MAT0146: Cálculo Diferencial e Integral I para Economia

B1: Limites

Prof. M Alexandrino (IME-USP)

2024

Alerta: Este é apenas um guia resumido de parte das transparências das aulas. Ele não substitui as aulas (onde existem discussões, resoluções de exercícios, figuras, etc) e não substitui a leitura da bibliografia recomendada. O GeoGebra http://www.geogebra.org (aqui utilizado) é uma ótima ferramenta, porém o aluno deve também tentar fazer as figuras a mão para compreende-las melhor.

Objetivo:

(1) Motivação: uma discussão intuitiva

(2) Formalizações: definições

(3) Funções contínuas

(4) Técnias para limites

Motivação: Para onde *tende* $f(x)$ quando x tende a p?

Exemplo 1

Seja $p = 0$ e função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

n	x_n	$y_n = f(x_n)$
1	1	$1 + 1$
2	$1/2$	$1 + 1/4$
3	$1/3$	$1 + 1/9$
4	$1/4$	$1 + 1/16$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Obs Uma **única** tabela sugere, **mas não determina completamente** o fenômeno *tender para* (usaremos tabelas **apenas para criar intuição**, mas **limites serão calculados com técnicas**).

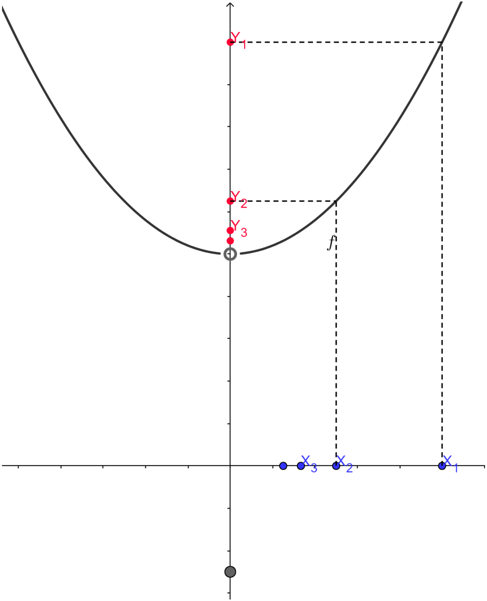


Figura: $\lim_{x \to p} f(x) = 1 \neq f(p)$

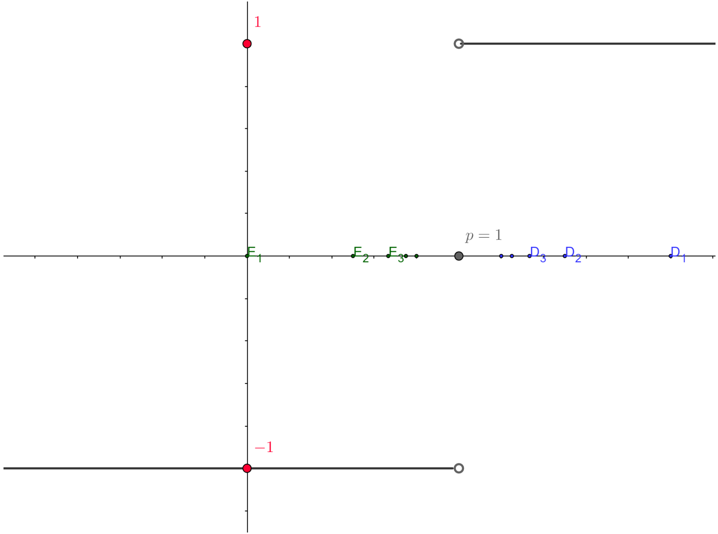
Exemplo 2

Sejam $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$ e $p = 1$

n	e_n	$y_n = f(x_n)$
1	1 -1	-1
2	1-1/2	-1
3	1-1/3	-1
4	1-1/4	-1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

n	d_n	$y_n = f(x_n)$
1	1+1	1
2	1+1/2	1
3	1+1/3	1
4	1+1/4	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Dado $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$ e $p = 1$ observamos que $\lim_{x \to p} f(x)$ não existe, porém existe **limite lateral a direita** , $\lim_{x \to p^+} f(x) = 1$ e **limite lateral a esquerda** , $\lim_{x \to p^{-1}} f(x) = -1$



Exemplo 3

Sejam $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + 2$ e considere 2 situações:

- $p = 1$
- $p = +\infty$.

n	x_n	$y_n = f(x_n)$
1	1 +1	2+1
2	1+1/2	2+4
3	1+1/3	2+9
4	1+1/4	2+16
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

n	x_n	$y_n = f(x_n)$
1	1+1	2+1
2	1+2	2+1/4
3	1+3	2+1/9
4	1+4	2+1/16
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Dado $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + 2$ $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$

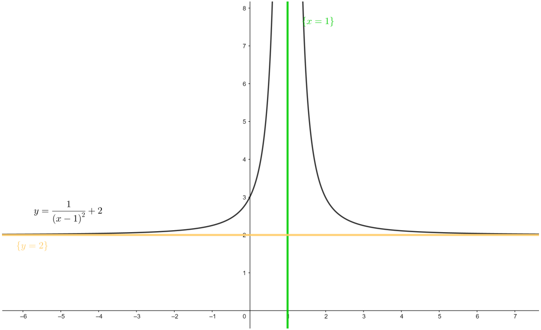


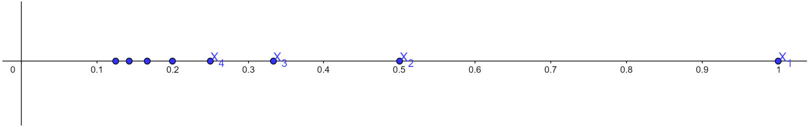
Figura: $\{y = 2\}$ é a assintota horizontal e $\{x = 1\}$ é assintota vertical

Formalizações: definições

Definição 4

Uma sequência é uma função
$X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

n	x_n
1	1
2	1/2
3	1/3
4	1/4
$\vdots$	$\vdots$



Definição 5

Dizemos que uma sequência $\{x_n\}$ **converge** para um ponto p (ou seja $x_n \to p$) se, para todo $\epsilon > 0$, existe um N_0 tal que $\forall n > N_0$ temos $|x_n - p| < \epsilon$.

Definição 6 (limite)

Dizemos que $\lim_{x \to p} f(x) = L$ se **para toda sequencia** $x_n \to p$ tivermos que $f(x_n) \to L$

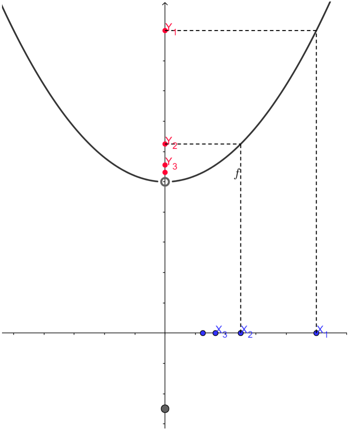


Figura: Para $f(x) = x^2 + 1$, com $x \neq 0$ e $f(x) = -\frac{1}{2}$ para $x = 0$ temos $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq f(p)$

Definição 7 (equivalente de limite)

$\lim_{x \to p} f(x) = L$ se para todo $\epsilon > 0$ existe um δ tal que para todo $x \in (p - \delta, p + \delta)$ temos $f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$

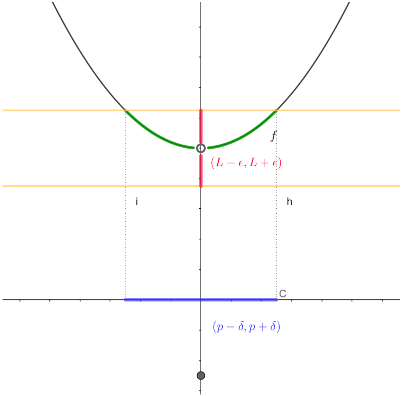


Figura: Para $f(x) = x^2 + 1$, com $x \neq 0$ e $f(x) = -\frac{1}{2}$ para $x = 0$ temos $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq f(p)$

Definição 8 (limite lateral a direita)

Dizemos que $\lim_{x\to p^+} f(x) = L$ se para toda sequencia $x_n \to p$ com $x_n > p$ tivermos que $f(x_n) \to L$

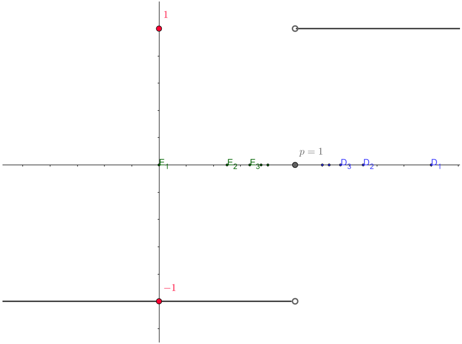


Figura: para $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$ e $p = 1$ temos $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -1$

Obs: Vale definição análoga para $\lim_{x\to p^-} f(x) = L$

Definição 9

Dizemos que $x_n \to +\infty$ se para todo $R > 0$ existe um N_0 tal que se $n > N_0$ então $x_n > R$.

Definição 10

$\lim_{x \to +\infty} f = L$ se para toda sequência $x_n \to +\infty$ tivermos $f(x_n) \to L$ Neste caso a $\{y = L\}$ é assintota horizontal

Definição 11

$\lim_{x \to p} f = +\infty$ se para toda sequência $x_n \to p$ tivermos $f(x_n) \to +\infty$. Neste caso $\{x = p\}$ é assintota vertical

Obs: Definições análogas valem para $x_n \to -\infty$, para $\lim_{x \to -\infty} f = L$ e $\lim_{x \to p} f = -\infty$.

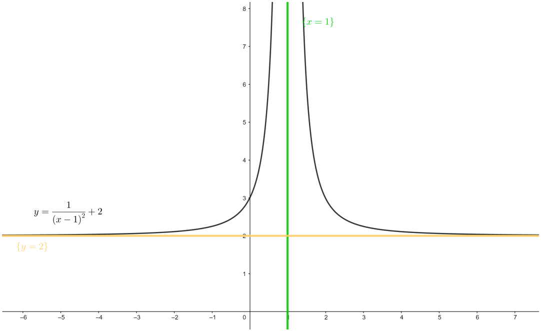


Figura: Seja $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + 2$. Visto que $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$ temos que: $\{x = 1\}$ é assintota vertical. Visto que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$, temos que $\{y = 2\}$ é a assintota horizontal. Note que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$ então $\{y = 2\}$ é unica assintota horizontal.

Prob: Usando a definição demonstre que:

1. $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$
2. $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
3. $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Funções contínuas

Definição 12

Dizemos que uma função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função **contínua** em $p \in I$ se

$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$$

Note que:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \neq 0 \\ -0.5 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

não é uma função contínua.

Proposição 13

As seguintes funções são contínuas:

1. $x \to x^n$
2. $x \to \sqrt[n]{x}$
3. $x \to \operatorname{sen}(x)$
4. $x \to \cos(x)$

Proposição 14

Soma, subtração, produto, quociente (onde estiver definidas) e compostas de funções contínuas são contínuas.

Exemplo 15

1. $f(x) = 7x^2 + \cos(x)$
2. $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$

são funções contínuas.

Teorema 16

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) < f(b)$ e c é um número tal que $f(a) < c < f(b)$ então existe um ponto $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x) = c$.

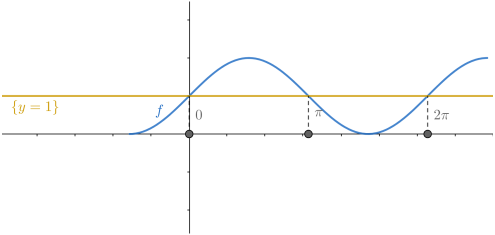


Figura: Seja $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \sin(x) + 1$. Para $c = 1$ existem 3 pontos x_i tal que $f(x_i) = 1$

Prob: Calcule $\lim_{x\to 0} f(x)$ onde $f(x) = \begin{cases} x^2+4 & \text{se } x \neq 0 \\ -1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Solução:
Observe que $h(x) = x^2 + 4$ é uma função continua. Definindo $I = \mathbb{R} - \{0\}$ podemos observar que a restrição $f|_I$ coincide com $h|_I$
Assim $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} h(x) = h(0) = 4$
Visto que $f(0) = -1$ também podemos observar que f não é continuo em $x = 0$.

Prob: Calcule $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$

Solução:
Seja $h(x) = \frac{1}{x+2}$ (note que seu domínio maximal é $\mathbb{R} - \{-2\}$).
Defina $I = \mathbb{R} - \{2, -2\}$. Observe que $h|_I = f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ e que h é continua em $x = 2$. Logo
$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} h(x) = h(2) = 1/4$.

Técnias para limites

Proposição 17

Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : I \to \mathbb{R}$ funções que tenham limites (reais) em p. Então:

1. $\lim_{x\to p}(f+g) = \lim_{x\to p} f + \lim_{x\to p} g$
2. $\lim_{x\to p}(f-g) = \lim_{x\to p} f - \lim_{x\to p} g$
3. $\lim_{x\to p}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to p} f(x) \cdot \lim_{x\to p} g(x)$
4. $\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to p} f(x)}{\lim_{x\to p} g(x)}$ *quando* $\lim_{x\to p} g(x) \neq 0$

O resultado também funciona para $x \to p^+$ e $x \to p^-$ (limites laterais) e para $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$

Obs: A proposição acima **não lida** com situações **indefinidas** tais como $+\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ ou $0 \times \infty$ (que serão abordadas com outras técnicas).

Proposição 18

Sejam $h : S \to T$ *e* $g : T \to \mathbb{R}$ *funções. Suponha que* $\lim_{x\to p} h(x) = b \in T$ *e que* g *é função contínua. Então* $\lim_{x\to p} g(h(x)) = g(\lim_{x\to p} h(x))$

Ex:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \operatorname{arcsen}\Big(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\Big) &= \operatorname{arcsen}\Big(\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\Big)\\
&= \operatorname{arcsen}\Big(\lim_{x\to 1} \frac{1}{1+\sqrt{x}}\Big)\\
&= \operatorname{arcsen}\Big(\frac{1}{2}\Big)\\
&= \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

Proposição 19

Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ *e* $g : I \to \mathbb{R}$ *funções com* $f \leq g$. *Suponha que os limites* $\lim_{x\to p} f$ *e* $\lim_{x\to p} g$ *existem. Então* $\lim_{x\to p} f \leq \lim_{x\to p} g$.

Teorema 20 (Confronto ou sandwich)

Sejam $g : I \to \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ e $h : I \to \mathbb{R}$ *funções com* $g \leq f \leq h$ *tais que* $\lim_{x\to p} g$ e $\lim_{x\to p} h$ *existem e* $\lim_{x\to p} g = L = \lim_{x\to p} h$. *Então* $\lim_{x\to} f = L$.

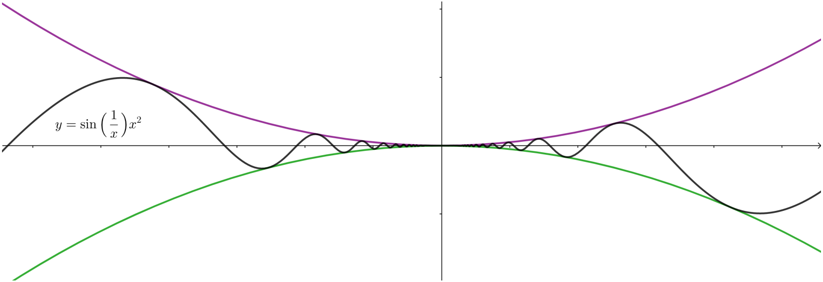


Figura: Ex: $h(x) = x^2$, $g(x) = -x^2$, $f(x) = \sin(\frac{1}{x})x^2$, $L = 0$ e $p = 0$

Corolario 21

Suponha que $\lim_{x\to p} f_1(x) = 0$ e $|f_2(x)| < k$ *próximo a* p *(limitada). Então* $\lim_{x\to p} f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$

Recordemos que $\lim_{x \to p^+} f(x) = L$ se para toda sequencia $x_n \to p$ com $x_n > p$ tivermos que $f(x_n) \to L$

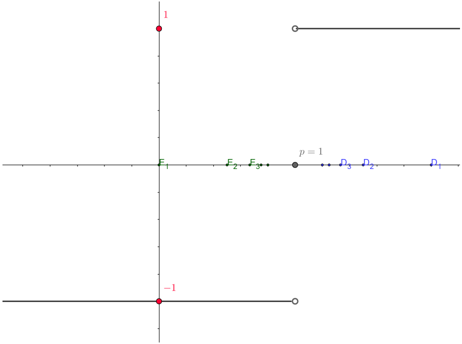


Figura: para $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$ e $p = 1$ temos $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$ e $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -1$

Teorema 22

$\lim_{x\to p} f = L$ *se e somente se* $\lim_{x\to p^+} f = L = \lim_{x\to p^-} f$

Prob Seja $F(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}$

1. Calcule os limtes $\lim_{x\to 1^+} F$ e $\lim_{x\to 1^-} F$
2. Existe $\lim_{x\to 1} F(x)$?

Soluções

Observe primeiro que:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{(x-1)} & \text{se } 1 < x \\ \frac{x^2-1}{-(x-1)} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Assim: $\lim_{x\to 1^+} F = \lim_{x\to 1^+}(x+1) = 2$ e $\lim_{x\to 1^-} F = \lim_{x\to 1^-} -(x+1) = -2$ Como os limites laterais não coincidem não existe limite.

Prob: Determine c para que a função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ possa ser uma função tributária (e.g, Carne Leão)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ x + c & \text{se } 2 < x \end{cases}$$

Prob: Uma refinaria de petróleo possui 5 torres de destilação e opera tantas torres quantas forem necessárias para processar as matérias-primas disponíveis. As despesas gerais para operar cada torre de destilação (operador, manutenção, etc) são de R\$ 100,00 por semana. Além disto, o custo das matérias-primas é de R\$ 0,40 por galão de petróleo refinado. Cada torre de destilação pode processar matérias-primas para produzir 10.000 galões de petróleo por semana. Se y for o custo de operação e x a quantidade em galões de petróleo refinado, a função custo pode ser algebricamente representada pela equação

$$f(x) = 100\big([\frac{x}{10000}] + 1\big) + 0,4x$$

onde $[t]$ denota o maior inteiro menor do que t (por exemplo $[2] = 1$, $[2,3] = 2$ etc). Calcule os limites laterais a esquerda e a direita nos pontos $x = 10000$, $x = 20000$, $x = 30000$, $x = 40000$ e $x = 50000$ e diga se a função f é contínua ou descontinua nestes pontos.

Recordemos que: $\lim_{x\to p} f = +\infty$ se para toda sequência $x_n \to p$ tivermos $f(x_n) \to +\infty$. Neste caso $\{x = p\}$ é assintota vertical

$\lim_{x\to +\infty} f = L$ se para toda sequência $x_n \to +\infty$ tivermos $f(x_n) \to L$ Neste caso a $\{y = L\}$ é assintota horizontal

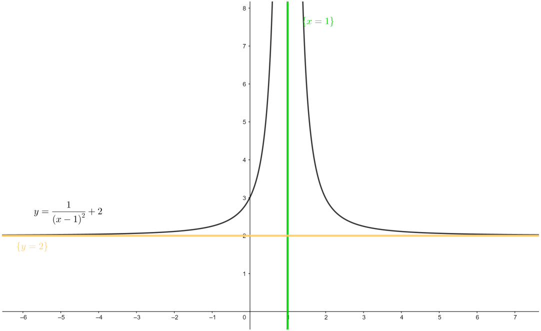


Figura: Seja $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + 2$. Visto que $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$ temos que: $\{x = 1\}$ é assintota vertical. Visto que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2$, temos que $\{y = 2\}$ é a assintota horizontal

Proposição 23

Seja α um número real $p \in \mathbb{R}$ ou uma tendência $+\infty$ ou $-\infty$.

(a) *Se* $\lim_{x\to\alpha} |f(x)| = \infty$ *então* $\lim_{x\to\alpha} \frac{1}{f(x)} = 0$

(b) *Seja* $f(x) > 0$ *e suponha* $\lim_{x\to\alpha} f(x) = 0$*. Então* $\lim_{x\to\alpha} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

(c) *Seja* $f(x) < 0$ *e suponha* $\lim_{x\to\alpha} f(x) = 0$*. Então* $\lim_{x\to\alpha} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

Resultados análogos valem para limites laterais $x \to \alpha^+$ *e* $x \to \alpha^-$*.*

Prob Calcule os limítes e assíntotas das funções abaixo:

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-3} + 4$
2. $\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} + 4$
3. $\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3} + 4$

Limites podem ser utilizados para comparar crescimentos de certas funções (e.g, polinomiais) quando $x \to \infty$ ou para comparar quão rápido estas funções vão a zero quando $x \to 0$.

Prob Calcule:

(1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-x}{5x^3+17x^2}$

(2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-x}{5x^2+17x}$

(3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+x}{5x^3+17x}$

(4) $\lim_{x\to 0^-} \frac{2x^2+x}{5x^3+17x}$

(5) $\lim_{x\to 0^-} \frac{2x^2+x}{5x^3+17x^2}$

(6) $\lim_{x\to+\infty} x^2 - 4x^3$

Soluções

(1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-x}{5x^3+17x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3(2-1/x^2)}{x^3(5+17/x)} = \frac{2}{5}$ visto que $\lim_{x\to+\infty} (2-1/x^2) = 2$ e $\lim_{x\to+\infty} (5+17/x) = 5$

(2)$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-x}{5x^2+17x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(2x-1/x)}{x^2(5+17/x)} = +\infty$ visto que $\lim_{x\to+\infty} (2x-1/x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} (5+17/x) = 5$

(3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+x}{5x^3+17x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(2+1/x)}{x^2(5x+17/x)} = 0$ visto que $\lim_{x\to+\infty} (2+1/x) = 2$ e $\lim_{x\to+\infty} (5x+17/x) = +\infty$

(4) $\lim_{x\to 0^-} \frac{2x^2+x}{5x^3+17x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x(2x+1)}{x(5x^2+17)} = \frac{1}{17}$ visto que
$\lim_{x\to 0^-} (2x+1) = 1$ e $\lim_{x\to 0^-} (5x^2+17) = 17$

(5)$\lim_{x\to 0^-} \frac{2x^2+x}{5x^3+17x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2(2+1/x)}{x^2(5x+17)} = -\infty$ visto que
$\lim_{x\to 0^-} (2+1/x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} (5x+17) = 17$

(6) $\lim_{x\to +\infty} x^2 - 4x^3 = \lim_{x\to +\infty} x^3(1/x - 4) = -\infty$ visto que
$\lim_{x\to +\infty} x^3 = +\infty$ e $\lim_{x\to +\infty} (1/x - 4) = -4$