

Rafael de Araújo Monteiro da Silva

Caos em sistemas hidrodinâmicos

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao
Instituto de Matemática e Estatística para a
obtenção do grau de Bacharel em Matemática
Aplicada com Habilitação em Métodos Mate-
máticos

Orientador:

Prof. Dr. Alberto Tufaile EACH - USP

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

São Paulo

20 de novembro de 2007

Sumário

Resumo

Observações gerais e notação p. 6

1 Motivação e enunciado do problema de Rayleigh-Bénard p. 8

1.1 Onde se apresenta o fenômeno que estudamos? p. 9

1.1.1 O caso da xícara de leite com chocolate p. 9

I Teoria clássica **11**

2 As equações básicas da hidrodinâmica p. 12

2.1 Equação de continuidade p. 12

2.1.1 Pequena digressão: sobre a relação entre a derivada temporal local e a derivada temporal material p. 13

2.2 Conservação do momento p. 14

2.3 Taxa de dissipação viscosa p. 17

Sobre o 4º termo: somando em i o quarto elemento p. 18

Analisando o primeiro termo p. 19

Da consistência termodinâmica do modelo p. 19

2.4 A equação de condução de calor - lei de conservação de energia p. 19

3 Obtendo as aproximações de Boussinesq p. 22

3.1 Das constantes e variáveis desprezadas p. 22

3.2 Equações de perturbação p. 23

3.2.1	Eliminando o termo $\frac{\delta p}{\rho_0}$ na equação 3.10	p. 25
4	Condições de contorno	p. 28
4.1	Superfícies rígidas (nas quais não há deslizamento)	p. 28
4.2	Superfície livre (sem tensão tangencial superficial)	p. 29
4.3	Sobre análise em termos de auto funções	p. 29
4.3.1	O que significa esta análise?	p. 29
4.3.2	A análise em termo de modos normais: como é o tratamento usual de um problema de estabilidade?	p. 30
4.3.3	Fronteira rígida	p. 31
4.3.4	Fronteira livre	p. 32
5	O princípio da troca de estabilidades	p. 34
6	As equações que governam o estado marginal e a redução a um problema de valor característico	p. 36
6.1	Os princípios variacionais	p. 37
6.2	O significado físico da parte variacional do problema	p. 39
6.3	Obtendo os valores do número de Rayleigh \mathfrak{R} crítico	p. 41
II Teoria moderna		42
7	O modelo de Lorenz	p. 43
7.1	Condições de contorno no modelo de Lorenz	p. 45
7.1.1	Quanto ao significado das três amplitudes	p. 47
8	Exemplos básicos em teoria local de bifurcações	p. 49
8.1	Um exemplo de equação diferencial dependendo de um parâmetro e a nossa motivação para seu estudo	p. 49
8.2	Bifurcação do tipo sela-nó	p. 50

8.3	Bifurcação do tipo forquilha	p. 51
8.4	Bifurcação de Hopf	p. 52
8.5	Bifurcação transcítica	p. 53
9	Um pouco da dinâmica do sistema de Lorenz	p. 55
9.1	Evolução do sistema	p. 55
9.2	Entendendo as órbitas homoclínicas	p. 58
9.3	A importância da dinâmica simbólica	p. 59
9.4	Reconstruindo o espaço de fase por meio da série temporal	p. 59
	Conclusão	p. 63
	III Apêndices	64
	Apêndice A – Sobre o significado de e_{ij}	p. 65
A.1	Analisando a parte anti-simétrica e sua relação com $\nabla \times \vec{v}$	p. 66
A.2	A parte simétrica e sua relação com $\nabla \cdot \vec{v}$	p. 66
	Apêndice B – Conceitos básicos sobre tensores	p. 68
B.1	Alguns exemplos	p. 68
	Apêndice C – Desprezando ϕ	p. 69
	Referências	p. 71

Resumo

Este trabalho tem como essência mostrar um estudo sobre estabilidade sob a visão de duas teorias "distintas". Mostraremos que o surgimento de instabilidade no sistema estudado pode ser mensurado por um parâmetro \mathfrak{R} (o número de Rayleigh) que depende de fatores como a geometria do sistema e gravidade, e que existe um parâmetro crítico \mathfrak{R}_c a partir do qual temos instabilidade. A primeira parte do trabalho, que chamarei de *clássica*, é inteiramente dedicada a encontrarmos este número crítico. Apesar do nome que dei à seção, muitos pesquisadores ainda se dedicam ao estudo nesta área, ou seja, o termo *clássica* aqui tem origem ligada essencialmente à ordem em que se deram as descobertas que veremos.

A segunda parte (*moderna*) consistirá em trabalharmos com as aproximações do sistema que levaram ao conhecido sistema de Lorenz, adentrando assim na área de teoria qualitativa de equações diferenciais e, novamente, buscaremos caracterizar valores críticos de um parâmetro para estudarmos o surgimento de instabilidade, caos etc. Para tanto usaremos alguns conceitos de teoria de bifurcações.

Observações gerais e notação

Durante o trabalho fizemos uso da notação tensorial. Assim, quando usamos a notação \sum_j queremos dizer $\sum_j = \sum_{j=1}^3$. Tentei ao máximo evitar a notação de Einstein por concordar em essência com o professor Elon Lages, que diz que Einstein contribuiu de diversas formas para a ciência, mas pela notação tensorial com certeza não foi. O grande defeito desta notação foi não ter podido com ela desenvolver com facilidade e rapidez alguns conceitos de teoria de equações diferenciais ordinárias, como o de fluxo de uma equação por um ponto; por meio disso teria chegado a teoremas como o de Kelvin e o de Helmholtz. Como eles não foram utilizados aqui achei melhor seguir adiante com meus intentos, ainda mais pela clareza expositiva que poderíamos obter em certos momentos ao descrever as equações em cada coordenada. Apesar deste "apeço" pela notação coordenada a coordenada, colocamos no texto elementos termos de cálculo vetorial para não carregar demais a notação, tentando evitar escrever coisas do tipo $\sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$ quando poderíamos simplificar escrevendo $div(\vec{u})$.

Falamos várias vezes sobre o fato do integrando em V ser nulo quando o valor de V é arbitrário. Na verdade isso, apesar de intuitivo, vem da negação à nulidade do integrando e do uso do princípio da conservação do sinal num trecho não nulo, além da escolha de uma vizinhança V' ao redor desta região não nula, o que nos daria uma integral não nula nesta e então a uma contradição. Isso é um caso muito simples do cálculo variacional e que na hidrodinâmica também se conhece por *Lema de Du-Bois Reymond*.

À mim mesmo, que me esforcei um monte para fazer este trabalho; ao meu orientador, pela paciência e confiança; ao Django Reinhardt, que não cansava de tocar algumas músicas enquanto eu corria para terminar a monografia.

1 Motivação e enunciado do problema de Rayleigh-Bénard

Aquecendo-se uma fina camada de fluido por baixo e limitando sua superfície por outra placa obtemos um sistema (líquido) com parte superior mais pesada que a inferior devido à sua dilatação. Obtemos assim instabilidade e então uma tendência do líquido a se redistribuir em busca de arranjos mais estáveis. Bénard observou que a partir de uma certa diferença de temperatura (que depende de alguns parâmetros do sistema) o movimento de convecção responsável pela movimentação do fluido se estabelece dentro de células, cuja parte superior (vista por cima) tinha formato hexagonal (figura 1).

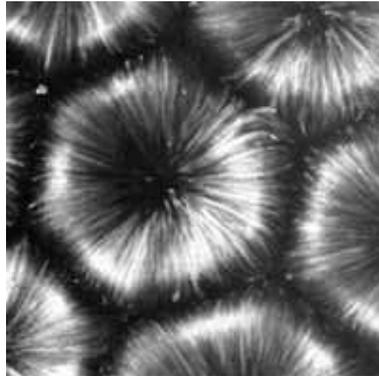


Figura 1: Imagem de células hexagonais no problema de Rayleigh-Bénard

Os "rolos" de convecção vizinhos, como mostrados na figura 2, alternam seus sentidos de rotação devido à continuidade do campo de velocidades que define o fluxo de matéria.

Rayleigh estudou posteriormente no problema o por que da instabilidade não originar as células imediatamente após o início do aquecimento por baixo, procurando então algum parâmetro que mensurasse a instabilidade do sistema. Observou-se que isso não acontecia devido a alguns fatores como a perda de energia pelo atrito entre as moléculas do líquido em movimento e a dissipação de parte do calor transportado por condutividade térmica; serviam como fator de amortecimento e retardavam o início do fenômeno. Similar ao problema estudado, exceto pela placa superior, temos o problema de Bénard- Marangoni.

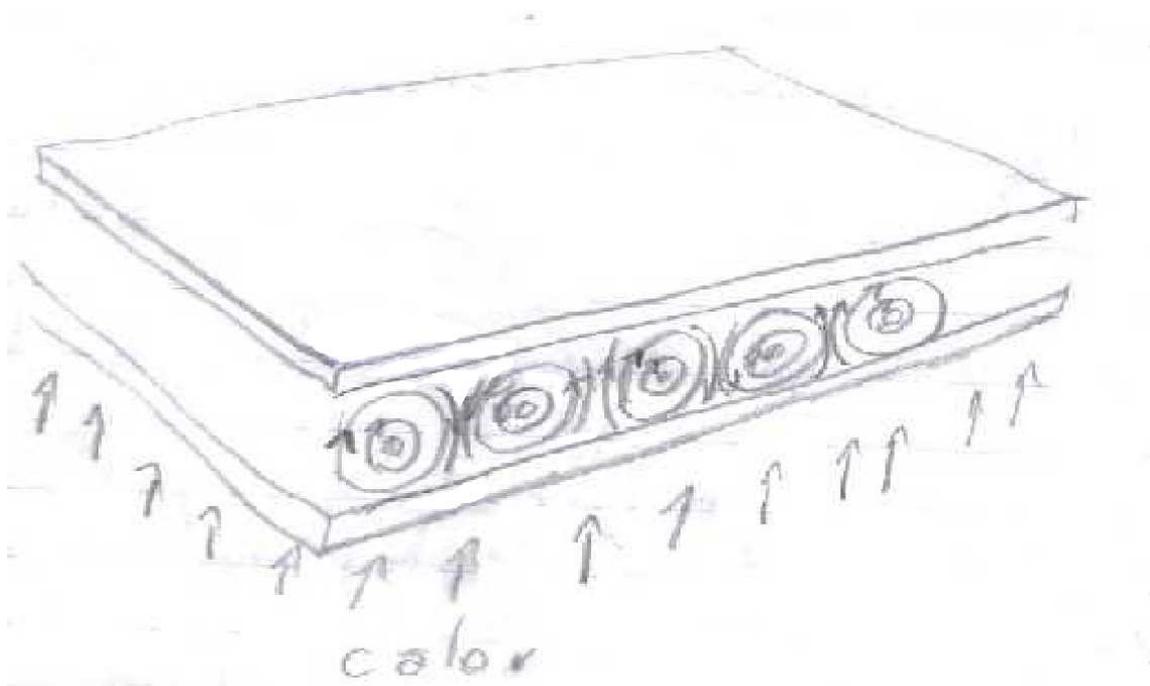


Figura 2: Rolos de convecção no problema de Rayleigh-Bénard

1.1 Onde se apresenta o fenômeno que estudamos?

Geólogos acreditam que o movimento do magma no interior da Terra apresente o fenômeno, o qual seria então um dos responsáveis por sua movimentação; note que teríamos então condições de fronteira diferentes e estaríamos num sistema de coordenadas esféricas. O ar atmosférico acima da superfície do mar (aquecida pelo sol) também é uma representação do fenômeno, sendo que neste caso aproximamos a existência das placas à estabilidade da superfície do mar e à camada atmosférica abaixo da qual se formam nuvens. Há extensões do problema à geofísica, relacionando o padrão que estudamos à movimentação convectiva do magma terrestre e sua relação na formação do campo magnético da Terra (e sua variação com o passar o tempo). Outras conexões que vem sendo estudadas por meio deste problema buscam a relação do fenômeno num "fluido original que deu origem à Terra" com a divisão que conhecemos da proporção de terra e água que o planeta possui hoje.

1.1.1 O caso da xícara de leite com chocolate

Aquecendo-se uma xícara de leite com chocolate num microondas e mantendo-a posteriormente num ambiente aberto observamos padrões que se formam à superfície do líquido. Observe que não temos um fluido aquecido por baixo, e sim um fluido esfriado por cima, o que nos dá condições de instabilidade semelhantes. Assim, a explicação de Rayleigh-Bénard para o problema nos daria o por que de tais padrões; de fato, parte do aspecto visível das "células" (como o líquido é pouco viscoso o padrão não é de células exatamente) se deve a finas gotas do líquido suspensas por cima das áreas onde o leite sobe, como se vê na figura 3 .

Tendo enunciado o problema, seguiremos ao seu estudo.



Figura 3: Xícara de leite com chocolate representando o fenômeno

Parte I

Teoria clàssica

2 *As equações básicas da hidrodinâmica*

A idéia fundamental na obtenção das equações da hidrodinâmica está em desenvolvê-las a partir de quantidades que se conservam: massa, energia e momento total do sistema (na ausência de forças externas). Seguirei fazendo o uso de tensores, pois achei esta abordagem mais clara do que a vetorial para se deduzir Navier-Stokes, além de que o conceito de tensor era desconhecido por mim até me dedicar a este trabalho.

2.1 Equação de continuidade

Considere um volume V arbitrário, limitado por uma superfície S , em um fluido. A taxa de escoamento \mathcal{E} de matéria por V pode ser dada por

$$\mathcal{E} = - \int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

onde \vec{n} é o vetor normal a S e apontado para fora da região V (a superfície é orientada), \vec{v} é o vetor velocidade e ρ a densidade do fluido. O sinal negativo vem do sentido do fluxo na direção da normal à superfície.

Poderíamos ainda considerar a massa m dentro do volume V

$$m = \int_V \rho dV$$

e, derivando sob o sinal de integração em relação ao tempo, obteríamos a taxa de variação da massa dentro do volume V ,

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Aqui, como em grande parte da teoria de fluido-dinâmica, consideraremos as funções tão regulares quanto for necessário. Note que a hipótese de ρ contínuo é a parte primordial da teoria, pois despreza a natureza molecular do fluido e o considera como um todo contínuo. Essa aproximação é comum na natureza e usualmente é muito boa. Das teorias que eu estudei nesta graduação, acredito que somente a mecânica estatística leva em consideração a natureza molecular do fluido, embora acredite que obter uma função de partição para um sistema tão "coeso" seja algo extremamente complexo, senão impossível.

Na integral de superfície podemos aplicar o teorema da divergência de Gauss

$$\int_S \rho \vec{v} \vec{n} dS = \int_V \text{div}(\rho \vec{v}) dV$$

Igualando as grandezas que são equivalentes obtemos

$$\begin{aligned} - \int_V \text{div}(\vec{v}\rho) &= \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_V \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{v}\rho) \right\} dV &= 0 \end{aligned}$$

Sendo V arbitrário e o integrando contínuo, vale, pela observação 1 que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{v}\rho) = 0 \quad (2.1)$$

Note que se a densidade $\rho = \rho(t, \vec{x})$ for constante então $\text{div}(\vec{v}) = 0$.

2.1.1 Pequena digressão: sobre a relação entre a derivada temporal local e a derivada temporal material

A relação acima citada estabelece uma conexão entre a mecânica euleriana e lagrangiana. Consideremos uma quantidade escalar $\alpha(x, t)$ de um ponto de massa do fluido. Pela regra da cadeia temos

$$\frac{D\alpha(x, t)}{Dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \langle \nabla \alpha, \vec{v} \rangle$$

Agora, multiplicando a equação de continuidade por $\alpha(x, t)$ e considerando a equação de continuidade e $\alpha(x, t)$ um escalar (que poderia ser a componente de um vetor, um tensor, etc), utilizamos a propriedade acima:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\alpha}{dt} &= \rho \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \langle \rho \vec{v}, \nabla \alpha \rangle \\ \alpha \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\partial(\alpha \rho)}{\partial t} + \alpha \text{div}(\rho \vec{v}) \end{aligned}$$

o que nos leva a

$$\rho \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial(\alpha \rho)}{\partial t} + \alpha \text{div}(\rho \vec{v}) + \langle \rho \vec{v}, \nabla \alpha \rangle = \text{div}(\alpha \rho \vec{v})$$

2.2 Conservação do momento

Procuraremos pela relação que nos dá a conservação na direção de algum dos elementos da base que utilizamos. Tomemos a direção da coordenada i . Devemos ter

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v_i dV = \int_V \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} dV$$

Fazendo $\alpha(x, t) = v_i$, temos:

$$\begin{aligned} v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \operatorname{div}(\vec{v} \rho) \\ \rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v_i \vec{v}) \end{aligned}$$

Então, utilizando a equação e continuidade na equação acima,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v_i dV = \int_V \left\{ \rho \frac{dv_i}{dt} - \operatorname{div}(\rho v_i \vec{v}) \right\} dV = \int_V \left\{ \rho \frac{dv_i}{dt} \right\} dV - \int_V \operatorname{div}(\rho v_i \vec{v}) dV \quad (2.3)$$

Observe que $\rho \frac{dv_i}{dt}$ indica a força que age no sistema por unidade de volume na direção da coordenada i . Como a força neste caso se divide entre volumétricas e superficiais (ressalva à integral somente em V) fazemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v_i dV = \int_V \left\{ \rho \frac{dv_i}{dt} + \operatorname{div}(F_{sup}) \right\} dV - \int_V \operatorname{div}(\rho v_i \vec{v}) dV \quad (2.4)$$

A explicação para o uso do divergente da tensão superficial está no uso do teorema da divergência de Gauss.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v_i dV = \int_V \rho \frac{dv_i}{dt} dV + \int_S F_{sup} dS - \int_V \operatorname{div}(\rho v_i \vec{v}) dV$$

Definiremos melhor posteriormente a representação de F_{sup} .

Partindo de 2.3,

$$\int_V \left\{ \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} - \rho \frac{dv_i}{dt} - \operatorname{div}(P_{ij}) + \operatorname{div}(\rho v_i \vec{v}) \right\} dV = 0$$

Como V é arbitrário, então

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v_i \vec{v}) = \rho \frac{dv_i}{dt} + \operatorname{div}(P_{ij})$$

Expandindo o lado esquerdo da equação acima vem que

$$\frac{\partial \varrho v_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho v_i \vec{v}) = \varrho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \langle \varrho \vec{v}, \nabla v_i \rangle + v_i \left\{ \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \vec{v}) \right\},$$

e temos então a nulidade do último termo acima, em virtude da equação de continuidade. Chegamos então a

$$\varrho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \varrho \sum_j v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \varrho v_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho v_i \vec{v}) \quad (2.5)$$

A partir de agora analisaremos, quanto ao significado, as variáveis que entraram na equação 2.1. P_{ij} é a tensão superficial na direção x_j num elemento de superfície (unitário) normal a x_i . Essa força deve estar relacionada com a taxa de aumento da tensão no fluido devida ao seu fluxo. Denotaremos essa quantidade por e_{ij} , explicando posteriormente o por que da dependência apenas em duas das três coordenadas. Daqui em diante usarei o termo tensor diversas vezes. Se houver desconforto sobre o assunto ou nas manipulações feitas, o apêndice B poderá ser esclarecedor.

Qualitativamente, conhecendo e_{ij} conhecemos o parte do comportamento do fluido próximo à unidade de superfície a que se refere a tensão superficial P_{ij} . No estudo da dinâmica dos fluidos assumimos que P_{ij} e e_{ij} se relacionam linearmente¹.

$$P_{ij} = \sigma_{ij} + e_{kl} q_{ij;kl}$$

onde σ_{ij} e e_{kl} são tensores de segunda ordem simétricos e $q_{ij;kl}$ é tensor simétrico de quarta ordem.

Consideramos o fluido como isotrópico (i.e, há invariância em uma coordenada por translação e nas outras duas por rotação).

Sendo os tensores simétricos de quarta ordem do tipo

$$\lambda \delta_{uv} \delta_{xz} + \mu \delta_{ux} \delta_{vz} + \xi \delta_{uz} \delta_{vx},$$

nos valem da simetria rotacional para fazer

$$\lambda \delta_{uv} \delta_{xz} + \mu (\delta_{ux} \delta_{vz} + \delta_{uz} \delta_{vx})$$

Veja que da linearidade de P_{ij} obtemos, na ausência de movimentação interna do fluido, que P_{ij} corresponde integralmente à pressão ambiente; desse modo

$$\sigma_{ij} \propto p$$

¹Isso não é bem uma suposição. Na teoria da elasticidade, admitindo-se continuidade de alguns termos, consegue-se caracterizar estes fatores por um termo linear por meio do *Teorema de Cauchy*.

Como a pressão na direção de uma normal x_j deve estar no sentido de entrada no fluido, então

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$$

Dessas observações e substituindo em 2.3 vem que

$$\begin{aligned} P_{ij} &= -p\delta_{ij} + \left[\lambda\sigma_{ij} \sum_{k,l} (\delta_{kl}e_{kl}) + \mu \sum_{k,l} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) e_{kl} \right] \\ &= -p\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij} + \sum_k e_{kk} + 2\mu e_{ij} \end{aligned}$$

No caso em que temos eixos ortogonais, pela figura desenhada vemos que não tem significado relevante falarmos em e_{ij} quando $i \neq j$. Somando-se a equação anterior em $i = j$ temos então

$$\begin{aligned} -3p &= \sum_{i,j \neq j} P_{ij} = -3p + 3\lambda \sum_k e_{kk} + 2\mu \sum_i e_{ii} \\ \Rightarrow \lambda \left(\sum_k e_{kk} \right) &= -2\mu \left(\sum_i e_{ii} \right) \therefore \lambda = \frac{-2}{3}\mu \end{aligned}$$

onde μ é o coeficiente de viscosidade do fluido. Chegamos então a ²

$$P_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - \frac{2}{3}\mu\delta_{ij} \sum_k e_{kk} \quad (2.6)$$

Usando a segunda lei de Newton, obtemos a seguinte equação de movimento na coordenada i

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \left\{ \sum_j v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\} = \rho X_i + \sum_j \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.7)$$

onde X_i é o i -ésimo componente das forças externas que agem no fluido. Note que não há inconsistência disso com o princípio de conservação do momento total do sistema, pois a força peso no sistema é anulada pela normal que age no líquido. Substituindo P_{ij} em 2.6 na equação 2.7

²No caso de um fluido incompressível temos

$$P_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - \frac{2}{3}\mu\delta_{ij}, \quad \text{pois} \quad \sum_k e_{kk} = \text{div}(\vec{v}) = 0$$

e a equação 2.6 fica simplificada.

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \left\{ \sum_j v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\} = \rho X_i - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div}(\vec{v}) \right]$$

Considerando incompressibilidade, simplificamos a equação acima a

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \left\{ \sum_j v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\} = \rho X_i + \mu \nabla^2 v_i - \frac{\partial p}{\partial x_i},$$

que corresponde à forma original da **equação de Navier-Stokes**.

Observe que da equação acima podemos tirar conclusões relevantes: se desprezarmos o coeficiente de viscosidade e tomarmos o lado esquerdo como a derivada total de \vec{v} em relação a t obtemos a equação de Euler

$$\rho \left\{ \frac{dv_i}{dx_j} \right\} = \rho X_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

Ainda, se tivermos o caso de um líquido estático ($\vec{v} \equiv \vec{0}$) chegamos a

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho X_i$$

Resolvendo esta equação diferencial para $\vec{X} = \vec{g}$ chegamos na lei de Stevin.

A equação de Euler é um caso muito particular e no qual poderíamos ter chegado sob hipóteses mais fortes sobre a tensão superficial e a pressão (mais particularmente, que estes dois vetores fossem múltiplos um do outro). Isso é realmente muito ruim para um modelo onde existe vorticidade/não-linearidades visíveis, pois despreza qualquer tipo de vorticidade criada ou mesmo considera a vorticidade inicial sempre constante.

2.3 Taxa de dissipação viscosa

Multiplicando por v_i (a i -ésima componente do vetor velocidade) e integrando em V vem

$$\frac{1}{2} \int_V \left\{ \rho \frac{\partial(v_i^2)}{\partial t} + \rho \left[\sum_j v_j \frac{\partial v_i^2}{\partial x_j} \right] \right\} dV = \int_V \rho X_i v_i dV + \int_V \sum_j \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} dV \quad (2.8)$$

Queremos, para mensurar a quantidade que buscamos, algum termo que nos dê a energia cinética dentro de V . Para isso o termo $\frac{1}{2} \int_V \rho(v_i)^2 dV$ seria suficiente. Para chegarmos a ele note que, derivando esta integral sob o sinal de integração em t (o que nos daria a taxa de variação da energia cinética no tempo; supõe-se que V não depende de t) e substituindo uma equação adequada, podemos chegar no primeiro termo da equação em 2.8. Chegamos então a

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho (v_i)^2 dV - \frac{1}{2} \int_V (v_i)^2 \frac{\partial \varrho}{\partial t} dV + \frac{1}{2} \int_S \sum_j v_j (v_i)^2 dS_j - \frac{1}{2} \int_V (v_i)^2 \left\{ \sum_j \frac{\partial \varrho v_j}{\partial x_j} \right\} dV$$

No segundo termo da expressão acima aplicamos a equação de continuidade $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\text{div}(\vec{v}\varrho)$. Substituindo:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho (v_i)^2 dV + \frac{1}{2} \int_S \varrho \sum_j v_j (v_i)^2 dS_j \\ & + \underbrace{\left\{ \frac{1}{2} \int_V (v_i)^2 \text{div}(\varrho \vec{v}) dV - \frac{1}{2} \int_V (v_i)^2 \left(\sum_j \frac{\partial \varrho v_j}{\partial x_j} \right) dV \right\}}_{=0} \end{aligned}$$

Chegamos então (na coordenada i) a

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho (v_i)^2 dV = \int_V \varrho v_i X_i dV - \frac{1}{2} \int_S \varrho (v_i)^2 \sum_j v_j dS_j + \int_V \sum_j v_i \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} dV$$

Integrando por partes o último termo da equação acima vem que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho (v_i)^2 dV &= \int_V \varrho v_i X_i dV - \frac{1}{2} \int_S \sum_j \varrho (v_i)^2 v_j dS_j + \int_S \sum_j v_j P_{ij} dV \\ &\quad - \int_V \sum_j \left\{ P_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\} dV \end{aligned}$$

A forma integral desta equação nos dá a taxa de variação da energia cinética contida em um volume V do fluido. À direita, o primeiro termo representa a taxa com que forças externas realizam trabalho em um elemento do fluido; o segundo nos dá a taxa de escoamento de energia por meio de V através de S; o terceiro o trabalho realizado pela tensão P_{ij} na superfície S que limita V e o último, que interpretaremos melhor abaixo, a taxa em que a energia "sai" da região V passando pela superfície S.

Sobre o 4º termo: somando em i o quarto elemento

$$- \sum_i \sum_j P_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = - \sum_{i,j} P_{ij} e_{ij}$$

lembrando que P_{ij} e e_{ij} são tensores simétricos, chegamos a

$$\sum_{i,j} -p \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - \frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \sum_k e_{kk} e_{ij} = \sum_j -p e_{jj} + 2\mu \sum_{i,j} (e_{ij})^2 - \frac{2}{3} \mu \sum_j (e_{jj})^2$$

Analisando o primeiro termo

$$-\sum_j p e_{jj} = -p \sum_j \frac{\partial v_j}{\partial x_j},$$

e pela equação de continuidade $\frac{\partial \rho}{\partial t} + p \sum_j \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \langle v, \nabla \rho \rangle = 0$. Logo,

$$-\sum_j p e_{jj} = \frac{p}{\rho} + \sum_j v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} = \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$$

Dessa forma, a integral em V indica o aumento na energia interna devido a compressão que o fluido possa sofrer (no caso do problema de Rayleigh-Bénard isso seria nulo, pelas hipóteses do nosso sistema)

Da consistência termodinâmica do modelo

$$\phi = 2\mu \sum_{i,j} (e_{ij})^2 - \frac{2}{3}\mu \sum_j (e_{jj})^2$$

representa a taxa de energia dissipada devido a viscosidade (irreversivelmente, segundo a termodinâmica). De forma a mostrar a consistência desta declaração mostraremos que esta é uma forma quadrática que tem todos os seus autovalores positivos, i.e., é uma forma definida positiva (algo análogo a um retrato de fases de um sistema linear de equações diferenciais com todos os auto valores positivos). Para isso observe que expandindo as somatórias de ϕ obtemos

$$\phi = 4\mu \left((e_{12})^2 + (e_{23})^2 + (e_{31})^2 \right) + \frac{2}{3}\mu \sum_{i,j \neq j} (e_{ii} - e_{jj})^2$$

Num fluido incompressível, $\sum_j e_{jj} = \text{div}(\vec{v}) = 0$. Teríamos então

$$\phi = 2\mu \left(\sum_{i,j} (e_{ij})^2 \right)$$

2.4 A equação de condução de calor - lei de conservação de energia

Exceto por constantes aditivas, a energia total por unidade de massa de fluido pode ser dada por

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left\{ \sum_k (v_k)^2 \right\} + c_v T,$$

onde T é a temperatura e c_v o calor específico a volume constante. Considerando as formas em que a energia pode ser ganha ou dissipada, podemos contabilizar essa variação que ocorre

por unidade de tempo num volume V do fluido :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho \varepsilon dV = \boxed{\text{trabalho realizado por } P_{ij} \text{ em } S} + \boxed{\text{trabalho realizado em cada elemento do fluido em } V \text{ por forças exteriores}} +$$

$$+ \boxed{\text{taxa de transferência de calor passando por } S} - \boxed{\text{energia convectada pela fronteira } S \text{ junto com a movimentação da massa}}$$

Ou seja (a partir das interpretações que fizemos na seção 2.3)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho \varepsilon dV = \int_S \sum_i \left\{ v_i \sum_j [P_{ij}] \right\} dS_j + \int_V \varrho v_i X_i dV$$

$$+ \int_S \kappa \sum_j \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) dS_j - \int_S \varrho \varepsilon \sum_j (v_j) dS_j ,$$

onde κ é o coeficiente de condução de calor. Das informações contidas nas quatro seções anteriores vem que podemos reescrever o termo da direita da equação acima

$$\int_S \sum_i \{ v_i \sum_j P_{ij} \} dS_j = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho \sum_i (v_i)^2 dV + \frac{1}{2} \int_S \varrho \{ \sum_i (v_i)^2 \} \{ \sum_j v_j \} dS_j -$$

$$- \int_V \sum_i \varrho v_i X_i dV - \int_V p \{ \sum \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \} dV - \int_V \phi dV$$

Acima poderíamos ainda fazer

$$\int_S \kappa \sum_j \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) dS_j = \int_V \text{div} \left\{ \kappa \sum_j \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \right\} dV ,$$

em virtude do teorema da divergência de Gauss. Ainda, pela definição de ε

$$\int_V \varrho \varepsilon \left\{ \sum_j v_j \right\} dS_j = \int_S \varrho \left\{ \frac{1}{2} \sum_k (v_k)^2 + c_v T \sum_j v_j \right\} dS_j =$$

$$= \frac{1}{2} \int_S \varrho \left\{ \sum_k (v_k)^2 \right\} \left\{ \sum_j v_j \right\} dS_j - \int_V \sum_j \frac{\partial (\varrho v_j c_v T)}{\partial x_j} dV$$

Combinando as equações anteriores, chegamos a

$$\int_V \frac{\partial \varrho c_v T}{\partial t} dV = \int_V \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) dV - \int_V p \left(\sum_j \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) dV + \int_V \phi dV$$

$$- \int_V \sum_j \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_j c_v T) dV$$

Como V é arbitrário,

$$\frac{\partial \rho c_v T}{\partial t} = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - p \left(\sum_j \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) + \phi - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_j c_v T)$$

Valendo-nos da equação de continuidade, simplificamos a equação acima

$$\rho \frac{\partial c_v T}{\partial t} + \rho \sum_j v_j \left\{ \frac{\partial (c_v T)}{\partial x_j} \right\} = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\kappa \sum_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \phi - p \left(\sum_j \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) \quad (2.9)$$

3 *Obtendo as aproximações de Boussinesq*

As aproximações de Boussinesq vêm da relação entre os coeficientes das equações obtidas no capítulo anterior com o problema estudado; analisando as equações da hidrodinâmica, podemos considerar alguns de seus termos como constantes e outros podemos desprezar. Este capítulo é inteiramente dedicado a este processo. Depois disso, descreveremos o fenômeno a partir de um caso onde o fluido estático é então perturbado. O interessante do método é que ele segue logicamente a ordem em que os fatos se dão experimentalmente: um fluido estático, fornece-se calor, perturba-se o gradiente de temperatura e assim em diante até se chegar nas células de Rayleigh-Bénard.

3.1 Das constantes e variáveis desprezadas

Nas equações que obtivemos no capítulo 2, devido à baixa expansão volumétrica do fluido pelo aquecimento (α é um termo entre 10^{-4} e 10^{-3}) consideraremos tanto α quanto outros termos ligados a ele, como c_V , μ e κ constantes. Embora com isso teremos simplificação nas equações, que é o que pretendemos, não devemos ser levianos: alguns termos não podem ser considerados constantes ou mesmo desprezados. Por exemplo na equação de Navier Stokes: o termo ρX_i não terá sua variação $\delta\rho X_i$ desprezada, pois fazendo uma aproximação de primeira ordem em ρ

$$\rho = \rho_0 + \rho_0\alpha(T_0 - T) \quad , \text{ onde } \alpha > 0 \quad (3.1)$$

$$\Rightarrow \delta\rho = \rho_0\alpha(T_0 - T) \quad (3.2)$$

O termo $\delta\rho X_i$ seria então $\approx \rho_0\alpha(\Delta T)|X|$, algo que não sabemos a intensidade, pois não conhecemos X ainda. Por considerarmos a densidade como constante na maioria dos termos obtemos imediatamente da equação de continuidade a incompressibilidade do fluido, ou seja

$$\text{div}(\vec{u}) = 0$$

A equação de Navier- Stokes então fica

$$\varrho_0 \frac{Du_i}{Dt} = \varrho X_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} e_{ij}$$

Dividindo tudo ϱ_0 e considerando $div(\vec{u}) = 0$ e o operador $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_j u_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, temos

$$\frac{Du_i}{Dt} = \left(1 + \frac{\delta \varrho}{\varrho_0}\right) \varrho X_i - \frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \underbrace{\frac{\mu}{\varrho_0}}_{\delta \varrho} \nabla^2 u_i \quad (3.3)$$

Olhando agora para a equação 2.8 e nos valendo das considerações anteriores, temos

$$\varrho_0 c_V \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + \phi ,$$

lembrando que $\phi = 2\mu \sum_{i,j} (e_{ij})^2$ no caso incompressível. Mostramos no apêndice C que ϕ pode ser desprezada, chegando então a

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{k}{\underbrace{\varrho_0 c_V}_{\mathcal{K}}} \nabla^2 T , \quad (3.4)$$

onde \mathcal{K} é o coeficiente de condutividade termométrica. As equações 3.2, 3.3, 3.4, o caráter solenoidal do campo de velocidades formam o que chamaremos de *aproximações de Boussinesq*.

3.2 Equações de perturbação

Como dito no começo do capítulo, queremos partir do fluido em repouso. Matematicamente, queremos

$$\vec{u} = \vec{0} \quad \text{e} \quad T = T(\lambda_i x_i) \quad \text{onde} \quad \lambda = (0, 0, 1)$$

A equação de Navier-Stokes fica simplificada

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \varrho X_i = -g \varrho \lambda_i \quad (3.5)$$

Da hipótese de repouso e da equação 3.4

$$\nabla^2 T = 0 ,$$

cuja solução é $T = T_o + \langle c, x \rangle$ onde c é um vetor constante relacionado como gradiente de temperatura, cuja extratificação aliada ao fato que $T_{topo} < T_{fundo}$ nos leva a considerar $c = -\beta \lambda$

Logo,

$$T = T_o - \beta \langle \lambda, x \rangle$$

Agora, substituindo em 3.1 vem que

$$\varrho = \varrho_0(1 + \alpha\beta\langle\lambda, x\rangle)$$

Na verdade aqui estamos supondo que em planos paralelos à base a temperatura é homogênea (temperatura extratificada). Da equação simplificada de Navier Stokes chegamos a

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = -g\lambda_i\varrho_0(1 + \alpha\beta\langle\lambda, x\rangle) \quad (3.6)$$

Como $i = 1, 2, 3$ temos em 3.6 três equações diferenciais ordinárias, cuja solução é (aqui nos valem da notação de Einstein, que se faz bem útil as vezes)

$$p - p_0 = -g\lambda_i\varrho_0x_i - \frac{1}{2}g\varrho_0\alpha\beta \left(\sum_j \delta_{ij}x_ix_j \right),$$

e chegamos em

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \varrho X_i = -g\varrho\lambda_i \quad (3.7)$$

se considerarmos apenas forças gravitacionais. Observe que a suposição de extratificação implica em extratificação da pressão segundo a equação anterior.

Seguiremos perturbando as equações obtidas de forma aparentemente arbitrária, embora no capítulo 4, quando estivermos falando de condições de contorno, procuraremos adequá-la de forma a satisfazer algumas condições. A base de tudo é perturbarmos o gradiente de temperatura (de fato, é o que fazemos experimentalmente ao fornecer calor). Chamarei de \tilde{T} a temperatura perturbada

$$\tilde{T} = T_0 - \beta\langle\lambda, x\rangle + \theta$$

Ignorando termos de ordem maior ou igual a dois em 3.3, substituímos a equação anterior¹

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \beta\langle\lambda, \vec{u}\rangle + \kappa\nabla^2\theta \quad (3.8)$$

Considerando a equação de Navier Stokes, desprezamos sempre os termos u_i quando multiplicados por termos da ordem de α , δ e ϱ . Em primeira ordem, teríamos

$$(\varrho_0 + \delta\varrho)\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial(p_0 + \delta p)}{\partial x_i} + \mu\nabla^2 u_i + (\varrho_0 + \delta\varrho)g\lambda_i$$

¹Poderíamos ter chegado a 3.8 e ao divergente nulo somente utilizando as equações hidrodinâmicas no caso estático e considerando 3.6 como

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x_l} = \lambda_l\varrho_0\alpha\beta$$

Chegaríamos então no caráter solenoidal do campo de velocidades, dado que α é pequeno o suficiente. Da mesma forma poderíamos ter desprezado ϕ imediatamente, por ele ser de segunda ordem em cada u_i .

O que nos dá, em virtude das asserções anteriores

$$\varrho_0 \frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial p_0}{\partial x_i} - \frac{\partial \delta p}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 u_i - g \varrho_0 \lambda_i - g \delta \varrho \lambda_i \quad (3.9)$$

Mas por 3.5, $\frac{\partial p_0}{\partial x_i} = -g \varrho_0 \lambda_i$. Como a mudança na densidade causada por θ é dada por

$$\delta \varrho = -\alpha \varrho \theta = -\alpha \varrho_0 (1 + \alpha (\beta \langle \lambda, x \rangle)) \theta$$

e α é da ordem de $10^{-3} - 10^{-4}$ podemos desprezar os termos de ordem 2 em α . Logo,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\delta p}{\varrho_0} \right) + g \alpha \theta \lambda_i + \mu \nabla^2 u_i \quad (3.10)$$

3.2.1 Eliminando o termo $\frac{\delta p}{\varrho_0}$ na equação 3.10

É comum, e, problemas de hidrodinâmica eliminar a componente de pressão. Mesmo na equação de Navier-Stokes é possível, ao colocarmos condições espaciais de periodicidade. Usualmente tais substituições acabam tocando em problemas de existência e unicidade em edp's, fato que não precisaremos utilizar aqui. Seja a i -ésima componente da vorticidade, dada por

$$\omega_i = \text{curl}_k \vec{u} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \Rightarrow \frac{\partial \omega}{\partial t} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial u_k}{\partial t} \right\}$$

Da equação 3.8 aplicada à equação acima, vem que

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{-1}{\varrho_0} \frac{\partial (\delta p)}{\partial x_k} + \frac{\mu}{\varrho_0} \nabla^2 u_k + g \alpha \theta \lambda_k \right\}$$

Dos termos à direita, o primeiro não depende de i , no segundo o operador ∇^2 independe de i, j, k e assim podemos permutá-lo com o rotacional; no terceiro, apenas θ depende de x

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\mu}{\varrho_0} \nabla^2 \left\{ \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right\} + g \alpha \epsilon_{ijk} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \lambda_k$$

o que nos dá

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = g \alpha \epsilon_{ijk} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \lambda_k + \nu \nabla^2 \omega_i, \quad (3.11)$$

e aplicando o rotacional novamente

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial t} \right\} &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \epsilon_{ijk} \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j} \right\} = g\alpha \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_l \partial x_j} \lambda_m \\ &\quad + \nu \nabla^2 \left\{ \epsilon_{ijk} \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j} \right\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Lembrando da identidade $\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial \omega_k}{\partial t} \right\} &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \epsilon_{ijk} \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j} \right\} = \\ &= g\alpha \delta_{il} \delta_{jm} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_l \partial x_j} \lambda_m - g\alpha \delta_{im} \delta_{jl} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_l \partial x_j} \lambda_m + \nu \nabla^2 \left\{ \epsilon_{ijk} \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j} \right\}, \end{aligned}$$

onde

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j} = \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_j \partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_j} \overbrace{\text{div}(\vec{u})}^{=0} - \nabla^2 u_i$$

$$\text{e } \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_l \partial x_j} \lambda_m = \lambda_j \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_l} - \lambda_i \nabla^2 \theta$$

Desse modo, 3.12 se torna

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ \nabla^2 u_i \} = g\alpha \left(\lambda_i \nabla^2 \theta - \lambda_j \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \nu \nabla^4 u_i$$

Definamos $\zeta = \langle \lambda, \omega \rangle = \lambda_i \omega_i$. Multiplicando 3.9 por

λ_i , obtemos

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = g\alpha \epsilon_{ijk} \frac{\theta}{x_j} \lambda_k \lambda_i + \nu \nabla^2 \zeta$$

Como $\lambda_i \lambda_j = \delta_{ij}$, e $\epsilon_{ijk} = 0$ se dois dos seus índices são iguais, então

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \nu \nabla^2 \zeta \quad (3.13)$$

Definamos agora $\vartheta = \lambda_i u_i$, e usando o mesmo procedimento, multiplicamos 3.2.1 por λ_i , obtendo

$$\frac{\nabla^2 \vartheta}{\partial t} = g\alpha \left(\underbrace{\nabla^2 \theta - \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}}_{\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}} \right) + \nu \nabla^4 \vartheta \quad (3.14)$$

Ainda, reescrevemos 3.8

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \beta \vartheta + \kappa \nabla^2 \theta \quad (3.15)$$

A partir daqui procuraremos delimitar as condições de contorno e procuraremos soluções das equações 3.13 , 3.14 e 3.15.

4 Condições de contorno

Definimos inicialmente $\bar{S} := \{(x,y,z) \mid z=0 \text{ ou } z=d\}$. Para sermos coerentes com os dados fornecidos no problema de Rayleigh-Benard (ou seja, temperatura no bordo etc) as asserções seguintes são necessárias:

- $\theta = \underbrace{\theta(x,y,z)}_{\vec{q}} = 0 \quad \vec{q} \in \bar{S}$
- $\omega = \omega(\vec{q}) = 0 \quad \vec{q} \in \bar{S}$
- Não há componentes normais de velocidade a \bar{S}

Do capítulo anterior, tiramos as equações que queremos resolver

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \nu \nabla^2 \zeta \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \nabla^2 \omega}{\partial t} = g\alpha \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) + \nu \nabla^4 \omega \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \beta \omega + \kappa \nabla^2 \theta \quad (4.3)$$

Vamos dividir o problema em dois, conforme a "regularidade" da fronteira (mais adiante no entanto trataremos de três problemas associados ao tipo de fronteira, pois nos preocuparemos com o caso misto também).

4.1 Superfícies rígidas (nas quais não há deslizamento)

O não deslizamento em \bar{S} implica que não só $\omega = 0$ mas também $u = v = 0$ em \bar{S} . Das aproximações de Boussinesq,

$$\text{div}(\vec{u}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, z \in \Omega$$

Devido a estas condições, vem que $\frac{\partial \omega}{\partial z} = 0$ em \bar{S} .

Lembrando que $\zeta = \langle \lambda, \omega \rangle$, onde ω é a vorticidade, dada por

$$\omega = \nabla x(\vec{u}) = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

então,

$$\zeta = \langle \lambda, \omega \rangle = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.4)$$

Assim, $\zeta = 0$ em \bar{S} .

4.2 Superfície livre (sem tensão tangencial superficial)

Não há interação do fluido com alguma placa, como no caso anterior. Desse modo, P_{13} e P_{23} são nulos em \bar{S} (do capítulo 2, onde $P_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - \frac{2}{3}\mu \text{div}(\vec{u})$).

então

$$0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad \text{e} \quad 0 = 2\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

Como $w = 0$ em \bar{S} , então obtemos das equações acima que

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (4.5)$$

Derivando estas equações em z , e aplicando em 4.4, vem que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad \text{em } \bar{S} \Rightarrow \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 \quad \text{em } \bar{S} \quad (4.6)$$

4.3 Sobre análise em termos de auto funções

4.3.1 Oque significa esta análise?

Primeiramente, façamos uma observação: oque os matemáticos chamam de auto funções os físicos costumam chamar de modos normais. Analisarmos um sistema em termo dos modos normais significa que utilizaremos autofunções do sistema para perturbá-lo. Como o conceito de estabilidade envolve estabilidade em qualquer amplitude de perturbação, faremos uma sobreposição das perturbações simples, de forma a obtê-las e assim chegarmos à análise desejada. Se descrevermos um sistema do qual o vetor (X_1, \dots, X_n) indica parâmetros, e perturbarmos um deles, poderemos ter um retorno ao estado pré-perturbação de forma rápida, oscilações ao redor do antigo estado e assim nunca voltamos a ele ou mesmo sairmos do estado anterior de forma cada vez mais rápida. Procuraremos então por três tipos de estabilidade

$$\text{Estabilidade} \quad - > \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{atenuado aperiodicamente} \\ \text{de estabilidade neutra} \\ \text{atenuado com amplitudes decrescentes} \end{array} \right.$$

No caso aperiódico, a transição estável-instável se dá por um estado marginal que exhibe um padrão estacionário de movimento. No caso de crescimento, a transição se dá um estado marginal exibindo comportamento oscilatório com uma certa frequência característica definida. Se ao se observar instabilidade um padrão estacionário prevalece, então o princípio da troca de estabilidades é válido e a instabilidade se dá como convecção celular estacionária, ou fluxo secundário.

Podemos classificar estados marginais de 2 formas : estacionários e oscilatórios. No caso não dissipativo a situação é diferente. Neste caso os estados estáveis, quando perturbados executam oscilações não-limitadas com frequência característica, enquanto em estados instáveis pequenas perturbações iniciais tendem a crescer exponencialmente com o tempo; os estados marginais são casos estacionários.

4.3.2 A análise em termo de modos normais: como é o tratamento usual de um problema de estabilidade?

A partir de um fluxo estacionário, descrevemos matematicamente as perturbações sistema (em cada um dos seus parâmetros) e linearizamos. Observe que esta receita parece bastante simples e óbvia, porém ela esconde conceitos muito interessantes. Quando fazemos a linearização não estamos só perdendo termos da série de Taylor da nossa perturbação, mas sim restringindo-nos a estudar perturbações infinitesimais, o que nos remete à teoria da estabilidade linear. Em vista desse esclarecimento, um sistema será dito estável se for estável em cada um de seus parâmetros de definição com respeito a perturbações infinitesimais. Analisamos a reação do sistema a todos os distúrbios possíveis (isso é extremamente importante; para obtermos sistema de Lorenz se faz isso). Na prática, fazemos isso expressando um distúrbio arbitrário por meio de uma superposição de certos modos normais básicos possíveis e verificamos a estabilidade do sistema a cada um. O exemplo típico disso que descrevemos aqui é o sistema que abordamos: um fluido entre duas placas que sofre convecção vertical e que assim só depende da coordenada z ; neste caso podemos considerar perturbações nos planos paralelos às placas como ondas bi-dimensionais periódicas no plano x, y . Desse modo, se $A(x, y, z, t)$ representa a amplitude de uma perturbação temos que

$$A(x,y,z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y A_k(z, t) e^{(k_x, k_y) \cdot (x, y)}$$

onde $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ é o número de onda.

Das hipóteses sobre extratificação, consideraremos as perturbações em planos paralelos às superfícies de fronteira, ou seja, a perturbação terá dependência em x, y e t , da forma

$$e^{[i(k_x x + k_y y) + pt]},$$

onde p é constante (que pode ser complexa).

Seguindo estas considerações, analisaremos as perturbações θ , ω e ζ sob a idéia de separação de variáveis, que aqui mais do que facilita operações algébricas, pois em parte também separa a dinâmica em z da do plano x, y

$$\omega = W(z)e^{[i(k_x x + k_y y) + pt]}$$

$$\theta = \Theta(z)e^{[i(k_x x + k_y y) + pt]}$$

$$\zeta = Z(z)e^{[i(k_x x + k_y y) + pt]}$$

Como, de certa forma, ω , θ e ζ são auto funções de derivadas em x, y e t , tais operações ficam "algebrizadas", artifício utilizado por Reid e Harris no seu artigo "Some further results on the Bénard problem"

$$\frac{\partial}{\partial t} = p \quad \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} = -k^2 \quad e \quad \nabla = \frac{d^2}{dz^2} - k^2$$

Podemos então reescrever as equações 4.1, 4.2 e 4.3 como

$$pZ = \nu \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) Z, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) W = p \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) W = -K^2 g \alpha \theta + \nu \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) W, \quad (4.8)$$

$$p\theta = \beta W + \kappa \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \theta \quad (4.9)$$

Em virtude das condições de contorno descritas no começo deste capítulo deveremos ter

$$\theta = W = 0 \quad \text{para } z \text{ em } \bar{S},$$

e então, procedendo da mesma forma que antes, dividimos em casos

4.3.3 Fronteira rígida

$$\frac{dW}{dz} = 0 \quad \text{em } \bar{S} \text{ e } Z = 0 \text{ em } \bar{S} \quad (4.10)$$

4.3.4 Fronteira livre

$$\frac{dZ}{dz} = 0 = \frac{d^2W}{dz^2} \quad \text{em } \bar{S} \quad (4.11)$$

Como até agora ficamos dependendo de parâmetros que concernem à geometria do sistema (d, k etc) iremos adimensionalizar o nosso sistema, ou seja, trabalharemos com constantes adimensionais que "normalizam" o nosso sistema

$$[L] = d \quad , \quad [T] = \frac{d^2}{\nu} \quad ,$$

e definiremos $a = kd$, $\sigma = p \frac{d^2}{\nu}$ e $S := \{(x,y,z) \mid z=0 \text{ ou } z=1\}$.

onde a é o novo número de onda e σ a constante de unidade tempo nessas novas unidades, Note que x , y e z estão na nova unidade de comprimento d .

$$D = d \frac{d}{dz} \quad \text{de } \mathcal{P} \quad \left(= \frac{\nu}{\kappa} \quad \text{é o número de Prandtl} \right)$$

Assim, reescrevemos 4.8 e 4.9. Em 4.8, multiplicando por d^4 obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 p}{\nu} (D^2 - k^2 d^2) W &= -\frac{k^2 d^4}{\nu} g \alpha \theta + \left(\frac{\nu}{\nu} \right) (d^2 - a^2) W \\ \Rightarrow (D^2 - a^2)(D^2 - a^2 - \sigma) W &= \left(\frac{g \alpha d^2}{\nu} \right) a^2 \theta \end{aligned} \quad (4.12)$$

Em 4.9, multiplicando por d^2 , temos

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{p d^2}{\kappa}}_{\frac{\nu}{\kappa} \left(\frac{p d^2}{\nu} \right)} \theta &= \frac{\beta d^2}{\kappa} W + \frac{\kappa}{\kappa} (D^2 - a^2) \theta \\ (D^2 - a^2 - \mathcal{P} \sigma) \theta &= - \left(\frac{\beta \alpha^2}{\kappa} \right) W \end{aligned} \quad (4.13)$$

As "novas" condições de contorno devidas à adimensionalização correspondem a

- $\theta = 0 = W$ em $z \in \bar{S}$
- $DW = 0$ para $z \in \bar{S}$ (superfície rígida)

ou

- $Dw = 0$ para $z=0$
- $D^2W = 0$ para $z=1$ (superfície rígida embaixo e livre em cima)

De 4.12 e 4.13 vem que podemos eliminar o termo θ , obtendo então

$$(D^2 - a^2)(D^2 - a^2 - \sigma)(D^2 - a^2 - \mathcal{P}\sigma)W = - \underbrace{\left(\frac{g\alpha\beta}{\kappa\nu} d^4 \right)}_{\mathfrak{R}}, \quad (4.14)$$

onde \mathfrak{R} é o número de Rayleigh. Para θ procedemos de forma análoga, chegando à uma equação idêntica à anterior

5 *O princípio da troca de estabilidades*

Veremos agora que para o problema em discussão vale o princípio da troca de estabilidades, ou seja, os auto valores σ são reais e os estados marginais do sistema caracterizados por $\sigma = 0$

Para facilitar nossa notação utilizaremos as seguintes definições

$$G = (D^2 - a^2)W \quad \text{e} \quad F = (D^2 - a^2)(D^2 - a^2 - \sigma)W = (D^2 - a^2 - \sigma)G$$

Observe que pudemos fazer a troca de ordem dos operadores por que eles comutam. Da equação acima e de 4.3.2, a condição $\theta = 0$ em S é equivalente a

$$F = 0 \quad \text{em} \quad S \tag{5.1}$$

Em termos de F , a equação satisfeita por W é

$$(D^2 - a^2 - \mathcal{P}\sigma)F = -\Re a^2 W \tag{5.2}$$

Provaremos que σ é real para todo número de Rayleigh \Re positivo. A idéia é nos utilizarmos das propriedades dos números complexos para chegar em igualdades que envolvam o parâmetro que precisamos Multiplicando 5.2 acima por \bar{F} (o conjugado complexo de F) e integrando em z , temos

$$\int_0^1 \bar{F}(D^2 - a^2 - (P)\sigma)F dz = \Re a^2 \int_0^1 \bar{F}W dz$$

e integrando por partes ¹

$$\int_0^1 \bar{F}D^2 F dz = - \int_0^1 |DF|^2 dz$$

devido às condições de contorno em 5.1 . Desse modo, chegamos em

¹Lembrando que o operador D não corresponde à derivação usual, por que $\int_a^b DW = d[W(b) - W(a)] \neq W(b) - W(a)$; prosseguiremos como no cálculo convencional sob esta ressalva.

$$\int_0^1 \{|DF|^2 + (a^2 + \mathcal{P}\sigma)|F|^2\} z = \Re a^2 \int_0^1 W \bar{F} dz \quad (5.3)$$

Agora,

$$\int_0^1 W \bar{F} dz = \int_0^1 W(D^2 - a^2 - \sigma^2)\bar{G} dz = \int_0^1 W D^2 \bar{G} dz - (a^2 + \bar{\sigma}) \int_0^1 W \bar{G} dz$$

Note que

$$\int_0^1 W D^2 \bar{G} dz = W D \bar{G} \Big|_0^1 - \int_0^1 D W D \bar{G} dz = \int_0^1 \bar{G} D^2 W dz ,$$

pois $W = 0$ em S e se valendo de $DW = 0$ em S (ou $\bar{G} = (D^2 - a^2)\bar{W} = 0$, dependendo de qual tipo de fronteira falamos).

Chegamos assim a

$$\int_0^1 W \bar{F} dz = \int_0^1 \bar{G} \{(D^2 - a^2)W - \bar{\sigma}W\} dz = \int_0^1 |G|^2 dz - \bar{\sigma} \int_0^1 W(D^2 - a^2)\bar{W} dz , \quad (5.4)$$

e novamente, integrando por partes,

$$\int_0^1 W D^2 \bar{W} dz - \int_0^1 |DW|^2 dz \quad (5.5)$$

Combinando-se 5.3, 5.4 e 5.5 obtemos

$$\int_0^1 \{|DF|^2 + (a^2 + \mathcal{P}\sigma)|F|^2\} dz - \Re a^2 \int_0^1 \{|G|^2 + \bar{\sigma}[|DW|^2 + a^2|W|^2]\} dz = 0$$

Vemos então na equação acima que sua partes real e imaginária devem se anular, oque, para a parte imaginária \Im implica em

$$\Im(\sigma) \underbrace{\left\{ \mathcal{P} \int_0^1 |F|^2 dz + \Re a^2 \int_0^1 [|DW|^2 + a^2|W|^2] dz \right\}}_{\text{parte definida positiva para } \Re > 0} = 0$$

Logo, $\Im\sigma = 0$.

Isso define $\sigma \in \mathbb{R}$ para $\Re > 0$, e assim o princípio da troca de estabilidades é válido para o problema.

6 *As equações que governam o estado marginal e a redução a um problema de valor característico*

Vimos que σ é real para números de Rayleigh positivos (i.e., para todos gradientes de temperatura adversos). Desse modo, a transição de estabilidade para instabilidade se dá via um estado estacionário. As equações que governam o estado marginal são obtidas portanto, para $\sigma = 0$ nas equações que nos são relevantes. Temos então, das equações do capítulo anterior

$$(D^2 - a^2)^2 W = \left(\frac{g\alpha d^2}{\nu} \right) a^2 \theta \quad (6.1)$$

$$(D^2 - a^2)\theta = - \left(\frac{\beta d^2}{\kappa} \right) W \quad (6.2)$$

e podemos, de forma análoga ao que fizemos antes, eliminar θ das equações anteriores

$$(D^2 - a^2)^3 W = -\Re a^2 W \quad (6.3)$$

As condições de contorno são

- $W = 0, \quad (D^2 - a^2)^2 W = 0$ em $z \in S$, acrescido de
- $DW = 0$ em $z \in S$ (superfície rígida) ou
- $D^2 W = 0$ em $z \in S$ (superfície livre)

Alternativamente, podemos eliminar W das equações 6.1 e 6.2, obtendo assim

$$(D^2 - a^2)^3 \theta = -\Re a^2 \theta \quad (6.4)$$

com condições de contorno

- $\theta = 0, \quad (D^2 - a^2)\theta = 0$ em $z \in S$, acrescido de
- $D(D^2 - a^2)\theta = 0$ em $z \in S$ (superfície rígida) ou
- $D^2(D^2 - a^2)\theta = 0$ em $z \in S$ (superfície livre)

Nos casos 6.3 e 6.4 temos dois sistemas de edo's de ordem 6 com 6 condições de contorno (três em $z=0$ e três em $z=1$). Em vista da dificuldade de se resolver isso (no caso não trivial) conseguimos, para valores particulares de \Re (e de a^2) obter uma solução não nula, que é o que queremos. Temos assim um problema de valores característicos pra \Re .

A partir daqui a obtenção da solução para o problema de estabilidade é determinada (dado a^2) pelo menor valor característico do número de Rayleigh \Re ; o nosso estudo depende de encontrarmos este número crítico, no qual a instabilidade se manifesta¹.

6.1 Os princípios variacionais

Podemos obter a solução dos problemas de valor característico por meio de métodos variacionais.

Analisemos o primeiro sistema em W . Considere

$$\begin{aligned} F &= (D^2 - a^2)^2 W = (D^2 - a^2)G \\ (D^2 - a^2)F &= -\Re a^2 W \end{aligned} \quad (6.5)$$

e as condições de contorno são

$$\begin{aligned} W &= 0 \text{ e } F=0 \text{ para } z \in \bar{S} \\ \text{acrescido de } DW &= 0 \text{ em } z \in S \text{ (superfície rígida)} \\ \text{ou} \\ D^2 W &= 0 \text{ em } z \in S \text{ (superfície livre)} \end{aligned}$$

Seja \Re_j um valor característico do problema e distingüamos a solução para diferentes valores de \Re pelo seu índice. Multiplicando a equação em 6.5 por F_i (relacionada portanto a um valor característico \Re_i) e integrando na dimensão z temos

$$\int_0^1 F_i (D^2 - a^2) F_j dz - \Re_j a^2 \int_0^1 W_j \overbrace{(D^2 - a^2) G_i}^{F_i} dz$$

Integrando por partes, chegamos a

$$\int_0^1 F_i (D^2 - a^2) F_j dz = - \int_0^1 \{ DF_i F_j + a^2 F_i F_j \} dz$$

Logo,

$$\int_0^1 (DF_i DF_j + a^2 F_i F_j) dz = \Re_j a^2 \int_0^1 G_i G_j dz, \quad (6.6)$$

e trocando i por j na última equação

$$\int_0^1 (DF_j DF_i + a^2 F_j F_i) dz = \Re_i a^2 \int_0^1 G_j G_i dz \quad (6.7)$$

¹E como sabemos que a instabilidade ocorre? Veremos na seção 6.2 que há uma conexão deste número crítico com a parte física do problema, relacionada à termodinâmica.

Das equações 6.6 e 6.7 , como $\mathfrak{R}_i \neq \mathfrak{R}_j$ para $i \neq j$, vemos que $\int_0^1 G_i G_j dz \neq 0$ se $i \neq j$, oque mostra que

as funções G_i relacionadas a diferentes valores característicos formam um conjunto ortogonal.

Quando $i = j$, a equação 6.6 fica

$$\int_0^1 [(DF_i)^2 + a^2(F_i)^2] dz = \mathfrak{R}_i a^2 \int_0^1 (G_i)^2 dz$$

o que expressa \mathfrak{R}_i em termos de uma razão de elementos positivos. Devemos então mostrar que a fórmula

$$\mathfrak{R} = \frac{\int_0^1 [(DF)^2 + a^2(F)^2] dz}{a^2 \int_0^1 (G)^2 dz} \quad (6.8)$$

possui uma propriedade estacionária quando as funções em 6.8 são avaliadas em termo de funções características que satisfaçam as equações anteriores. Para provar a propriedade estacionária, consideremos \mathfrak{R} como em 6.3, em termos de uma função W que é arbitrária exceto pela necessidade (à parte a limitação e a continuidade) que satisfaça as condições de contorno. Seja $\delta\mathfrak{R}$ uma mudança em \mathfrak{R} quando W é sujeita a uma variação δW compatível com as condições de contorno, ou seja

$$\delta W = \delta F = 0 \text{ em S ou D } \delta W = D^2 \delta W = 0 \text{ em S (dependendo o tipo de fronteira)}$$

Assim ,partindo de 6.8,

$$\delta\mathfrak{R} = \frac{\delta I_1}{a^2 I_2} - \frac{I_1}{a^2 (I_2)^2} \delta I_2 = \frac{1}{a^2 I_2} \left(\delta I_1 - \frac{I_1}{I_2} \delta I_2 \right)$$

onde

$$\delta I_1 = 2 \int_0^1 [DF.D(\delta F) + a^2 F(\delta F)] dz e \delta I_2 = 2 \int_0^1 [(D^2 - a^2)W][(D^2 - a^2)\delta W] dz \quad (6.9)$$

Trabalhemos nas equações em 12

$$\delta I_1 = 2DF(\delta F) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 D^2 F \delta F dz + 2a^2 \int_0^1 F(\delta F) dz = -2 \int_0^1 \delta F (D^2 - a^2) F dz \quad (6.10)$$

e

$$\delta I_2 = 2 \int_0^1 W(D^2 - a^2)\delta F dz = 2 \int_0^1 W(\delta F) dz \quad (6.11)$$

Assim,

$$\delta\mathfrak{R} = -\frac{2}{a^2 I_2} \int_0^1 \delta F (D^2 - a^2) F + \mathfrak{R} a^2 W dz$$

Mas se $\delta\mathfrak{R} = 0$ para qualquer δF (que satisfaça as condições de contorno) então , por um lema do cálculo de variações vem que

$$(D^2 - a^2)F + \Re a^2 W = 0$$

Logo, F é uma solução do problema para um valor característico \Re .

6.2 O significado físico da parte variacional do problema

Não teria significa algum mostrar que temos um mínimo de um funcional se não pudesse ser mostrado relação do valor em \Re com a parte física do experimento. De fato, sob o uso da termodinâmica podemos demonstrar que \Re se relaciona à energia dissipada por viscosidade e a energia interna necessária ao movimento de ascensão do fluido (que depende assim da gravidade). A instabilidade ocorre quando se obtém um gradiente de temperatura mínimo para que haja um equilíbrio entre estas duas energias.

Devemos mostrar agora que o menor valor característico de \Re é, além de um extremo, um mínimo do funcional. Normalizando as funções G_i , vem que

$$\int_0^1 G_i G_j dz = \delta_{ij}$$

Considere $G = (D^2 - a^2)W$, para W arbitrário, contínua e limitada, satisfazendo as condições de contorno o problema. Admitiremos que G possa ser expandida numa série de elementos de G_i ².

$$G = \sum_{j=1}^{\infty} A_j G_j \quad \text{onde } A_j = \int_0^1 G G_j dz$$

Podemos prosseguir fazendo

$$1 = \int_0^1 G^2 dz = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_j A_k \int_0^1 G_i G_j dz = \sum_{j=1}^{\infty} A_j^2$$

Da expressão de G vem que

$$W = \sum_{j=1}^{\infty} A_j W_j$$

e

$$F = \sum_{j=1}^{\infty} A_j (D^2 - a^2)^2 W_j = -a^2 \sum_{j=1}^{\infty} A_j W_j \quad (6.12)$$

²Essa hipótese é bem forte, ainda mais se não soubermos se o sistema G_i é completo. Consideraremos isso um artifício formal para resolver o problema.

Da expressão em 6.5 segue que

$$(D^2 - a^2)F = \sum_{j=1}^{\infty} A_j (D^2 - a^2)^3 W_j = -a^2 \sum_{j=1}^{\infty} A_j \mathfrak{R}_j W_j$$

Multiplicando esta equação por F e integrando em z obtemos

$$\int_0^1 F(D^2 - a^2)F dz = -a^2 \sum_{j=1}^{\infty} A_j \mathfrak{R}_j \int_0^1 W_j F dz$$

e por 6.12,

$$\begin{aligned} -a^2 \sum_{j=1}^{\infty} A_j \mathfrak{R}_j \int_0^1 W_j F dz &= -a^2 \sum_{j=1}^{\infty} A_j \mathfrak{R}_j \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} A_k \int_0^1 W_j (D^2 - a^2)^2 W_k dz \right\} = \\ &= -a^2 \sum_{j=1}^{\infty} \mathfrak{R}_j \sum_{k=1}^{\infty} A_j A_k \mathfrak{R}_j \int_0^1 (D^2 - a^2) W_j (D^2 - a^2) W_k dz \end{aligned}$$

A partir daqui assumiremos que o conjuntos dos \mathfrak{R}_j assume um valor mínimo positivo em algum \mathfrak{R}_i . Sem perda de generalidade, tomamos \mathfrak{R}_1 como o mínimo. Lembrando da condição de normalidade dos coeficientes A_j podemos fazer na equação anterior

$$\begin{aligned} -a^2 \sum_{j=1}^{\infty} A_j \mathfrak{R}_j \int_0^1 W_j F dz &= -a^2 \sum_{j=1}^{\infty} A_j \mathfrak{R}_j \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} A_k \int_0^1 W_j (D^2 - a^2)^2 W_k dz \right\} = \\ &= -a^2 \sum_{j=1}^{\infty} \mathfrak{R}_j \sum_{k=1}^{\infty} A_j A_k \mathfrak{R}_j \int_0^1 (D^2 - a^2) W_j (D^2 - a^2) W_k dz \end{aligned}$$

Lembrando que $G = (D^2 - a^2)W$ a equação acima fica

$$\int_0^1 F(D^2 - a^2)F dz = -a^2 \sum_{j=1}^{\infty} A_j \mathfrak{R}_j \int_0^1 W_j F dz = - \int_0^1 [(DF)^2 + a^2(F)^2] dz = -a^2 \sum_{j=1}^{\infty} A_j^2 \mathfrak{R}_j$$

Lembrando ainda que $\sum_{j=1}^{\infty} A_j^2 = 1$ fazemos

$$\int_0^1 [(DF)^2 + a^2(F)^2] dz - \left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j^2 \right) \mathfrak{R}_1 = -a^2 \sum_{j=1}^{\infty} A_j^2 (\mathfrak{R}_j - \mathfrak{R}_1)$$

O termo da esquerda não pode ser nulo (pois $\mathfrak{R}_j \geq \mathfrak{R}_1$ e $\mathfrak{R}_j \neq \mathfrak{R}_1$ para todo $i \neq j$), oque

nos leva a

$$\Re_1 \leq \frac{1}{a^2} \int_0^1 [(DF)^2 + a^2(F)^2] dz$$

Note que só haverá igualdade se em todos os elementos em que $j \neq 1$ o termo A_j for nulo.

6.3 Obtendo os valores do número de Rayleigh \Re crítico

Obteremos o valor de \Re crítico par o caso em que as bordas do sistema são livres. A escolha por representarmos a solução deste se deve à sua solução analítica ser simples e que para as outras condições de fronteira a solução ser obtida apenas numericamente.

Lembrando inicialmente que as condições de fronteira para este caso

$$\begin{aligned} W = 0, \quad (D^2 - a^2)^2 W = 0 \quad \text{e} \quad D^2 W = 0 \\ W = D^2 W = D^4 W = 0 \end{aligned}$$

Mas de $(D^2 - a^2)^3 \theta = -\Re a^2 \theta$ (*) conseguimos ainda obter $D^6 W = 0$ na fronteira. Imediatamente, aplicando-se D^2 em (*) obteremos $D^{2n} = 0$ para $n = 0, 1, 2, \dots$. As soluções necessárias são então do tipo $K \sin(j\pi z)$, com j inteiro. Substituindo em (*) esta expressão obtemos \Re como função de j .

$$\Re = \frac{(a^2 + (j\pi)^2)^3}{a^2}$$

O valor crítico de \Re_1 pode ser obtido quando procuramos pontos críticos. Fazendo-se $l = a^2$ para facilitar

$$\frac{\partial \Re_1}{\partial l} = 3 \frac{(l + \pi^2)^2}{l} - \frac{(l + (j\pi)^2)^3}{l^2} \Rightarrow l = a^2 = \frac{\pi^2}{2}$$

que nos dá o valor crítico $\Re_1 = \frac{27\pi^4}{4} \approx 657.52$ no qual a estabilidade marginal irá aparecer.

Parte II

Teoria moderna

7 O modelo de Lorenz

Assumindo, devido à simetria do problema de Rayleigh-Bénard, que a evolução na formação das células de Bénard se dá de forma independente nos eixos x e y (fato já utilizado anteriormente para trabalhar com o método Galerkin), desprezamos as componentes de todo e qualquer vetor na dimensão y , o que restringe nosso estudo ao plano x - z . Partiremos das equações de Boussinesq exibidas na parte I deste trabalho:

$$\text{div}(\vec{u}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \langle u, \nabla T \rangle = \kappa \nabla^2 T \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \nabla) \vec{u} = \frac{\rho}{\rho_0} \vec{g} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (7.3)$$

onde $\vec{g} = (0, 0, -g)$, $\nu = \frac{\eta}{\rho_0}$ e κ é coeficiente de condução de calor. Das equações anteriores aliadas às observações iniciais, chegamos a equações simplificadas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (7.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \quad (7.5)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\rho}{\rho_0} g - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w \quad (7.6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \kappa \nabla^2 T \quad (7.7)$$

Tratando as duas primeiras equações em 7.5 visando eliminar a variável pressão p , podemos fazer $\frac{\partial}{\partial z}$ equação 1 - $\frac{\partial}{\partial x}$ equação 1, o que nos daria

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} + w \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial x} + \nu \frac{\partial(\nabla^2 u)}{\partial z},$$

do qual subtraímos

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + u \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial x} + \nu \frac{\partial(\nabla^2 u)}{\partial x},$$

resultando em

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \nu \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (7.8)$$

Para o caso bidimensional, introduzimos uma função de escoamento $\phi(x, z, t)$ ¹, onde

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{e} \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial x},$$

e assim

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = -\nabla^2 \phi$$

Logo, em 7.8

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \phi) + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \phi) + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 \phi) + g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) = \nu \nabla^4 \phi \quad (7.9)$$

Lembrando que $\rho(T) = \rho_0[1 - \alpha(T - T_0)]$ lidamos com $T(x, z, t)$ numa forma expandida

$$T(x, z, t) = T_0 + \Delta T \left(1 - \frac{z}{h} \right) + \theta(x, z, t),$$

onde θ é um fator não linear de perturbação no perfil de temperatura e

$$T(x, z, t)|_{z=0} = T_0 + \Delta T \quad \text{e} \quad T(x, z, t)|_{z=h} = T_0$$

Substituímos tais resultados em 7.9

$$\frac{\partial \nabla^2 \phi}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \phi) + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 \phi) - g \frac{\partial}{\partial x} \left[1 - \alpha \left(\frac{\Delta T}{h} z + \theta \right) \right] - \nu \nabla^4 \phi = 0$$

e

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\Delta T}{h} \right) - \kappa \nabla^2 \theta = 0 \quad (7.10)$$

Podemos expressar os termos não lineares das equações 7.10 na forma jacobiana

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, z)} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}$$

¹A idéia por trás de funções de escoamento é a mesma que nos leva a trabalhar com campos de vetores gradiente, onde a propriedade que deve ser satisfeita é a do divergente nulo.

Desta forma, chegamos a

$$\frac{\partial \nabla^2 \phi}{\partial t} = -\frac{\partial(\phi, \nabla^2 \phi)}{\partial(x, z)} + g \frac{\partial \theta}{\partial x} + \nu \nabla^4 \phi \quad (7.11)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial(\phi, \theta)}{\partial(x, z)} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\Delta T}{h} + \kappa \nabla^2 \theta \quad (7.12)$$

Adimensionalizamos este sistema para facilitar as equações (embora não pareça)

$$x = hx^* \quad \nabla^2 = \frac{1}{h^2} \nabla^{*2} z = hz^* \quad \phi = \kappa \phi^* t = \frac{h^2 t^*}{\kappa} \quad \theta = -\frac{\kappa \nu}{g \alpha h^4 \beta} \Delta T \quad (7.13)$$

Aplicando a adimensionalização às equações 7.11 e 7.12 obtemos

$$\frac{\partial \nabla^{*2} \phi^*}{\partial t^*} = -\frac{\partial(\phi^*, \nabla^{*2} \phi^*)}{\partial(x^*, z^*)} + \sigma \nabla^{*4} \phi^* \quad (7.14)$$

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} = -\frac{\partial(\phi^*, \theta^*)}{\partial(x^*, z^*)} + \mathcal{R} \frac{\partial \phi^*}{\partial x^*} + \nabla^{*2} \theta^* \quad (7.15)$$

onde $\sigma = \frac{\nu}{\kappa}$ é o número de Prandtl, cujo "trabalho" aqui é subjugado em virtude da presença do parâmetro

$$\mathcal{R} = -\frac{g \alpha \beta h^4}{\kappa \nu},$$

ou seja, o número de Rayleigh², que, como já discutimos anteriormente, depende de características do meio (α , κ , e ν), da geometria do sistema (h) e da diferença de temperatura entre as placas; este parâmetro exerce papel de controle no problema de Rayleigh-Bénard.

7.1 Condições de contorno no modelo de Lorenz

Sabemos do capítulo 4 que a perturbação θ se anula nas placas, pois estas permanecem a temperatura constante. Assumimos aqui, como Lorenz, o caso de fronteira livre, onde a componente w de \vec{u} é nula; não consideraremos, no entanto, tensão superficial em $z = h$ e em $z = 0$ (o que facilitará nossa análise do sistema). Assim,

²Lembramos ainda, da parte clássica deste trabalho, que $T = T_0 + \langle c, x \rangle = T_0 - \beta \langle \lambda, x \rangle$, então, dado que $\lambda = (0, 0, 1)$ e sendo h a altura da célula (ou melhor, a distância entre as superfícies inferior e superior), vem que

$$\Delta T = T_{topo} - T_{fundo} = \beta h$$

$$w \Big|_{z=0,h} = 0 \quad \text{e} \quad \sigma_{xz} \Big|_{z=0,h} = 0$$

Segue destas condições que

a)

$$w \Big|_{z=0,h} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{z=0,h} = 0 \Rightarrow \phi \Big|_{z=0,h} = 0$$

De σ , obtemos $\vec{\sigma} = 2\nu\vec{\epsilon}$, onde $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\}$

b)

$$\sigma_{xz} \Big|_{z=0,h} = \nu \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0,h} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Big|_{z=0,h} = 0$$

De a e de b segue que

$$\nabla^2 \phi \Big|_{z=0,h} = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \Big|_{z=0,h} = 0$$

Para as equações adimensionalizadas, ϕ^* e θ^* , as condições de contorno ficam

$$\theta^*(x, z, t) = \phi^*(x, z, t) \Big|_{z=0,h} = 0,$$

e

$$\nabla^{*2} \phi^*(x, z, t) \Big|_{z=0,h} = 0$$

Barry Saltzman expandiu a função de escoamento ϕ^* e a de perturbação θ^* em série de Fourier em duas dimensões, com comprimento l na direção x e $2h$ na direção z .

$$\begin{aligned} \phi^*(x^*, z^*, t^*) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_{mn}(m, n, t^*) e^{2\pi i [m \frac{h}{l} x^* + \frac{n}{2} z^*]} \\ \theta^*(x^*, z^*, t^*) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_{mn}(m, n, t^*) e^{2\pi i [m \frac{h}{l} x^* + \frac{n}{2} z^*]} \end{aligned}$$

Saltzman introduziu 52 modos destes nas equações anteriores, vendo numericamente que, a exceção de 3 deles, eles diminuíam a zero com o passar do tempo. Os três restantes possuíam comportamento irregular e não-periódico para certos parâmetros de controle (\mathcal{R} , por exemplo). Esse resultado motivou Lorenz a expressar ϕ e θ em apenas 3 amplitudes, $X(t)$, $Y(t)$ e $Z(t)$.

$$\phi(x, z, t) = \frac{\kappa(1+a^2)\sqrt{2}}{a} X(t) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{h} z\right) \quad (7.16)$$

$$\theta(x, z, t) = \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\mathcal{R}_{cr}}{\mathcal{R}} \left[\sqrt{2} Y(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{h} z\right) - Z(t) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{h} z\right) \right] \quad (7.17)$$

onde \mathcal{R} é o número de Rayleigh e \mathcal{R}_{cr} é o seu valor crítico

$$\mathcal{R}_{cr} = \frac{\pi^4(1+a^2)^3}{a^2} 3.$$

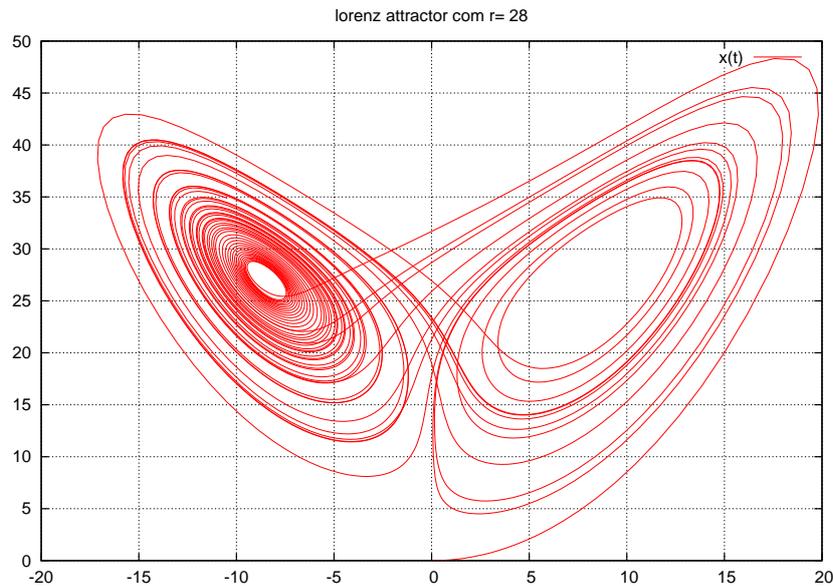


Figura 4: O retrato de fase do sistema de Lorenz no plano x-z caso $r=28$, $\sigma = 10$ e $b = 8/3$

7.1.1 Quanto ao significado das três amplitudes

O modo em $X(t)$ é proporcional ao módulo da velocidade de convecção; Y é proporcional à diferença de temperatura entre o líquido convectado ascendentemente eo convectado ao fundo; o modo $Z(t)$ é proporcional ao desvio do perfil linear de temperatura na direção vertical, representando a componente não-linear da temperatura. Substituindo 7.15 e 7.16 nas equações 7.11 e 7.12, após manipulações algébricas (geralmente, uma conta trabalhosa, mas não complicada) obtemos as equações de Lorenz

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= -bx + xy \end{aligned} \quad (7.18)$$

A derivada se dá em relação à unidade de tempo $\tau = \frac{\pi^2(1+a^2)\kappa t}{h^2}$, $\sigma = \frac{\nu}{\kappa}$ é o número de Prandtl (μ é a viscosidade cinemática e κ a difusividade térmica), $r = \mathcal{R}/\mathcal{R}_{cr}$ é o número de Rayleigh relativo e $b = \frac{4}{1+a^2}$ uma medida da geometria das células a direção x. Como vimos

³Podemos obter este valor a partir das equações que estão na parte clássica deste trabalho

no capítulo 7, \mathcal{R} possui menor valor $\frac{27\pi^4}{4}$, onde há estabilidade neutra. Integrei esta equação numericamente com o método de Runge-Kutta de quarta ordem (como na figura 4) de forma a obtermos o espaço de fase para um problema de Cauchy.

8 Exemplos básicos em teoria local de bifurcações

Neste capítulo vamos nos focar em exemplos básicos de bifurcações em sistemas dinâmicos contínuos. Como temos visto, sistemas físicos importantes possuem parâmetros em suas equações. Variações causadas nestes parâmetros podem alterar o comportamento qualitativo das soluções do sistema; a essas mudanças dá-se o nome bifurcações e aos valores de parâmetro no qual isso acontece, valores de bifurcação (ou valores críticos). A análise que faremos aqui se deve a linearizações próximas a valores críticos, o que nos possibilita conhecer o comportamento do campo de vetores próximo a pontos críticos ou órbitas fechadas, como soluções a estas bifurcações encontradas numa vizinhança deste valor de bifurcação.

8.1 Um exemplo de equação diferencial dependendo de um parâmetro e a nossa motivação para seu estudo

Consideremos o sistema

$$\dot{x} = \mu + x^3 - x = f(\mu, x)$$

e vejamos como o retrato de fase do sistema se comporta ante a mudanças em μ . Representamos o sistema no gráfico 5.

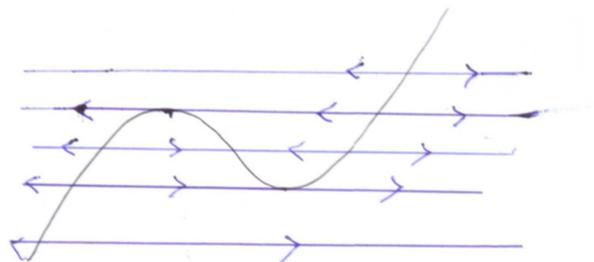


Figura 5: Retrato de fase para diferentes valores de μ

Note que variarmos μ neste caso significa "fixar o gráfico e descer ou subir o sistema de coordenadas"; se variarmos o sistema de coordenadas podemos ir de uma a três intersecções

do eixo x com o gráfico, o que corresponde ao caso $f(\mu, x) = 0$, i.e., a pontos de equilíbrio do sistema.

Analisemos o comportamento dos pontos de equilíbrio.

$$\frac{\partial f(\mu, x)}{\partial x} = 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Vemos assim como um sistema simples pode possuir comportamentos interessantes com o variar de um parâmetro: mudanças no comportamento de pontos fixos (ou mesmo seu surgimento ou desaparecimento) etc.

Passemos para casos em dimensão dois.

8.2 Bifurcação do tipo sela-nó

Considere a evolução do seguinte sistema

$$\dot{x} = \mu - x^2 = f(\mu, x),$$

onde μ é o nosso parâmetro. Primeiramente, determinamos os pontos fixos x_p do sistema:

$$x_p = \pm\sqrt{\mu} \quad \text{caso } \mu > 0$$

para então plotarmos o diagrama de bifurcações em 6.

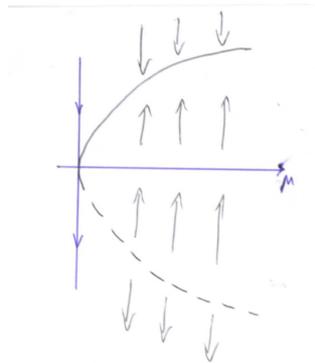


Figura 6: Diagrama de bifurcações na bifurcação sela-nó

Observe por 6 que quando $\mu \rightarrow 0^+$ os pontos instável e estável se fundem e a dinâmica da região entre eles desaparece, permanecendo a dos outros pontos.

Passemos à análise deste comportamento no plano. Seja o seguinte sistema $\dot{z} = J(\mu, z)$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu - x^2 \\ \dot{y} &= -y \end{aligned}$$

cujos pontos fixos são (para $\mu > 0$), $(\sqrt{\mu}, 0)$ e $(-\sqrt{\mu}, 0)$.

A matriz jacobiana associada é dada por

$$\frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{x_p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{x_p}$$

cujos autovalores (avaliados em um ponto de equilíbrio) são $\lambda_1 = -2x_p$ e $\lambda_2 = -1$. Assim, temos:

- em x_{p1} : $-2\sqrt{\mu}$ e -1 são autovalores (dois autovalores negativos);
- em x_{p2} : $2\sqrt{\mu}$ e -1 são autovalores(um autovalor negativo, outro positivo);

Observe pela figura 7 que no caso $\mu = 0$ não existem pontos de equilíbrio. Em $\mu > 0$ temos uma sela e um nó que se fundem em $\mu = 0$ (e o espaço de fase preserva parte das características destes dois atratores).

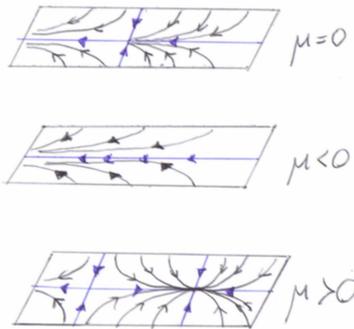


Figura 7: Bifurcação sela-nó em dimensão dois

8.3 Bifurcação do tipo forquilha

Seja o seguinte sistema $\dot{z} = J(\mu, z)$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - x^3 \\ \dot{y} &= -y \end{aligned}$$

cujos pontos fixos são (para $\mu > 0$): $(\sqrt{\mu}, 0)$, $(-\sqrt{\mu}, 0)$ e a origem.

A matriz jacobiana associada é dada por

$$\frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{x_p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x^2 + \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{x_p}$$

e os autovalores nos pontos de equilíbrio são

- $x_{p1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = \mu \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix}$ (sela)
- $x_{p2} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\mu} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = -2\mu \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix}$ (nó)
- $x_{p3} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = -2\mu \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix}$ (nó)

para $\mu < 0$, os dois últimos pontos fixos deixam de existir e os autovalores do primeiro ficam negativos (temos então um nó na origem).

8.4 Bifurcação de Hopf

Considere o seguinte sistema ,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x[\mu - (x^2 + y^2)] \\ \dot{y} &= x + y[\mu - (x^2 + y^2)] \end{aligned} \quad (8.1)$$

cujo único ponto de equilíbrio é $x_0 = y_0 = 0$. A matriz jacobiana em $(0,0)$ é

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=0} = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & -\mu \end{pmatrix}$$

cujos autovalores são $\mu \pm i$

Para o caso $\mu > 0$ ($\mu < 0$) temos um foco instável (foco estável); em $\mu = 0$ temos o ponto onde se dá esta mudança de estabilidade.

Agora, para onde as trajetórias vão no caso instável quando $t \rightarrow \infty$? Elas "explodem" ou tendem a um ciclo-limite? Para analisar isso melhor (pelo retrato de fase) transformaremos o sistema para coordenadas polares.

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\theta) \\ y &= r \sin(\theta) \\ \dot{r} &= -r^3 + \mu r \quad r > 0 \\ \dot{\theta} &= 1 \end{aligned}$$

No caso $\mu > 0$, em $r = \sqrt{\mu}$ temos um ciclo-limite. Analisando o sinal de \dot{r} para $r > \sqrt{\mu}$ e $r < \sqrt{\mu}$ vemos que o ciclo-limite é atrator; para $\mu < 0$ não há ciclo-limite.

Observe que $\mu_0 = 0$ é ponto de bifurcação onde não só a origem ficou instável, mas houve a aparição de um ciclo-limite. Esse tipo de bifurcação foco \leftrightarrow ciclo-limite é chamado de *bifurcação de Hopf*.

8.5 Bifurcação transcritical

Seja o seguinte sistema desacoplado $\dot{z} = J(\mu, z)$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - x^2 \\ \dot{y} &= -y \end{aligned}$$

cujos pontos fixos são $(\mu, 0)$ e a origem.

A matriz jacobiana associada é dada por

$$\left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{x_p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x^2 + \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{x_p}$$

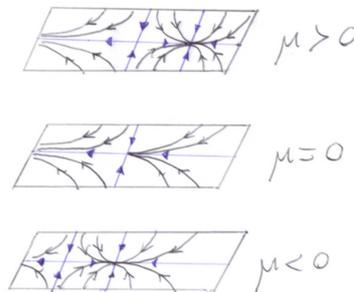


Figura 8: Diagrama de bifurcações na bifurcação sela-nó

e os autovalores nos pontos de equilíbrio são

- $x_{p1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = \mu \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix}$ (sela)
- $x_{p3} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = -2\mu \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix}$ (nó)

para $\mu < 0$, os dois últimos pontos fixos deixam de existir e os autovalores do primeiro ficam negativos (temos então um nó na origem). Este comportamento pode ser analisado tanto no diagrama de bifurcações na figura 8 quanto no espaço de fase (figura 9).

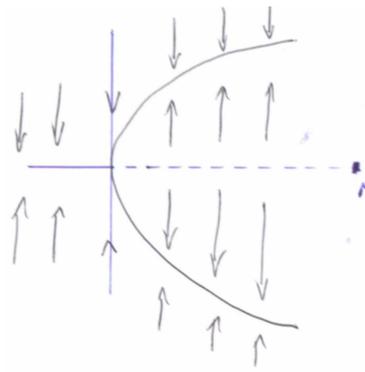


Figura 9: Diagrama de bifurcações no caso da bifurcação transcritical

9 Um pouco da dinâmica do sistema de Lorenz

9.1 Evolução do sistema

O sistema de Lorenz é até hoje um objeto de estudo de físicos e matemáticos. Não pretendemos esgotar a discussão do assunto neste texto, de forma que o termo "um pouco" do título do capítulo se deve muito mais por prudência do que por modéstia.

Como vimos anteriormente, o sistema de Lorenz é dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= -bx + xy \end{aligned} \quad (9.1)$$

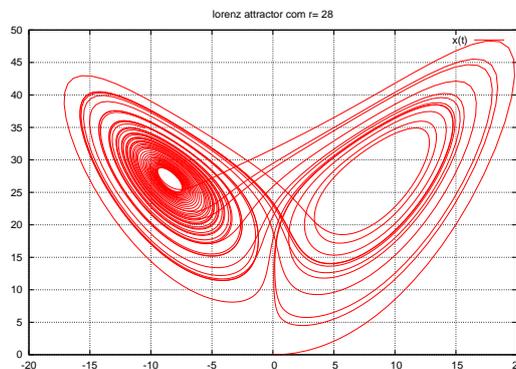


Figura 10: Integração numérica do sistema de Lorenz com parâmetros $b=\frac{8}{3}$, $\sigma = 10$ e $r = 28$

Resolvemos este sistema numericamente, obtendo um retrato de fase como na figura 10. Aqui buscaremos os pontos de equilíbrio e estudar as bifurcações em função do parâmetro r para uma maior compreensão qualitativa destas equações.

A primeira característica com relação ao "volume" do espaço de fase vem do teorema de Liouville:

$$V(t) = V(0) \cdot e^{-\text{tr}(\text{div}A)},$$

onde A é o conjunto de equações; no caso,

$$\operatorname{div}(A) = \frac{\partial}{\partial x}(-\sigma x + \sigma y) + \frac{\partial}{\partial y}(rx - y - xz) + \frac{\partial}{\partial z}(-bz + xy) = -(\sigma + 1 + b)$$

Logo, o sistema está se contraindo, o que mostra que o sistema é dissipativo

Para determinarmos os estados de equilíbrio fazemos

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma x + \sigma y \\ rx - y - xz \\ -bz + xy \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

Claramente, a origem é um ponto de equilíbrio. Podemos analisar a estabilidade a origem para o caso $r < 1$ por meio de uma função de Liapunov: seja esta função (não necessariamente a única) definida por $L(x,y,z) = x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2$

Temos então

$$\frac{dL}{dt} = \langle \nabla(L), (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \rangle = -2\sigma(x^2 + y^2 - (1+r)xy) - 2\sigma bz^2$$

Agora, $\dot{L} < 0$ se $h(x,y) = x^2 + y^2 - (1+r)xy > 0$ para $x \neq (0,0)$. No caso e uma órbita sobre qualquer um dos eixos x ou y temos estabilidade. Tomando qualquer outra reta do tipo $y = ax$ no plano x - y temos:

$$h(x, ax) = x^2(a^2 - (1+r)a + 1)$$

Como o termo quadrático $a^2 - (1+r)a + 1$ é positivo para r então $h(x,y) > 0$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$. Logo, a origem é um ponto fixo estável para o caso $r < 1$ Podemos, de maneira parecida, mostrar que o espaço de fases está sempre contido numa região limitada do espaço (para certos valores de r). Curiosamente, as trajetórias ficam sempre na região $z > 0$, mas não encontramos provas disso na bibliografia utilizada.

Podemos analisar a estabilidade dos pontos fixos por meio da teoria de estabilidade linear. A idéia é simples como nos casos anteriores, com a diferença que estamos num sistema não linear: dividimos o sistema em duas partes: L e $N(x)$.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Lx + N(x) \\ \dot{\mu} &= 0 \end{aligned}$$

Daqui por diante procede-se diagonalizando a matriz L , coloca-se o sistema na base de autovetores associados à matriz L e, analisando os autovalores, conseguimos obter resultados. O caso hiperbólico é mais conhecido e podemos tratá-lo pelo teorema de Hartman-Grobman; o caso não - hiperbólico é mais complicado e requer aplicação de teoremas como a da variedade estável¹.

¹Veja Holmes

Conseguimos com esta abordagem descobrir que para $r > 1$ a origem se torna instável e dois novos pontos fixos, de coordenadas $x = \pm\sqrt{b\mu}$, surgem, o que nos dá claramente uma bifurcação de forquilha. Substituindo estes dois novos valores no sistema obtemos as outras coordenadas de cada ponto de equilíbrio p_1 e p_2 .

$$p_1 = (\sqrt{b\mu}, \sqrt{b\mu}, \mu) \quad \text{e} \quad p_2 = (-\sqrt{b\mu}, -\sqrt{b\mu}, \mu)$$

Como autovalores distintos estão associados a diferentes autovetores, temos 3 autovalores distintos (e linearmente independentes, como nos diz a álgebra linear para este caso). Temos então um espaço de soluções para este sistema dado por $\phi = e^{\lambda_i t} x_i$, onde x_i é o autovetor associado ao autovalor λ_i ². Note que no caso $r < 1$ todos os autovalores possuem parte real negativa, o que demonstra a estabilidade dos pontos de equilíbrio neste caso, conforme já havíamos mostrado. Para $r = 1$, um dos autovalores é nulo (os outros ainda são negativos). Com $r > 1$ o maior autovalor se torna positivo e os outros permanecem (até certos valores de r) negativos; temos então, seguindo o capítulo 2, uma mudança de ponto fixo estável para um ponto de sela.

Se analisarmos a matriz Jacobiana do sistema nos pontos p_1 e p_2 (na nova base) obtemos o seguinte polinômio característico, que é igual para as duas matrizes Jacobianas (ressaltamos aqui o alto grau de simetria do sistema de Lorenz)

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + \nabla)\lambda + 2\sigma b(\nabla - 1) = 0$$

Nesta parte podemos analisar a estabilidade dos pontos fixos pelo sinal das raízes do polinômio característico; fizemos isso pelo uso do algoritmo de Routh, comumente ensinado em disciplinas de teoria do controle. Chegamos então a:

$$p_1 \text{ e } p_2 \text{ estáveis} \Leftrightarrow r \leq \frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-(b+1)}$$

Apesar de obtermos este número com precisão (no caso $\sigma = 10$ e $b = 8/3$ o parâmetro vale $470/24 \approx 24,74$) ele não nos diz quando os autovalores passam a ter componentes complexas não nulas; para $\sigma = 10$ e $b = 8/3$ este valor crítico de r é $1,346\dots$

Podemos resumir as propriedades que temos até então como

- $0 < r < 1$: a origem é globalmente estável;
- $1 < r$: a origem é não estável, consistindo localmente em um ponto de sela;
- $1 < r < 24,74\dots$ p_1 e p_2 são estáveis. O caso $r > 1,346$ nos dá um par de autovalores complexos para p_1 e p_2 ;
- $24,74\dots < r$: p_1 e p_2 são instáveis; o fluxo quando linearizado ao redor destes pontos possui um autovalor negativo e outros dois complexos, com parte real positiva.

²Note que estamos falando dos autovetores definindo o espaço tangente às variedades onde se encontram as verdadeiras soluções do sistema, que sabemos existir pelo teorema de existência e unicidade.

Entrando no caso $r > 24,74$ podemos nos perguntar o que acontece com as órbitas neste intervalo: de onde elas vêm(?), para onde elas vão? Todos os pontos fixos passam a ser instáveis? Daqui em diante utilizaremos parte dos resultados numéricos que obtivemos.

Podemos verificar graficamente o que foi discutido nessa seção na figura 16. Para podermos entender algumas outras coisas teremos que entrar em uma outra faceta deste sistema para os parâmetros simulados: órbitas homoclínicas.

9.2 Entendendo as órbitas homoclínicas

Quando $r > 1$ a linearização local do fluxo próximo à origem nos diz que há uma variedade estável de dimensão dois e que próxima à origem nos remete a um plano. Esta variedade divide o espaço em duas partes, de forma que os pontos que não estão nela tendem ou para p_1 ou para p_2 (quando $r < 24,74$). Para $r < 13,926 \dots$ nenhuma órbita cruza a variedade estável (veja figura 11), e para valores maiores as órbitas "furam" a variedade estável e são atraídas pelo ponto fixo que está na outra região do espaço (veja figura 12).

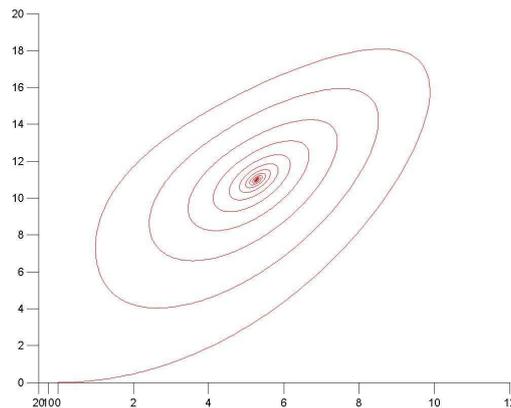


Figura 11: O espaço de fase do sistema de Lorenz com parâmetros $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $r = 12$

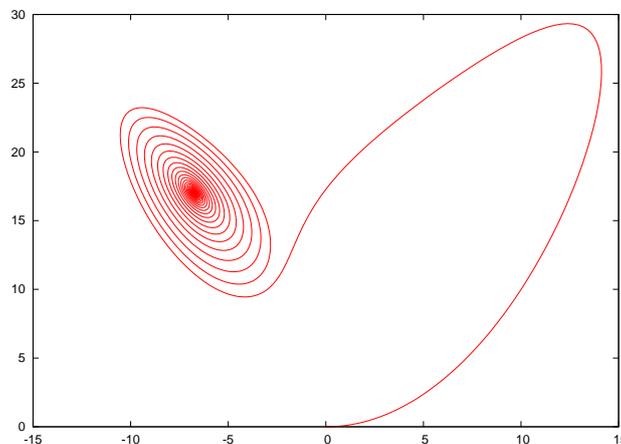


Figura 12: O espaço de fase do sistema de Lorenz com parâmetros $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $r = 18$

Já vimos que no caso $r > 24,74$ as órbitas ficam de um lado pra outro do espaço. Mas será que em algum momento as órbitas se aproxima assintoticamente da variedade estável da origem? De fato, isso acontece e é quando observamos o aparecimento de órbitas homoclínicas; a figura 16 nos dá todas estas informações.

9.3 A importância da dinâmica simbólica

Paremos agora para analisar um outro sistema dinâmico conhecido como mapa logístico.

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n) \quad (9.3)$$

O nosso intervalo de estudo será o $[0,1]$, o que no caso ($\mu < 4$) garante que todo ponto da imagem estará dentro deste domínio. No entanto, se tomarmos o caso $\mu \geq 4$ o sistema passa a apresentar novas propriedades. Prova-se que no caso $\mu < 2 + \sqrt{5}$ o conjunto dos pontos que não diverge tem medida nula, sendo ainda um conjunto de Cantor³. Em virtude da simetria da aplicação, podemos separar o conjunto em duas partes: uma à esquerda e outra à direita (na verdade fazemos isso não por causa da simetria, mas para garantirmos que nestes dois conjuntos as restrições do mapa logístico são bijeções no intervalo $[0,1]$). Se caracterizarmos cada um desses conjuntos por 0 e 1 quando uma órbita estiver nele (fora dele sabemos que diverge) então poderíamos fazer toda órbita corresponder a uma seqüência de 0's e 1's, onde o n-ésimo termo dessa seqüência indicaria em qual desses conjuntos a órbita se encontra na n-ésima iterada da função. Perguntamos então qual a relevância disso para estudarmos o sistema de verdade: por que levar o sistema para este outro espaço se devemos nos preocupar com o original? Note que se tivermos um homeomorfismo⁴ poderemos trabalhar com correspondência única entre órbitas e seqüências e, se conseguirmos mensurar a distância entre duas delas, poderemos averigüar a "proximidade" entre duas órbitas. De fato, não é muito difícil mostrar que o espaço das seqüências de 0 e 1 possui uma métrica natural que torna isso possível. Assim, se tivermos pontos próximos no espaço de seqüências 0 e 1 poderemos por meio deste homeomorfismo atestar a proximidade das órbitas. Pela unicidade dos homeomorfismos (cada órbita corresponde a uma seqüência) vemos que em algum momento duas órbitas, por mais próximas que elas estejam, estarão em lados opostos do intervalo 0 e 1 (já que dois pontos distintos num espaço métrico têm distância não nula). Este fato também pode ser observado no estudo do sistema de Lorenz (para maiores detalhes veja o livro do Colin Sparrow). Obtivemos a série temporal do eixo x de dois pontos inicialmente próximos e chegamos à figura 13 para exemplificar o fenômeno.

9.4 Reconstruindo o espaço de fase por meio da série temporal

Suponhamos que estivesse ao nosso alcance medir apenas uma das variáveis do nosso problema (por exemplo, a velocidade de convecção do fluido). Não possuímos toda a informação

³Veja Devaney

⁴Bijeção contínua com inversa contínua

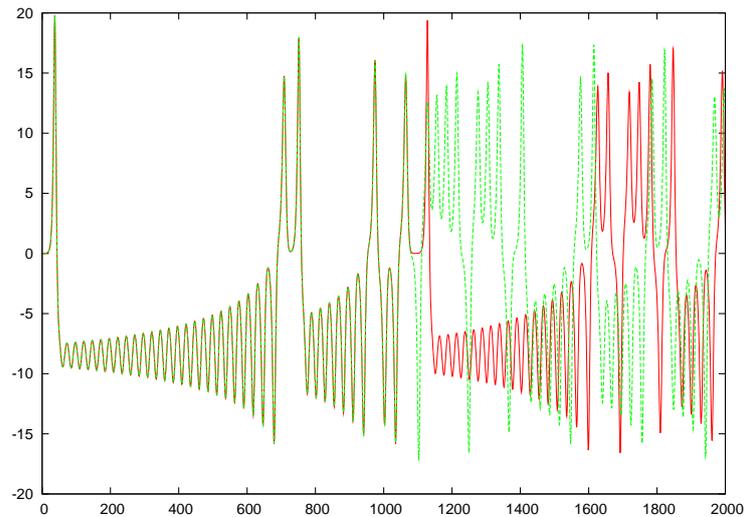


Figura 13: Sensibilidade às condições iniciais. Veja que após um tempo (representado na abcissa pelo número de iterações numéricas) as órbitas dos dois pontos estão em lados diferentes do eixo x (aqui a ordenada) do sistema de Lorenz

da dinâmica do problema, e novas medidas podem ter correlação não nula com estas ⁵. O teorema de Takens nos diz que toda a informação da dinâmica do nosso sistema está em todas as suas variáveis, e que podemos reconstruir o espaço de fase por meio da série temporal que vem de suas medidas. Partindo disso, procedemos obtendo dados da série com ponto $x_0=(0,0,0.1)$, obtendo os gráficos nas figuras 14 e 15.

Observe que as figuras 14 e 11 e as figuras 15 e 12 correspondem aos mesmos sistemas de Lorenz (respectivamente, $r = 12$ e $r = 18$) de fase, sendo que os retratos a partir das séries foram obtidos das séries temporais pelo programa Takens.m e plotadas em gráficos de retorno.

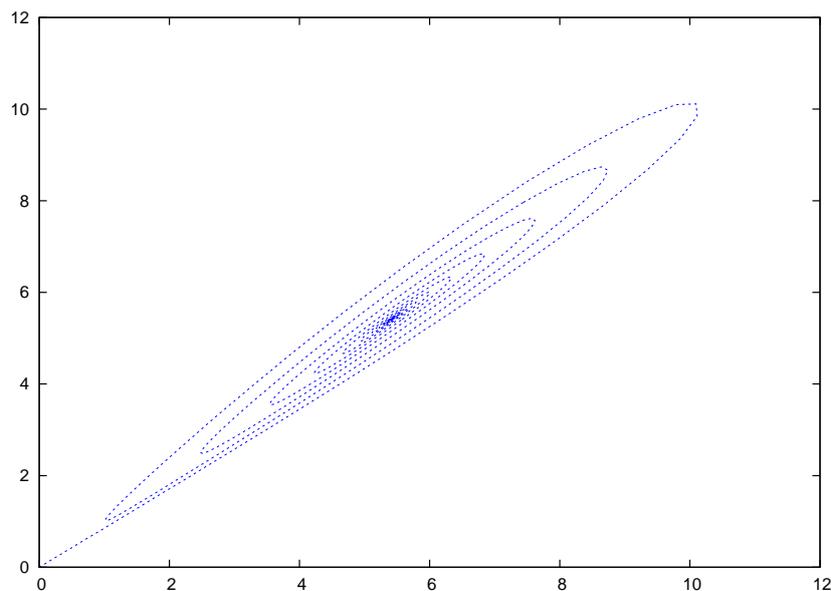


Figura 14: Atrator a partir da série temporal na variável x , com $r = 12$, $\sigma = 10$ e $b = 8/3$

⁵Entraríamos no estudo estatístico da análise multivariada, algo que não queremos aqui.

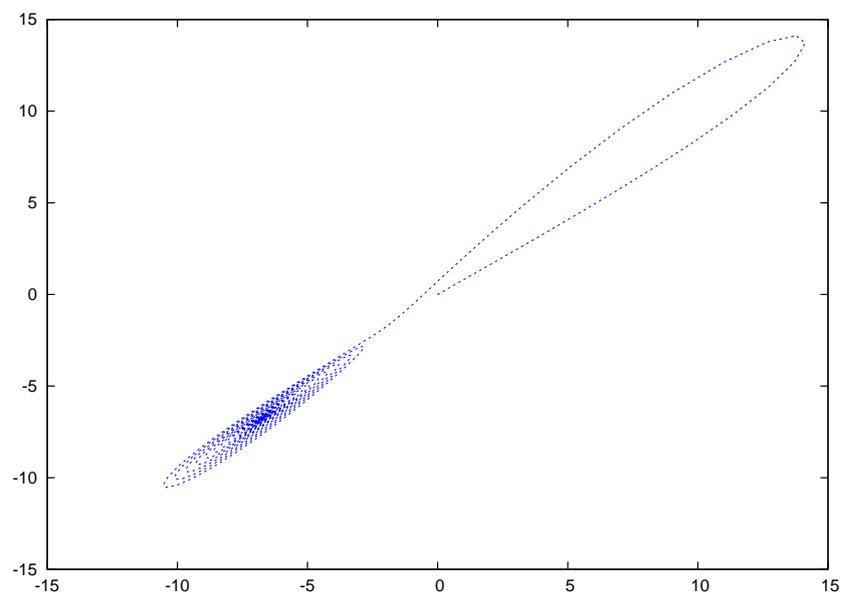


Figura 15: Atrator a partir da série temporal na variável x , com $r = 18$, $\sigma = 10$ e $b = 8/3$

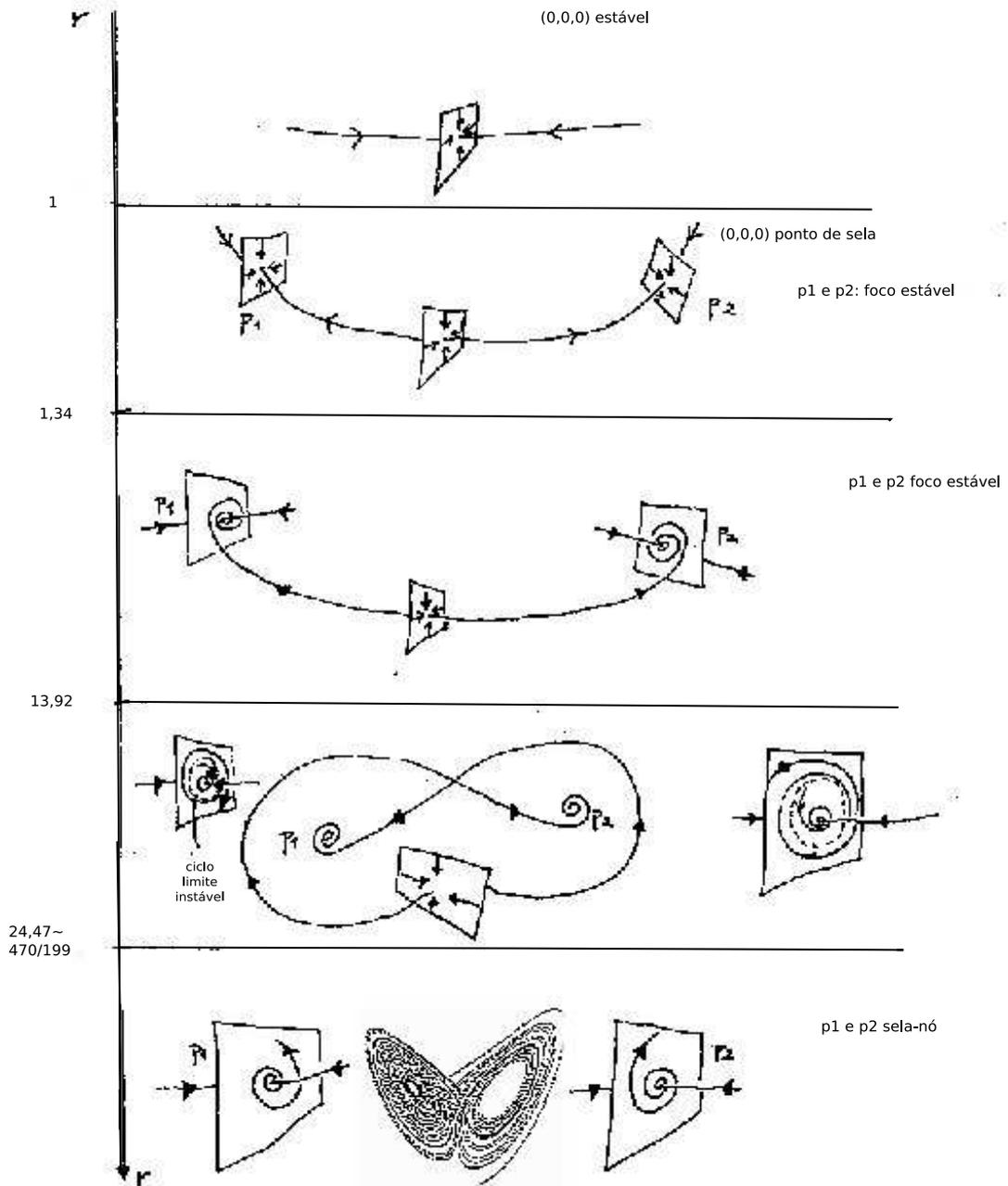


Figura 16: Evolução do sistema de Lorenz conforme variamos o parâmetro r , para $\sigma = 10$ e $b = 8/3$

Conclusão

A execução deste trabalho nos deixou a frente de um caminho tradicional para se resolver o problema de Rayleigh-Bénard encontrado na literatura; analisar sob a incidência de perturbações é um modo de se entender a dinâmica indiretamente. Conseguimos caracterizar matematicamente a transição estável-instável de forma significativa, nos restringido à primeira delas (existem outras transições após esta se estabelecer); este estudo é realizado de modo mais efetivo no âmbito da teoria das bifurcações, que estudamos voltados a este problema.

A resolução do problema, por separação de variáveis e obtenção de uma série por meio de funções ortogonais é algo que se chama "técnica de Galerkin", algo possível em virtude do entendimento do problema com dinâmicas distintas em z e xOy e as condições de fronteira que temos. Considerações um pouco mais complexas levam a uma redução do estudo a duas dimensões físicas (x e z), fato utilizado por Barry Saltzman para a obtenção do sistema de Lorenz. Quanto a outras técnicas como as de princípios variacionais, método de perturbações, vê-se como são ricas as interpretações físicas do problema, além de bastante claras sob o uso de uma matemática rigorosa.

O mais importante de tudo, oriundo do estudo da parte moderna da teoria: o entendimento de um fenômeno por abordagens distintas. A parte clássica, embora rigorosa, não nos dava respostas imediatas (ou com certa clareza) ao que procurávamos; conseguimos caracterizar a primeira transição de fases do sistema, e para obtermos as outras teríamos ainda muito trabalho para fazer. Com o advento da teoria de sistemas dinâmicos, visualizar e entender este fenômeno se tornou algo muito mais fácil e claro. Vimos ainda que com a ajuda de outros conceitos dentro da teoria, como dinâmica simbólica, pode-se extrair resultados mais profundos do sistema estudado.

Apesar das distâncias entre o modelo físico da parte clássica e as equações de Lorenz, este sistema tem muito a oferecer àqueles que o estudam, pois apresenta diversas características interessantes que, sob os conceitos de teoria de bifurcação (além dos conceitos matemáticos que empregamos), nos dá uma compreensão qualitativa do sistema físico que procuramos compreender.

Parte III

Apêndices

APÊNDICE A – Sobre o significado de e_{ij}

Analisemos o fluido em dois pontos, \vec{x} e $\vec{x} + \vec{\psi}$, num mesmo tempo t

Em primeira ordem de aproximação, \vec{x} estará, após um tempo δt em $\vec{x} + \vec{v}(\vec{x} + \vec{\psi}, t)dt$ e $\vec{x} + \vec{\psi}$ estará em $\vec{x} + \vec{\psi} + \vec{v}(\vec{x} + \vec{\psi}, t)dt$. Expandindo esta última equação em polinômio de Taylor vem que

$$\vec{x} + \vec{\psi} + \vec{v}(\vec{x}, t) + \vec{\psi} \nabla(\vec{v}, t)dt + O(\psi^2)$$

Note que existe um movimento relativo entre os 2 extremos, $(\vec{\psi} \cdot \nabla)\vec{v}dt$, ou, na forma matricial (fazendo $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$)

$$\vec{\psi} \cdot \nabla \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial y} & \frac{\partial v_1}{\partial z} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} & \frac{\partial v_3}{\partial y} & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Toda matriz (ou, digamos, tensor) pode ser decomposto de forma única em uma forma simétrica somada com outra anti-simétrica

$$M = \frac{1}{2} \underbrace{(M + M^t)}_{\text{parte simétrica}} + \frac{1}{2} \underbrace{(M - M^t)}_{\text{parte anti-simétrica}}$$

Aplicamos esta propriedade acima ao tensor $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)}_{e_{ij}} + \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)}_{r_{ij}}$$

¹Observe que $\psi \nabla \neq \psi \cdot \nabla$

A.1 Analisando a parte anti-simétrica e sua relação com $\nabla \times \vec{v}$

$$r_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -r_{21} & r_{13} \\ r_{21} & 0 & -r_{32} \\ -r_{13} & r_{32} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -R_3 & R_2 \\ R_3 & 0 & -R_1 \\ -R_2 & R_1 & 0 \end{pmatrix}$$

O movimento relativo é dado por $\psi \cdot (\nabla \vec{v}) dt = (\psi dt) \cdot (e_{ij} + r_{ij})$. Desta forma, vemos que a parte anti-simétrica é responsável por levar $\psi_i a \psi_i + \psi_j R_{ij}$, ou seja

$$\begin{aligned} & \psi_i + \frac{1}{2} \psi_j \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dt \Rightarrow \\ \Rightarrow \psi - & \rightarrow \psi + \begin{pmatrix} R_2 \psi_3 & R_3 \psi_2 \\ R_3 \psi_1 & -R_1 \psi_3 \\ R_1 \psi_2 & -R_2 \psi_1 \end{pmatrix} dt \end{aligned}$$

ainda,

$$\psi - \rightarrow \psi (R \times \psi) dt$$

em outras palavras, essa parte do movimento corresponde a uma rotação.

Se olharmos para R_1 , R_2 e R_3 , vemos ainda que

$$R_1 = r_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) = \frac{1}{2} (\nabla \times \vec{v}) \cdot e_1$$

$$R_2 = r_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} (\nabla \times \vec{v}) \cdot e_2$$

$$R_3 = r_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} (\nabla \times \vec{v}) \cdot e_3$$

oque corresponde a $\frac{1}{2} (\nabla \times \vec{v})$

A.2 A parte simétrica e sua relação com $\nabla \cdot \vec{v}$

Podemos analisar e_{ij} numa base ortogonal, o que nos dá um tensor na forma diagonal

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{pmatrix}$$

e_{ij} é responsável por $\psi_i \rightarrow \psi_i + \psi_j e_{ij} dt$ ou, no caso,

$$\begin{aligned} \psi_1 &\rightarrow \psi_1 + e_1 \psi_1 dt & \psi_1(1 + e_1 dt) \\ \psi_2 &\rightarrow \psi_2 + e_2 \psi_2 dt & = \psi_2(1 + e_2 dt) \\ \psi_3 &\rightarrow \psi_3 + e_3 \psi_3 dt & \psi_3(1 + e_3 dt) \end{aligned}$$

Sendo o termo $1 + e_i$ um fator de prolongamento no respectivo eixo, um bloco de volume $\mathcal{V} = \psi_1 \psi_2 \psi_3$ passará a ter volume $\mathcal{V}' = (1 + e_1 dt)(1 + e_2 dt)(1 + e_3 dt) \psi_1 \psi_2 \psi_3$. Se desprezarmos termos de ordem maior que um em ψ teremos $\mathcal{V}' = [1 + (e_1 + e_2 + e_3) dt] \psi_1 \psi_2 \psi_3$, o que nos dá uma variação de volume da ordem de $\Delta \mathcal{V}' = (e_1 + e_2 + e_3) dt \psi_1 \psi_2 \psi_3$. Do cálculo tensorial vem que o traço é invariante para matrizes similares². Segue então que $e_1 + e_2 + e_3 = e_{11} + e_{22} + e_{33}$

$$\Rightarrow e_1 + e_2 + e_3 = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{v}$$

Logo, a taxa de variação local do volume é $\nabla \cdot \vec{v}$, o que, no caso de incompressibilidade, está de acordo com nossos resultados no capítulo 1. Portanto, e_{ij} descreve um comportamento local da deformação do fluido.

²De fato, o $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$. Assim, se multiplicarmos B^{-1} às duas matrizes anteriores teremos $B^{-1}AB$ e $B^{-1}BA = A$, para as quais também vale o teorema. Então, $\text{tr}(B^{-1}AB) = \text{tr}(B^{-1}BA) = \text{tr}(A)$

APÊNDICE B – Conceitos básicos sobre tensores

Como não queremos ir muito profundamente no assunto, não definirei o conceito de tensores ou falarei sobre produtos tensoriais. Para maiores esclarecimentos quanto a estes pontos veja o livro de M. Spivak, *Calculus on manifolds*. A abordagem aqui será prioritariamente por meio de exemplos.

B.1 Alguns exemplos

O simbolo de ϵ permutação será definido como

$$\epsilon^{ijk\dots z} = \begin{cases} 1, & \text{se } i, j, k, \dots, z \text{ for uma permutação par} \\ -1, & \text{se } i, j, k, \dots, z \text{ for uma permutação ímpar} \\ 0, & \text{se houver repetição de algum termo em } j, k, \dots, z \end{cases}$$

Definiremos ainda o tensor δ_{ij}

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

E o que queremos dizer com permutações? Para os fins práticos podemos proceder da seguinte forma: pegue o primeiro elemento i em $\epsilon^{ijkl\dots z}$ e contamos quantos números são menores que ele nos termos seguintes (ou seja, j, k, l etc). Fazemo sisso para o termo j e assim em diante e no final somamos todos estes números; se for par então a permutação é 1, se for ímpar, -1. Por exemplo, em ϵ^{213} : 2 é maior que 1 (soma= 1); 1 não é maior que 2 ou 3, e 3 não é comparado a mninguém. A permutação então é ímpar, logo, $\epsilon^{213} = -1$. Outro exemmplo, $\epsilon^{212} = 0$, pois um termo se repete.

Uma relação importante é a seguinte: $\epsilon^{ijk}\epsilon^{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$

APÊNDICE C - Desprezando ϕ

Nesta parte, justificaremos o fato do termo Φ na equação 3.3 ter sido desprezado. Para isso, partimos da perturbação do estado estático e, obtidos os rolos de convecção, podemos assumir que a velocidade vertical \vec{u} do sistema se dá como na figura 17.

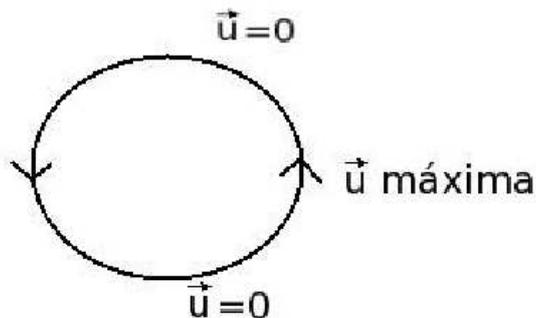


Figura 17: Velocidade vertical \vec{u} em um rolo de convecção

Como Φ é um parâmetro que se relaciona à energia dissipada de forma irreversível, teremos efeitos dissipativos como a perda de calor, o trabalho realizado pela força externa X , por dissipação e outros fatores. Podemos, no entanto, considerar somente o fator dissipativo que prevalece e é o maior de todos, o trabalho realizado por X . No caso, X se deve à gravidade, o que faz com que somente a velocidade vertical do sistema no seja relevante. Sabemos que o trabalho realizado por X entre os pontos de velocidade mínima e máxima é dado pela variação da energia cinética nos mesmos, o que nos leva a

$$\Delta \mathcal{E}_{cin} = \rho X \frac{d}{2}$$

A energia \mathcal{E} é dada por $\frac{1}{2} \rho \|\vec{u}_{máxima}\|^2$. Analisando estas equações sob uma variação da temperatura, teremos

$$\frac{d}{2} \{ \delta \rho \|\vec{u}_{máxima}\|^2 + 2\rho \|\vec{u}_{máxima}\| \delta \vec{u}_{máxima} \} = \delta \rho X \frac{d}{2}$$

Por considerações anteriores sabemos que o primeiro termo da equação acima pode ser desprezado. Operando como nas aproximações de Boussinesq, fazemos no segundo termo ρ constante e variável ante a perturbação no terceiro. Assim, dividindo tudo por ρ_0 ,

$$+2\|\vec{u}_{\text{máxima}}\|\delta\vec{u}_{\text{máxima}} = \frac{\delta\rho}{\rho_0}Xd$$

Note porém que consideramos inicialmente o caso estático, em que $\vec{u} = \vec{0}$. Assim, $\|\vec{u}_{\text{máxima}}\| = \|\delta\vec{u}_{\text{máxima}}\|$. Lembrando que $\delta\rho = \rho(1 - \alpha(T - T_0))$, obtemos da equação acima que as velocidades no sistema são da ordem de

$$[|X|d|\alpha|\Delta T]^{\frac{1}{2}}$$

sendo $|X| \sim g$. Da equação Φ para um fluido incompressível a razão de Φ e o termo de condução de calor k , é da ordem de:

$$\frac{[|X|d|\alpha|\Delta T]}{k}$$

o que, para fluido e gases em geral é algo de magnitude entre 10^{-7} e 10^{-8} , justificando o seu desprezamento e a redução de 2.9 a

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \langle \vec{u}, \nabla T \rangle = \kappa \nabla^2 T$$

Referências

- [1] *Argyris, J.H., Faust, G., Haase, M.* -An Exploration of Chaos
North Holland - 1994

- [2] *Chandrasekhar, S.* - Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability , terceira edição
Dover Publication, inc.- New York

- [3] *Paterson, A.R.* -A first course un fluid dynamics,
Cambridge university press, 1997

- [4] *Reid, W.H.; Harris, D. L.* -Some further results on Bénard problem,
The Physics of fluids, vol 1, número 2, 1958

- [5] *Guckenheimer, John e Holmes, Philip* - Nonlinear oscilations, Dynamical
systems, and bifurccations of vector fields
Springer Verlag - New York, 1997

- [6] *Paterson, A.R.* -A first course un fluid dynamics,
Cambridge university press, 1997

- [7] *Landau, M. e Lifchitz, E.* - Mécanique des fluides,
2ème éd. rev. et compl, Moscou; [Paris] : Editions Mir: Ed. Librairie du Globe,
1989

- [8] *Smale, S e Hirsch, Morris W.* - Differential equations, dynamical systems, and
linear algebra,
Academic press, 1974

- [9] *Chicone, Carmen* -Ordinary differential equations with applications,
Springer Verlag - New York, 1999

- [10] *Devaney, Robert L.* -An introduction to chaotic dynamical systems,
Addison-Wesley Publishing Company, Inc-1986

- [11] *Sparrow, Colin* -The Lorenz equations: Bifurcations, chaos, and strange attrac-
tors

Applied mathematical sciences 41 - Springer Verlag - New York, 1982

- [12] *Chorin, Alexandre J. e Marsden, Jerrold E.* - A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics
Texts in Applied Mathematics, 3 ed. - Springer, 1993