Uma introdução à precificação de opções européias

– Trabalho de conclusão de curso –

Autor: Fabio Niski

Orientador: Edson de Faria

1 de dezembro de 2006

Prefácio

O objetivo deste trabalho é apresentar uma breve introdução aos métodos matemáticos para a precificação de opções. Muitas escolhas sobre o que incluir e o que não incluir foram tomadas na construção deste texto. Tendo em vista o escopo de um trabalho de formatura e as restrições de tempo, optamos por tratar principalmente de opções européias e adotar um tratamento mais informal onde seriam necessárias ferramentas matemáticas mais finas como medida e teoria de martingais. Nos pontos onde tais teorias fazem-se necessárias para uma discussão mais rigorosa, colocamos referências à literatura para o leitor que estiver interessado.

Nos dois primeiros capítulos apresentamos uma sucinta introdução ao mercado financeiro e às hipóteses que usaremos para construir o modelo matemático de mercado que será usado nos capítulos seguintes. No capítulo 3, estudamos um modelo de mercado em tempo discreto culminando na fórmula de Cox-Rubinstein para a precificação de uma opção. O capítulo 4 trata de um modelo contínuo e são desenvolvidas ferramentas teóricas para que no capítulo 5 seja possível apresentar uma derivação da famosa equação da Black-Scholes. Ainda no capítulo 5, apresentamos uma revisão de conceitos básicos de equações diferenciais parciais para justificar a existência e unicidade do preço de uma opção que é dado pela solução da equação de Black-Scholes.

Agradeço ao meu orientador, professor Edson de Faria, por ter sugerido o tema e pelos diversos conselhos e encaminhamentos que me deu durante a realização deste texto. Por se tratar de um trabalho de formatura, acho conveniente utilizar os últimos paragráfos deste prefácio para fazer mais agradecimentos.

Nesses quatro anos de muitos estudos o que mais aprendi foi admirar o profissional que por horas gasta sua saliva e desprende seu suor para transmitir seus conhecimentos. Por medo de não ter uma outra oportunidade, gostaria de agradeçer nominalmente todos os professores que me (e nao existe palavra melhor) encantaram dentro e fora da sala de aula. Alexandre Roma, André Salles de Carvalho, Ângelo Barone Netto, Chaim Samuel Hönig, Edson de Faria, Eduardo Colli, Frank Michael Forger, Glenn Albert Jaques Van Amson, Jorge Aragona, Jorge Sotomayor, José Carlos Teixeira, Luis Gustavo Esteves, Luiz Antonio Ponce Alonso, Manuel Valentim de Pera Garcia, Nelson Kuhl, Ofélia Teresa Alas, Paulo Domingos Cordaro, Paulo Feofiloff, Roberto Benedicto Aguiar Filho, Roseli Fernandez, Sônia Regina Leite Garcia e Vladimir Belitsky.

Agradeço também aos amigos Daniel Faria Bernardes, Eduardo Oda, Pavlos Konstadinidis, Ricardo de Lima Ribeiro e Ricardo dos Santos Freire Jr. que tiveram coragem de participar dos seminários que dei e ao Marcelo Gasparian Goslin pela figura 2.1. Por último mas nao menos importante, agradeço aos meus pais a quem devo tudo e a minha Rôzinha. A todos vocês o meu MUITO OBRIGADO.

São Paulo, *Fabio Niski*
Dezembro 2006

Sumário

1

Introdução: Mercados e Opções

Neste trabalho vamos estudar modelos matemáticos para os mercados financeiros, analisando quais são seus objetos de valor e como estes são comercializados. Os tipos mais comuns de mercado são:

- ♢ **Mercado de *commodities***
- ♢ **Mercado de câmbio de moedas**
- ♢ **Mercado de *bonds***
- ♢ **Mercado de ações**
- ♢ **Mercado futuro ou mercado de opções**

Nos mercados de *commodities* os produtos comercializadas são bens físicos de consumo como ouro, petróleo e eletricidade. No mercado de câmbio são comercializados moedas de outras nações. Já os *bonds* são contratos emitidos por instituições governamentais e financeiras e que podem ser pensados como investimentos ou empréstimos feitos em um banco com taxa de juros bem definida. Exemplos e mais esclarecimentos sobre estes tipos de mercado serão feitos ao longo do texto quando for necessário.

Vamos agora dar um pouco mais de atenção para o mercado de ações. Ações são documentos legais que podem ser pensados como "pedaços" de uma empresa. O investidor que possuir as ações lucrará quando a empresa crescer e se valorizar e por outro lado terá prejuízos quando a empresa estiver indo mal. No mercado de ações portanto, são comercalizadas ações de empresas e o preço destas ações dependem (além de vários outros fatores) do que os investidores acham dos dividendos que a empresa pode gerar e do quanto ela pode crescer. O mercado de opções é o objeto principal aqui e será tratado na próxima seção.

1.1 O mercado de opções

Devido a diversos fatores econômicos, políticos e culturais, os mercados citados anteriormente se expandiram e se sofisticaram. Dessa maneira, fez-se necessário criar outros tipos de contratos mais complexos do que a simples compra e venda de um ativo. Esses contratos ou documentos de valor são conhecidos como derivativos e estão amarrados sempre a algum produto financeiro mais fundamental, o chamado ativo objeto (*underlying asset*) que geralmente pertence a algum dos mercados comentados anteriormente.

Como era de se esperar, no mercado de opções são comercializadas as opções e elas constituem o exemplo mais comum de derivativo.

1.1.1 Opções de compra

Os exemplos mais comuns de opções de compra (*call options*) são as chamadas opções de compra européias e as opções de compra americanas (estes nomes nada tem a ver com geográfia, são apenas convenções!).

Uma opção de compra européia é um contrato no qual estão especificados um ativo (*asset*), uma data (futura em relação a data de emissão do contrato) conhecida como data de vencimento e uma quantia monetária chamada de *strike price* ou preço de exercício. Fica definido então que o detentor do contrato tem o direito (mas não a obrigação) de na data de vencimento comprar do emissor do contrato o ativo especificado com preço igual ao preço de exercício. Como a opção ofereçe ao seu detentor um direito mas não uma obrigação é natural que ela tenha uma preço. Chamamos este valor de prêmio.

A diferença entre uma opção européia e uma americana que é na última o detentor pode exercer seu direito em qualquer momento até a data de vencimento.

Neste trabalho a ênfase será dada nas opções do tipo européia e estaremos sempre nos referindo a ela salvo menção explícita em contrário. Recomendamos o leitor interessado a consultar [10] ou [22] para saber mais sobre outros tipos de opções.

1.1.2 Opções de venda

Uma opção de venda (*put options*) é um contrato no qual o emissor se compromete a comprar um determinado ativo por um preço e data bem determinados. O detentor do contrato tem a opção de vender ou não o ativo na data estabelecida. Ao contrário da opção de compra, o detentor de uma opção de venda torçe para que o preço do ativo diminua já que assim, ao exercer a sua opção, ele pode vender o ativo acima do preço de mercado. Vale notar que a diferença entre a opção de venda européia e a opção de venda americana é a mesma do caso das opções de compra.

1.1.3 Um exemplo

Quanto deve valer uma opção? Vamos apresentar uma abordagem intuitiva com algumas hipóteses simplificadoras que serão relaxadas ao longo do texto. Suponha que estamos no dia 11/07/06 e uma opção de compra européia dá o direito ao seu possuidor de comprar uma ação de uma determinada empresa no dia 12/02/07 por R$130,00. Vamos supor que no dia 12/02/07 sabemos que esta ação valerá ou R$70,00 ou R$210,00 com igual probabilidade. Caso o valor da ação aumente, o detentor da opção poderá exercê-la, isto é, comprar a ação do emissor por R$130,00 e vendê-la imediatamente no mercado por R$210,00 obtendo um lucro de R$80,00. Caso o valor da ação diminua para R$70,00 não há motivos para exercer a opção e não há lucro algum para o investidor. É razoavel esperar que o preço da opção (prêmio) seja da ordem do lucro esperado que ela possa gerar. Assim, suponha que o preço da opção seja $\frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 80 = 40$ reais e vamos considerar dois cenários: O investidor que compra opção de compra européia referente a uma determinada ação e o investidor que compra a ação por R$130,00 no dia 11/07/06. No primeiro cenário se o preço da ação aumentasse, o lucro líquido obtido corresponderia a 100% do investimento inicial; se diminuisse o prejuízo corresponderia a 100% do investimento inicial. No segundo cenário se o preço da ação aumentasse, o lucro obtido corresponderia a aproximadamente 61,5% do investimento inicial e se diminuisse, o prejuízo corresponderia a aproximadamente 41% do investimento inicial. Percebe-se com isso que as opções respondem de maneira exagerada às mudanças dos preços dos ativos aos quais elas estão amarradas. Esse efeito é conhecido como efeito alavanca (*gearing effect*).

1.1.4 Do que deve depender o valor de uma opção?

Refletindo sobre o exemplo visto acima, vemos que quanto maior for o preço da ação na data de vencimento maior será o lucro do detendor da opção. No mercado real é impossível determinar o preço futuro de uma ação, porém é razoável supor que se o preço da ação é alto hoje então é provável que esteja alto no futuro e assim o valor de uma opção hoje depende do valor da ação subjacente hoje. O preço da opção também deve depender do preço de exercício (quão mais baixo ele é, maior é o preço da opção), do tempo até a data de vencimento (quão menor esse tempo for, mais fácil prever o preço futuro do ativo objeto), da volatilidade do preço do ativo e das taxas de juros bancárias. A dependência deste último fator se dá pois a compra de uma ação na data da emissão do contrato e o recebimento dos lucros obtidos na data de vencimento deve refletir o lucro que seria auferido ao investir o valor da opção em um banco na data de emissão e retirar o dinheiro acréscido dos juros na data de vencimento.

Nota-se que dos fatores discutidos acima, o preço S do ativo ao qual a opção esta atrelada e o tempo t até a data de vencimento inevitavelmente mudam durante o tempo de vida do contrato da opção, assim essas quantidades são chamadas de variáveis. Os outros fatores que afetam o preço da opção são chamados de parâmetros.

1.2 O problema da precificação de uma opção

Vamos encerrar este capítulo colocando de forma um pouco mais precisa o problema central que vamos estudar neste trabalho. Sejam K o preço de exercício, T a data de vencimento e $S(t)$ o preço do ativo objeto no instante t. Temos que valor V_T de uma opção na data de vencimento é dado por

$$V_T = \begin{cases} (S(T) - K)^+, & \text{para opções de compra;} \\ (K - S(T))^+, & \text{para opções de venda.} \end{cases}$$

Sendo p o prêmio referente a opção, o ganho total P_T de um detentor de uma opção na data de vencimento $t = T$ é dado então por

$$P_T = \begin{cases} (S(T) - K)^+ - p, & \text{para opções compra;} \\ (K - S(T))^+ - p, & \text{para opções de venda.} \end{cases} \tag{1.1}$$

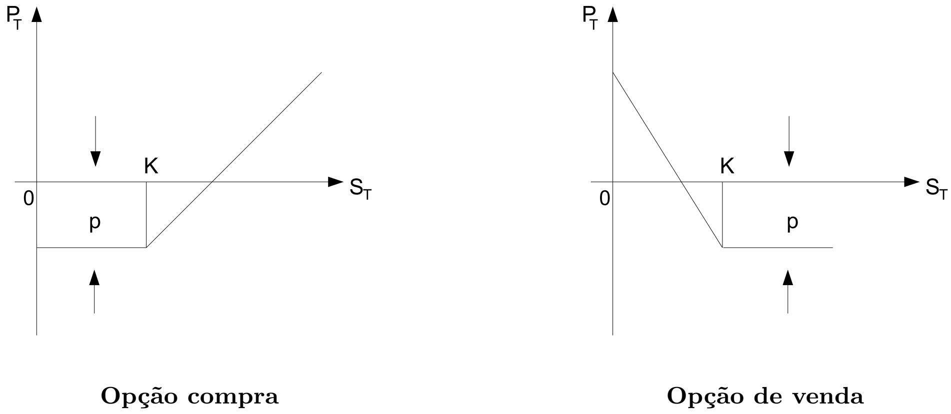

Figura 1.1. Gráfico de ganho total para opções

Do que foi discutido na seção 1.1.4 sabemos que o preço da opção V no instante t depende do preço do ativo objeto nesse instante e da variável temporal. Assim escrevemos

$$V = V(S(t), t).$$

Nossa tarefa é determinar esta função estabelecendo um modelo de equações diferenciais parciais. O problema da precificação de uma opção é achar $V = V(S,t)$ ($S \in [0, +\infty[, t \in [0,T]$), tal que

$$V(S,T) = \begin{cases} (S-K)^+, & \text{para opções de compra;} \\ (K-S)^+, & \text{para opções de venda.} \end{cases}$$

Em particular, se o preço da ação na data da emissão da opção ($t = 0$) é S_0, queremos saber quanto deve ser pago pelo prêmio $p = V(S_0, 0) = ?$.

2

O princípio da não-arbitragem

O princípio da não-arbitragem é o alicerce da teoria da precificação de opções. Usando apenas este princípio é possível obter algumas importantes propriedades qualitativas para o preço de uma opção.

2.1 Modelo de mercado

Neste capítulo vamos considerar um mercado com as seguintes características:

Ativos livres de risco. Estará disponível um *bond* B, atrelado a uma taxa de juros r constante.
Ativos com risco. Estarão disponíveis n ativos de risco $(S_1, \ldots, S_n)$.
Instantes de comercialização. Os instrumentos financeiros disponíveis no mercado só poderão ser comercializados em instantes bem definidos e denotados por t_m, $m \in \mathbb{N}^*$.
Venda descoberta. É permitido efetuar vendas descobertas (*short sellings*).

Para ativos com risco, venda descoberta significa a venda de um ativo em um instante t_m que o investidor não possui e assim terá a obrigação de no próximo instante t_{m+1} repor a ação para o seu titular original. Para ativos livres de risco, a venda descoberta é a venda de *bonds* e tem o mesmo efeito de tomar um empréstimo do banco. O investidor tem a obrigação de no próximo instante de comercialização pagar o valor do *bond* acrescido de juros.

2.2 Portfólios e estratégias de investimento

Definição 2.1. *Um portfólio construído em um instante de comercialização t_m, $\Phi_{t_m} = (\alpha(t_m), \phi_1(t_m), \ldots, \phi_n(t_m))$ é uma $n+1$-upla de números reais, onde $|\alpha(t_m)|$ é a quantidade de bonds e $|\phi_i(t_m)|$ é quantidade de ativos do tipo S_i $(i \in \{1, \ldots, n\})$ que um investidor escolhe para possuir no instante t_m. Observamos que os ativos com venda descoberta tem valores negativos no vetor portfólio.*

Definição 2.2. *Definimos o valor de um portfólio Φ_{t_m} no instante t pela função $V_t(\Phi_{t_m})$ dada por*

$$V_t(\Phi_{t_m}) = \alpha(t_m)B(t) + \sum_{i=1}^{n} \phi_i(t_m)S_i(t).$$

Definição 2.3. *Uma* estratégia de investimento *é uma família de portfólios* $\{\Phi_{t_m}\}_{m\in\mathbb{N}^*}$ *indexadas pelos instantes de comercialização* t_m.

Avisamos o leitor que quando usarmos a notação $V_t(\Phi)$ estamos nos referindo a $V_t(\Phi_t)$.

Das hipóteses sobre o mercado feitas na seção anterior e das definições acima, temos que os elementos do vetor portfólio são escolhidos em um instante t_m e devem ser mantidos constantes durante o intervalo (t_m, t_{m+1}). Vamos agora introduzir um conceito importante para a teoria que será desenvolvida adiante.

Definição 2.4. *Seja* I *um intervalo de tempo fixado. Uma estratégia de investimento* $\{\Phi_{t_m}\}_{m\in\mathbb{N}^*}$ *é dita ser* auto financiadora *em* I *quando o portfólio construído em* $t_m \in I$ *é totalmente financiado com o valor (calculado no instante* t_m*) do portfólio construído em* $t_{m-1} \in I$*, para todo* m *tal que* $[t_{m-1}, t_m] \in I$*. Em outras palavras, dados* $B(t_m), \alpha(t_{m-1}), S_i(t_m)$ *e* $\phi_i(t_{m-1})$ *com* $i \in \{1, \ldots, n\}$*, uma estratégia é dita auto finacionadora quando são escolhidos* $\alpha(t_{m-1})$ *e* $\phi_i(t_m)$*, com* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *de modo que seja válida relação:*

$$\alpha(t_{m-1})B(t_m) + \sum_{i=1}^{n} \phi_i(t_{m-1})S_i(t_m) = V_{t_m}(\Phi).$$

Vamos ilustrar esses conceitos através do

Exemplo 2.5. Suponha $n = 2$ e considere o seguinte cenário:

$$\begin{aligned} &B(0) = 100, \quad &&B(1) = 110, \quad &&B(2) = 121,\\ &S_1(t_0) = 60, \quad &&S_1(t_1) = 65, \quad &&S_1(t_2) = 75,\\ &S_2(t_0) = 20, \quad &&S_2(t_1) = 15, \quad &&S_2(t_2) = 25. \end{aligned}$$

No instante t_0 , escolhemos $\Phi_{t_0} = (5, 20, 65)$ e assim $V_{t_0}(\Phi_{t_0}) = 5\times100+20\times60+65\times20 = 3000$. No instante t_1, $V_{t_1}(\Phi_{t_0}) = 110 \times 5 + 20 \times 65 + 65 \times 15 = 2825$. Se escolhermos $\Phi_{t_1} = (4, 15, 94)$ temos que $V_{t_1}(\Phi_{t_1}) = 2825$ ou seja, o portfólio antigo financiou totalmente o portfólio novo e portanto a estratégia $\{\Phi_{t_1}, \Phi_{t_2}\}$ é auto financiadora. No instante t_2 teríamos $V_{t_2}(\Phi_{t_1}) = 4 \times 121 + 15 \times 75 + 95 \times 25 = 3959$ e portanto, para a estratégia continuar autofinaciadora devemos escolher $(\alpha(t_2), \phi_1(t_2), \phi_2(t_2))$ de tal forma que $\alpha(t_2) \times 121 + \phi_1(t_2) \times 75 + \phi_2(t_2) \times 25 = 3959$.

A partir deste ponto, a menos de menção explícita, as estratégias de investimento consideradas nesse texto serão auto financiadoras.

2.3 Arbitragem

Definição 2.6. *Dizemos que uma estratégia auto financiadora tem uma* oportunidade de arbitragem *em* $[0, T]$ *se existir* $T^* \in [0, T[$ *tal que*

1. $V_{T^*}(\Phi) = 0$.
2. $V_T(\Phi) \geq 0$.
3. $\mathbb{P}\{V_T(\Phi) > 0\} > 0$.

Onde $\mathbb{P}\{E\}$ é a probabilidade de ocorrer o evento E.

Definição 2.7. *Dizemos que um mercado obedece o* princípio da não-arbitragem *no período de tempo $[0, T]$ se nenhuma estratégia de investimento auto financiadora em $[0, T]$ possui uma oportunidade de arbitragem em $[0, T]$.*

Teorema 2.8. *Suponha que vale o princípio da não-arbitragem em $[0, T]$ e Φ^1 e Φ^2 são portfólios auto finaciadores que satisfazem*

$$V_T(\Phi^1) \geq V_T(\Phi^2); \tag{2.1}$$

$$\mathbb{P}\{V_T(\Phi^1) > V_T(\Phi^2)\} > 0. \tag{2.2}$$

Então

$$V_t(\Phi^1) > V_t(\Phi^2), \forall t \in [0, T[. \tag{2.3}$$

Demonstração. Suponha por absurdo que exista $t^* \in [0, T[$ tal que

$$V_{t^*}(\Phi^1) \leq V_{t^*}(\Phi^2).$$

Seja $\Delta \doteq V_{t^*}(\Phi^2) - V_{t^*}(\Phi^1) \geq 0$ e considere o seguinte portfólio: $\Phi^3 = \Phi^1 - \Phi^2 + \frac{\Delta}{V_{t^*}(B)} B$. Onde B é o *bond* disponível. Temos então que

$$V_{t^*}(\Phi^3) = V_{t^*}(\Phi^1) - V_{t^*}(\Phi^2) + \frac{\Delta}{V_{t^*}(B)} V_{t^*}(B) = 0$$

e

$$\begin{aligned} V_T(\Phi^3) &= V_T(\Phi^1) - V_T(\Phi^2) + \frac{\Delta}{V_{t^*}(B)} V_T(B) \\ &= V_T(\Phi^1) - V_T(\Phi^2) + \frac{\Delta B(0) e^{rT}}{B(0) e^{rt^*}} \\ &= V_T(\Phi^1) - V_T(\Phi^2) + \Delta e^{r(T - t^*)} \geq 0. \end{aligned}$$

Agora, como também temos que

$$\mathbb{P}\{V_T(\Phi^3) > 0\} \geq \mathbb{P}\{V_T(\Phi^1) - V_T(\Phi^2) > 0\} > 0,$$

resulta pela definição 2.6 que o portfólio Φ^3 possui um oportunidade de arbitragem em $[t^*, T]$ o que contradiz o fato de valer o princípio da não-arbitragem. □

Corolário 2.9. *Suponha que vale o princípio da não-arbitragem no período $[0, T]$ e no instante T vale a igualdade*

$$V_T(\Phi^1) = V_T(\Phi^2).$$

Então temos

$$V_t(\Phi^1) = V_t(\Phi^2), \ \forall t \in [0, T]. \tag{2.4}$$

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ e considere a estratégia de investimento Φ^3 definida como

$$\Phi^3 = \Phi^1 - \Phi^2 + \epsilon B.$$

Segue imediatamente da hipótese que

$$V_T(\Phi^3) = \epsilon V_T(B) > 0.$$

Pelo teorema 2.8, temos que para qualquer $t \in [0, T]$ vale

$$V_t(\Phi^3) = V_t(\Phi^1) - V_t(\Phi^2) + \epsilon V_t(B) > 0$$

e portanto

$$V_t(\Phi^1) > V_t(\Phi^2) - \epsilon V_t(B).$$

Fazendo $\epsilon \to 0$ resulta

$$V_t(\Phi^1) \geq V_t(\Phi^2)$$

Utilizando um argumento semelhante para o portfólio $\Phi^4 = \Phi^2 - \Phi^1 + \epsilon B$, chegamos em

$$V_t(\Phi^1) \leq V_t(\Phi^2),$$

donde segue o resultado. □

2.4 Consequências do princípio da não-arbitragem

Vamos assumir nesta seção que vale o princípio da não-arbitragem, a taxa de juros para investimentos sem riscos (*bonds* e transações bancárias) r é constante e as ações não pagam dividendos para seus titulares.

2.4.1 Limites para o preço de opções

Teorema 2.10. *Sejam S_t o preço da ação, c_t o preço de uma opção de compra européia, p_t o preço de uma opção de venda européia, K o preço de exercício dessa opção e T a data de vencimento. Valem então as seguintes desigualdades:*

$$\left(S_t - Ke^{-r(T-t)}\right)^+ \leq c_t \leq S_t; \tag{2.5}$$

$$\left(Ke^{-r(T-t)} - S_t\right)^+ \leq p_t \leq Ke^{-r(T-t)}. \tag{2.6}$$

Demonstração. Vamos provar (2.5). Se fosse $c_t > S_t$ então teríamos uma oportunidade de arbitragem. De fato, emita e venda uma opção de compra e com este dinheiro compre a ação. Invista o que sobrou isto é, $c_0 - S_0$ no banco à taxa r de juros. Na data de vencimento você obterá $\min(K, S_T) + (c_0 - S_0)e^{rT-t_0} > 0$ o que é absurdo segundo o princípio da não-arbitragem e esta provado um sentido da desigualdade (2.5).

Vamos agora provar o outro lado. Em primeiro lugar, é evidente que $c_t > 0$, caso contrário "comprar" a opção nós daria lucro sem risco e agora, sem nenhuma obrigação futura. Sejam Φ^1 e Φ^2 dois portfólios construídos em $t = 0$. Φ^1 é constituído de uma opção de compra européia e um investimento no banco de Ke^{-rT}, Φ^2 é constituído de uma ação (a mesma relacionada à opção do portfólio Φ^2). Para $t = T$, temos

$$\begin{aligned} V_T(\Phi^1) &= V_T(c) + V_T(Ke^{-rT}) \\ &= (S_T - K)^+ + K \\ &= \begin{cases} S_T, & \text{se } S_T \geq K, \\ K, & \text{se } S_T < K. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Como $V_T(\Phi^2) = S_T$, temos por (2.7) que

$$V_T(\Phi^1) \geq V_T(\Phi^2),$$

e

$$\mathbb{P}\{V_T(\Phi^1) > V_T(\Phi^2)\} = \mathbb{P}\{K - S_T > 0\} > 0.$$

Assim, de acordo com o teorema 2.8, devemos ter para qualquer $t \in [0, T[$, $V_t(\Phi^1) > V_t(\Phi^2)$ e assim obtemos que $c_t + Ke^{-r(T-t)} > S_t$. Como $c_t > 0$, resulta o que queríamos provar. A demonstracao de (2.6) é análoga. □

Exemplo 2.11. Considere uma opção de compra européia de uma ação que não paga dividendos, cujo preço atual é R\$100,00 com preço de exercício R\$98,00 e vencimento em seis meses com taxa de juros livre de risco $r = 10\%$ ao ano. Da desigualdade (2.5) temos que um limite mínimo para o preço da opção é $\left(S_t - Ke^{-r(T-t)}\right)^+ = 100 - 98e^{-0,1(0,5)} \approx R\$6,80$.

2.4.2 Paridade compra-venda

Vamos demonstrar agora a chamada paridade compra-venda. Ela mostra que dada uma opção de compra européia e uma opção de venda européia ambas com mesma tempo para o vencimento e preço de exercício, basta saber o preço de uma para determinar o preço da outra.

Teorema 2.12. *Sejam c_t o preço de uma opção de compra européia, p_t o preço de uma opção de venda européia, r a taxa de juros livre de riscos, K o preço de exercício e S_t o preço da ação ao qual as opções estão atreladas. Vale então a paridade compra-venda*

$$c_t + Ke^{-r(T-t)} = p_t + S_t. \tag{2.8}$$

Demonstração. Considere em $t = 0$ dois portfólios. $\Phi^1 = c + Ke^{-rT}$, ou seja, uma opção de compra e um investimento bancário (ou *bond*) de Ke^{-rT} e $\Phi^2 = p + S$, isto é, uma opção de venda e uma ação. Temos que os valores destes portfólios na data de vencimento são

$$V_T(\Phi^1) = (S_T - K)^+ + K = \max\{K, S_T\},$$
$$V_T(\Phi^2) = (K - S_T)^+ + S_T = \max\{K, S_T\}.$$

Isto é

$$V_T(\Phi^1) = V_T(\Phi^2).$$

E assim, pelo corolário (2.9), devemos ter

$$V_t(\Phi^1) = V_t(\Phi^2), \forall t \in [0, T],$$

donde resulta o teorema. □

Quando a paridade compra-venda é violada não é difícil identificar uma oportunidade de arbitragem. Este é o objetivo do próximo exemplo.

Exemplo 2.13. Com as mesmas notações do teorema 2.12, sejam c_t = R\$5,09; p_t = R\$7,78; K = R\$24,00; $T = 0{,}5$; S_0 = R\$20,37 e $r = 7,48\%$. Uma oportunidade de arbitragem pode ser atingida considerando a seguinte estratégia de investimento Φ:
No instante $t = 0$:

- Emita e venda uma opção de compra por R\$5,09;
- Tome um empréstimo no banco de R\$23,06;
- Compre uma ação por R\$20,37;
- Compre uma opção de venda por R\$7,78.

Temos assim que $V_0(\Phi) = 0$. Quando $t = T = 0{,}5$, se $S_T > K$ venda sua ação por R\$24,00, se $S_T \leq K$ exerça sua opção de venda e venda sua ação por R\$24,00. Pague o empréstimo bancário cujo valor é $23{,}06 \times e^{0{,}0748 \times 0{,}5} \approx 23{,}93$, e portanto $V_T(\Phi) = 0{,}06 > 0$. Como $\mathbb{P}\{V_T(\Phi) > 0\} = \mathbb{P}\{S_T > K \text{ ou } S_T \leq K\} > 0$, está constituída a oportunidade de arbitragem.

2.4.3 Dependência do preço de uma opção com o preço de exercício

É razoável esperar que entre duas opções de compra com mesmo ativo objeto e mesma data de vencimento, aquela que tiver maior preço de exercício deverá ser mais barata já que deixa seu detentor com menos espaço para lucro. Análogamente, entre duas opções de venda com mesmo ativo objeto e mesma data de vencimento, a que tiver maior preço de exercício deverá ser a mais cara. O próximo teorema mostra isso e também que a diferença entre os preços das opções não pode ser superior à diferença dos preços de exercício.

Teorema 2.14. *Sejam $c_t(K)$ e $p_t(K)$ o preço de uma opção de compra e de venda respectivamente e K o preço de exercício. Considere $c(K_1), c(K_2), p(K_1), p(K_2)$ duas opções de compra e duas opções de venda todas com a mesma data de vencimento. Nessas condições, se $K_1 > K_2$ temos*

$$0 \leq c_t(K_2) - c_t(K_1) \leq K_1 - K_2 \tag{2.9}$$

e

$$0 \leq p_t(K_1) - p_t(K_2) \leq K_1 - K_2 \tag{2.10}$$

Demonstração. Vamos mostrar (2.9).
1ª **parte**: $0 \leq c_t(K_2) - c_t(K_1)$. De fato, fixe $t = 0$ e suponha por absurdo que $c_0(K_1) > c_0(K_2)$. Considere a seguinte estratégia Φ:

- Emita e venda uma opção de compra com preço de exercício K_1;
- Compre uma opção de compra com preço de exercício K_2;
- Invista a diferença $c_0(K_1) - c_0(K_2)$ em um banco.

Temos assim $V_0(\Phi) = 0$. Na data de vencimento $t = T$, o detentor da opção pode (caso I) ou não (caso II) exercer o direito de comprar a ação.

No caso I devemos comprar uma opção por S_T e vende-lá por K_1. Para esta operação precisamos da quantia $(S_T - K_1)^+$. Para isso, exerça a opção e compre a ação por K_2 obtendo $(S_T - K_2)^+$ de lucro. Como $K_2 < K_1$ vem que $(S_T - K_2)^+ \geq (S_T - K_1)^+$. Agora saque o dinheiro investido e com isso garantimos que $V_T(\Phi) > 0$. No caso II basta sacar o dinheiro investido e obtemos também que $V_T(\Phi) > 0$.

Agora, como $\mathbb{P}\{V_T(\Phi) > 0\} = \mathbb{P}\{I \text{ ou } II\} > 0$, temos que o princípio da não-arbitragem foi violado, o que é absurdo.
2ª **parte**: $c_t(K_2) - c_t(K_1) \leq K_1 - K_2$. Considere dois portfólios no instante t:

$$\Phi^1 = c(K_1) + K_1,$$

$$\Phi^2 = c(K_2) + K_2.$$

Na data de vencimento temos:

$$V_T(\Phi^1) = c_T(K_1) + K_1 e^{r(T-t)} = (S_T - K_1)^+ + K_1 e^{r(T-t)},$$

$$V_T(\Phi^2) = c_T(K_2) + K_2 e^{r(T-t)} = (S_T - K_2)^+ + K_2 e^{r(T-t)}.$$

Vamos estudar os três casos possíveis:

I) $S_t > K_1$:

$$\begin{aligned} V_T(\Phi^1) &= S_T + K_1)(e^{r(T-t)} - 1) \\ &> S_T + K_2)(e^{r(T-t)} - 1) \\ &= V_T(\Phi^2). \end{aligned}$$

II) $K_2 < S_T < K_1$:

$$\begin{aligned} V_T(\Phi^1) &= K_1 e^{r(T-t)} \\ V_T(\Phi^2) &= S_T + K_2(e^{r(T-t)} - 1) \\ V_T(\Phi^1) - V_T(\Phi^2) &= (K_1 - K_2)e^{r(T-t)} + (K_2 - S_T) \\ &> (K_1 - K_2)e^{r)(T-t)} > 0. \end{aligned}$$

III) $S_T < K_2$:
$V_T(\Phi^1) = K_1 e^{r(T-t)} > K_2 e^{r(T-t)} = V_T(\Phi^2)$.

Portanto em $t = T$ temos

$$V_T(\Phi^1) \geq V_T(\Phi^2)$$

e

$$\mathbb{P}\{V_T(\Phi^1) > V_T(\Phi^2)\} = \mathbb{P}\{I \text{ ou } II \text{ ou } III\} > 0.$$

Assim, pelo teorema 2.8 para todo $t < T$ devemos ter

$$V_t(\Phi^1) > V_t(\Phi^2),$$

ou seja

$$c_t(K_1) + K_1 > c_t(K_2) + K_2,$$

de onde segue o resultado. A demonstração de (2.10) é análoga. □

Teorema 2.15. *O preço de uma opção de compra $c_t(K)$ e de uma opção de venda $p_t(K)$ são funcões convexas de K, isto é, para $K_1 > K_2$ e $K_\lambda = \lambda K_1 + (1-\lambda)K_2$ $(0 \leq \lambda \leq 1)$ valem:*

$$c_t(K_\lambda) \leq \lambda c_t(K_1) + (1-\lambda)c_t(K_2) \tag{2.11}$$

e

$$p_t(K_\lambda) \leq \lambda p_t(K_1) + (1-\lambda)p_t(K_2). \tag{2.12}$$

Demonstração. Vamos mostrar (2.11). A demonstração de (2.12) é análoga. Considere dois portfólios em $t = 0$:

$$\Phi^1 = \lambda c(K_1) + (1-\lambda)c(K_2)$$

e

$$\Phi^2 = c(K_\lambda)$$

Em $t = T$ temos:

$$V_T(\Phi^1) = \lambda(S_T - K_1)^+ + (1-\lambda)(S_T - K_2)^+$$

e

$$V_T(\Phi^2) = (S_T - K_\lambda)^+.$$

Vamos analisar os quatro casos possíveis.

I) $S_T \geq K_1$. Neste caso temos

$$\begin{aligned} V_T(\Phi^1) &= \lambda S_T - \lambda K_1 + S_T - K_2 - \lambda S_T + \lambda K_2 \\ &= S_T - \lambda K_1 + K_2(1-\lambda) \\ &= S_T - K_\lambda \\ &= V_T(\Phi^2). \end{aligned}$$

II) $K_\lambda \leq S_T < K_1$. Neste caso temos

$$\begin{aligned}
V_T(\Phi^1) &= (1-\lambda)(S_T - K_2)\\
V_T(\Phi^2) &= S_T - K_\lambda = S_T + \lambda S_T - \lambda S_T - \lambda K_1 - (1-\lambda)K_2\\
&= \lambda(S_T - K_1) + S_T(1-\lambda) - K_2(1-\lambda)\\
&= \lambda(S_T - K_1) + (1-\lambda)(S_T - K_2)\\
V_T(\Phi^1) &> V_T(\Phi^2).
\end{aligned}$$

III) $K_2 < S_T < K_\lambda$. Neste caso temos

$$\begin{aligned}
V_T(\Phi^1) &= (1-\lambda)(S_T - K_2)\\
V_T(\Phi^2) &= 0\\
V_T(\Phi^1) &> V_T(\Phi^2).
\end{aligned}$$

IV) $S_T < K_2$. Neste caso temos

$$V_T(\Phi^1) = V_T(\Phi^2) = 0.$$

Assim, para $t = T$ temos $V_T(\Phi^1) \geq V_T(\Phi^2)$ e $\mathbb{P}\{V_T(\Phi^1) > V_T(\Phi^1)\} = \mathbb{P}\{K_2 < S_T < K_1\} > 0$ e portanto pelo teorema 2.8 temos que para $t \in [0, T[$

$$V_t(\Phi^1) > V_t(\Phi^2)$$

isto é

$$\lambda c_t(K_1) + (1-\lambda)c_t(K_2) > c_t(K_\lambda).$$

O que conclui a demonstração. □

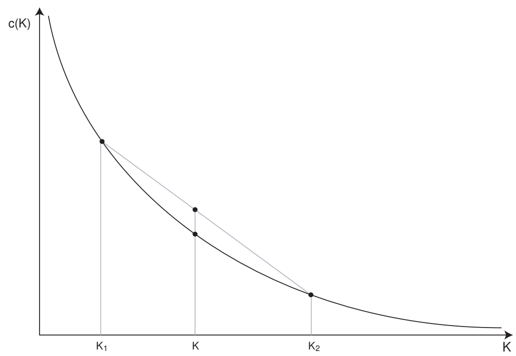

Figura 2.1. A convexidade de um opção em relação ao preço de exercício.

3

Modelos discretos para a precificação de opções

3.1 Modelo binomial de um período e dois estados

Um dos modelos mais simples para o movimento de preços dos ativos com risco é o chamado modelo binomial de um período e dois estados. Baseado neste modelo, vamos estudar como precificar opções respeitando o princípio da não-arbitragem.

Considere um mercado onde estão disponíveis uma ação S e um ativo livre de risco B. No modelo binomial de um período e dois estados, os ativos podem ser comercializados apenas no instante inicial $t = 0$ e no instante final $t = T$. No estado final, o preço do ativo S pode assumir apenas dois valores: $S_T^u \doteq S_0 u$ ou $S_T^d \doteq S_0 d$, com $u > d$. Além disso, devemos ter $0 \leq \mathbb{P}\{S_T = S_T^u\} \leq 1$, $0 \leq \mathbb{P}\{S_T = S_T^d\} \leq 1$ e $\mathbb{P}\{S_T = S_T^u\} + \mathbb{P}\{S_T = S_T^d\} = 1$.

Considere o seguinte problema: Seja S_0 o preço do ativo com risco S em $t = 0$ e em $t = T$ duas alternativas para o preço, a saber, S_T^u ou S_T^d. Um investidor em $t = 0$ adquire uma opção de compra Λ com preço de exercício K e data de vencimento T. Suponha também que a taxa de juros do ativo sem risco B seja r no período $[0, T]$. Isso significa que $B_T = \rho B_0$, com $\rho \doteq e^{rT}$. Desejamos encontrar o preço Λ_0 da opção no instante $t = 0$. Para isso, considere agora a posição do lançador da opção. Suponha que o ativo em questão seja uma ação cujo preço S_t é uma variável aleatória e portanto o lançador está sujeito a um risco. Para controla-lo é comum utilizar uma estratégia chamada de Δ *hedging* que funciona da seguinte maneira: Se você é o titular de uma opção de compra, é porque espera que o preço da ação suba acima do preço de exercício. Isso no entanto pode não ocorrer. Para compensar este risco, você toma uma posição contrária em relação ao ativo objeto, isto é, vende uma certa quantidade de ações e se no futuro o preço dela cair você estará protegido. Vamos resumir e generalizar esta idéia na próxima

Definição 3.1. ***(Δ Hedging)*** *Dada uma opção Λ e seu ativo objeto S, comercialize Δ ações S na direção oposta de forma que o portfólio resultante $\Pi = \Lambda - \Delta S$ seja livre de risco.*

Suponha então que exista Δ de tal forma que Π seja livre de risco. No nosso modelo simplificado, isso quer dizer que

$$V_T(\Pi) = \rho V_0(\Pi). \tag{3.1}$$

Sabemos que $V_T(\Pi)$ pode assumir apenas dois valores, a saber $\Lambda_T^u - \Delta S_0^u$, onde $\Lambda_T^u \doteq (S_0 u - K)^+$ ou $\Lambda_T^d - \Delta S_0^d$, onde $\Lambda_T^d \doteq (S_0 d - K)^+$. Assim, de (3.1) temos

$$\begin{cases} \Lambda_T^u - \Delta S_0 u = \rho(\Lambda - \Delta S_0) \\ \Lambda_T^d - \Delta S_0 d = \rho(\Lambda - \Delta S_0) \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema obtemos:

$$\Delta = \frac{\Lambda_T^u - \Lambda_T^d}{S_0(u-d)} \tag{3.2}$$

e

$$\Lambda_0 = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\rho - d}{u-d}\Lambda_T^u + \frac{u-\rho}{u-d}\Lambda_T^d\right). \tag{3.3}$$

Assim precificamos uma opção através da estratégia de Δ*Hedging*. É natural neste ponto se perguntar se este valor cria ou não uma oportunidade de arbitragem no mercado. Vamos analisar isso nas próximas seções.

3.2 Mercados de risco neutro

Definição 3.2. *Um mercado financeiro onde o retorno esperado de um ativo com risco em $t = T$ é igual ao retorno de um bond livre de risco é chamado de mercado de risco neutro.*

Teorema 3.3. *Nas mesmas notações da seção anterior, suponha que*

$$d < \rho < u \tag{3.4}$$

e defina uma nova medida de probabilidade Q *da seguinte maneira:*

$$q_u = \mathbb{P}_{\mathrm{Q}}\{S_T = S_T^u\} = \frac{\rho - d}{u - d} \tag{3.5}$$

$$q_d = \mathbb{P}_{\mathrm{Q}}\{S_T = S_T^d\} = \frac{u - \rho}{u - d} \tag{3.6}$$

Nessas condições temos que $0 < q_u < 1$, $0 < q_d < 1$ *e* $q_u + q_d = 1$.

Demonstração. Imediata. □

Vamos denotar por $\mathbb{E}_{\mathrm{Q}}(\Lambda_T)$ o valor esperado da variável aleatória Λ_T sob a medida de probabilidade Q. Temos assim que (3.3) pode ser escrita como

$$\Lambda_0 = \frac{1}{\rho}\mathbb{E}_{\mathrm{Q}}(\Lambda_T) \tag{3.7}$$

Teorema 3.4. *Com as mesmas notações da seção anterior e sob a medida de probabilidade* Q *definida no teorema 3.3, temos que o mercado simplificado que estamos considerando é de risco neutro.*

Demonstração. Sejam S o ativo com risco e B o *bond* livre de risco e S_t, B_t os respectivos preços no instante t. Devemos verificar a definição 3.2, isto é

$$\frac{\mathbb{E}_{\mathrm{Q}}(S_T) - S_0}{S_0} = \frac{B_T - B_0}{B_0}.$$

Para isto, observe que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathrm{Q}}\left(\frac{S_T}{B_T}\right) &= \frac{1}{\rho B_0}\left(q_u S_T^u + q_d S_T^d\right) \\
&= \frac{1}{\rho B_0}\left(\frac{\rho - d}{u - d} S_0 u + \frac{u - \rho}{u - d} S_0 d\right) \\
&= \frac{1}{\rho B_0}\left(S_0\left[\frac{\rho - d}{u - d} u + \frac{u - \rho}{u - d} d\right]\right) \\
&= \frac{S_0}{B_0}\left(\frac{u\rho - du + ud - \rho d}{\rho(u - d)}\right) \\
&= \frac{S_0}{B_0},
\end{aligned}$$

com isso resulta que

$$\frac{\mathbb{E}_{\mathrm{Q}}(S_T) - S_0}{S_0} = \frac{\mathbb{E}_{\mathrm{Q}}\left(\frac{S_T}{B_T}\right) B_T - S_0}{S_0} = \frac{\frac{B_T}{B_0} S_0 - S_0}{S_0} = \frac{B_T - B_0}{B_0},$$

como queríamos. □

Chamaremos assim a medida de probabilidade Q de **medida de risco neutro** e o preço de uma opção dado por uma medida de risco neutro será chamado de **preço de risco neutro**.

Teorema 3.5. *Em um mercado constituído de um ativo com risco S e um ativo livre de risco B, a condição (3.4) é válida se e somente se valer o princípio da não-arbitragem.*

Demonstração. Suponha que (3.4) fosse falso. Vamos supor que valesse $\rho \geq u$ (a demonstração para o caso $\rho \leq d$ é análoga) e considere o seguinte portfólio:

$$\Phi = -S + \frac{S_0}{B_0} B.$$

Temos que em $t = 0$,

$$V_0(\Phi) = -S_0 + \frac{S_0}{B_0} B_0 = 0, \tag{3.8}$$

já em $t = T$ temos dois valores possíveis para $V_T(\Phi)$:

$$V_T(\Phi) = \begin{cases} V_T^u(\Phi) = -S_0 u + \frac{S_0}{B_0}\rho B_0 = (\rho - u) S_0 \geq 0 \\ V_T^d(\Phi) = -S_0 d + \frac{S_0}{B_0}\rho B_0 = (\rho - d) S_0 > 0 \end{cases}$$

e portanto $V_T(\Phi) \geq 0$. Agora, como $\mathbb{P}\{V_T(\Phi) > 0\} \geq \mathbb{P}\{S_T = S_T^d\} > 0$, temos pela definição 2.6 que existe uma oportunidade de arbitragem para o portfólio Φ o que é absurdo.

Reciprocamente, suponha que vale (3.4). Vamos mostrar que vale o princípio da não-arbitragem. Devemos mostrar então que $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se $V_0(\Phi) = \alpha S_0 + \beta B_0 = 0$ e $V_T(\Phi) = \alpha S_t + \beta B_t \geq 0$ $(\star)$ então $V_T(\Phi) = \alpha S_T + \beta B_T = 0$ $(\star\star)$. De fato, seja Q a medida de probabilidade definida no teorema 3.3. Calculando o valor esperado de $V_T(\Phi)$ temos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathrm{Q}}(V_T(\Phi)) &= q_u V_T^u(\Phi) + q_d V_T^d(\Phi) \\
&= \frac{\rho - d}{u - d}(\alpha S_0 u + \beta \rho B_0) + \frac{u - \rho}{u - d}(\alpha S_0 d + \beta \rho B_0) \\
&= \rho(\alpha S_0 + \beta B_0) \\
&= \rho V_0(\Phi) \text{ e usando (3.8) resulta} \\
\mathbb{E}_{\mathrm{Q}}(V_T(\Phi)) &= 0.
\end{aligned}$$

Agora, de $(\star)$ temos que $V_T^u(\Phi) \geq 0$ e $V_T^d(\Phi) \geq 0$, das contas acima temos que $q_u V_T^u(\Phi) + q_d V_T^d(\Phi) = 0$ e como $0 < q_u < 1$, $0 < q_d < 1$ temos que $V_T^u(\Phi) = V_T^d(\Phi) = 0$, isto é, $\mathbb{P}\{V_T(\Phi) > 0\} = 0$. Assim $(\star\star)$ vale e está provado o teorema. $\square$

3.3 O método da árvore binomial

Vamos nesta seção desenvolver o método da árvore binomial para precificar uma opção européia que não paga dividendos. Para isso, vamos dividir o tempo de vida da opção em N intervalos iguais $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ e supor que o preço do ativo objeto em cada intervalo de tempo $[t_n, t_{n+1}], (0 \leq n \leq N-1)$ seja descrito de acordo com o modelo binomial de um período e dois estados. Com isso, as possibilidades do preço do ativo objeto S pode ser representado através de uma árvore binomial como na figura (3.1). Para fixar as idéias, considere que Λ é uma opção de compra com ativo objeto S e preço de exercício K e vamos introduzir as seguintes notações:

$$S_\alpha^n \doteq S_0 u^{n-\alpha} d^\alpha \tag{3.9}$$

e

$$\Lambda_\alpha^n \doteq (S_\alpha^n - K)^+ \tag{3.10}$$

estas notações valem para cada $0 \leq n \leq N$ fixado e $0 \leq \alpha \leq n$. Veja a figura (3.2). Vamos definir também $\hat{\alpha} \doteq \max\{\alpha \mid S_0 u^{N-\alpha} d^\alpha - K \geq 0, 0 \leq \alpha \leq N\}$ e assim temos a árvore binomial dos preços da opção Λ representada na figura (3.3)

Vamos agora resolver o seguinte problema: Dados $\{\Lambda_\alpha^N\}_{\alpha=0}^N$, determinar Λ_0^0 que é o preço da opção em $t = 0$. Para isso, perceba que podemos determinar $\{\Lambda_\alpha^{N-1}\}_{\alpha=0}^{N-1}$ da seguinte maneira: Para cada elemento em $\{\Lambda_\alpha^{N-1}\}_{\alpha=0}^{N-1}$ aplique o método binomial de um período e dois estados (ver figura (3.4)). Assim, defina Q - a medida de risco neutro como no teorema 3.3 e sejam

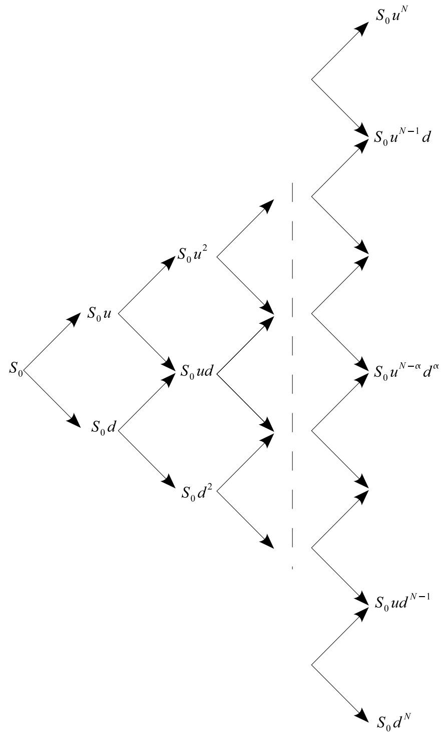

Figura 3.1. Modelo binomial de preço de uma ação

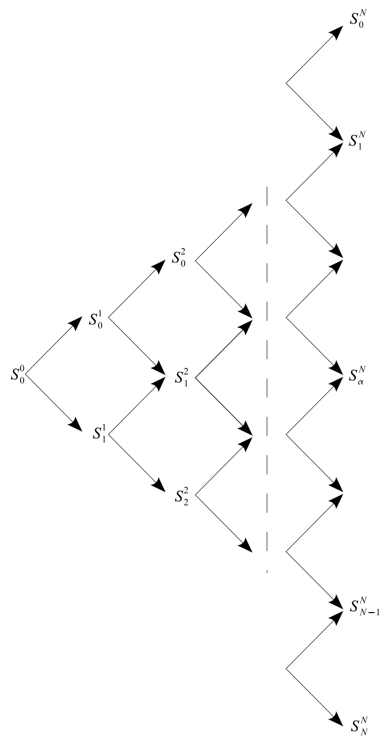

Figura 3.2.

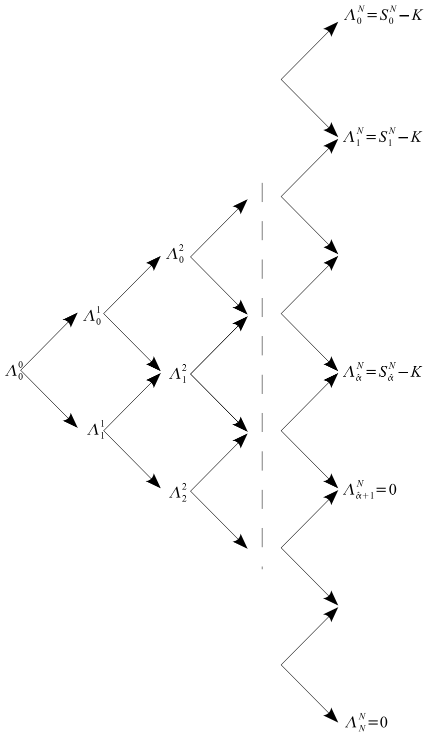

Figura 3.3. Árvore binomial de preços de uma opção

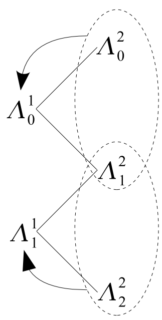

Figura 3.4.

$$q_u = \frac{\rho - d}{u - d} \doteq q$$

e

$$q_d = \frac{u - \rho}{u - d} \doteq 1 - q.$$

Utilizando (3.7) temos que

$$\Lambda_\alpha^{N-1} = \frac{1}{\rho}\left[q\Lambda_\alpha^N + (1-q)\Lambda_{\alpha+1}^N\right] \qquad (0 \leq \alpha \leq N-1).$$

Por indução, pode-se mostrar que para qualquer $h \in \{1, 2, \ldots N\}$:

$$\Lambda_\alpha^{N-h} = \frac{1}{\rho^h} \sum_{l=0}^{h} \binom{h}{l} q^{h-l}(1-q)^l \Lambda_{\alpha+l}^N \qquad (0 \le \alpha \le N-h). \tag{3.11}$$

Esta fórmula tem uma simples interpretação combinatória para os coeficientes de $\Lambda_{\alpha+l}^N$. Para ver isso, considere $N = 3$. Temos a seguinte árvore de preços da opção Λ:

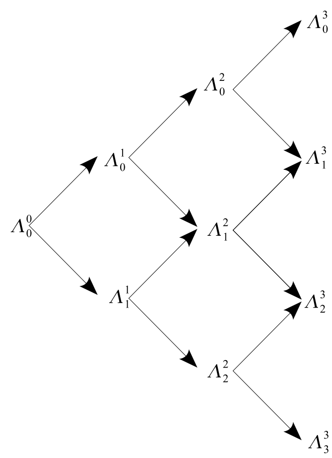

Figura 3.5.

Suponha que seja dado $\{\Lambda_\alpha^3\}_{\alpha=0}^3$. Fixando $h = 2$, podemos, de acordo com a fórmula (3.11) determinar Λ_0^1 e Λ_1^1. Temos então

$$\Lambda_0^1 = \frac{1}{\rho^2}\left[\binom{2}{0}q^2(1-q)^0\Lambda_0^3 + \binom{2}{1}q(1-q)\Lambda_1^3 + \binom{2}{2}q^0(1-q)^2\Lambda_2^3\right]$$

e

$$\Lambda_1^1 = \frac{1}{\rho^2}\left[\binom{2}{0}q^2(1-q)^0\Lambda_1^3 + \binom{2}{1}q(1-q)\Lambda_2^3 + \binom{2}{2}q^0(1-q)^2\Lambda_3^3\right].$$

Perceba que partindo do nó Λ_1^1, podemos chegar somente aos nós Λ_1^3, Λ_2^3 e Λ_3^3. Para chegar ao nó Λ_1^3, o preço da ação deve aumentar duas vezes (q^2) e não diminuir nenhuma ($(1-q)^0$) e há apenas um ($\binom{2}{0}$) caminho de Λ_1^1 até Λ_1^3. Para chegar ao nó Λ_2^3, o preço da ação deve aumentar uma vez (q^1) e diminuir uma vez ($(1-q)^1$) e existem dois ($\binom{2}{1}$) caminhos de Λ_1^1 até Λ_2^3. Da mesma maneira, pode-se interpretar os coeficientes do termo Λ_3^3.

Vamos agora melhorar a fórmula (3.11) tendo em vista a definição de $\hat{\alpha}$. Quando $\alpha + l \le \hat{\alpha}$, temos $\Lambda_{\alpha+l}^N = S_{\alpha+l}^N - K$ e assim

$$\Lambda_\alpha^{N-h} = \frac{1}{\rho^h} \sum_{l=0}^{\hat{\alpha}-\alpha} \binom{h}{l} q^{h-l}(1-q)^l (S_{\alpha+l}^N - K) \tag{3.12}$$

e quando $\alpha + l > \hat{\alpha}$,

$$\Lambda_\alpha^{N-h} = 0.$$

De acordo com a nossa notação, temos que $S_{\alpha+l}^N = S_\alpha^{N-h} u^{h-l} d^l$. Assim, para $\alpha + l \le \hat{\alpha}$, (3.12) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\Lambda_\alpha^{N-h} &= \frac{1}{\rho^h}\left(\sum_{l=0}^{\hat{\alpha}-\alpha}\binom{h}{l} q^{h-l}(1-q)^l S_{\alpha+l}^{N-h} u^{hl} d^l - \binom{h}{l} q^{h-l}(1-q)^l K\right) \\
&= \frac{1}{\rho^h}\left(\sum_{l=0}^{\hat{\alpha}-\alpha}\binom{h}{l} q^{h-l}(1-q)^l S_{\alpha+l}^{N-h} u^{hl} d^l\right) - \frac{K}{\rho^h}\sum_{l=0}^{\hat{\alpha}-\alpha}\binom{h}{l} q^{h-l}(1-q)^l \\
&= S_\alpha^{N-h}\left(\sum_{l=0}^{\hat{\alpha}-\alpha}\binom{h}{l}\frac{(qu)^{h-l}[(1-q)d]^l}{\rho^{h-l}\rho}\right) - \frac{K}{\rho^h}\sum_{l=0}^{\hat{\alpha}-\alpha}\binom{h}{l} q^{h-l}(1-q)^l \\
&= S_\alpha^{N-h}\left(\sum_{l=0}^{\hat{\alpha}-\alpha}\binom{h}{l}\left[\frac{qu}{\rho}\right]^{h-l}\left[\frac{(1-q)d}{\rho}\right]^l\right) - \frac{K}{\rho^h}\sum_{l=0}^{\hat{\alpha}-\alpha}\binom{h}{l} q^{h-l}(1-q)^l. \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

Seja agora

$$\hat{q} \doteq \frac{qu}{\rho}. \qquad (3.14)$$

Pela identidade $qu + (1-q)d = \rho$, temos que

$$\frac{d}{\rho}(1-q) = 1 - \hat{q}. \qquad (3.15)$$

Substituindo (3.14) e (3.15) em (3.13) temos que para $\alpha \le \hat{\alpha}$:

$$\Lambda_\alpha^{N-h} = S_\alpha^{N-h}\left(\sum_{l=0}^{\hat{\alpha}-\alpha}\binom{h}{l}\hat{q}^{h-l}(1-\hat{q})^l\right) - \frac{K}{\rho^h}\sum_{l=0}^{\hat{\alpha}-\alpha}\binom{h}{l} q^{h-l}(1-q)^l.$$

Seja $m \ge n$ e defina

$$\theta(n,m,p) \doteq \sum_{l=0}^{n}\binom{m}{l} p^{m-l}(1-p)^l. \qquad (3.16)$$

Assim, chegamos finalmente na expressão:

$$\Lambda_\alpha^{N-h} = S_\alpha^{N-h}\theta(\hat{\alpha}-\alpha, h, \hat{q}) - \frac{K}{\rho^h}\theta(\hat{\alpha}-\alpha, h, q). \qquad (3.17)$$

Em particular para $h = N$ e $\alpha = 0$:

$$\Lambda_0^0 = S_0\theta(\hat{\alpha}, N, \hat{q}) - \frac{K}{\rho^N}\theta(\hat{\alpha}, N, q). \qquad (3.18)$$

Resolvemos então o problema proposto no início desta seção. A expressão (3.18) é conhecida como fórmula de Cox-Rubinstein e fornece o preço de uma opção de compra européia com preço de exercício K e data de vencimento depois de N instantes de comercialização, segundo o modelo binomial.

Vamos agora derivar uma expressão análoga a (3.17) para opções de venda utilizando a paridade compra-venda (Teorema 2.12). Perceba que na equação (2.8) o fator $B_t = e^{-r(T-t)}$ é o quanto deve ser depositado em um banco no instante t ($t < T$) para que em $t = T$ possa ser sacado R\$1,00, considerando taxa de juros r composta continuamente. No modelo binomial, entretanto, as transações são feitas em tempo discreto e portanto os juros devem ser compostos em tempo discreto. Assim, sendo ρ a taxa de crescimento do *bond* isto é, $B_{n+1} = \rho B_n$ temos, com as mesmas notações do teorema 2.12 a forma discretizada da paridade compra-venda:

$$c_\alpha^{N-h} + \frac{K}{\rho^h} = p_\alpha^{N-h} + S_\alpha^{N-h}. \tag{3.19}$$

Substituindo (3.17) em (3.19) obtemos

$$p_\alpha^{N-h} = S_\alpha^{N-h}(\theta(\hat{\alpha} - \alpha, h, \hat{q}) - 1) + \frac{K}{\rho^h}(1 - \theta(\hat{\alpha} - \alpha, h, q)).$$

Definindo

$$\eta(n, m, p) \doteq \sum_{l=n+1}^{m} \binom{m}{l} p^{m-l}(1-p)^l \qquad (m \geq n+1)$$

temos que $1 - \theta(\hat{\alpha} - \alpha, h, q) = \eta(\hat{\alpha} - \alpha, h, q)$ e portanto a fórmula para a precificação de uma opção de venda pelo modelo binomial é dada por

$$p_\alpha^{N-h} = \frac{K}{\rho^h}\eta(\hat{\alpha} - \alpha, h, q) - S_\alpha^{N-h}\eta(\hat{\alpha} - \alpha, h, \hat{q}),$$

com $0 \leq h \leq N$ e $0 \leq \alpha \leq N - h$.

4

Movimento Browniano e o Cálculo de Itô

No capítulo anterior conseguimos precificar uma opção ao impor um modelo discreto, o modelo binomial, para o movimento do preço de um ativo. O objetivo neste capítulo é apresentar um modelo contínuo (movimento Browniano geométrico) para o movimento dos preços dos ativos e a ferramenta básica (cálculo de Itô) para a precificação de derivativos.

4.1 Movimento Browniano

No início do século XIX, Robert Brown, um botânico escocês estudava o movimento de grãos de polén em suspensão. Espantado com a velocidade e a aleatoriedade desses movimentos, Brown chegou a supor que os grãos estivessem vivos!. Em 1900, o francês Louis Bachelier analisou o movimento dos preços das ações de Paris e o comparou com o movimento dos grãos de polén observado por Brown. Batizado de movimento Browniano, é hoje um dos modelos mais usados para descrever o movimento dos preços de uma ação.

Podemos entender o movimento Browniano como o processo limite de um movimento mais simples - O passeio aleatório. Na teoria de probabilidade, o movimento Browniano e o passeio aleatório são exemplos de processos estocásticos. Para definir estes processos, vamos fixar um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (veja o apêndice sobre probabilidade) e assim temos a seguinte

Definição 4.1. *Um processo estocástico (unidimensional) é uma família de variáveis aleatórias denotada por $\{X(t,\omega) : t \in I\}$ definidas em um mesmo espaço de probabilidade, onde o conjunto de parâmetros I é um subconjunto da reta real.*

O conjunto de parâmetros I é usualmente chamado de domínio de definição do processo $\{X(t,\omega) : t \in I\}$. Quando $I = \mathbb{N}_+ = \{0, 1, \ldots\}$ dizemos que o processo é discreto e quando I é um intervalo da reta real dizemos que o processo é contínuo.

Da definição (4.1) temos que para cada $t \in I$ fixo, $X(t) = X(t, \cdot)$ é uma variável aleatória definida em Ω. Por outro lado, para qualquer $\omega \in \Omega$ fixo, $X(\cdot, \omega)$ é uma função definida no conjunto dos parâmetros com valores na reta. Chamamos tais funções de realizações ou trajétorias do processo estocástico $\{X(t,\omega) : t \in I\}$.

Vamos agora voltar aos passeios aleatórios. Para construir um, vamos considerar o experimento que consiste em lançar uma moeda honesta 4 vezes. Cada lançamento consome uma unidade de tempo. Com o resultado deste experimento, construímos o processo estocástico R, andando uma unidade para cima quando é observada cara (C) e uma unidade para baixo quando é observada coroa (K). Aqui Ω é o conjunto formado pelos 16 possíveis resultados dos 4 lançamentos de uma moeda. Como exemplo, suponha que o resultado do experimento foi $\omega = CKKC$, temos

$$R(0,\omega) = 0;\; R(1,\omega) = 1;\; R(2,\omega) = 0;\; R(3,\omega) = -1;\; R(4,\omega) = 0.$$

O caminho formado pela interpolação desses pontos está ilustrado na figura abaixo.

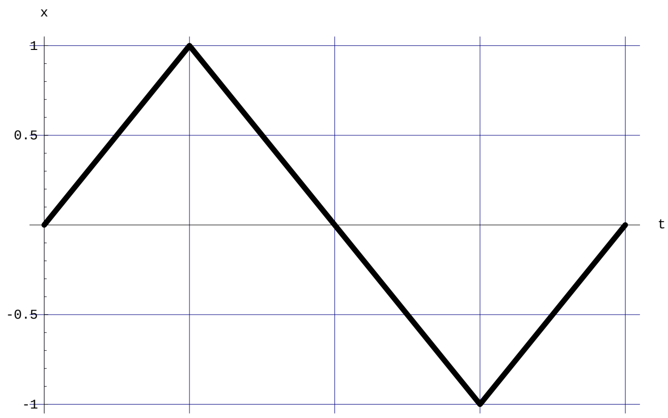

Figura 4.1. Exemplo de passeio aleatório

Alterando convenientemente os parâmetros do passeio aleatório é possível visualizar a transição para o movimento Browniano. Vamos então considerar um experimento que consiste em lançar 400 vezes uma moeda honesta e agora, para cada cara observada andamos 1/10 de unidade para cima e para cada coroa 1/10 de unidade para baixo. Vamos considerar também que cada 100 lançamentos consomem uma unidade de tempo. Dado um resultado possível deste experimento, o caminho formado pelo passeio aleatório é apresentado na próxima figura.

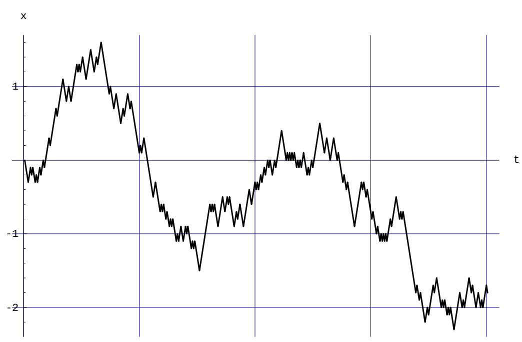

Figura 4.2. Exemplo de passeio aleatório

Vamos a seguir apresentar a definição formal de movimento Browniano e estabelecer a sua relação com o passeio aleatório. Lembramos o leitor que vamos denotar pela expressão $X \sim N(\mu, \sigma)$ quando X é uma variável aleatóra de distribuição normal com média μ e variância σ.

Definição 4.2. *Dizemos que o processo estocástico* $\{W(t, \omega) : t \in [0, T]\}$ *é um* movimento Browniano *ou um* processo de Wiener *quando estão satisfeitas as seguintes condições:*
(B1) $W(0, \omega) = 0$*, para todo* ω*;*
(B2) Para cada ω *fixado,* $W(\cdot, \omega)$ *é função contínua de* t *na reta;*
(B3) Para cada t *fixado,* $W(t, \cdot) \sim N(0, t)$*;*
(B4) Se $0 \leq t_0 < t_1 \ldots < t_k$*, então os incrementos* $W(t_0, \cdot)$*,* $W(t_1, \cdot) - W(t_2, \cdot), W(t_2, \cdot) - W(t_1, \cdot), \ldots, W(t_k, \cdot) - W(t_{k-1}, \cdot)$ *são independentes e* $W(t_j, \cdot) - W(t_{j-1}, \cdot) \sim N(0, t_j - t_{j-1})$ *para todo* j*.*

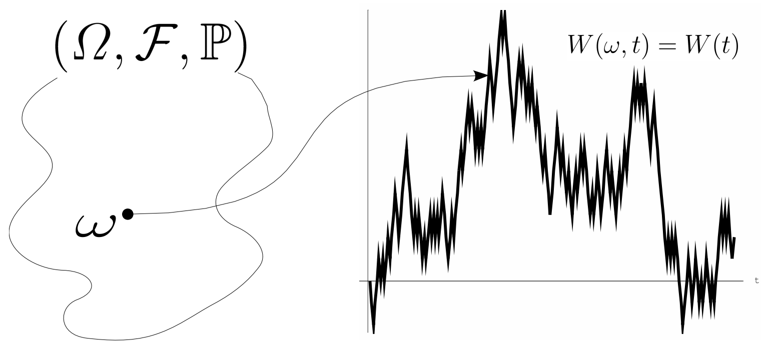

Figura 4.3. Movimento Browniano

O movimento Browniano pode ser visto como uma versão do passeio aleatório em tempo contínuo no qual diminuímos o tamanho dos passos e aumentamos velocidade dos experimentos de uma forma conveniente. De maneira mais precisa, seja $\{X(n), n \geq 0\}$ uma família de variáveis aleatórias independentes tal que $\mathbb{E}(X(n)) = 0$ e $\mathrm{Var}(X(n)) = 1$. Defina o passeio aleatório por $S(0) = 0$ e para $n \geq 1$, $S(n) = X(1) + \ldots + X(n)$. Com isso, defina o processo estocástico contínuo $W_n(t)$ por

$$W_n(t) = \frac{S([nt])}{\sqrt{n}}, \ t \geq 0, \tag{4.1}$$

onde $[x]$ é o maior inteiro menor ou igual a x.

Temos então o seguinte resultado.

Teorema 4.3. *Com* $\{W_n(t)\}$ *definido como em (4.1) e* $0 \leq t_1 < \ldots < t_k$ *temos*

$$W_n(t) \xrightarrow{\mathcal{D}} W(t), \ \textit{quando } n \to \infty.$$

A prova deste teorema pode ser encontrada em [13]. O símbolo $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ denota convergência em distribuição. Para distribuições de dimensão finita isso significa que para qualquer k e $0 \leq t_1 < \ldots < t_k$ e $x_1, \ldots, x_k$ reais temos

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(W_n(t_i) \leq x_i, i = 1, \ldots, k) = \mathbb{P}(W(t_i) \leq x_i, i = 1, \ldots, k).$$

Prova-se que o movimento Browniano tem também como características ser um processo de Markov e ser um martingal. Em poucas palavras, isso significa respectivamente que se $0 \leq s < t$ são dados, condicionado pelas informações obtidas observando o movimento Browniano até o instante s, a distribuição de $W(t, \cdot)$ depende apenas do valor de $W(s, \cdot)$ e a esperança de $W(t, \cdot)$ é igual a $W(s, \cdot)$. Para uma discussao mais profunda a respeito recomendamos [19].

A variação quadrática de um movimento Browniano terá um papel importante no desenvolvimento do cáculo de Itô. Vamos agora definir este conceito.

Definição 4.4. *Seja $[0, T]$ um intervalo fixado e $\mathcal{P} : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ uma partição qualquer deste intervalo. Seja também $|\mathcal{P}| = \max\limits_{0\leq k\leq N-1} |t_{k+1} - t_k|$. Definimos a* variação quadrática *$\mathrm{Q}(\mathcal{P}, \omega)$* em relação a partição *$\mathcal{P}$ de um movimento Browniano $\{W(t, \omega) : t \in [0, T]\}$ como*

$$\mathrm{Q}(\mathcal{P}, \omega) = \sum_{k=0}^{N-1} (W(t_{k+1}, \omega) - W(t_k, \omega))^2.$$

E definimos a variação quadrática *de um movimento Browniano como o limite*

$$\mathrm{Q}(\omega) = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \mathrm{Q}(\mathcal{P}, \omega).$$

É um resultado conhecido em análise que a variação quadrática de uma função diferenciável é nula. Prova-se ([8]) que o movimento Browniano é não diferenciável em nenhum ponto do seu domínio para quase toda realização ω. Assim é evidente que sua variação quadrática é não nula. O próximo teorema reafirma isso e mostra qual é o valor da variação quadrática de um movimento Browniano. Antes, precisamos de um resultado de cálculo:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{\frac{-x^2}{2t}}\, dx = 3t^2. \tag{4.2}$$

De fato, seja $g(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\, dx$. Como esta integral converge para todo a, a derivada parcial com relação a variável a do integrando é contínua em $\mathbb{R}$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial a} e^{-ax^2}\, dx$ converge uniformemente para qualquer t, podemos derivar sob o sinal de integral e assim

$$g''(a) = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-ax^2}\, dx.$$

Mas, sabemos que $g(a) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ então $g''(a) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4a^{5/2}}$, logo temos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-ax^2}\, dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4a^{5/2}}.$$

Usando esse resultado, tome $a = 1/2t$ e assim temos que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{\frac{-x^2}{2t}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot \frac{3\sqrt{\pi}}{4(\frac{1}{2t})^{5/2}} = 3t^2.$$

Lema 4.5. *A variação quadrática* $\mathrm{Q}(\omega)$ *do movimento Browniano* $\{W(t,\omega) : t \in [0,T]\}$ *é igual a* T*.*

Demonstração. Devemos provar que

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \mathbb{E}(\mathrm{Q}(\mathcal{P},\omega) - T) = 0 \tag{4.3}$$

e

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \mathrm{Var}(\mathrm{Q}(\mathcal{P},\omega) - T) = 0. \tag{4.4}$$

Para isso, perceba que

$$\mathrm{Q}(\mathcal{P},\omega) - T = \sum_{k=0}^{N-1} (W(t_{k+1}) - W(t_k))^2 - (t_{k+1} - t_k)$$

De acordo com (B3) da definição (4.2), temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathrm{Q}(\mathcal{P},\omega) - T) &= \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}\left[(W(t_{k+1}) - W(t_k))^2\right] - (t_{k+1} - t_k) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{Var}(W(t_{k+1}) - W(t_k)) + (\mathbb{E}(W(t_{k+1}) - W(t_k))^2) - (t_{k+1} - t_k) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} (t_{k+1} - t_k) + 0 - (t_{k+1} - t_k) \\
&= 0
\end{aligned}$$

e portanto (4.3) está provado. Vamos agora provar (4.4). Para simplificar a notação considere $D_k = W(t_{k+1}) - W(t_k)$ e $\delta_k = t_{k+1} - t_k$. Temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\mathrm{Q}(\mathcal{P},\omega) - T) &= \mathbb{E}((\mathrm{Q}(\mathcal{P},\omega) - T)^2) \\
&= \sum_{k,l=0}^{N-1} \mathbb{E}((D_k^2 - \delta_k)(D_l^2 - \delta_l)) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}((D_k^2 - \delta_k)^2) + \sum_{k\neq l}^{N-1} \mathbb{E}((D_k^2 - \delta_k)(D_l^2 - \delta_l)).
\end{aligned}$$

Como D_k e D_l são independentes, D_k^2 e D_l^2 são independentes também (veja o apêndice sobre probabilidade). Portanto

$$\mathbb{E}((D_k^2 - \delta_k)(D_l^2 - \delta_l)) = \mathbb{E}(D_k^2 - \delta_k)\mathbb{E}(D_l^2 - \delta_l).$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(D_k^2 - \delta_k) &= \mathbb{E}(D_k^2) - \delta_k \\ &= \mathrm{Var}(D_k) + (\mathbb{E}(D_k))^2 - \delta_k \\ &= \delta_k + 0 - \delta_k \\ &= 0.\end{aligned}$$

Donde resulta

$$\mathbb{E}((D_k^2 - \delta_k)(D_l^2 - \delta_l)) = 0.$$

Concluímos assim que

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\mathrm{Q}(\mathcal{P},\omega) - T) &= \sum_{k=0}^{N-1} \left\{\mathbb{E}(D_k^4) - 2\delta_k \mathbb{E}(D_k^2) + \delta_k^2\right\} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left\{\mathbb{E}(D_k^4) - 2\delta_k(\mathrm{Var}(D_k) - \mathbb{E}(D_k)^2) + \delta_k^2\right\}.\end{aligned}$$

Como D_k tem distribuição normal com média zero e variância δ_k

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\mathrm{Q}(\mathcal{P},\omega) - T) &= \sum_{k=0}^{N-1} \left\{\mathbb{E}(D_k^4) - 2\delta_k^2 + \delta_k^2\right\} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left\{\mathbb{E}(D_k^4) - \delta_k^2\right\}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Como $D_k \sim N(0, t_{k+1} - t_k)$, temos, utilizando (4.2) que

$$\mathbb{E}(D_k^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{k+1} - t_k)}} e^{\frac{-\zeta^2}{2(t_{k+1}-t_k)}}\, d\zeta = 3(t_{k+1} - t_k)^2.$$

Substituindo o resultado acima em (4.5) temos

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\mathrm{Q}(\mathcal{P},\omega) - T) &= \sum_{k=0}^{N-1} \left\{3(\delta_k^2) - \delta_k^2\right\} \\ &= 2\sum_{k=0}^{N-1} \delta_k^2 \\ &\leq 2|\mathcal{P}| \sum_{k=0}^{N-1} \delta_k\end{aligned}$$

donde resulta

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \mathrm{Var}(\mathrm{Q}(\mathcal{P},\omega) - T) \leq 2 \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} |\mathcal{P}| \sum_{k=0}^{N-1} (t_{k+1} - t_k) = 0$$

e está provado o teorema. □

4.2 O cálculo de Itô

Suponha que no instante de tempo t o preço de um ativo seja $S(t)$ e considere um pequeno intervalo de tempo dt no qual o preço $S(t)$ muda para $S(t) + dS(t)$. Queremos um modelo matemático para retorno $\frac{dS(t)}{S(t)}$ deste ativo. O modelo mais comum que tem como origem o trabalho de doutorado de Louis Bachelier (1900) foi melhorado por Paul Samuelson em 1964 e decompõe esse retorno em duas partes. A primeira é determinística e dada por μdt onde μ é uma medida da média da taxa de crescimento do preço do ativo e é chamado de *drift*. Caso só tivéssemos essa componente teríamos a seguinte equação diferencial modelando o retorno

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt.$$

Resolvendo esta equação, chegamos em

$$S(t) = S(0)e^{\mu(t-t_0)}.$$

A segunda parte é responsável pelas mudanças aleatórias do preço da ação em resposta a eventos externos. Um exemplo é a mudança brusca do preço dos combustíveis afetando os preços das ações de uma companhia aérea. Escrevemos esta segunda componente como

$$\sigma dW(t)$$

onde $dW(t)$ é o incremento obtido em um processo de Wiener, isto é, uma variável aleatória de distribuição normal e σ é um parâmetro chamado de volatilidade. Assim, o modelo do retorno de um ativo proposto por Samuelson é dado por

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \sigma dW(t) + \mu dt. \tag{4.6}$$

Como vimos na seção anterior, $W(t)$ é uma função não derivável e portanto (4.6) não pode ser encarada como uma equação diferencial. Para resolver este problema Kiyosi Itô deu um significado rigoroso para (4.6) escrevendo-a da seguinte maneira

$$S(t) = S(t_0) + \sigma \int_{t_0}^{t} S(\tau)\, dW(\tau) + \mu \int_{t_0}^{t} S(\tau)\, d\tau$$

e trabalhou para atribuir um significado preciso à integral $\int_{t_0}^{t} S(\tau)\, dW(\tau)$ que não poderia ser tratada através da teoria de Stieltjes devido a não regularidade e ao caratér estocástico de $W(t)$.

4.2.1 A integral de Itô

Vamos começar a discussão sobre a integral de Itô estudando a classe funções Itô-integrávais.

Definição 4.6. *Dizemos que uma função (ou um processo estocástico) $f(\cdot,\omega)$ é* **não-antecipadora** *em relação ao movimento Browniano $\{W(t,\omega) : t \in [0,T]\}$, quando para todo $0 \le t \le T$ com $\omega \in \Omega$ fixado, o valor da função $f(t,\omega)$ é determinado pelos valores tomados pela trajetória $W(\cdot,\omega)$ até o instante t.*

Exemplo 4.7. Considere as funções f_1 e f_2 definidas por

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } \max\limits_{0\le s\le t} W(s) < 1; \\ 1, & \text{se } \max\limits_{0\le s\le t} W(s) \ge 1, \end{cases}$$

e

$$f_2(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } \max\limits_{0\le s\le 1} W(s) < 1; \\ 1, & \text{se } \max\limits_{0\le s\le 1} W(s) \ge 1, \end{cases}$$

É fácil perceber f_1 é não-antecipadora mas f_2 não, pois para calcular valor de f_2 em qualquer instante $t < 1$ a informação obtida pelo conhecimento de $W(t)$ para $s \le t$ é insuficiente.

Definição 4.8. *Seja f não-antecipadora, $f(\cdot,\omega)$ contínua e $\mathcal{P} : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ uma partição do intervalo $[0,T]$. Definimos a* **soma de Itô** *de f com respeito a $\mathcal{P}$ pela expressão:*

$$I\left[f,\mathcal{P}\right] = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)[W(t_{k+1}) - W(t_k)].$$

Teorema 4.9. *Se f satisfaz as condições da definição anterior, então existe o limite em L^2,*

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} I\left[f,\mathcal{P}\right].$$

Tal limite é chamado de **integral de Itô** *de f e é denotado por*

$$I(f)(\omega) = \int_0^T f(t,\omega)\, dW(t,\omega).$$

Nesse texto o conceito de função não-antecipadora foi dado informalmente. O tratamento mais rigoroso das condições de existência da integral de Itô envolve conceitos de medida e processos estocásticos que não serão discutidos aqui. O leitor interessado pode consultar por exemplo [15] página 25.

Cabe notar que além da integral de Itô ser uma variável aleatória e a de Riemann ser um número uma outra diferença entre essas duas integrais é que na de Itô, na soma que a define, a função f por ser não-antecipadora deve ser calculada na extremidade inferior do intervalo $[t_k, t_{k+1}]$ e na definição de Riemann a função f pode ser calculada em qualquer ponto deste intervalo. Para deixar isso mais evidente, vamos mostrar no próximo exemplo que pode muito bem ocorrer que escolhendo pontos distintos em uma mesma partição, duas somas de Itô de uma mesma função convirjam para valores distintos.

Exemplo 4.10. Seja $\mathcal{P} : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ uma partição de $[0, T]$. Vamos calcular

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{j=0}^{N-1} W(t_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j)) \tag{4.7}$$

e

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{j=0}^{N-1} W(t_{j+1})(W(t_{j+1}) - W(t_j)). \tag{4.8}$$

Para calcular (4.7) vamos utiliar a identidade $a(b-a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) - \frac{1}{2}(a-b)^2$

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{N-1} W(t_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j)) &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N-1}(W(t_{j+1})^2 - W(t_j)^2) - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N-1}(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2 \\ &= \frac{1}{2}(W(T))^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N-1}(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2.\end{aligned}$$

Pelo lema 4.5 resulta

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{j=0}^{N-1} W(t_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j)) = \frac{1}{2}(W(T))^2 - \frac{1}{2}T$$

Para (4.8) vamos usar $b(b-a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) + \frac{1}{2}(a-b)^2$. Assim temos que

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{N-1} W(t_{j+1})(W(t_{j+1}) - W(t_j)) &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N-1}(W(t_{j+1})^2 - W(t_j)^2) + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N-1}(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2 \\ &= \frac{1}{2}(W(T))^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N-1}(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2.\end{aligned}$$

Novamente, temos pelo lema 4.5 que

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{j=0}^{N-1} W(t_{j+1})(W(t_{j+1}) - W(t_j)) = \frac{1}{2}(W(T))^2 + \frac{1}{2}T$$

4.2.2 A fórmula de Itô

Se $W(t)$ fosse uma função de classe $\mathcal{C}^1$ tal que $W(0) = 0$ teríamos que

$$\int_0^T W(t)\,dW(t) = \frac{W(T)^2}{2}.$$

Agora, pelo exemplo anterior, sendo $W(t)$ um processo de Wiener, chegamos em

$$\int_0^T W(t)\, dW(t) = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{k=0}^{N-1} W(t_k)(W(t_{k+1}) - W(t_k)) = \frac{W(T)^2}{2} - \frac{T}{2}.$$

Perecebe-se então a clara diferença de resultados quando consideramos a integral de Itô e a integral de Stieltjes. Da equação anterior, podemos escrever

$$W(t)dW(t) = \frac{1}{2}dW^2(t) - \frac{1}{2}dt$$

ou ainda

$$dW^2(t) = 2W(t)dW(t) + dt \tag{4.9}$$

Nota-se que no cálculo de Itô a regra da cadeia é diferente!.

O próximo teorema pode ser provado utilizando teoria da medida e processos estocásticos e exige a introdução de diversos conceitos e definições. A demonstração rigorosa deste resultado está além do escopo deste trabalho; por este motivo, apresentaremos um argumento heurístico apenas.

Teorema 4.11. ***(A fórmula de Itô)*** *Sejam μ e σ funções de duas variáveis, $\{X(t,\omega) : t \in I\}$ um processo estocástico satisfazendo*

$$dX(t) = \mu(X(t),t)dt + \sigma(X(t),t)dW(t)$$

e V(X,t) uma função diferenciável com respeito a ambas as variáveis. Então vale que

$$dV(X(t),t) = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu(X(t),t)\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{1}{2}\sigma^2(X(t),t)\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}\right) dt + \sigma(X(t),t)\frac{\partial V}{\partial X}dW(t).$$

O argumento heurístico consiste no seguinte: Lembre que $W(t + \Delta t) - W(t) \sim N(0, \Delta t)$. Considere então $Z = \frac{W(t+\Delta t)-W(t)}{\sqrt{\Delta t}}$. Temos que $Z \sim N(0,1)$ e com isso

$$\begin{aligned} \Delta t \Delta S &= \Delta t\, [\mu(X(t),t)\Delta t + \sigma(X(t),t)\Delta W(t)] \\ &= \mu(X(t),t)(\Delta t)^2 + \sigma(X(t),t)\Delta t \Delta W(t) \\ &= \mu(X(t),t)(\Delta t)^2 + \sigma(X(t),t) Z\, \Delta t^{3/2} \\ &= O(\Delta t^{3/2}). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Agora, fazendo a expansão de Taylor de V e ignorando termos em Δt de ordem maior do que 1, temos

$$\begin{aligned} \Delta V(X(t),t) &= V(X(t) + \Delta X(t), t + \Delta t) - V(X(t),t) \\ &= \frac{\partial V}{\partial X}\Delta X(t) + \frac{\partial V}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}(\Delta X(t))^2. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Perceba que o termo que envolve as derivadas mistas desaparece por (4.10). Perceba também que

$$\begin{aligned}
\Delta X(t) &= X(t) - X(t+\Delta t) \\
&= \mu(X(t),t)\Delta t + \sigma(X(t),t)\Delta W(t) \\
&= \mu(X(t),t)\Delta t + \sigma(X(t),t)[W(t+\Delta t) - W(t)] \\
&= \mu(X(t),t)\Delta t + \sigma(X(t),t)\sqrt{\Delta t}\, Z,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

E portanto

$$(\Delta X(t))^2 = \sigma^2(X(t),t)\Delta t\, Z^2 + O(\Delta t^{3/2})$$

Agora, como $\mathbb{E}(\Delta t Z^2) = \Delta t$ e $\mathrm{Var}(\Delta t Z^2) = O(\Delta t^2)$ afirmamos que quando $\Delta t \to 0$, $\Delta t Z^2$ torna-se não estocástico e igual ao seu valor esperado. Desta forma pode-se escrever

$$(dX(t))^2 = \sigma^2(X(t),t)dt, \tag{4.13}$$

assim, fazendo $\Delta t \to 0$ e substituindo (4.13) em (4.11) ficamos com

$$dV(X(t),t) = \frac{\partial V}{\partial X}dX(t) + \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\sigma^2(X(t),t)\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}dt$$

finalmente, substituindo a expressão de $dX(t)$ na equacao acima resulta

$$dV(X(t),t) = \mu(X(t),t)\frac{\partial V}{\partial X}dt + \sigma(X(t),t)\frac{\partial V}{\partial X}dW(t) + \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\sigma^2(X(t),t)\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}dt.$$

Agrupando os termos de forma conveniente resulta a fórmula de Itô.

Exemplo 4.12. Seja $V(W(t),t) = W^2(t)$. Temos que

$$dW(t) = 0dt + 1dW(t)$$

e portanto da fórmula de Itô vem

$$dV(W(t),t) = (0 + \frac{1}{2}2)dt + 2W(t)dW(t),$$

ou seja

$$dW^2(t) = dt + 2W(t)dW(t). \tag{4.14}$$

Note que usando a fórmula de Itô, recuperamos com facilidade o resultado do exemplo 4.10.

4.2.3 A fórmula de Itô e o modelo de Samuelson

Considere agora o modelo para o retorno de um ativo proposto por Samuelson

$$dS(t) = S(t)\mu dt + S(t)\sigma dW(t) \tag{4.15}$$

e com $S(t_0) = s_0 > 0$. Vamos utilizar a fórmula de Itô para obter uma expressão para $S(t)$. É natural procurar soluções da forma $S(t) = V(W(t), t)$. Assim, da identidade

$$dW(t) = 0dt + 1dW(t)$$

temos, pela fórmula de Itô

$$dS(t) = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial W^2}\right) dt + \frac{\partial V}{\partial W} dW(t). \tag{4.16}$$

Comparando os coeficientes de (4.15) e de (4.16), devemos encontrar $V(W(t), t)$ que satisfaça

$$\mu V(W(t), t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial W^2}$$

e

$$\sigma V(W(t), t) = \frac{\partial V}{\partial W}.$$

Uma solução para esta última equação é dada por $V(W(t), t) = e^{\sigma W(t) + g(t)}$, onde g é uma função arbitrária. Substituindo essa expressão de V na primeira equação, vemos que g deve satisfazer $g'(t) = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$. Com isso determinamos uma solução particular de (4.15)

$$S(t) = S(0)e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}. \tag{4.17}$$

Prova-se ([15] ou [19]) que esta solução é única. Um processo definido por (4.17) é chamado de **movimento Browniano geométrico** e é o processo aleatório mais usado em finanças e economia.

5

Difusão e a equação de Black-Scholes

5.1 Prelúdio

Em 1973, Fischer Black e Myron Scholes munidos do modelo de movimento browniano geométrico para o preço de um ativo com risco visto anteriormente,

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t), \tag{5.1}$$

desenvolveram a equação diferencial parcial que governa o preço de uma opção. Para isto, eles utilizaram um argumento baseado na estratégia de Δ *hedging* e as seguintes hipóteses sobre o mercado que também que assumiremos nesse capítulo

(H1) A comercialização de instrumentos financeiros é feita em tempo contínuo.
(H2) A taxa de juros livre de risco r, é conhecida e constante.
(H3) Os ativos não pagam dividendos.
(H4) Não há custos de transação ao comprar as ações e opções.
(H5) É possível comercializar qualquer fração dos ativos.
(H6) Vale o princípio da não-arbitragem.

5.2 A equação de Black-Scholes

Seguindo o trabalho original de Black e Scholes, vamos determinar um modelo de precificação de opções via uma equação diferencial parcial utilizando Δ *hedging*.

Sejam então V uma opção e S seu ativo objeto. Considere $\Pi = V - \Delta S$ um portfólio com Δ escolhido de forma que Π seja livre de risco em $(t, t + dt)$. Temos assim:

$$\frac{\Pi_{t+dt} - \Pi_t}{\Pi_t} = rdt$$

$$\Pi_{t+dt} - \Pi_t = r\Pi_t dt$$

$$V(t + dt) - \Delta S(t + dt) - V(t) + \Delta S(t) = r(V(t) - \Delta S(t))dt$$

$$dV(t) - \Delta dS(t) = r(V(t) - \Delta S(t))dt \tag{5.2}$$

Agora, de (5.1) vem que

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \tag{5.3}$$

Como $V = V(S(t), t)$ temos da fórmula de Itô

$$dV(S(t), t) = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S(t)\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right] dt + \sigma S(t)\frac{\partial V}{\partial S}dW(t) \tag{5.4}$$

Substituindo (5.3) e (6.4) em (5.2) vem

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \Delta\mu S\right) dt + \left(\sigma S\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\sigma S\right) dW(t) = r(V - \Delta S)dt \tag{5.5}$$

Como o segundo termo de (5.5) é livre de riscos, o coeficiente do termo aleatório do primeiro termo deve ser zero e para isso,

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}. \tag{5.6}$$

Este é o Δ que satisfaz a condicao de hedging. De fato, se assim não o fosse, o portfólio Π nao seria livre de riscos, criando assim uma oportunidade de arbitragem. Portanto, com essa escolha de Δ temos

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0,$$

que é a chamada **equação de Black e Scholes**.

Assim, para determinar o preço de uma opção, devemos resolver

$$\textbf{(B-S)} \begin{cases} \dfrac{\partial V(S,t)}{\partial t} + \dfrac{\sigma^2 S^2}{2}\dfrac{\partial^2 V(S,t)}{\partial S^2} + rS\dfrac{\partial V(S,t)}{\partial S} - rV(S,t) = 0, \quad (S,t) \in \Gamma; \\ V(S,T) = \begin{cases} (S-K)^+ & \text{para opções de compra;} \\ (K-S)^+ & \text{para opções de venda.} \end{cases} \end{cases}$$

Aqui usamos $\Gamma \doteq [0, +\infty) \times [0, T]$

5.3 A equação de difusão

Nesta seção vamos estudar algumas propriedades fundamentais sobre a equação da difusão em sua forma mais simples e posteriormente tratar a equação de Black e Scholes com os resultados obtidos aqui.

A equação de difusão ou do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

tem sido estudada há mais de dois séculos como modelo de propagação de calor e outros processos como a difusão de partículas. A próxima definição e os próximos dois teoremas serão apenas enunciados. Para os detalhes veja [12] ou [9]

Definição 5.1. *A função* $\kappa\colon (0,+\infty)\times\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ *definida por*

$$\kappa(t,x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{\frac{-x^2}{4t}}$$

é chamada de ***núcleo do calor****.*

Teorema 5.2. *O núcleo do calor possui as seguintes propriedades:*

(a) $\kappa(t,x)>0, x\in\mathbb{R}, t>0$.
(b) $\kappa\in\mathcal{C}^\infty((0,+\infty)\times\mathbb{R})$ *e* $\frac{\partial\kappa}{\partial t}=\frac{\partial^2\kappa}{\partial x^2}, x\in\mathbb{R}, t>0$.
(c) $\int_{-\infty}^{+\infty}\kappa(t,x-y)\,dy=1, x\in\mathbb{R}, t>0$.

Teorema 5.3. *Seja* $u_0\colon\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$*,* $u_0\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$ *tal que*

$$|u_0|\le Ae^{B|x|^\rho}$$

Onde A, B *e* $\rho<2$ *são constantes reais e seja* $u\colon(0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *definida por*

$$u(t,x)=\int_{-\infty}^{+\infty}u_0(y)\kappa(t,x-y)\,dy.$$

Então $u\in\mathcal{C}^{1,2}((0,+\infty)\times\mathbb{R})$ *e*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

para $t>0, x\in\mathbb{R}$*. Além disso,* $u(t,x)$ *pode ser estendida continuamente para* $[0,+\infty]\times\mathbb{R}$ *de modo que*

$$u(0,x)=u_0(x), \forall x\in\mathbb{R}.$$

Dos resultados acima, temos uma solução para o problema

$$\textbf{(P)}\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (t,x)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}\\ u(x,0)=u_0(x) & x\in\mathbb{R}\end{cases}\tag{5.7}$$

onde $u\in\mathcal{C}^{1,2}((0,+\infty)\times\mathbb{R})\cap\mathcal{C}([0,+\infty)\times\mathbb{R})$. Vamos agora estudar a unicidade da solução de **(P)**. O primeiro passo será provar o

Teorema 5.4. ***(Princípio do máximo para a equação do calor.)***
Sejam $\Omega\doteq\{x\in\mathbb{R}\mid A<x<B\}$ *e* $u\in\mathcal{C}([0,T]\times\overline{\Omega})\cap\mathcal{C}^{1,2}((0,T)\times\Omega)$ *tais que*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\le\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)\qquad\qquad \forall(t,x)\in(0,T)\times\Omega$$

Então

$$\max_{[0,T]\times\overline{\Omega}}u=\max_{\omega}u\tag{5.8}$$

onde $\omega\doteq(0\times\overline{\Omega})\cup([0,T]\times\partial\Omega)$*.*

Demonstração. Fixe $\delta > 0$ e seja $v(t,x) \doteq u(t,x) - \delta t$. Por hipótese, temos que

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) < \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x) \qquad \forall (t,x) \in (0,T) \times \Omega \tag{5.9}$$

Seja agora $0 < T' < T$ e $\max_{[0,T']\times\overline{\Omega}} v = v(t_0,x_0)$. Vamos analisar os dois casos possíveis.

(1) Se $(t_0,x_0) \in (0,T') \times \Omega$ então $\frac{\partial v}{\partial x^2}(t_0,x_0) \leq 0$ e $\frac{\partial v}{\partial t}(t_0,x_0) = 0$ donde $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t_0,x_0) \leq \frac{\partial v}{\partial t}(t_0,x_0)$ o que contradiz (5.9).

(2) Se $(t_0,x_0) \in \{T'\} \times \Omega$ então $\frac{\partial v}{\partial x^2}(T',x_0) \leq 0$ como antes e $\frac{\partial v}{\partial t}(T',x_0) \geq 0$ pois se não fosse assim, existiria $T'' < T'$ de modo que $v(T'',x_0) > v(T',x_0)$. Logo, temos que $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(T',x_0) \leq \frac{\partial v}{\partial t}(T',x_0)$ o que também contradiz (5.9).

Assim, dos dois casos analisados, resulta

$$\max_{[0,T']\times\overline{\Omega}} v(t,x) = \max_{\omega'} v(t,x) \tag{5.10}$$

onde $\omega' \doteq (0 \times \overline{\Omega}) \cup ([0,T'] \times \partial\Omega)$. Agora, da continuidade uniforme de u em $([0,T] \times \overline{\Omega})$ temos que as funções

$$T' \mapsto \max_{[0,T]\times\overline{\Omega}} v(t,x)$$

e

$$T' \mapsto \max_{\omega'} v(t,x)$$

são contínuas para qualquer $T' \in [0,T]$. Fazendo então, $T \to 0$, temos de (5.10)

$$\max_{[0,T]\times\overline{\Omega}} v(t,x) = \max_{\omega'} v(t,x)$$

donde

$$-\delta T + \max_{[0,T]\times\overline{\Omega}} u(t,x) \leq \max_{[0,T]\times\overline{\Omega}} \{u(t,x) - \delta t\} = \max_{\omega} \{u(t,x) - \delta t\} \leq \max_{\omega} u(t,x)$$

Da arbitrariedade de δ, resulta (5.8). $\Box$

Combinando o teorema anterior e o próximo, temos a chave para a unicidade da equação do calor.

Teorema 5.5. ***(Unicidade de solução para a equação do calor.)*** *Seja* $u \in \mathcal{C}^{1,2}((0,+\infty) \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}([0,+\infty] \times \mathbb{R})$ *e suponha que existam constantes* C *e* B *tais que*

$$|u(t,x)| \leq Ce^{Bx^2} \qquad \forall (t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R} \tag{5.11}$$

Se u *satisfizer*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) \leq \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \qquad \forall (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R} \tag{5.12}$$

e se $u(0,x) \leq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, *então*

$$u(t,x) \leq 0 \qquad \forall (t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}$$

Perceba que nas condições desse teorema, se g e h fossem duas soluções distintas de **(P)** satisfazendo (5.11), então a função $v = g-h$ também satisfaz (5.11) e além disso vale que $\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ em $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$ e $h(0,x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Assim teríamos que $h(t,x) \leq 0, \forall (t,x) \in [0,+\infty)\times\mathbb{R}$ e pelo princípio do máximo resultaria $h(t,x) = 0, \forall (t,x) \in [0,+\infty)\times\mathbb{R}$ e portanto $g \equiv h$ o que significa a unicidade da solução.

Demonstração. Em primeiro lugar note que basta provar que existe um $T \in \mathbb{R}$ fixado tal que as hipóteses implicam que $u(t,x) \leq 0, \forall (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}$ pois se tomarmos $t' = t - T$ as hipóteses do teorema continuam válidas e podemos concluir que $u(t,x) \leq 0, \forall (x,t) \in [0,T]\times\mathbb{R}$.

Seja então $T < \frac{1}{8B}$ fixado e considere a seguinte função auxiliar definida por

$$v(t,x) \doteq u(t,x) - \frac{\delta}{\sqrt{(2T-t)}} e^{\frac{(x-y)^2}{4(2T-t)}}$$

onde $\delta > 0$ e $y \in \mathbb{R}$ são parametros arbitrários fixos. Verifica-se que $v - u$ satisfaz a equação do calor e por (5.12) vem

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) \leq \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x) \qquad \forall (t,x) \in \mathcal{D}(y,h)$$

onde $\mathcal{D}(y,h) \doteq \{(t,x) \mid 0 < t < T, y-h < x < y+h\}$, com $h > 0$ arbitrário. Pelo princípio do máximo, resulta

$$\max_{(t,x)\in\overline{\mathcal{D}}} v(t,x) = \max_{d} v(t,x)$$

com $d \doteq (0\times(y-h,y+h)) \cup ([0,T]\times\{y-h,y+h\})$. Agora vamos estudar o comportamento de v em d.

Para $x = y+h$ e $0 \leq t \leq T$, temos

$$\begin{aligned} v(t,x) &\leq Ce^{B(y+h)^2} - \frac{\delta}{\sqrt{(2T-t)}} e^{\frac{h^2}{4(2T-t)}} \\ &\leq Ce^{B(y+h)^2} - \frac{\delta}{\sqrt{T}} e^{\frac{h^2}{8T}}. \end{aligned}$$

Como $B < \frac{1}{8T}$, podemos escolher h_0 de tal forma que para qualquer $h \geq h_0$ tem-se $v < 0$. Para $x = y-h$ e $0 \leq t \leq T$, chegamos na mesma estimativa.

Pela definição de v e por hipótese

$$v(0,x) \leq u(0,x) \leq 0$$

e portanto $v(t,x) \leq 0, (t,x) \in d$ para $h \geq h_0$. Pelo princípio do máximo resulta então

$$v(t,x) \leq 0 \qquad \forall (t,x) \in \mathcal{D}(y,h), h \geq h_0$$

isto é

$$u(x,t) - \frac{\delta}{\sqrt{(2T-t)}} e^{\frac{(x-y)^2}{4(2T-t)}} \leq 0 \qquad \forall (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}. \tag{5.13}$$

Como a região onde (5.14) independe de δ, fazendo $\delta \to 0$ resulta

$$u(x,t) \leq 0 \qquad \forall (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R} \tag{5.14}$$

□

5.4 Resolvendo a equação de Black-Scholes

Com as ferramentas desenvolvidas na seção anterior, estamos quase prontos para resolver a equação de Black-Scholes. Este "quase" deve-se ao fato de na seção anterior termos estudados resultados para a equação parabólica mais simples possível, isto é $u_t = u_{xx}$. Vamos então, estudar técnicas que permitirão reduzir a equação de Black-Scholes e finalmente resolvê-la.

Como primeiro passo, suponha que $u(t,x)$ satisfaça $u_t = u_{xx}$ e considere a função v tal que

$$u(t,x) = e^{\alpha t+\beta t} v(t,x)$$

Temos

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \alpha e^{\alpha t+\beta t} v(t,x) + e^{\alpha t+\beta t}\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \beta^2 e^{\alpha t+\beta t} v(t,x) + 2\beta e^{\alpha t+\beta t}\frac{\partial v}{\partial x}(t,x) + e^{\alpha t+\beta t}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x)$$

Como $u_t = u_{xx}$, resulta

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\beta\frac{\partial v}{\partial x} + (\beta^2-\alpha)v \\ v(0,x) = e^{-\beta x}u(0,x) \end{cases} \tag{5.15}$$

E portanto uma solução do problema (5.15)é dada por

$$v(t,x) = u(t,x)e^{-(\alpha t+\beta x)} \tag{5.16}$$

O próximo teorema garante a existência de soluções para equações parabólicas mais gerais do que a considerada na seção anterior.

Teorema 5.6. *Sejam $a > 0, b$ e c constantes. O problema*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial v}{\partial x} + cv & (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R} \\ v(0,x) = \psi(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{5.17}$$

com $v \in \mathcal{C}^{1,2}((0,+\infty)\times\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}([0,+\infty)\times\mathbb{R})$, tem uma solução dada por

$$v(t,x) = e^{\frac{-t(b^2-4ac)}{4a} - \frac{xb}{2a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa(t, \frac{x}{\sqrt{a}} - s) e^{\frac{sb}{2\sqrt{a}}} \psi(s\sqrt{a})\, ds.$$

Se $|\psi(x)| \leq Ae^{B|x|^\rho}$ com A, B e $\rho < 2$ constantes arbitrárias.

Demonstração. Seja $y = \rho x$ e vamos escrever $v(t,x)$ como $w(t,y)$. Temos

$$v_x(t,x) = \rho w_y(t,y) \qquad \text{e} \qquad v_{xx}(t,x) = \rho^2 w_{yy}(t,y).$$

Chegamos assim, no seguinte problema

$$\begin{cases} w_t(t,y) = \rho^2 a w_{yy}(t,y) + \rho b w_y(t,y) + c w(t,y) \\ w(0,y) = \psi(\frac{y}{\rho}) \end{cases} \tag{5.18}$$

Escolhendo $\rho^2 = \frac{1}{a}$, ficamos com

$$\begin{cases} w_t(t,y) = w_{yy}(t,y) + \frac{b}{\sqrt{a}} w_y(t,y) + c w(t,y) \\ w(0,y) = \psi(y\sqrt{a}) \end{cases} \tag{5.19}$$

e portanto, da discussão anterior, identificando $2\beta = \frac{b}{\sqrt{a}}$ e $\beta^2 - \alpha = c$ ou seja $\alpha = \frac{b^2-4ac}{4a}$ e $\beta = \frac{b}{2\sqrt{a}}$, temos por (5.16) e do teorema 6.3 que

$$w(t,y) = e^{-\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)t - \left(\frac{b}{2\sqrt{(a)}}\right)y} \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa(t, y-s) e^{\frac{b}{2\sqrt{(a)}}} \psi(s\sqrt{(a)})\, ds.$$

Finalmente, usando o fato que $v(t,x) = w(t, \frac{y}{\sqrt{a}})$, segue o resultado. $\square$

O próximo teorema trata da unicidade da solução.

Teorema 5.7. *Considere*

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b\frac{\partial v}{\partial x} + cv & (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R} \\ v(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{5.20}$$

com $v \in \mathcal{C}^{1,2}((0,+\infty) \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}([0,+\infty) \times \mathbb{R})$ *e satisfazendo*

$$|v(t,x)| \leq Ae^{Bx^2} \qquad \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R} \tag{5.21}$$

então

$$v(t,x) \equiv 0 \qquad \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R} \tag{5.22}$$

Demonstração. Pelo teorema anterior e pelo o que foi discutido no começo desta seção, existem constantes $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ de modo que a função

$$u(t,x) = e^{\alpha_0 x + \beta_0 t} v(t, \gamma_0 x) \tag{5.23}$$

satisfaz a equação básica da difusão $u_t = u_{xx}$ e por hipótese, satisfaz também $u(0,x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Por (5.21), existem constantes A_0 e B_0 tais que u satisfaz

$$|u(t,x)| \leq A_0 e^{B_0 x^2}.$$

Pelo teorema 5.5 concluímos que $u(t,x) = 0$ e portanto, por (5.23) resulta $u(t,x) = 0, \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$ $\square$

Vamos voltar ao problema de Black-Scholes:

$$
\textbf{(B-S)} \begin{cases} \dfrac{\partial V(S,t)}{\partial t} + \dfrac{\sigma^2 S^2}{2}\dfrac{\partial^2 V(S,t)}{\partial S^2} + rS\dfrac{\partial V(S,t)}{\partial S} - rV(S,t) = 0, & (S,t) \in \Gamma \\ V(S,T) = \begin{cases} (S-K)^+ & \text{para opções de compra;} \\ (K-S)^+ & \text{para opções de venda.} \end{cases} \end{cases}
$$

Percebe-se que **(B-S)** é um problema com condição final ao invés de uma condição inicial e para adequar o problema à teoria desenvolvida até agora, é natural fazer uma mudança de variável para reverter o tempo. Fazemos então

$$
\tau = T - t. \tag{5.24}
$$

Uma outra coisa que nos incomoda é o fato dos coeficientes da equação diferencial acima não ser linear. Isso é resolvido aplicando outra mudança de variável, a saber

$$
x = \log S. \tag{5.25}
$$

Assim, escrevendo $\widetilde{V}(x,\tau) = V(S,t)$, temos pela regra da cadeia

$$
\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial S}e^x \tag{5.26}
$$

$$
\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial \tau} = \frac{\partial V}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial \tau} + \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \tau} = -\frac{\partial V}{\partial t} \tag{5.27}
$$

e também

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \widetilde{V}}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial V}{\partial S}\right] e^x + e^x \frac{\partial V}{\partial S} \\
&= \left[\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t}\frac{\partial t}{\partial x}\right] e^x + e^x \frac{\partial V}{\partial S} \\
&= \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} e^{2x} + \frac{\partial \widetilde{V}}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{5.28}
$$

Agora, fazendo a mudança de variáveis (5.24-5.25) e usando os resultados acima, chegamos em

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial V(x,\tau)}{\partial \tau} - \dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{\partial^2 V(x,\tau)}{\partial x^2} - (r - \dfrac{\sigma^2}{2})\dfrac{\partial V(x,\tau)}{\partial x} - rV(x,\tau) = 0, & (x,\tau) \in \mathbb{R} \times (0,T]; \\ V(x,0) = \begin{cases} (e^x - K)^+ & \text{para opções de compra;} \\ (K - e^x)^+ & \text{para opções de venda.} \end{cases} & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{5.29}
$$

Temos que (5.29) é um problema da mesma forma do enunciado no teorema (5.6) com

$$
a = \frac{1}{2}\sigma^2 \ , \ b = r - \frac{1}{2}\sigma^2 \text{ e } c = -r.
$$

Vamos trabalhar com opção de compra. Segue do teorema (5.6) que

$$V(x,\tau) = e^{\frac{-\tau(b^2-4ac)}{4a} - \frac{xb}{2a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa(\tau, \frac{y}{\sqrt{a}} - s) e^{\frac{sb}{2\sqrt{a}}} (e^{\frac{s}{\sqrt{a}}} - K)^+ \, ds.$$

Fazendo a mudança $u = \frac{x}{\sqrt{a}} - s$ e restringindo o domínio de integração para onde o integrando é não nulo, isto é, $y - u\sqrt{a} \geq \log K$, ou melhor, $u \leq \frac{y - \log K}{\sqrt{a}}$, obtemos:

$$V(x,\tau) = e^{\frac{-\tau(b^2-4ac)}{4a} - \frac{xb}{2a}} \left[e^{x+\frac{xb}{2a}} \int_{-\infty}^{\frac{y-\log K}{\sqrt{a}}} \kappa(\tau,u) e^{u\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)} \, du - K e^{\frac{xb}{2a}} \int_{-\infty}^{\frac{y-\log K}{\sqrt{a}}} \kappa(\tau,u) e^{\frac{-ub}{2\sqrt{a}}} \, du \right].$$

Usando

$$\int_{-\infty}^{\alpha} \kappa(\tau,s) e^{-\beta s} \, ds = e^{\tau\beta^2} \mathbf{\Phi}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2\tau}} + \beta\sqrt{2\tau} \right),$$

onde

$$\mathbf{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\omega^2}{2}} \, d\omega$$

e lembrando que $S = e^x$, simplificando e coletando termos, chegamos em

$$V(S,t) = S\mathbf{\Phi}\left(\frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} \right) - Ke^{-rt}\mathbf{\Phi}\left(\frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} \right).$$

Que é a famosa equação de Black-Scholes.

Para a opção de compra, segue da paridade compra-venda (2.12) que

$$\begin{aligned} p_t &= c_t + Ke^{-r(T-\tau)} - S_t \\ &= Ke^{-r(t)} \left[1 - \mathbf{\Phi}\left(\frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} \right) \right] - S\left[1 - \mathbf{\Phi}\left(\frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Teorema 5.8. ***(Unicidade no problema de Black-Scholes)*** *Considere*

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - rx\frac{\partial v}{\partial x} + rv & (t,x) \in (0,T] \times (0,+\infty) \\ v(T,x) = 0 & x > 0. \end{cases} \tag{5.30}$$

com $v \in \mathcal{C}^{1,2}((0,T] \times (0,+\infty)) \cap \mathcal{C}([0,T] \times (0,+\infty))$ *e satisfazendo*

$$|v(t,x)| \leq Ae^{B\log^2(1+|x|)} \qquad \forall (t,x) \in [0,T] \times [0,+\infty), \tag{5.31}$$

então

$$v(t,x) \equiv 0 \qquad \forall (t,x) \in [0,T] \times [0,+\infty). \tag{5.32}$$

Demonstração. Sabemos que qualquer solução $v(t,x)$ de (6.31) pode ser escrita como $u(\tau,y)$ onde $\tau = T - t$, $y = \log(x)$ e u satisfaz a equação de difusão com coeficientes constantes. Como $v(T,x) = 0$ para todo $x > 0$ temos que $u(0,y) = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Além disso, como v satisfaz (5.31) temos que as hipóteses do teorema (5.7) estão satisfeitas e portanto vale que $u(\tau,y) = 0$ para todo $\tau \in [0,t]$ e todo y em $\mathbb{R}$. Como consequência, v também é identicamente zero e está provado o teorema. □

6

Apêndice: Probabilidade

O objetivo deste apêndice é relembrar o leitor de forma rápida, os conceitos de probabilidade que permeiam este trabalho. Para um tratamento completo, recomendamos [3].

Definição 6.1. *Seja Ω um conjunto arbitrário. Dizemos que uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω é uma σ-álgebra quando estão satisfeitas as seguintes condições:*
(1) $\varnothing$ e Ω pertencem à $\mathcal{F}$.
(2) Se A pertence à $\mathcal{F}$, então seu complementar também pertence.
(3) Se (A_n) é uma sequência de conjuntos de $\mathcal{F}$, então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ pertence à $\mathcal{F}$.

Uma exemplo importante de σ-álgebra é construído da seguinte maneira: Seja $\mathcal{A}$ a coleção de todos os intervalos abertos de $\mathbb{R}$. Existe a menor σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$ contendo $\mathcal{A}$. Tal σ-álgebra é chamada σ-álgebra de Borel e qualquer conjunto que pertença a esta σ-álgebra é chamado de um conjunto de Borel. O leitor interessado pode consultar [2] para mais detalhes.

Suponha que estamos fazendo um experimento. O espaço amostral Ω é o conjunto de todos os resultados possíveis deste experimento. Um evento é um subconjunto de Ω. Ao fixar uma σ-álgebra $\mathcal{F}$ dos subconjuntos de Ω, determinamos os eventos que estamos interessados em medir, isto é, atribuir uma probabilidade. De modo mais preciso, temos a seguinte

Definição 6.2. *Dizemos que uma função $\mathbb{P}$ definida em $\mathcal{F}$ é uma medida de probabilidade quando*
(1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
(2) $0 \leq \mathbb{P} \leq 1$.
(3) Se $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ é uma coleção finita ou enumerável de eventos tais que $A_i \in \mathcal{F}$ e $A_i \bigcap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$ então $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$.

A terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é chamada de espaço de probabilidade. Para a discussão que se segue, vamos considerar o espaço $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dado e fixado.

Definição 6.3. *Uma variável aleatória (unidimensional) X é uma função $X : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que o evento $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}$ pertence a $\mathcal{F}$ para qualquer x em $\mathbb{R}$. Em outras palavras, X deve ser $\mathcal{F}$-mensurável.*

Neste apêndice todas as variáveis aleatórias estarão definidas em Ω.

Definição 6.4. *Definimos a* **função de distribuição de probabilidade** *de uma variável aleatória X por*

$$F_X(x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(x) \leq x\}) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Exemplo 6.5. Um dos exemplos mais importantes de função de distribuição de probabilidade é a dada por

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-(s-\mu)^2/(2\sigma^2)}\, ds,$$

onde μ e σ^2 são constantes reais denominadas média e variância. Quando uma variável aleatória X tem esta função de distribuição de probabilidade, dizemos que X é normalmente distribuida com média μ e variância σ^2 e escrevemos $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Definição 6.6. *Seja X uma variável aleatória. Definimos o* **valor esperado**, *ou* **média**, *de X como*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X) = \int_{\Omega} X\, d\mathbb{P}. \tag{6.1}$$

E a **variância** *de X é definida pela expressão*

$$\mathrm{Var}_{\mathbb{P}}(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(X - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X))^2].$$

Observamos que quando o conjunto Ω é discreto, a integral (6.1) é apenas a soma dos produtos dos valores de X pelas respectivas probabilidades de X assumir estes valores.

A partir deste ponto, vamos escrever $\mathbb{E}$ ao invés de $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$ pois um único espaço de probabilidade foi fixado.

Definição 6.7. *Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias definidas no mesmo espaço de probabilidade. Dizemos que $X_1, X_2, \ldots$ são* **independentes** *se para qualquer inteiro $k \geq 2$ e qualquer escolha de conjuntos de Borel $B_1, \ldots, B_k \subseteq \mathbb{R}$ valer*

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \ldots, X_k \in B_k) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1)\mathbb{P}(X_2 \in B_2) \cdots \mathbb{P}(X_k \in B_k).$$

De maneira intuitiva, duas variáveis aleatórias são independentes quando o valor assumido por uma independe do valor assumido pela outra. Por exemplo, no experimento que consiste em lançar uma moeda honesta n vezes, se X_i for definida como

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{se o resultado do i-ésimo lançamento for cara;} \\ 1 & \text{se o resultado do i-ésimo lançamento for coroa.} \end{cases}$$

é fácil ver que X_1 e X_2 são independentes.

Teorema 6.8. *Se X e Y são variáveis aleatórias independentes então para quaisquer funções h e g,*

$$\mathbb{E}(h(X)g(Y)) = \mathbb{E}(h(X))\mathbb{E}(g(Y)).$$

Uma demonstração deste fato está em [17] página 328.

Teorema 6.9. *Sejam* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *o espaço de probabilidade,* X *uma variável aleatória tal que* $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ *e* $\mathcal{G}$ *uma sub-*σ*-álgebra de* $\mathcal{F}$*. Então existe uma variável aleatória* Y *que satisfaz as seguintes propriedades*
(1) Y *é* $\mathcal{G}$*-mensurável.*
(2) $\mathbb{E}(|Y|) < \infty$*.*
(3) Para cada $G \in \mathcal{G}$*, temos*

$$\int_G Y \, d\mathbb{P} = \int_G X \, d\mathbb{P}, \quad \forall G \in \mathcal{G}.$$

O resultado acima é provado utilizando o teorema de Radon-Nikodým. Para os detalhes, recomendamos [20].

Definição 6.10. *Chamamos uma variável aleatória* Y *com as propriedades dadas no teorema 6.9 de* **esperança condicional de** X **dado** $\mathcal{G}$ *e a denotamos por* $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$*.*

Vamos agora considerar o intervalo de tempo $[0, T]$, com T um valor fixo em $[0, \infty)$.

Definição 6.11. *Chamamos de* **filtração** *e denotamos por* $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ *à família de sub-*σ*-álgebras de* $\mathcal{F}$ *indexadas por* $t \in [0, T]$ *que é crescente. Isto é, para cada* s *e* t *no intervalo* $[0, T]$ *com* $s < t$*, temos* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$*.*

Se o índice de tempo assumir valores discretos, isto é se $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$ a filtração é a família $\{\mathcal{F}_t, t = 0, 1, \ldots, T\}$ tal que $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \ldots \subset \mathcal{F}_T$.

De maneira intuitiva, a filtração mantém um registro das informações disponíveis até cada um dos instantes de tempo $t \in [0, T]$. Para cada t, a σ-álgebra $\mathcal{F}_t$ diz quais os eventos que podem ter ocorrido até o instante t.

Definição 6.12. *A coleção* $M = \{M_t, \mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$*, onde cada* M_t *é uma variável aleatória e* $\mathcal{F}_t$ *é uma* σ*-álgebra, é chamada de* **martingal** *quando as seguintes propriedades estão satisfeitas para todo* $t \in [0, T]$*:*
(1) M_t *é* $\mathcal{F}_t$*-mensurável.*
(2) $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$ *para qualquer* $s \leq t$ *em* $[0, T]$*.*
(3) $\mathbb{E}(|M_t|) < \infty$*.*

Um exemplo de martingal é um jogo de apostas honesto. Seja X_n o capital de um jogador depois de n apostas com $X_0 = 0$. O dinheiro obtido na n-ésima aposta é dado por $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$. Se o jogo for honesto, esperamos que depois da $(n-1)$-ésima aposta e antes da n-ésima jogada ser realizada seja válido que $\mathbb{E}(\Delta X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = 0$. Aqui, $\mathcal{F}_k$ pode ser entendida como as informações dos resultados até a k-ésima aposta. Em um jogo honesto, o ganho esperado depois de uma jogada deve ser 0 e portanto constitui um exemplo de martingal (discreto).

Referências

1. Avellaneda, M. & Laurence, P., *Quantitative Modeling of Derivative Securities: From Theory To Practice*, Chapman & Hall/CRC, 1999
2. Bartle, R., *Elements of Integration* Wiley, 1966
3. Billingsley, P., *Probability and Measure*, Wiley-Interscience, 1995
4. Brzeźniak, Z. & Zastawniak, T., *Basic Stochastic Processes*, Springer, 1999
5. Capinski, M. & Zastawniak, T., *Mathematics for Finance, An introduction to Financial Engineering*, Springer, 2003
6. Capinski, M. & Kopp, E., *Measure, Integral and Probability*, Springer, 2003
7. Chorin, A. & Hald, O., *Stochastic Tools in Mathematics and Science*, Springer, 2005
8. Hida, T., *Brownian Motion*, Springer, 1980
9. Iorio, Rafael J. Jr. & Iorio, Valéria de M., *Equações Diferenciais Parciais: uma Introdução*, IMPA, 1988
10. Hull, J., *Opções, futuros e outros derivativos*, BM&F, 2003
11. Jiang, L., *Mathematical Modeling and Methods of Option Pricing*, World Scientific, 2005
12. John, F., *Partial Differential Equations*, Springer, 2005
13. Karatzas, I., & Sherve, S. E., *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, 1997
14. Luenberger, D.G., *Investment Science*, Oxford University Press, 1998
15. Øksendal, B., *Stochastic differential equations*, Springer, 2003
16. Roman, S., *Introduction to the Mathematics of Finance: From Risk Management to Options Pricing*, Springer, 2004
17. Ross, S.M., *A First Course in Probability*, Prentice-Hall, 2002
18. Ross, S.M., *An Elementary Introduction to Mathematical Finance*, Cambridge University Press, 2003
19. Steele, J.M., *Stochastic Calculus and Financial Applications*, Springer, 2001
20. Williams, D., *Probability with Martingales*, Cambridge University Press, 1991
21. Williams, R.J., *Introduction to the Mathematics of Finance*, American Mathematical Society, 2006
22. Wilmott, P., Dewynne, J.N, Howison, S.D., *The Mathematics of Financial Derivatives*, Cambridge University Press, 1995