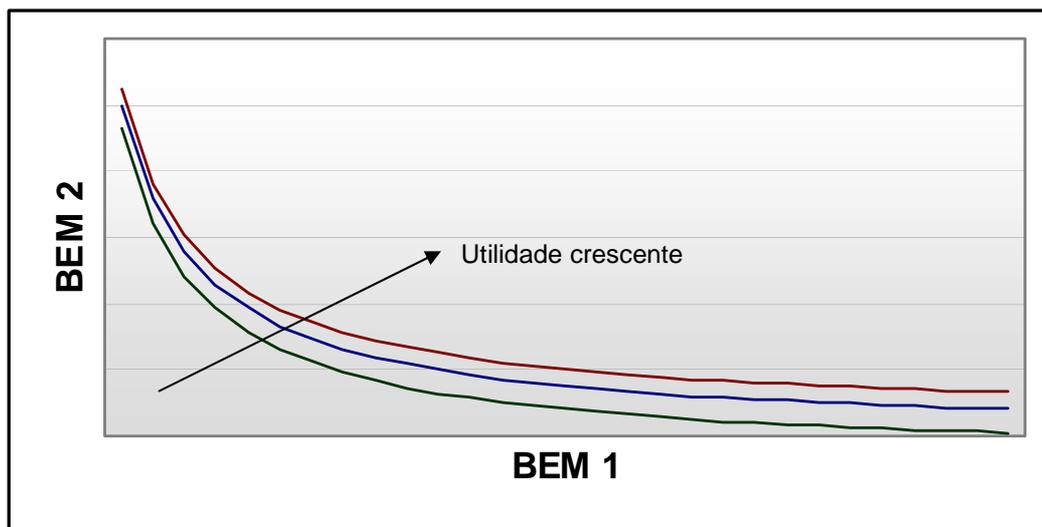


Figura 3.2: Utilidade crescente das curvas de indiferenças

O conjunto de curvas de indiferenças representando diferentes níveis de utilidade recebe o nome de “mapa de indiferença”.

### 3.3 Função Utilidade

Uma função utilidade é uma função definida  $U : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ , contínua. Seu objetivo é mensurar o nível de utilidade em função de variáveis que irão quantificar os bens na cesta do consumidor. Em particular, nos problemas financeiros estamos interessados em mensurar a satisfação associada a determinados níveis de riquezas.

Como estamos interessados em maximizar os resultados de uma carteira, na realidade estamos interessados em maximizar a função utilidade associada a esta carteira. Uma vez definida a alocação dos ativos dentro do portfólio, temos o efeito de variáveis aleatórias que exercem influencias sobre os resultados e portanto, devemos maximizar  $E[U(\mathbf{x})]$ , onde  $U(\mathbf{x})$  é a função utilidade associada a uma certa carteira  $\mathbf{x}$ , ou seja, devemos escolher uma carteira  $\mathbf{x}$  de modo que  $E[U(\mathbf{x})]$  seja máximo.

Na prática existem alguns padrões de funções utilidades mais usados que são apresentados em seguida.

#### 3.3.1. Utilidade Exponencial

$$U(x) = -\exp(-ax), \quad (3.1)$$

onde  $a > 0$ . Esta função é crescente, côncava e assintótica a zero e assume valores negativos. Seu gráfico é dado na Figura 3.3.

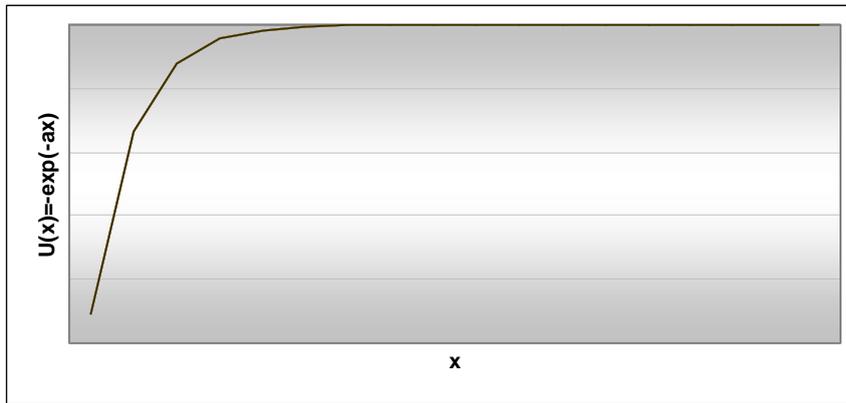


Figura 3.3: Comportamento da função utilidade exponencial

### 3.3.2. Utilidade Logarítmica

$$U(x) = \ln(x). \quad (3.2)$$

A função está definida para  $x > 0$  é crescente, côncava e diverge com  $x$ . Seu comportamento é apresentado na Figura 3.4.

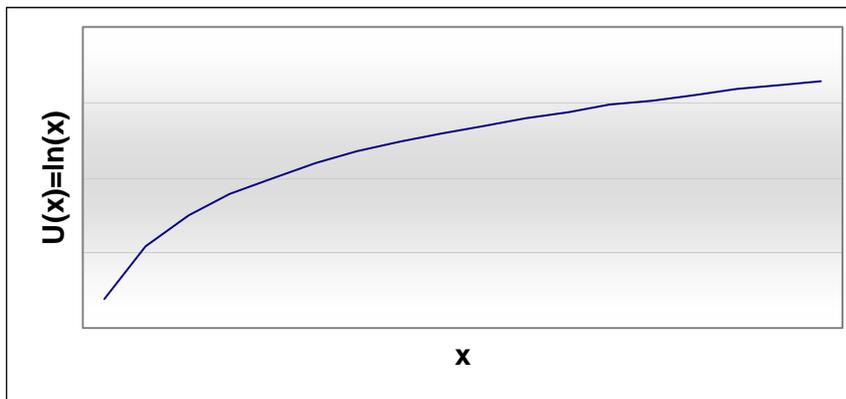


Figura 3.4: Comportamento da função utilidade logarítmica

### 3.3.3. Utilidade Potência

$$U(x) = \frac{x^b}{b}. \quad (3.3)$$

Definida para  $b < 0$  e para  $b = 1$  é chamada de utilidade de risco neutra. Seus formatos são dados respectivamente nas Figuras 3.5 e 3.6.

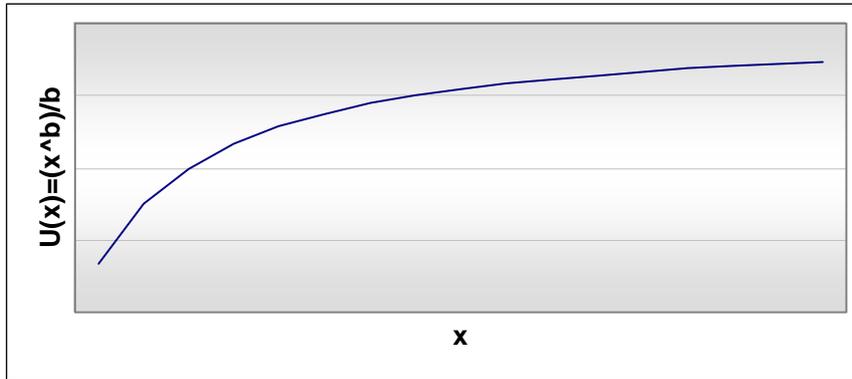


Figura 3.5: Utilidade exponencial para  $b < 0$

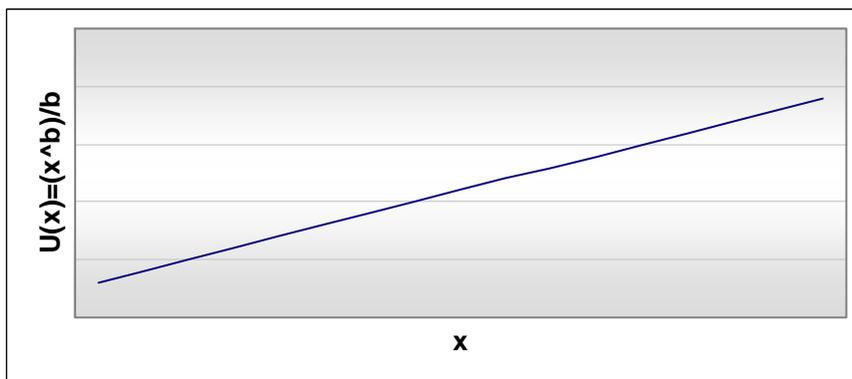


Figura 3.6: Utilidade exponencial para  $b = 1$

### 3.3.4. Utilidade Quadrática

$$U(x) = x - bx^2. \tag{3.4}$$

Definida para  $b > 0$ . A função é crescente para  $x < \frac{1}{2b}$  e decrescente caso contrário. Seu formato é apresentado na Figura 3.7.

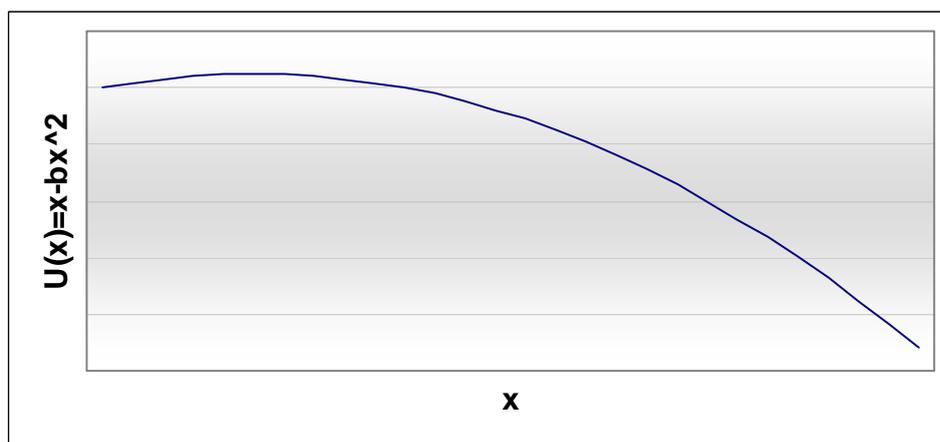


Figura 3.7: Comportamento da função utilidade quadrática

Podemos verificar que a função inicialmente é crescente, onde temos valores de  $x$  menores que  $\frac{1}{2b}$ . Após esse intervalo, para valores de  $x$  maiores que  $\frac{1}{2b}$  a função se torna decrescente.

### 3.4 Propriedades Econômicas da Função Utilidade

Particularizando o problema de maximização da função utilidade para o aspecto econômico à primeira propriedade que podemos notar é que o nível de riqueza está diretamente relacionado à utilidade, ou seja, quanto maior a riqueza, maior a utilidade. Denotando por  $W$  a riqueza, temos  $U(W)$  a utilidade em função da riqueza. Pela propriedade do cálculo sabemos que para se ter uma associação positiva a primeira derivada da utilidade em função da riqueza deve ser positiva, isto é,  $U'(W) > 0, \forall W \in \mathfrak{R}$ .

Uma segunda propriedade da função utilidade é em relação ao perfil do investidor: se ele tem aversão, é neutro ou tem propensão ao risco. Esta característica é traduzida pela curvatura da função utilidade, ou seja, pela segunda derivada de  $U(W)$ .

Se  $U''(W) < 0$  significa que a função  $U(W)$  é estritamente côncava o que reflete que a tendência de investimento em função do aumento da riqueza é decrescente. Em outras palavras, neste caso o investidor tem aversão ao risco.

Se  $U''(W) = 0$  significa que não existe preferência entre aceitar ou rejeitar um investimento em função do aumento da riqueza. Esta condição é equivalente a dizer que o investidor é neutro ao risco.

Finalmente, se  $U''(W) > 0$  significa que a curvatura da função utilidade é positiva o que indica uma preferência crescente ao investimento. Esta condição é chamada de propensão ao risco pelo investidor.

Na realidade, o interesse de estudar a curvatura da função está em definir o perfil do investidor. Se o investidor tem aversão ao risco, esta condição se torna uma das restrições do problema de maximização dos lucros de um investimento. Uma função, por definição, é côncava se,

$$\exists \lambda \in [0,1], \Omega \in \mathfrak{R}^n, U : \Omega \rightarrow \mathfrak{R},$$

tal que, se

$$(x^1, x^2) \in \Omega \times \Omega \text{ então,} \\ U[\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2] \geq \lambda U(x^1) + (1 - \lambda)U(x^2). \quad (3.5)$$

É fácil ver daí que a condição  $U''(x) \leq 0$  se verifica quando  $U$  é côncava.

### 3.5 Aversão ao Risco do Investidor

Na prática de investimentos uma característica importante a ser estudada é a mudança de comportamento do investidor em relação à evolução da sua riqueza. Queremos estudar se o aumento ou redução da riqueza de um investimento em função do seu retorno estimula ao aumento ou redução do patrimônio a ser investido no próximo momento.

Se um investidor aumenta seu volume de capital investido em ativos de risco quando sua riqueza aumenta então ele demonstra uma aversão absoluta ao risco decrescente com a riqueza. Analogamente, se o volume de investimento de risco não se altera em função do aumento da riqueza então ele demonstra ter uma aversão absoluta ao risco constante. Se o investidor diminui seu volume aplicado em ativos de risco à medida que sua riqueza aumenta então ele tem uma aversão absoluta ao risco crescente.

Sejam  $U(W)$  a utilidade em função da riqueza e  $U'(W)$ ,  $U''(W)$  a sua primeira e segunda derivadas, respectivamente. A medida de aversão absoluta ao risco é dado pelo coeficiente de Arrow-Pratt, definido por,

$$A(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)}. \quad (3.6)$$

Podemos notar que, quanto mais negativa a curvatura da função, maior será o grau de aversão absoluta ao risco. Como a primeira derivada é sempre positiva, o sinal do coeficiente depende exclusivamente da curvatura de  $U$ . Se a função utilidade for côncava, sua segunda derivada será negativa e, portanto, o coeficiente de aversão absoluta ao risco será positivo. Analogamente, se a função utilidade for convexa, sua segunda derivada será positiva e conseqüentemente, o coeficiente de aversão absoluto ao risco será negativo.

A função  $A(W)$  mostra como a aversão ao risco absoluta muda em relação ao nível de riqueza, de modo que sua primeira derivada  $A'(W)$  em um ponto  $W_0$

fixo, mostra o comportamento do grau de aversão absoluta ao risco segundo a tabela a seguir:

Definição	Descrição	Condição
Aversão ao Risco Absoluta Crescente	Se a riqueza aumenta, investe menos em ativos de risco	$A'(W_0) > 0$
Aversão ao Risco Absoluta Constante	Se a riqueza aumenta, investe o mesmo volume em ativos de risco	$A'(W_0) = 0$
Aversão ao Risco Absoluta Decrescente	Se a riqueza aumenta, investe mais em ativos de risco	$A'(W_0) < 0$

Tabela 3.8: Caracterização da aversão ao risco absoluto

Outra questão importante é o comportamento do investidor em relação à variação do nível de riqueza em termos relativos, isto é, se um investidor aumenta sua riqueza em função de aplicações em ativos de risco e como consequência aumenta seu volume de aplicação nesses ativos, queremos saber se em relação ao seu novo patrimônio, a porcentagem de investimento em ativos de risco aumentou.

Se em termos proporcionais o investidor aumentar seu volume de aplicação em ativos de risco à medida que seu nível de riqueza se cresce, ele demonstra ter uma aversão ao risco relativa decrescente. Analogamente, se ele proporcionalmente investe menos em ativos de risco conforme sua riqueza aumentar, então ele demonstra ter uma aversão ao risco relativa crescente.

A medida de aversão ao risco relativa é dada por

$$R(W) = -W \frac{U''(W)}{U'(W)}, \quad (3.7)$$

de onde, utilizando a expressão em (3.6) obtemos

$$R(W) = WA(W). \quad (3.8)$$

Analogamente à medida de aversão ao risco absoluta, para  $W_0$  um valor de riqueza fixo, o comportamento do grau de aversão ao risco relativa é resumida na tabela a seguir:

Definição	Descrição	Condição
Aversão ao Risco Relativa Crescente	% investimento em ativos de risco diminui se a riqueza aumenta	$R'(W_0) > 0$
Aversão ao Risco Relativa Constante	% investimento em ativos de risco não se altera se a riqueza aumenta	$R'(W_0) = 0$
Aversão ao Risco Relativa Decrescente	% investimento em ativos de risco aumenta se a riqueza aumenta	$R'(W_0) < 0$

Tabela 3.9: Caracterização da aversão ao risco relativa

## 3.6 Exemplos

Para ilustrar os conceitos apresentados, vamos utilizar algumas das funções utilidades apresentadas na Seção 3.3 como exemplos.

### 3.6.1 Função Quadrática

Seja a função utilidade,

$$U(W) = W - bW^2, \quad (3.9)$$

onde  $W$  representa o nível de riqueza e  $b$  é uma constante.

Calculando a primeira e segunda derivadas temos respectivamente,

$$U'(W) = 1 - 2bW \quad (3.10)$$

e

$$U''(W) = -2bW. \quad (3.11)$$

No caso do investidor que tem aversão ao risco, a segunda derivada é negativa e, portanto,

$$U''(W) < 0 \Rightarrow -2bW < 0 \Rightarrow b > 0.$$

Como a primeira derivada deve ser positiva temos que,

$U'(W) > 0 \Rightarrow 1 - 2bW > 0$  e como  $b > 0$ ,

$$W < \frac{1}{2b} \quad (3.12)$$

é o intervalo da riqueza  $W$  onde o investidor é avesso ao risco.

Em seguida vamos analisar o coeficiente de aversão absoluta ao risco. Seja o coeficiente de Arrow-Pratt,

$$A(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} = -\frac{(-2b)}{(1-2bW)} = \frac{2b}{(1-2bW)}. \quad (3.13)$$

Como o comportamento de aversão absoluta ao risco é dado pela sua primeira derivada, temos que,

$$A'(W) = \frac{4b^2}{(1-2bW)^2} > 0. \quad (3.14)$$

Pela Tabela 3.9 podemos observar que a condição da segunda derivada ser positiva significa que o investidor tem uma aversão absoluta ao risco crescente, ou seja, a medida que sua riqueza aumenta, ele investe menos em ativos de risco.

O coeficiente de aversão relativa ao risco tem que ter a mesma característica do coeficiente de aversão absoluta ao risco. Sendo assim,

$$R(W) = -W \frac{U''(W)}{U'(W)} = -W \frac{(-2b)}{(1-2bW)} = \frac{2bW}{(1-2bW)}. \quad (3.15)$$

A primeira derivada de  $R(W)$  mostra o comportamento de aversão relativa ao risco do investidor. No caso, temos

$$R'(W) = \frac{4b^2W}{(1-2bW)} + \frac{2b(1-2bW)}{(1-2bW)} = \frac{2b}{(1-2bW)^2} > 0, \quad (3.16)$$

pois, por hipótese  $b > 0$ .

Pela Tabela 3.10 podemos observar este resultado reflete um grau de aversão ao risco relativo crescente, ou seja, a medida que a riqueza aumenta o investidor diminui o volume proporcional de aplicação em ativos de risco.

Estes resultados mostram a consistência da função utilidade quadrática em relação a investidores cuja aversão ao risco é crescente.

### 3.6.2 Função Logarítmica

Seja a função utilidade,

$$U(W) = \log(W). \quad (3.17)$$

Sabemos pelo item 3.3.2 que é uma função côncava. Calculando sua primeira e segunda derivada, respectivamente, temos

$$U'(W) = W^{-1} \quad (3.18)$$

e

$$U''(W) = -W^{-2}, \quad (3.19)$$

onde é fácil notar que para qualquer valor de  $W > 0$ ,  $U'(W) > 0$  e que  $U''(W) < 0$ .

O fato da primeira derivada ser positiva mostra a consistência da função em relação à teoria econômica e o fato da segunda derivada ser negativa mostra que a função é côncava.

Calculando o coeficiente de aversão absoluta ao risco temos,

$$A(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} = -\frac{(-W)^2}{W^{-1}} = W^{-1} \quad (3.20)$$

e, portanto, a sua primeira derivada é dada por,

$$A'(W) = -W^2 < 0. \quad (3.21)$$

Isto mostra (segundo a Tabela 3.9) que o investidor tem uma aversão absoluta ao risco decrescente, ou seja, à medida que a sua riqueza aumenta, ele investe mais em ativos de risco.

Calculando agora o coeficiente de aversão relativa ao risco

$$R(W) = -W \frac{U''(W)}{U'(W)} = -W \frac{-(W^{-2})}{W^{-1}} = 1, \quad (3.22)$$

e, portanto a sua primeira derivada

$$R'(W) = 0. \quad (3.23)$$

Esta condição mostra que, embora de modo absoluto o investidor aumente seu volume investido em ativos de risco conforme sua riqueza aumenta, em termos relativos o investidor mantém constante a proporção de investimentos em ativos de risco.

# Capítulo 4

## Programação Dinâmica

### 4.1 Introdução

Uma vez que temos um modelo de previsão do comportamento da taxa de juros e um perfil de investimento, resta estudar uma metodologia que permite maximizar o rendimento de uma determinada carteira levando em conta as variáveis iniciais e a sua composição.

Este capítulo tem como objetivo apresentar conceitos como: processo de decisão multiestágios, princípio de otimalidade de Bellman e Programação Dinâmica. Estes conceitos serão ferramentas para a resolução do problema inicial, de modo a permitir calcular uma carteira de renda fixa que, dada a taxa de juros, maximizará o processo utilidade média do investidor. Maiores detalhes sobre Programação Dinâmica podem ser encontrados em Bertsekas (2001).

### 4.2 Conceitos Básicos

Desde o início, o objeto de estudo é a construção de uma carteira de renda fixa que maximize os lucros de um investimento em taxa de juros. Se a carteira é dinâmica, ou seja, se ela pode ser alterada de acordo com as percepções do comportamento da taxa de juros, o objetivo é encontrar a carteira ótima em cada instante de tempo. Na prática, as intervenções são discretas ao longo do tempo.

De modo abstrato, podemos encarar o problema acima como sendo o estudo do comportamento de um sistema e de como o operador deste sistema reage às mudanças que ocorrem nele.

Os conceitos apresentados a seguir serão utilizados neste capítulo e sintetizam alguns dos principais aspectos da programação dinâmica.

#### **4.2.1 Estágio ou período**

É um parâmetro de evolução do sistema. Pode ser inerente ao problema, mas também pode ser introduzido artificialmente a fim de dividir o problema inicial em subproblemas menores.

#### **4.2.2 Estado**

É a descrição das condições do sistema em um determinado estágio.

#### **4.2.3 Decisão**

Descreve a influência do operador sobre o sistema através de uma ação, modificando a evolução do sistema de um estágio para o seguinte.

#### **4.2.4 Política**

É a regra para a tomada de decisões.

### **4.3 Princípio de Otimalidade de Bellman**

Um processo de decisão multiestágio consiste em um processo que pode ser dividido em um determinado número de estágios, cada qual podendo ser realizado de uma ou mais maneiras. Para completar um determinado estágio uma decisão deve ser tomada. Desta forma, temos uma política que direciona qual o caminho que este processo percorre.

O Princípio de Otimalidade de Bellman diz que dado um estado, a política ótima para os estados subseqüentes é independente das decisões tomadas nos estágios anteriores. Assim, a decisão ótima para um dado estado depende somente do seu estado atual e não das decisões que antecederam este estado.

Em particular, no problema de otimização de uma carteira de renda fixa em cada estágio, devemos encontrar uma alocação entre os ativos de renda fixa de modo que, dada as taxas de juros, o retorno sobre o investimento seja o maior possível. A aplicação do Princípio de Otimalidade de Bellman é adequada porque

dada a alocação dos ativos em um dado momento, as alocações anteriores já não importam mais para o futuro.

Esta propriedade, presente neste tipo de problema, é conhecida como Propriedade Markoviana.

#### 4.4 Programação Dinâmica

A Programação Dinâmica baseia-se exatamente no Princípio de Otimalidade de Bellman.

Para sua implementação partimos do último estágio de um processo com, digamos,  $n$  deles e determinamos qual a política ótima para completar este estágio supondo que todos os estágios anteriores tenham sido completados. Particularmente, queremos determinar qual a alocação ótima dos ativos de renda fixa considerado um estado de taxas de juros. Pelo Princípio de Otimalidade de Bellman, achar a política ótima para este estágio é independente da política adotada anteriormente.

Sejam  $i=1, \dots, n$  os estágios do processo. Uma vez que tenhamos determinado a política ótima para o estágio  $i=n$ , deslocamos o processo para a penúltima posição, isto é, agora  $i=n-1$ , e novamente determinamos a política ótima para se completar o estágio  $n-1$  dado que todos os estágios anteriores foram completados e que a política ótima adotada no último estágio foi uma determinada política  $P_n$ .

Recursivamente, andamos em direção ao estágio inicial, onde em um dado estágio  $k$ ,  $1 < k < n$ , encontramos sua política ótima levando-se em conta que todos os estágios  $i=1, \dots, k-1$  anteriores foram completados, e as políticas ótimas já foram determinadas para os estágios  $i=k+1, \dots, n$  posteriores.

Um processo de decisão multiestágio é estocástico se pelo menos um dos resultados relacionados a uma decisão for aleatório. Esta aleatoriedade pode estar

relacionada com a decisão propriamente dita ou com o estado resultante de uma decisão.

Se as distribuições destes eventos aleatórios forem conhecidas, a programação dinâmica pode ser utilizada normalmente para o problema de otimização, porque estamos interessados na otimização do valor esperado dos resultados referentes aos estágios estocásticos.

Como vimos no capítulo 2, o comportamento das taxas de juros requer um tratamento estocástico. Portanto, o processo de decisão multiestágio envolvido no problema de maximizar os lucros em um investimento em renda fixa será estocástico. Desta forma, ao invés de considerar uma única evolução estaremos interessados no valor ótimo esperado num estágio associado ao conjunto de todas essas evoluções.

#### 4.5 Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman

A equação de Hamilton-Jacobi-Bellman é um dos resultados mais importantes da teoria da programação dinâmica. Consiste em uma equação diferencial que aborda matematicamente os conceitos de otimalidade de Bellman e de programação dinâmica apresentados acima. Maiores detalhes sobre Equações Diferenciais e Cálculo Estocástico podem ser encontrados em Oksendal (2002).

Como o problema de maximização associado à taxa de juros necessita de um tratamento estocástico, a equação diferencial parcial que trata o modelo está associada à maximização do valor esperado dos resultados em cada estágio.

Genericamente, um modelo de taxa de juros pode ser representado por,

$$d\mathbf{X}_t = f(t, \mathbf{X}(t), \mathbf{a}(t))dt + \sigma(t, \mathbf{X}(t), \mathbf{a}(t))dW_t, \quad (4.1)$$

onde  $\mathbf{X}_t$  representa o vetor de juros e  $\mathbf{a}$  é o vetor de alocação de ativos dentro da carteira.

Seja  $J(t, \mathbf{x})$  a utilidade ótima para o instante  $T$  dado que estamos no instante  $t$  e num estado de juros  $\mathbf{x}$ . Temos que,

$$J(t, \mathbf{x}) = \sup_{\alpha \in A} E \left[ \int_t^T U(\mathbf{X}_\alpha(s), \alpha(s)) ds \mid \mathbf{X}_t = \mathbf{x} \right], \quad (4.2)$$

e para um instante aleatório  $\tau$ , tal que  $\tau < T$ , temos,

$$J(t, \mathbf{x}) = \sup_{\alpha \in A} E \left[ \int_t^\tau U(\mathbf{X}_\alpha(s), \alpha(s)) ds + J(\tau, \mathbf{X}_\alpha(\tau)) \mid \mathbf{X}_t = \mathbf{x} \right]. \quad (4.3)$$

As equações (4.2) e (4.3) são a representação matemática do processo de programação dinâmica. Podemos observar que na equação (4.3) o termo  $J(\tau, \mathbf{X}_\alpha(\tau))$  é o responsável pela recursão do processo. Por esta razão, quando maximizamos  $J(t, \mathbf{x})$  em um instante aleatório  $\tau$ , o termo  $J(\tau, \mathbf{X}_\alpha(\tau))$  explicita que a função utilidade já foi maximizada entre os instantes  $\tau$  e  $T$ . Esta é a razão da integral ser definida entre  $t$  e  $\tau$ .

Pelo Cálculo Estocástico temos que a diferencial de  $J(\cdot)$  é dada por,

$$d[J(s, x(s))] = J_s ds + J_x dx + \frac{1}{2} J_{xx} (dx)^2. \quad (4.4)$$

Utilizando o Lema de Itô obtemos, para  $s < t$ , que

$$J(t, X(t)) = J(s, X(s)) + \int_s^t J_u du + \int_s^t J_x dX_u + \frac{1}{2} \int_s^t J_{xx} (dX_u)^2. \quad (4.5)$$

Substituindo  $dX$  pela expressão em (4.1) temos que,

$$\begin{aligned}
J(t, X(t)) &= J(s, X(s)) + \int_s^t J_u du + \int_s^t J_x [f(u, X_u, \alpha(u)) du + \sigma(u, X_u, \alpha(u)) dW_u] \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_s^t J_{xx} [f^2(u, X_u, \alpha(u)) (du)^2 + 2f(u, X_u, \alpha(u)) \sigma(u, X_u, \alpha(u)) dW_u \\
&\quad + \sigma^2(u, X_u, \alpha(u)) (dW_u)^2].
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Reagrupando os termos,

$$\begin{aligned}
J(t, X(t)) &= J(s, X(s)) + \int_s^t [J_u + J_x f(u, X_u, \alpha(u))] du + \int_s^t [J_x \sigma(u, X_u, \alpha(u)) \\
&\quad + J_{xx} f(u, X_u, \alpha(u)) \sigma(u, X_u, \alpha(u))] dW_u + \frac{1}{2} \int_s^t J_{xx} f^2(u, X_u, \alpha(u)) (du)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_s^t J_{xx} [\sigma(u, X_u, \alpha(u)) dW_u]^2
\end{aligned} \tag{4.7}$$

e adotando as seguintes representações,

$$\begin{cases} \sigma_u := \sigma(u, X_u, \alpha(u)) \\ \alpha := \alpha(u) \\ x := X(s) \end{cases}, \tag{4.8}$$

finalmente chegamos na expressão,

$$\begin{aligned}
J(t, x) &= J(s, x) + \int_s^t [J_u + J_x f(x, \alpha)] du + \int_s^t [J_x \sigma_u + J_{xx} f(x, \alpha) \sigma_u] dW_u \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_s^t J_{xx} f^2(x, \alpha) (du)^2 + \frac{1}{2} \int_s^t J_{xx} (\sigma_u dW_u)^2.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Pelas propriedades do Browniano sabemos que  $E[(dW_u)^2] = du$  e  $E[dW_u] = 0$ . Também sabemos que, neste cálculo,  $\int f(t)(dt)^2 = 0$ . Deste modo, podemos calcular o valor esperado para a expressão acima,

$$E[J(t, x)] = J(s, x) + E\left[\int_s^t (J_u + J_x f(x, \alpha) + \frac{1}{2} J_{xx} \sigma_u^2) du\right], \quad (4.10)$$

onde podemos notar a ausência da componente estocástica e conseqüentemente,

$$E[J(t, x)] = J(s, x) + \int_s^t (J_u + J_x f(x, \alpha) + \frac{1}{2} J_{xx} \sigma_u^2) du. \quad (4.11)$$

Do cálculo sabemos que o ponto de máximo ou mínimo local é o ponto dentro do intervalo cuja derivada é igual a zero. Derivando a expressão acima em  $t$ , temos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E[J(t, x)] &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ J(s, x) + \int_s^t (J_u + J_x f(x, \alpha) + \frac{1}{2} J_{xx} \sigma_u^2) du \right] = 0 \Rightarrow \\ J_t + J_x f(x, \alpha) + \frac{1}{2} J_{xx} \sigma_t^2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Agora usando o Princípio de Otimalidade de Bellman para adicionar  $U(x, \alpha)$  em (4.11) vai resultar que a condição de otimalidade em (4.12) torna-se,

$$\begin{aligned} \sup_{\alpha \in A} (J_s + U(x, \alpha) + J_x f(x, \alpha) + \frac{1}{2} J_{xx} \sigma_{t_0}^2) &= 0 \Rightarrow \\ J_s + \sup_{\alpha \in A} (U(x, \alpha) + J_x f(x, \alpha) + \frac{1}{2} J_{xx} \sigma_{t_0}^2) &= 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Definindo-se,

$$H(x, p, q) = \sup_{a \in A} \left[ U(x, a) + f(x, a)p + \frac{1}{2} \sigma^2 q \right], \quad (4.14)$$

chegamos na equação,

$$J_s + H(x, J_x, J_{xx}) = 0. \quad (4.15)$$

Esta equação é chamada de Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) e a sua solução é a utilidade ótima  $J(t, x)$ .

# Capítulo 5

## Otimização em Carteiras de Renda Fixa

### 5.1 Introdução

O objetivo de qualquer investidor é a maximização de seus lucros. Para isso, ele diversifica e altera a alocação do seu capital entre os ativos do mercado financeiro, de modo que para um determinado intervalo de tempo suas aplicações lhe proporcionem o maior retorno possível. Obviamente, esta alocação de capital entre os ativos do investidor é consequência de suas expectativas futuras em relação ao mercado e de sua aversão ao risco.

Este capítulo tem como finalidade a modelagem de uma carteira ótima para um investidor que aplique seus recursos exclusivamente no mercado de renda fixa e, portanto, está sujeito às variações da taxa de juros.

### 5.2 O problema da Alocação de Ativos de Renda Fixa

O comportamento do mercado não pode ser definido de uma maneira determinística, caso contrário, uma vez determinada a carteira ótima, todos os investidores a utilizariam e não haveria mais negociações no mercado financeiro. Existe uma componente de imprevisibilidade no comportamento do mercado que engloba as intempéries dos fenômenos que influenciam o mercado tanto no sentido físico como humano. Deste modo, o que temos são modelos que tentam explicar o comportamento do mercado, incluindo a componente aleatória.

No caso particular de uma carteira de renda fixa, as expectativas do investidor em relação ao mercado se concentram no estudo do comportamento da taxa de juros. No capítulo 2 vimos que a taxa de juros tem um comportamento

estocástico e por isso existem modelos que tentam reproduzir este comportamento.

Outra variável importante é o perfil do investidor. Se o investidor procura aplicar em ativos com mais ou menos risco e se ele muda seu comportamento à medida que sua riqueza aumenta, isso pode ser modelado pela aversão ao risco do investidor que estudamos no capítulo 3.

No capítulo 4 estudamos o Princípio de Otimalidade de Bellman que, através da Programação Dinâmica, fornece uma poderosa ferramenta para a otimização de um processo Markoviano. Consideraremos o caso particular de um processo dado pelos retornos financeiros provindos de uma carteira dinâmica composta por ativos de renda fixa.

Dado que temos um modelo que reflete a expectativa do investidor para o comportamento da taxa de juros, um modelo que representa o comportamento deste investidor perante o risco do investimento e a ferramenta que possibilita determinar a carteira de renda fixa ótima, o desafio é conciliar estes conceitos de modo que através da alocação entre os ativos de renda fixa dentro da carteira, possamos achar aquela que maximize o retorno financeiro.

### **5.3 Modelagem da Carteira de Renda Fixa Ótima**

Um ativo em renda fixa pode ser, por exemplo, um título da dívida do governo. Como qualquer outro ativo de renda fixa, a taxa de juros negociada na aquisição do título pode ser fixada na hora da compra (pré-fixada) como seguir alguma outra taxa de juros já existente no mercado (pós-fixada), como a taxa Selic ou o CDI.

Para o modelo em questão, os títulos pré-fixados serão considerados ativos de risco e os títulos pós-fixados serão considerados ativos livres de risco.

O próximo passo do modelo é, dada uma riqueza inicial  $W_0$ , determinar uma alocação  $\alpha\%$  em ativos de risco bem como uma alocação  $(1 - \alpha)\%$  em ativos

livres de risco de forma dinâmica, de modo que em cada estágio (definição desta noção no Capítulo 4) esta alocação maximize o retorno financeiro do investidor.

Para continuar a modelagem do problema, o próximo passo é recorrer a Teoria da Utilidade para definir uma função côncava e crescente de modo que se possa medir a satisfação do investidor em relação ao nível de riqueza. A conseqüência natural da escolha da função utilidade é a inclusão da medida de aversão ao risco do investidor.

Para o modelo será escolhida a seguinte função utilidade,

$$U(W) = -e^{-\beta t} \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad (5.1)$$

onde  $e^{-\beta t}$  matematicamente representa a curvatura da função em relação ao tempo e empiricamente é denominado de fator de impaciência do investidor pois, quanto maior esta curvatura, maior a impaciência para o aumento do nível de riqueza. Já  $\gamma$  é o índice de propensão ao risco e quanto maior este índice maior a utilidade proporcionada para o investidor.

Para a modelagem do comportamento estocástico da taxa de juros será escolhido o modelo de Vasicek,

$$dr = k(\theta - r_t)dt + \sigma dZ_t, \quad (5.2)$$

cuja abordagem em termos de preço é dada por,

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = (r_t + b(t,T)\lambda\sigma)dt - b(t,T)\sigma dZ_t, \quad (5.3)$$

onde  $\lambda$  é uma constante positiva denominada prêmio de risco, pois ela estima o efeito da magnitude do retorno financeiro sobre um ativo de renda fixa.

Já a expressão,

$$b(t, T_v) = \frac{1}{k} (1 - e^{-k(T_v - t)}), \quad (5.4)$$

é chamada de duration do modelo de Vasicek e será representado por  $b := b(t, T_v)$ . A duration está definida até o instante de vencimento  $T_v$ , que não precisa coincidir com o horizonte de investimento da carteira,  $T$ .

Da definição de duration (veja expressão (1.33) deste trabalho) sabemos que,

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = -b \frac{dr_t}{(1 + r_t)},$$

e desenvolvendo, temos,

$$d \ln P(t, T) = -b \frac{dr_t}{(1 + r_t)} \Rightarrow d \ln P(t, T) = \int -b \frac{dr_t}{(1 + r_t)} \Rightarrow$$

$$\ln P(t, T) = -b \int \frac{dr_t}{(1 + r_t)} \Rightarrow \ln P(t, T) = -b \ln(1 + r_t) + c(t, T) \Rightarrow$$

$$P(t, T) = \exp(-b \ln(1 + r_t)) \exp(c(t, T)),$$

e como  $\ln(1 + x) \approx x$  se  $|x| \rightarrow 0$ , finalmente,

$$P(t, T) = A(t, T) \exp(-br_t). \quad (5.5)$$

A variação do retorno financeiro do investidor será determinada pela alocação do seu capital entre títulos pré-fixados e pós-fixados. Deste modo, podemos escrever esta ponderação como,

$$\frac{dW}{W} = \alpha \frac{dP}{P} + (1 - \alpha)rdt, \quad (5.6)$$

onde  $\alpha$  é a proporção do capital para os ativos de risco e  $(1 - \alpha)$  é a proporção para os ativos livres de risco.

Substituindo  $\frac{dP}{P}$  pela equação em (5.3) temos,

$$\frac{dW}{W} = \alpha((r + b\lambda\sigma)dt - b\sigma dZ_t) + (1 - \alpha)rdt \Rightarrow$$

$$\frac{dW}{W} = \alpha rdt + \alpha b\lambda\sigma dt - \alpha b\sigma dZ_t + rdt - \alpha rdt \Rightarrow$$

$$\frac{dW}{W} = \alpha b\lambda\sigma dt - \alpha b\sigma dZ_t + rdt,$$

e, portanto,

$$\frac{dW}{W} = [\alpha b\lambda\sigma + r]dt - \alpha b\sigma dZ_t. \quad (5.7)$$

A alocação do capital entre títulos pré-fixados e pós-fixados não é estática e está sujeita às variações no tempo da taxa de juros. Portanto, achar a carteira ótima para o investidor é equivalente a achar a alocação ótima destes ativos em cada instante de tempo.

Pelo Princípio de Bellman, a maximização do retorno financeiro, pressupondo a existência da utilidade indireta em um tempo discreto, é dada por,

$$J(t, W, r) = \max_{\alpha} E_t[U(W_T) | W_t = W, r_t = r], \quad (5.8)$$

onde para um tempo infinitesimal  $dt$  temos,

$$J(t, W, r) = \max_{\alpha} E_t \left[ J(t + dt, W + dW, r + dr) + \int_t^{t+dt} U(W_s) ds \mid W_t = W, r_t = r \right]. \quad (5.9)$$

Pelo Cálculo Estocástico, utilizando o Lema de Itô na diferencial de  $J(\cdot)$  temos que,

$$J(t + dt, W + dW, r + dr) = J(t, W, r) + J_t dt + J_W dW + J_r dr + \frac{1}{2} J_{WW} (dW)^2 + \frac{1}{2} J_{rr} (dr)^2 + J_{Wr} dW dr. \quad (5.10)$$

Pela equação (5.7) sabemos que,

$$dW = W[\alpha b \lambda \sigma + r] dt - \alpha b \sigma dZ_t, \quad (5.11)$$

e utilizando o fato que  $(dt)^2 \approx 0$ ,  $E[dZ_t]^2 = dt$  e  $E[dt dZ_t] = 0$  temos o seguinte resultado,

$$(dW)^2 = (W \alpha b \sigma)^2 dt. \quad (5.12)$$

Pelo modelo de Vasicek em (5.2) temos que,

$$dr = k(\theta - r_t) dt + \sigma dZ_t,$$

e novamente utilizando que  $(dt)^2 \approx 0$ ,  $E[dZ_t]^2 = dt$  e  $E[dt dZ_t] = 0$ , obtemos,

$$(dr)^2 = \sigma^2 dt. \quad (5.13)$$

Substituindo as expressões (5.2), (5.11), (5.12) e (5.13) na expressão (5.10) temos que,

$$\begin{aligned}
 J(t + dt, W + dW, r + dr) = & J(t, W, r) + J_t dt + J_w W [[\alpha b \lambda \sigma + r] dt - \alpha b \sigma dZ_t] + \\
 & + J_r k(\theta - r_t) dt + \sigma dZ_t + \frac{1}{2} J_{ww} (W \alpha b \sigma)^2 dt + \frac{1}{2} J_{rr} \sigma^2 dt + \\
 & + J_{wr} W [[\alpha b \lambda \sigma + r] dt - \alpha b \sigma dZ_t] k(\theta - r_t) dt + \sigma dZ_t.
 \end{aligned}$$

Simplificando a expressão acima, finalmente obtemos,

$$\begin{aligned}
 J(t + dt, W + dW, r + dr) = & J(t, W, r) + J_t dt + J_w W [[\alpha b \lambda \sigma + r] dt - \alpha b \sigma dZ_t] + \\
 & + J_r k(\theta - r_t) dt + \sigma dZ_t + \frac{1}{2} J_{ww} (W \alpha b \sigma)^2 dt + \frac{1}{2} J_{rr} \sigma^2 dt + \\
 & + J_{wr} W \alpha b \sigma^2 dt.
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Pelo Princípio de Otimalidade de Bellman estudado no capítulo 4, para se determinar o ponto de máximo local da expressão acima é necessário derivar em  $t$  o valor esperado de  $J(t + dt, W + dW, r + dr)$ , obtendo-se então a Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman,

$$\begin{aligned}
 J_t + \max_{\alpha} [U(W) + J_w W (\alpha b \lambda \sigma + r) + J_r k(\theta - r_t) + \frac{1}{2} J_{ww} (W \alpha b \sigma)^2 + \\
 + \frac{1}{2} J_{rr} \sigma^2 + J_{wr} W \alpha b \sigma^2] = 0,
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

ou equivalentemente,

$$J_t + H(t, W, r, J_w, J_r, J_{ww}, J_{rr}, J_{wr}) = 0. \tag{5.16}$$

O próximo passo é determinar a alocação entre títulos pré-fixados e pós-fixados de modo que o retorno financeiro seja maximizado dentro deste intervalo

de tempo. Matematicamente, a derivada parcial de  $H(\cdot)$  em  $\alpha$  determina a alocação,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} H(t, W, r, J_W, J_{r_t}, J_{tWW}, J_{rr_t}, J_{Wrr_t}) = 0 \Rightarrow$$

$$J_W W b \lambda \sigma + J_{WW} W^2 \alpha b^2 \sigma^2 + J_{Wr} W b \sigma^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{-J_W \lambda - J_{Wr} \sigma}{J_{WW} W b \sigma} \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{-J_W \lambda}{J_{WW} W b \sigma} + \frac{-J_{Wr}}{J_{WW} W b} \Rightarrow$$

$$\alpha = \lambda \left( \frac{1}{\sigma} \right) \left( \frac{1}{b} \right) \frac{1}{\left( -\frac{J_{WW}}{J_W} W \right)} + \left( \frac{1}{b} \right) \frac{\left( \frac{J_{Wr}}{J_W} \right)}{\left( -\frac{J_{WW}}{J_W} W \right)}. \quad (5.17)$$

Pela Teoria da Utilidade, a medida de aversão relativa ao risco é dada por,

$$R(W) = -W \frac{U''(W)}{U'(W)},$$

de onde, substituindo este termo em (5.17) e definindo como  $\alpha^*$  a alocação que maximiza o rendimento em uma carteira de renda fixa, chegamos a,

$$\alpha^* = \lambda \left( \frac{1}{\sigma} \right) \left( \frac{1}{b} \right) \frac{1}{R(W)} + \left( \frac{1}{b} \right) \frac{\left( \frac{J_{Wr}}{J_W} \right)}{R(W)} \Rightarrow$$

$$\alpha^* = \frac{1}{R(W)} \left( \frac{1}{b} \right) \left( \lambda \left( \frac{1}{\sigma} \right) + \left( \frac{J_{Wr}}{J_W} \right) \right). \quad (5.18)$$

Podemos perceber a partir da expressão acima que, quanto maior a aversão ao risco do investidor  $R(W)$ , menor a alocação em ativos de risco  $\alpha^*$ . Esta conclusão é intuitiva, pois, no limite, para um investidor infinitamente averso ao risco, todo seu capital será aplicado em títulos pós-fixados.

Também notamos que a alocação em títulos pré-fixados  $\alpha^*$  é inversamente proporcional ao horizonte de investimento da carteira  $b$ . Isso porque, quanto maior a duration, maior a incerteza sobre os acontecimentos que podem influenciar negativamente a carteira.

Nesta mesma linha, a volatilidade  $\sigma$  representa o quão sensível está a taxa de juros frente aos choques que acontecem no mercado, ou seja, quanto maior a volatilidade maiores são os riscos decorrentes de eventos negativos no mercado. É intuitivo pensar que, se a volatilidade está alta, é mais arriscado aplicar em ativos de risco e, portanto, a alocação em títulos pré-fixados é inversamente proporcional à volatilidade. Este fato também está evidenciado na expressão (5.18).

Por outro lado, quanto maior o prêmio de risco  $\lambda$ , ou seja, quanto maior for a possibilidade de retorno financeiro sobre ativos de risco, maior a motivação para o investidor aplicar em títulos pré-fixados. Deste modo, o prêmio de risco e a alocação em ativos de risco  $\alpha^*$  são diretamente proporcionais.

O termo  $\lambda \left( \frac{1}{\sigma} \right)$  é denominado de alocação míopica e se refere a alocação de capital em ativos de risco determinados por fatores de curto prazo como a volatilidade e o prêmio de risco.

Já o termo  $\left( \frac{J_{Wr}}{J_W} \right)$  mostra que quanto maior a derivada da função utilidade em relação à riqueza e a taxa de juros, maior será a alocação de capital em ativos de risco. A razão entre as derivadas mostra que o nível da taxa de juros tem um

peso grande na determinação da parcela em  $\alpha^*$ , isso porque quanto maior for a derivada da utilidade em relação à taxa de juros spot, maior a satisfação do investidor em relação a taxa de juros.

Esta satisfação é refletida no otimismo a longo prazo do investidor frente ao mercado. Um investidor otimista no mercado aposta em ativos com maior risco e conseqüentemente, com maior rentabilidade, isso porque espera um retorno financeiro com prazo mais longo. Por esta razão, o termo  $\left(\frac{J_{Wr}}{J_W}\right)$  é chamado de alocação intertemporal. Ele reflete a alocação de capital em títulos pré-fixados frente a expectativas a longo prazo.

Mesmo frente a uma alta volatilidade e baixo prêmio de risco, se um investidor acredita no mercado de renda fixa a longo prazo, a alocação intertemporal contribui para a parcela de capital investido em títulos pré-fixados.

O próximo passo para a determinação de  $\alpha^*$  é a resolução da equação de HJB com a seguinte condição de contorno,

$$\begin{cases} J_t + H(t, W, r, J_W, J_r, J_{tWW}, J_{rr}, J_{Wrt}) = 0 \\ J(T, W, r) = \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma} \end{cases} \quad (5.19)$$

Admitindo-se que  $J(T, W, r)$  é da forma  $J(T, W, r) = \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma} [f(t, r)]^{-\gamma}$ , e adicionalmente que  $f(t, r)$  é solução de,

$$\begin{cases} f(t, r) = \exp\left(c(t) + d(t)r + \frac{1}{2}Q(t)r^2\right) \\ f(0, r) = 1 \end{cases} \quad (5.20)$$

a primeira etapa da determinação de  $\alpha^*$  consiste em resolver a equação acima.

A resolução desta equação diferencial parcial foge do escopo deste trabalho, mas segundo Jun Liu (2001) a solução explícita e fechada para a equação é dada por,

$$\left\{ \begin{array}{l} c + \left( k\theta + \left( \frac{1}{\gamma} \right) \sigma \lambda \right) d + \frac{1}{2} \sigma^2 d^2 + \left( \frac{1-\gamma}{2\gamma^2} \right) \lambda^2 = 0 \\ d - kd + \left( \frac{1-\gamma}{\gamma} \right) = 0 \\ \dot{Q} - 2kQ = 0 \\ c(T) = 0 \\ d(T) = 0 \\ Q(T) = 0, \end{array} \right. \quad (5.21)$$

onde resolvendo este sistema chegamos aos seguintes resultados,

$$\left\{ \begin{array}{l} c = \left( \frac{1-\gamma}{\gamma} \right)^2 \sigma^2 \left[ \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-\gamma} \left( \frac{\lambda}{\sigma} \right)^2 + \frac{1}{k^2} \right) + \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{k\theta + \frac{1-\gamma}{\gamma^2} \sigma \lambda}{\sigma^2 k} \right) (T-t) - \right. \\ \left. - \left( \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{k\theta + \frac{1-\gamma}{\gamma^2} \sigma \lambda}{\sigma^2 k} + \frac{1}{k^2} \right) \frac{1}{k} (1 - e^{-k(T-t)}) + \frac{1}{4} \frac{1}{k^3} (1 - e^{-2k(T-t)}) \right] \\ d = \frac{1-\gamma}{\gamma k} (1 - e^{-k(T-t)}) \\ Q = 0. \end{array} \right. \quad (5.22)$$

Para obter  $\alpha^*$  substituímos estes resultados na equação da utilidade indireta, inicialmente dada pela expressão (5.18), literalmente,

$$\alpha^* = \frac{1}{R(W)} \left( \frac{1}{b} \right) \left( \lambda \left( \frac{1}{\sigma} \right) + \left( \frac{J_{Wr}}{J_W} \right) \right).$$

Da expressão (5.4) temos que,

$$b(t, T_v) = \frac{1}{k} (1 - e^{-k(T_v-t)}),$$

onde  $T_d$  é o vencimento médio da carteira, que não necessariamente é igual ao horizonte de investimento da carteira  $T$ .

Por (5.20),

$$J(T, W, r) = \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma} \left[ \exp \left( c(t) + d(t)r + \frac{1}{2} Q(t)r^2 \right) \right]^{-\gamma}$$

onde  $c(t)$ ,  $d(t)$  e  $Q(t)$  são dados pela expressão (5.22).

Derivando  $J$  devidamente e substituindo-os, juntamente com a expressão de  $b$  em  $\alpha^*$  obtemos,

$$\alpha^* = \frac{1}{\gamma} \left( \lambda \frac{1}{\sigma} \frac{k}{(1 - e^{-k(T_v-t)})} - (1 - \gamma) \frac{(1 - e^{-k(T-t)})}{(1 - e^{-k(T_v-t)})} \right). \quad (5.23)$$

Esta expressão é a solução para o caso geral da alocação ótima de ativos de risco.

# Capítulo 6

## Simulação em Carteiras de Renda Fixa

### 6.1 Introdução

O capítulo anterior forneceu uma solução fechada para a alocação ótima em ativos de risco numa carteira de renda fixa em função de variáveis como prêmio de risco, a volatilidade da taxa de juros e a aversão ao risco do investidor.

De posse deste resultado, este capítulo tem como objetivo simular o comportamento do rendimento de uma carteira de renda fixa em algumas situações construídas artificialmente do mercado seja retratando um período normal de comportamento deste último ou uma situação de stress, levando ainda em conta a possibilidade de diferentes perfis de investidores.

### 6.2 Análise das Variáveis do Modelo

De acordo com a expressão em (5.23), a solução para a alocação ótima em títulos pré-fixados é dada por,

$$\alpha^* = \frac{1}{\gamma} \left( \lambda \frac{1}{\sigma} \frac{k}{(1 - e^{-k(T_v - t)})} - (1 - \gamma) \frac{(1 - e^{-k(T - t)})}{(1 - e^{-k(T_v - t)})} \right), \quad (6.1)$$

onde  $\gamma$  é o índice de aversão ao risco do investidor,  $\lambda$  é o prêmio por aplicar em ativos de risco,  $\sigma$  é a volatilidade da taxa de juros,  $k$  é a velocidade de reversão à média do modelo de Vasicek,  $T$  é o horizonte de investimento da carteira e  $T_v$  é a duração média dos títulos da carteira.

A primeira parte da expressão,  $\lambda \frac{1}{\gamma} \frac{1}{\sigma} \frac{k}{(1 - e^{-k(T_v - t)})}$ , representa a alocação miópica que corresponde a alocação em ativos de risco refletida por fatores de curto prazo, tais como o prêmio de risco, a volatilidade da taxa de juros e a velocidade de reversão à média.

A segunda parte,  $-(1 - \gamma) \frac{1}{\gamma} \frac{(1 - e^{-k(T - t)})}{(1 - e^{-k(T_v - t)})}$ , representa a alocação intertemporal, isto é, a alocação em ativos de risco refletida por fatores de longo prazo como expectativas de que a longo prazo o mercado seja favorável.

Voltando ao modelo de Vasicek temos,

$$dr = k(\theta - r_t)dt + \sigma dZ_t.$$

A determinação dos parâmetros da equação é resultado da calibração do modelo, onde são necessárias sofisticadas técnicas de estimação que foge do escopo do estudo. Para determinação da velocidade de reversão à média do modelo ( $k$ ), utilizaremos um resultado já obtido por Tai (2003), onde ele assume como 2,5% um resultado utilizado no mercado.

Assumiremos como ativo de risco um título pré-fixado sem pagamento de cupons (por exemplo, uma LTN – Letras do Tesouro Nacional), e o ativo livre de risco como um título pós-fixado (por exemplo, uma LFT – Letra Financeira do Tesouro), ambos com mesmo vencimento.

De acordo com a série histórica das taxas de juros nos diferentes vencimentos fornecida pela BM&F - Bolsa de Mercadorias e Futuros ([www.bmf.com.br](http://www.bmf.com.br)), a taxa média dos títulos com vencimento em 1 ano de janeiro a agosto de 2007 foi de 11,50% e a volatilidade média desta taxa no mesmo período foi de 0,11%.

O prêmio de risco ( $\lambda$ ) pode ser interpretado como sendo a porcentagem que um título pré-fixado paga a mais que um título pós-fixado assumindo-se o mesmo vencimento. Para a análise vamos aproximar este prêmio para 1%, ou seja, um título pré-fixado paga 1% a mais que um título pós-fixado.

Resumidamente temos,

Dias úteis até o vencimento ( $T$ )	252
Velocidade de reversão à média ( $k$ )	2,5%
Prêmio de risco ( $\lambda$ )	1%
Volatilidade da taxa de juros ( $\sigma$ )	0,11%
Duração média da carteira ( $T_v$ )	252

Tabela 6.1 – Resumo dos parâmetros da simulação.

Utilizando os dados da tabela 6.1, podemos observar a alocação ótima em títulos pré-fixados em função do índice de aversão ao risco.

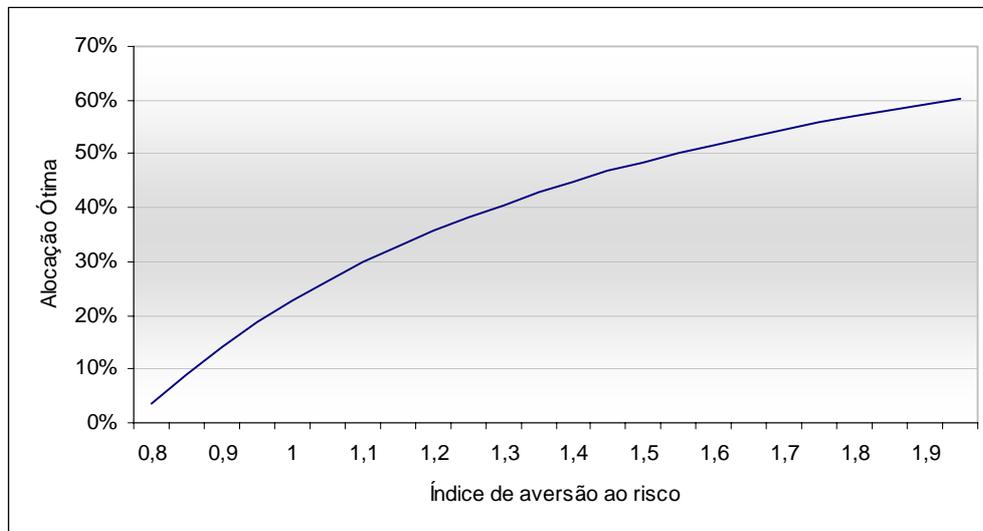


Gráfico 6.1 – Influência do Índice de aversão ao risco.

O gráfico mostra que quanto maior for o índice de aversão ao risco maior será a alocação em ativos de risco. O fato da alocação em ativos de risco aumentar quando o índice de aversão ao risco aumenta parece contraditório, pois,

um investidor com aversão ao risco tende a direcionar seu capital para ativos livres de risco como títulos pós-fixados. A maneira de resolver essa aparente contradição é pensando como explicamos a seguir. Se analisarmos a alocação ótima como sendo a soma da alocação miópica e intertemporal, vamos olhar estas alocações separadamente e temos o seguinte gráfico,

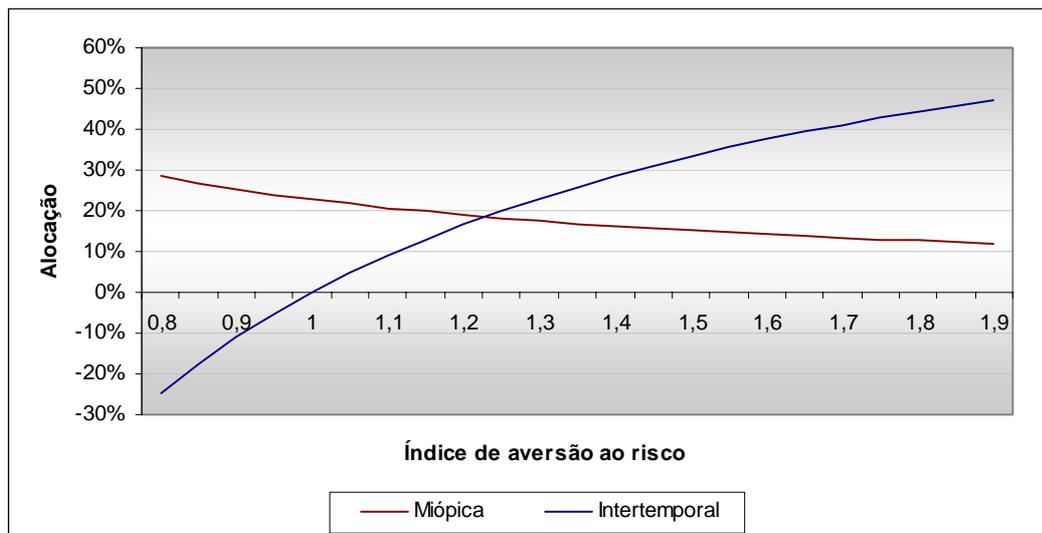


Gráfico 6.2 – Alocação Miópica e Intertemporal.

Vemos então que o argumento do investidor fugir dos ativos de risco quando o índice de aversão aumenta é válido para uma política unicamente miópica, ou de curto prazo, onde as decisões do investidor são baseadas em fatos momentâneos do mercado tais como o nível da taxa de juros, o prêmio de risco e a volatilidade do mercado. Notamos que quanto maior for o índice de aversão ao risco, menor será a alocação no curto prazo. Por outro lado, maior será a alocação no longo prazo. Isso porque se o investidor pensa no longo prazo e tem uma política intertemporal, comumente ele tem a intenção de permanecer com seu título pré-fixado até o vencimento e desse modo ele já sabe, de antemão, o valor que receberá, independente das oscilações e stress do mercado.

Como a alocação ótima é a soma dos efeitos das alocações de curto e longo prazo, a alocação ótima em ativos de risco aumenta à medida que o índice de aversão ao risco aumenta.

É possível notar que para este conjunto de dados, um índice de aversão ao risco ( $\gamma$ ) igual a 0,9 representa um investidor conservador. Para poder observar a alocação ótima  $\alpha^*$  em função do prêmio de risco  $\lambda$ , vamos fixar  $\gamma$  como 0,9 mantendo-se os valores das outras variáveis como na Tabela 6.1.

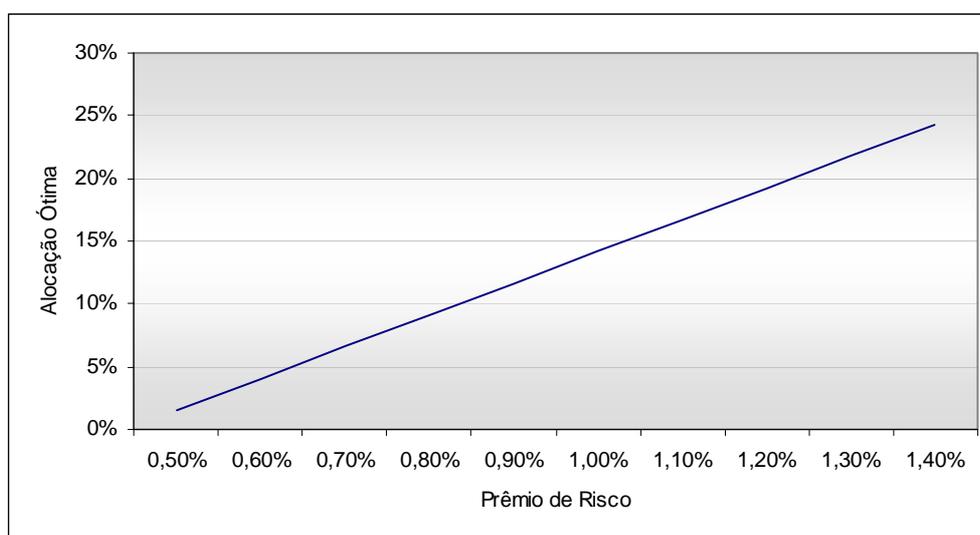


Gráfico 6.3 – Influência do Prêmio de Risco.

O resultado é esperado, pois quanto maior o prêmio de risco, maior a motivação do investidor em direcionar seu capital em ativos de risco e, portanto, maior tende a ser o investimento em títulos pré-fixados.

Para analisar o comportamento da alocação ótima em função da volatilidade da taxa de juros, serão mantidos os valores das variáveis na Tabela 6.1 e fixaremos o prêmio de risco como 1%. Deste modo, o comportamento da alocação ótima em função da volatilidade da taxa de juros pode ser vista no seguinte gráfico,

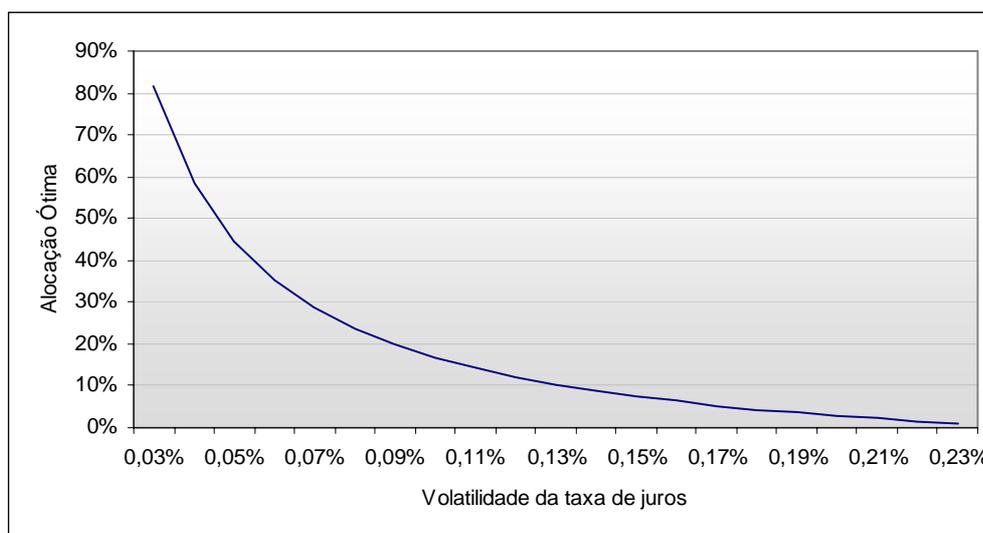


Gráfico 6.4 – Influência da volatilidade da taxa de juros.

Uma volatilidade alta representa uma situação cujos preços e taxas estão oscilando com grandes amplitudes em torno dos seus valores médios, indicando período de instabilidade e/ou stress do mercado. Deste modo, é esperado que quanto maior a volatilidade da taxa de juros menor será a alocação em ativos de risco, para um investidor com aversão ao risco.

Fixando a volatilidade da taxa de juros como 0,11% e mantendo-se os valores das variáveis citadas anteriormente, é possível analisar a alocação ótima em função da velocidade de reversão á média do modelo de Vasicek.

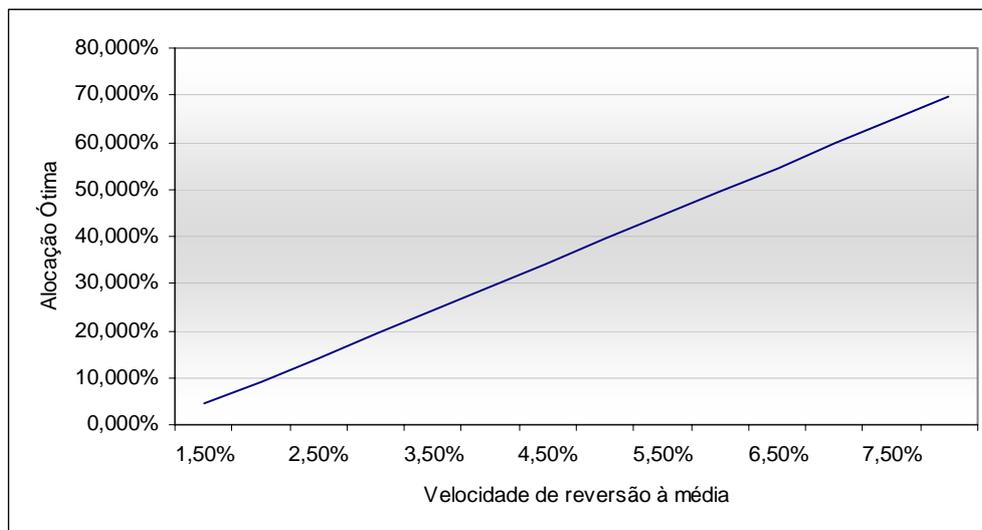


Gráfico 6.5 – Influência da velocidade de reversão à média.

Segundo o modelo de Vasicek, mesmo que a taxa de juros se afaste do seu valor esperado ela tende a voltar com uma velocidade  $k$ , portanto, quanto mais rápido a taxa de juros volta para a média, mais estável tornar-se-á o mercado. Isto reflete um mercado calmo e sem stress. Portanto, é esperado que a velocidade de reversão à média e a alocação em ativos de risco sejam diretamente proporcionais entre si.

## 6.3 Simulações em Gestão de Carteiras de Renda Fixa

Um cenário econômico é uma foto das percepções e expectativas dos investidores que compõem o mercado financeiro. Se há um clima de medo dizemos que o cenário é de stress, por outro lado se o clima é de euforia dizemos que o cenário é otimista.

Obviamente, para compor uma carteira o investidor leva em conta qual o cenário em que está vigorando no momento da composição. É intuitivo pensar que se o investidor está em um cenário otimista ele tende a colocar mais capital em ativos de risco atraído pela maior remuneração em relação a um ativo livre de risco. O inverso é verdadeiro, se o cenário é de stress ele tende a alocar menos em ativos de risco, pois a probabilidade de perdas financeiras está mais alta.

Também é lógico pensar que para um mesmo cenário econômico, diferentes perfis de investidores direcionam diferentes porcentagens de capital para ativos de risco. Um investidor conservador tende a alocar menos capital em ativos de risco que um investidor agressivo.

As simulações a seguir têm por objetivo verificar qual é a alocação ótima em títulos pré-fixados e pós-fixados em diferentes cenários econômicos para diferentes perfis de investidores. Para isso tomaremos como base a série histórica das taxas de juros para títulos com vencimento em 1 ano.

### 6.3.1 Cenário Atual

Pelo histórico da taxa pré-fixada para vencimento em 1 ano, de janeiro a agosto de 2007, a volatilidade ( $\sigma$ ) foi de 0,59%. Assumindo a velocidade de reversão à média do modelo de Vasicek ( $k$ ) como 2,5%, o prêmio de risco ( $\lambda$ ) de 0,5% e como ambos os títulos tem vencimento para 1 ano, o horizonte de investimento e a duration são ambos 252 dias.

Pelo Gráfico 6.1 podemos concluir que um investidor razoavelmente conservador tem um índice de aversão ao risco ( $\gamma$ ) de 1,1.

Para este cenário, que pode ser considerado atual temos os seguintes parâmetros,

Dias úteis até o vencimento ( $T$ )	252
Duração média da carteira ( $T_v$ )	252
Velocidade de reversão à média ( $k$ )	2,5%
Prêmio de risco ( $\lambda$ )	0,56%
Volatilidade da taxa de juros ( $\sigma$ )	0,59%
Índice de aversão ao risco ( $\gamma$ )	1,1

Alocação ótima em títulos pré-fixados ( $\alpha^*$ )	11,24%
Alocação ótima em títulos pós-fixados ( $1-\alpha^*$ )	88,76%

Tabela 6.2 – Cenário atual para um investidor conservador.

Ou seja, neste cenário um investidor razoavelmente averso ao risco investiria 11,24% do seu capital em ativos de risco.

Para este mesmo cenário, tomando-se um investidor mais agressivo cujo índice de aversão ao risco ( $\gamma$ ) seja de 3,5 o resultado é diferente,

Dias úteis até o vencimento ( $T$ )	252
Duração média da carteira ( $T_v$ )	252
Velocidade de reversão à média ( $k$ )	2,5%
Prêmio de risco ( $\lambda$ )	0,56%
Volatilidade da taxa de juros ( $\sigma$ )	0,59%
Índice de aversão ao risco ( $\gamma$ )	3,5

Alocação ótima em títulos pré-fixados ( $\alpha^*$ )	72,11%
Alocação ótima em títulos pós-fixados ( $1-\alpha^*$ )	27,89%

Tabela 6.3 – Cenário atual para um investidor agressivo.

### 6.3.2 Cenário de Stress

Diferentemente do cenário apresentado anteriormente, um cenário de stress é marcado pelas incertezas do mercado, onde o medo generalizado dos investidores motiva saídas de capitais o que reduz os preços e aumenta a volatilidade dos ativos.

Um exemplo foi em 2002 durante a eleição ao primeiro governo do então candidato Luis Inácio Lula da Silva. O medo do calote das dividas públicas que, se eleito, ele poderia implementar, gerou uma saída de capital do país, abaixando os preços dos ativos financeiros, elevando o risco Brasil e conseqüentemente, aumentando a taxa de juros para atrair os investidores.

Neste cenário histórico de stress, a volatilidade da taxa pré de 1 ano levando-se em conta junho a outubro de 2002 chegou a 2,52%. Assumindo a velocidade de reversão à média do modelo de Vasicek ( $k$ ) como 2,5%, o prêmio de risco ( $\lambda$ ) de 1% e como ambos os títulos tem vencimento para 1 ano, o horizonte de investimento e a duration são ambos 252 dias.

Para este cenário de stress temos,

Dias úteis até o vencimento ( $T$ )	252
Duração média da carteira ( $T_v$ )	252
Velocidade de reversão à média ( $k$ )	2,5%
Prêmio de risco ( $\lambda$ )	1%
Volatilidade da taxa de juros ( $\sigma$ )	2,52%
Índice de aversão ao risco ( $\gamma$ )	1,1

Alocação ótima em títulos pré-fixados ( $\alpha^*$ )	9,99%
Alocação ótima em títulos pós-fixados ( $1-\alpha^*$ )	90,01%

Tabela 6.4 – Cenário de stress para um investidor conservador.

Em um cenário de stress, o investidor conservador aplica 9,99% do seu capital em ativos de risco, menos que aplicaria no cenário atual. Este fato já era esperado pois quanto mais turbulento está o mercado, menos um investidor arrisca em investir em ativos de risco.

Para este mesmo cenário de stress, simulando a aplicação do investidor agressivo cujo índice de aversão ao risco ( $\gamma$ ) é de 3,5, temos,

Dias úteis até o vencimento ( $T$ )	252
Duração média da carteira ( $T_v$ )	252
Velocidade de reversão à média ( $k$ )	2,5%
Prêmio de risco ( $\lambda$ )	1%
Volatilidade da taxa de juros ( $\sigma$ )	2,523%
Índice de aversão ao risco ( $\gamma$ )	3,5

Alocação ótima em títulos pré-fixados ( $\alpha^*$ )	71,71%
Alocação ótima em títulos pós-fixados ( $1-\alpha^*$ )	28,29%

Tabela 6.5 – Cenário de stress para um investidor agressivo.

Como esperado, a alocação é menor que no cenário atual.

### 6.3.3 Cenário Otimista

Na direção oposta ao cenário de stress, um cenário otimista tem como característica a baixa volatilidade e o aumento dos investimentos no País. Com o capital entrando e o País sendo reconhecido como um bom lugar para se investir, os juros caem, o que permite ao governo baratear suas dívidas e investir em infraestrutura.

Atualmente o país caminha para este objetivo, mas obviamente esta situação depende de uma série de fatores tanto do mercado nacional como do mercado internacional.

Sendo um cenário hipotético, assumiremos uma baixa volatilidade da taxa pré de 1 ano de 0,01%. Em um cenário otimista, com o mercado em alta não faz sentido um prêmio de risco muito alto e, portanto, adotaremos 0,5%.

Mantendo-se a velocidade de reversão à média do modelo de Vasicek ( $k$ ) como 2,5% e o horizonte de investimento e a duration como 252 dias, para o investido conservador temos,

Dias úteis até o vencimento ( $T$ )	252
Duração média da carteira ( $T_v$ )	252
Velocidade de reversão à média ( $k$ )	2,5%
Prêmio de risco ( $\lambda$ )	0,5%
Volatilidade da taxa de juros ( $\sigma$ )	0,01%
Índice de aversão ao risco ( $\gamma$ )	1,1

Alocação ótima em títulos pré-fixados ( $\alpha^*$ )	37,55%
Alocação ótima em títulos pós-fixados ( $1-\alpha^*$ )	62,45%

Tabela 6.6 – Cenário otimista para um investidor conservador.

Como esperado, em um cenário de otimista, o investidor conservador se sente mais confiante na estabilidade do mercado e aplica mais capital em ativos

de risco. Para este mesmo cenário, simulando a aplicação de um investidor agressivo, cujo índice de aversão ao risco ( $\gamma$ ) é de 3,5 obtemos,

Dias úteis até o vencimento ( $T$ )	252
Duração média da carteira ( $T_v$ )	252
Velocidade de reversão à média ( $k$ )	2,5%
Prêmio de risco ( $\lambda$ )	0,5%
Volatilidade da taxa de juros ( $\sigma$ )	0,01%
Índice de aversão ao risco ( $\gamma$ )	3,5

Alocação ótima em títulos pré-fixados ( $\alpha^*$ )	80,37%
Alocação ótima em títulos pós-fixados ( $1-\alpha^*$ )	19,63%

Tabela 6.7 – Cenário otimista para um investidor agressivo.

Notamos que diante de um mercado otimista e com baixa volatilidade o investidor mais agressivo investe quase todo seu capital em ativos de risco.

## Conclusão

As simulações mostraram o que intuitivamente já esperávamos. Para um mesmo cenário econômico, um investidor conservador aplica menos em ativos de risco que um investidor agressivo. Para cenários de stress, as aplicações de investidores com ambos perfis, conservador ou arrojado, em ativos de risco são menores em comparação a um cenário otimista.

Outro ponto é que as interações entre as variáveis dentro do modelo também estão consistentes. É lógico pensar que quanto maior a remuneração de ativo de risco frente a um ativo livre de risco, maior a motivação para assumir o risco. Do mesmo modo, quanto maior a volatilidade do mercado, maior a cautela dos investidores em geral e conseqüentemente menor a alocação em ativos de risco.

Nesta ótica, o modelo apresentado é consistente e aparentemente não apresenta falha, mas, é obvio e também intuitivo que se este modelo garantisse a alocação ótima em ativos de renda fixa, todos os investidores poderiam adotá-lo e começariam a desprezar suas intuições e expectativas sobre o mercado oriundo da taxa de juros. Acontece que o comportamento do mercado é dinâmico, o que vale dizer que se todos adotarem o resultado ótimo, o fato dos recursos serem limitados vai trazer mudanças nos comportamentos das variáveis envolvidas, que irão mudar as soluções ótimas. O sentido então de buscarmos soluções ótimas é que elas valem, pelo menos momentaneamente, auxiliando, dessa forma, as escolhas do investidor.

Um outro ponto é que todos os modelos de taxa de juros, inclusive o de Vasicek, são tentativas de racionalizar o comportamento aleatório da taxa de juros, mas nenhum deles é totalmente eficaz. Se um deles fosse, o mercado o adotaria e todos os outros seriam desprezados. Ainda outro entrave é o índice de aversão ao risco que tenta mensurar o comportamento do ser humano, algo de difícil entendimento. Alguns bancos e corretoras elaboram questionários a fim de identificar a qual categoria de investidor o cliente se encaixa e direcionam os

produtos mais adequados para ele. Mas, de qualquer forma, são tentativas não totalmente eficazes de conhecer o cliente.

O ponto principal é que se assumirmos válidas as entradas do modelo então teremos uma equação consistente que indica a alocação ótima em ativos de risco para o mercado de renda fixa.

## Bibliografia

BERTSEKAS, Dimitri P. *Dynamic Programming and Optimal Control*. 2<sup>nd</sup> ed. Athena Scientific, 2001.

BLACK, F., DERMAN, E., TOY, W. *A One Factor Models of Interest Rate and its Application to Treasury Bonds Option*. Financial Analysis Journal, **33**, 1990, 24-32.

BLACK, F., KARASINSKI, P. *Bond and Option Pricing When Short Rate are Lognormal*. Financial Analysis Journal, **47**, 1991, 52-59.

BRIGO, Damiano & MERCURIO, Fabio. *Interest Rate Models, Theory and Practice*. Springer, 2002.

COX, J., INGERSOLL, J., ROSS, S. *An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices*. Econometrica, **53**, 1985, 363-384.

ELLIOT, Robert J. & KOOP, P. Ekkehard. *Mathematics of Financial Markets*, 2<sup>nd</sup> ed. Springer, 2004.

HEATH, D., JARROW, R., MORTON, A. J. *Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rate. A New Methodology for Contingent Claims*. Econometrica, **60**, 1992, 77-106.

HO, T.S.Y., LEE, S. *Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims*. Journal of Finance, **41**, 1986, 1011-1029.

HULL, John C. *Fundamentos dos Mercados de Futuros e Opções*. 4<sup>a</sup> ed BMF, 2005.

HULL, J., WHITE, A. *Pricing Interest Rate Derivatives*. The Review of Financial Studies, **3**, 1990, 573-592

JOHNSON, R.A. & WICHERN, D.W. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. 6<sup>th</sup> ed. N.J: Pearson Prentice Hall, 2007

JORION, P. *Value at Risk*. McGraw-Hill, 1997.

LIU, Jun. *Portfolio Selection in Stochastic Environments*. Oxford Journal; Social Sciences; Review of Financial Studies Vol. 20, #1, 2007, 1-39.

MERTON, R. *Theory of Option Pricing*. Bell Journal of Economics and Management Science **4**, 1973, 141-183.

OKSENDAL, Bernt K. *Stochastic Differential Equations*. 5<sup>th</sup> ed. Springer, 2002

SECURATO, José R. *Cálculo Financeiro das Tesourarias*. 3<sup>a</sup> ed. Saint Paul Institute of Finance, 2005.

TAI, Paulo S. *Otimização de Portfólios de Renda Fixa Através da Alocação Estratégica de Intertemporal de Ativos*. Dissertação de Mestrado - FEA/IME-USP, Modelagem Matemática em Finanças, 2003.

VASICEK, O. *An Equilibrium characterization of the term Structure*. Journal of Financial Economics, **5**, 1977, 177-188.