

# Cálculo Avançado e Geometria

Notas de aula do  
Prof. Marcos M. Alexandrino (IME-USP)  
(com co autoria de Dra. Yunelsy N. Alvarez)



# Sumário

<b>1</b>	<b>Variedades mergulhadas em espaços Euclidianos</b>	<b>1</b>
1.1	Submersões e imersões . . . . .	1
1.2	Espaços tangentes e métrica induzida . . . . .	13
1.3	Campos de vetores e o campo gradiente . . . . .	20
1.3.1	Campos de vetores . . . . .	20
1.3.2	Campo gradiente . . . . .	23
1.3.3	Colchete de campos, um primeiro contato . . . . .	25
1.4	Multiplicadores de Lagrange . . . . .	26
1.5	Hessiano e extremos . . . . .	32
1.5.1	Extremos locais . . . . .	34
1.5.2	Crerérios de classificaçaçaõ de pontos creríticos . . . . .	39
1.5.3	Fórmlula de Taylor de ordem maior . . . . .	44
1.5.4	Máximos e múnimos absolutos . . . . .	46
1.6	*Convergência do gradiente descendente . . . . .	47
1.7	*Curvatura de Gauss de superfícies . . . . .	54
1.8	*Hessiana orlada . . . . .	61
1.8.1	Motivaçaçaõ e o Teorema do Hessiano Orlado . . . . .	62
1.8.2	**Ideia da Prova . . . . .	64
<b>2</b>	<b>Campos e fluxos em variedades</b>	<b>69</b>
2.1	Variedades . . . . .	69
2.2	Velocidades e derivaçaões . . . . .	74
2.3	Campos e fibrados vetoriais . . . . .	81
2.4	Fluxos e colchete de campos . . . . .	83
2.5	Teorema de Frobenius . . . . .	95
2.5.1	Definiçaões e resultado principal . . . . .	96

2.5.2	Prova do Teorema 2.49 . . . . .	97
2.6	*Controle geométrico e o teorema de Stefan-Sussmann . . . . .	100
<b>3</b>	<b>Integração</b>	<b>113</b>
3.1	Definições e propriedades básicas . . . . .	113
3.2	Teorema de Fubini . . . . .	116
3.3	Partição da unidade . . . . .	120
3.4	Mudança de variáveis . . . . .	122
3.4.1	Exemplo e exercícios . . . . .	122
3.4.2	Demonstração do Teorema 3.22 . . . . .	124
3.5	Um pouco de integrais triplas . . . . .	127
3.6	Teoremas clássicos de Gauss, Stokes e Green . . . . .	134
3.6.1	Fluxo através de superfícies e teorema clássico de Gauss . . . . .	134
3.6.2	Trabalho e os teoremas clássicos de Stokes e Green . . . . .	141
3.6.3	Aplicações as Equações de Maxwell (*) . . . . .	146
<b>4</b>	<b>Formas diferenciáveis</b>	<b>151</b>
4.1	Motivação . . . . .	151
4.2	Produto wedge e formas . . . . .	155
4.2.1	Produto wedge . . . . .	155
4.2.2	Formas diferenciais . . . . .	157
4.3	Derivada exterior . . . . .	163
4.4	Integração e teorema de Stokes . . . . .	168
4.4.1	Orientação e forma volume . . . . .	169
4.4.2	Integração de formas . . . . .	172
4.4.3	Variedade com bordo e o Teorema de Stokes . . . . .	174
4.4.4	* Comentários sobre invariantes topológicos . . . . .	179
4.5	*Geodésicas e uma introdução a mecânica . . . . .	180
4.5.1	Estrutura simplética de $TM^*$ . . . . .	180
4.5.2	Relações entre Lagrangianos e Hamiltonianos . . . . .	182
4.5.3	Geodésicas e equação de Newton . . . . .	187
4.6	*Otimização e o princípio do máximo de Pontryagin . . . . .	189
4.6.1	Uma versão geométrica do PMP . . . . .	191
4.6.2	Formulação clássica do PMP (tempo fixo) . . . . .	198
4.6.3	PMP e otimização do tempo . . . . .	202
<b>5</b>	<b>Uma introdução a Geometria Riemanniana</b>	<b>207</b>
5.1	Métricas e variedades Riemannianas . . . . .	207
5.2	Conexão Riemanniana e o Transporte Paralelo . . . . .	212

5.3	* Métrica de Sasaki em $TM$ . . . . .	222
5.4	*Alguns objetos de análise . . . . .	224
5.4.1	Gradiente e Hessiano . . . . .	225
5.4.2	Divergente e Laplaciano . . . . .	226
5.5	Geodésicas . . . . .	229
5.6	(*) Fluxo geodésico e forma simplética . . . . .	238
5.7	Curvatura, campos de Jacobi e Equação de Gauss . . . . .	244
5.7.1	Tensor curvatura e curvatura seccional . . . . .	245
5.7.2	Campos de Jacobi e variações por geodésicas . . . . .	247
5.7.3	Equação de Gauss e o teorema Egregium de Gauss . . . . .	253
5.8	*Curvatura média e superfícies mínimas . . . . .	258
5.8.1	Superfícies mínimas . . . . .	258
5.8.2	EDP das superfícies mínimas . . . . .	260
5.9	* Campo de curvatura média . . . . .	264

**Índice Remissivo****269**



# Variedades mergulhadas em espaços Euclidianos

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados sobre teoria das variedades mergulhadas em  $\mathbb{R}^n$ , tais como os teoremas de submersão e imersão, propriedades dos espaços tangentes, além de rudimentos de otimização em variedades. Ao longo deste capítulo, o leitor ou a leitora terá a oportunidade de observar que muitos dos conceitos e resultados sobre variedades que iremos apresentar são generalizações naturais de resultados que foram vistos em disciplinas anteriores tais como Cálculo II (onde se aprende e.g., derivada de funções de várias variáveis, vínculos, plano tangente, multiplicador de Lagrange, parametrizações), vide [Apo69].

## 1.1. Submersões e imersões

Já nos primeiros semestres da graduação, engenheiros, matemáticos e físicos encontravam **os espaços de configurações**  $M$  (possíveis posições de um certo sistema) como sendo “bons” subconjuntos em espaços Euclidianos  $\mathbb{R}^{m+k}$ . Em geral tais conjuntos eram descritos via pre-imagens de  $k$ -vínculos  $g_i : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}$ , i.e.,  $M = G^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^{m+k}, G(x) = c\}$  onde  $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  para  $G(x) = (g_1(x), \dots, g_k(x))$  e  $c = (c_1, \dots, c_k) \in \mathbb{R}^k$ . Sob boas condições conseguimos estabelecer os  $m$  graus de liberdade do  $M$  (a dimensão de  $M$ ) como sendo dimensão do espaço menos o número de vínculos. Tais conjuntos eram na verdade o que chamaremos aqui de variedades mergulhadas (vide Definição 1.6). As boas condições sobre os vínculos serão revista no teorema de submersão (vide Teorema 1.9). Antes de estabelecer as definições formais, apresentemos alguns exemplos que

ilustram estas ideias. Nestes exemplos, sugerimos que o(a) leitor(a) se concentre mais na intuição e ideias, não se preocupando em demonstrar as afirmações.

### Exemplo 1.1.

indexaplicações de Cálculo Avançado! em Mecânica

Dados 2 partículas  $p, q \in \mathbb{R}^3$  a uma distância fixa de 1 unidade, o espaço de configuração deste sistema, pode ser descrito como

$$g^{-1}(1) = \{(p, q) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, g(p, q) = 1\}$$

onde a função  $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$g(p, q) = \|p - q\|^2 = \sum_{i=1}^3 |p_i - q_i|^2$$

é nosso vínculo.

### Exemplo 1.2.

Consideremos um modelo de um "braço robótico" (com braço e antebraço de comprimentos  $l_1$  e  $l_2$ ) em um plano, i.e., conjunto de todos os possíveis 2 segmentos de reta no plano  $\overline{0p}$  e  $\overline{pq}$  com  $\|p\| = l_1$  e  $\|p - q\| = l_2$ . Afim de determinar suas possíveis posições, precisamos apenas determinar o ângulo  $\theta_1$  entre eixo  $x_1$  e  $\overline{0p}$  e  $\theta_2$  o ângulo entre eixo  $x_1$  e  $\overline{pq}$ . Note porém que  $\theta_i = 0$  e  $\theta_i = 2\pi$  nos dariam a mesma posição. Assim somos levados a considerar números complexos (de módulo 1)  $z_i = e^{i\theta_i}$  e concluir que o espaço de configuração é  $M = S^1 \times S^1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} | G(z_1, z_2) = (1, 1)\}$  onde  $G : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$  como  $G(z_1, z_2) = (|z_1|^2, |z_2|^2)$ , vide Figura 1.1.



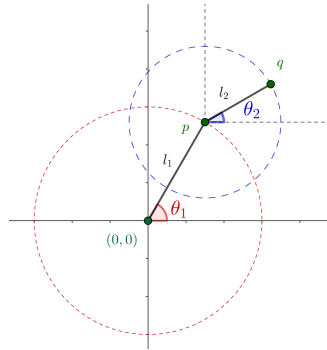


Figura 1.1: A variedade  $S^1 \times S^1$  modela possíveis posições de um braço de robô.

### Exemplo 1.3.

Consideremos agora o espaço de configuração de *um sólido em  $\mathbb{R}^3$  com centro de massa em  $\mathbf{0}$* , i.e., o conjunto de todas bases ortonormais  $\{q_i\}_{i=1\dots 3}$  com a mesma orientação da base canônica. Ao colocar as bases nas colunas de matrizes, tal conjunto então será descrito como as matrizes ortogonais com determinante 1. Assim vamos primeiro considerar as **matrizes ortogonais**

$$\mathbb{O}(3) := G^{-1}(Id) = \{Q \in \mathbb{GL}^{3 \times 3}(\mathbb{R}) \mid G(Q) = Id\}$$

onde  $G : \mathbb{GL}^{3 \times 3}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}$  é  $G(A) = A^t A$ , sendo que  $\mathbb{GL}^{3 \times 3}(\mathbb{R})$  denota as matrizes com determinante diferente de zero e  $\mathcal{S}$  as matrizes simétricas. Possível verificar que  $\mathcal{S}$  é um espaço vetorial isomorfo a  $\mathbb{R}^6$  e  $\mathbb{GL}^{3 \times 3}(\mathbb{R})$  pode ser identificado com um aberto de  $\mathbb{R}^9$ . Nosso grupo  $\mathbb{O}(3)$  terá 3 graus de liberdade, i.e., *dimensão 3*. O espaço de configuração desejado então é a componente conexa de  $\mathbb{O}(3)$  das matrizes com determinante 1 denotado por  $\mathbb{SO}(3)$  (que tem os mesmos graus de liberdade ou seja com *dimensão 3*). De fato é possível mostrar que as matrizes de determinante 1 podem ser conectadas continuamente a matriz identidade  $Id$ , enquanto as de determinante  $-1$  podem ser conectadas com a matriz  $-Id$ .

### Observação 1.4.

Mais geralmente **um sistema mecânico interligado** estará mergulhado em um **sistema mecânico livre** que é descrito como produto de  $m$  cópias de  $\mathbb{SO}(3) \times \mathbb{R}^3$  (cada cópia descrevendo um corpo rígido e seu centro de massa) com  $n$  cópias de  $\mathbb{R}^3$  (cada cópia

## Continuação.

descrevendo uma partícula). Em particular, no Exemplo 1.2

$$\begin{aligned} \varphi : S^1 \times S^1 &\rightarrow (\mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R}^3) \times (\mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R}^3) \\ (z_1, z_2) &\mapsto \left( (Q(z_1), R(z_1)), (Q(z_2), R(z_1, z_2)) \right) \end{aligned}$$

onde  $Q(z_i) : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R}$  é rotação definida como  $Q(z_i)(z, t) = (z_i z, t)$  e as aplicações centro de massa são:  $R_1(z_1) = r_1 Q(z_1) e_1$ ,  $R_2(z_1, z_2) = l_1 Q(z_1) e_1 + r_2 Q(z_2) e_1$ . Aqui  $r_1$  é a distância do centro de massa de  $\overline{0p}$  a 0 e  $r_2$  é a distância do centro de massa de  $\overline{pq}$  ao link  $p$ . Para mais detalhes vide [BL04].

**Observação 1.5. Oscilador harmônico**

Nossos conjuntos, que serão exemplos naturais de variedades, podem aparecer não só como espaço de configuração de um sistema, mas também como um subconjunto do espaço de fases (posição velocidade) de algum sistema dinâmico. Considere, por exemplo, uma partícula com massa  $m$  localizada em uma reta presa a uma mola perfeita. O movimento de tal partícula é descrita pela E.D.O (equação diferencial ordinária)  $m\ddot{\alpha}(t) = -k\alpha(t) = -\dot{u}(\alpha(t))$  onde  $u(q) = \frac{k}{2}q^2$  é a função potencial. Defina  $E : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como a energia total, i.e.,  $E(q, \dot{q}) = \frac{m}{2}(\dot{q})^2 + u(q)$ . Visto que  $\frac{d}{dt} E(\alpha(t), \dot{\alpha}(t)) = 0$ , (o que pode ser facilmente verificado pela regra da cadeia) concluímos que  $E(\alpha(t), \dot{\alpha}(t)) = c$ . Em outras palavras, posição e velocidade da partícula ficam restritas à elipse  $E^{-1}(c) = \{(q, \dot{q}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, E(q, \dot{q}) = c\}$ .

Após alguns exemplos e motivações estamos prontos para a definição formal de variedade mergulhada. A grosso modo falando, uma variedade mergulhada  $M$  (de dimensão  $m$ ) em  $\mathbb{R}^{m+k}$  é um conjunto que é localmente difeomorfo a um aberto de  $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ , i.e., que (localmente) pode ser "suavemente achatada (retificada)".

**Definição 1.6. Variedade mergulhada**

Um conjunto  $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$  é uma  $m$ -variedade mergulhada no espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^{m+k}$  (ou subvariedade do  $\mathbb{R}^{m+k}$ ) se para cada  $p \in M$  existe uma vizinhança<sup>1</sup>  $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^{m+k}$  de  $p$ , vizinhança  $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^{m+k}$  de  $q$  e um difeomorfismo  $\tilde{\psi} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$  tal que  $\tilde{\psi}(p) = q$  e  $\tilde{\psi}(U) = V$ , onde  $U = \tilde{U} \cap M$  e  $V = \tilde{V} \cap \{\mathbb{R}^m \times \{0\}\}$ . Chamamos a aplicação  $\psi = \tilde{\psi}|_U$  de **sistema de coordenada**, e  $\varphi := \psi^{-1}$  é chamada de **parametrização**.

<sup>1</sup>Lembre que uma **vizinhança** de um ponto  $p \in \mathbb{R}^{m+k}$  é um conjunto aberto e conexo que contém  $p$  em seu interior. Lembre também que um **difeomorfismo** é uma aplicação suave com inversa suave.

**Exemplo 1.7. Gráficos**

Seja  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave. Considere o gráfico de  $h$  em  $\mathbb{R}^3$ , ou seja, o conjunto

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 = h(x_1, x_2)\}.$$

Então  $M$  é uma variedade mergulhada em  $\mathbb{R}^3$  pois a aplicação  $\tilde{\psi} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$\tilde{\psi}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3 - h(x_1, x_2))$$

satisfaz as propriedades da Definição 1.6. De fato, como

$$D\tilde{\psi}(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\partial h}{\partial x_1} & -\frac{\partial h}{\partial x_2} & 1 \end{bmatrix}$$

para todo  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ , então, pelo Teorema da Função Inversa<sup>2</sup>,  $\tilde{\psi}$  é um difeomorfismo local de  $\mathbb{R}^3$ , e por ser uma aplicação bijetora, é um difeomorfismo. Além disso,  $\tilde{\psi}(M) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ .

Como caso particular, observamos que o parabolóide é uma superfície mergulhada, pois é o gráfico sobre  $\mathbb{R}^2$  da função  $h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ .

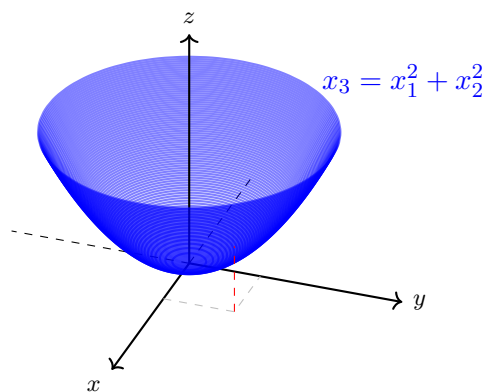


Figura 1.2: O Parabolóide de equação  $x_3 = x_1^2 + x_2^2$

Subvariedades mergulhadas do espaço Euclidiano apareciam naturalmente na disciplina de Cálculo II descrita por “bons vínculos”, ou seja via submersões.

### Definição 1.8.

Uma aplicação suave  $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  é chamada **submersão** se  $DG(x)$  é sobrejetora para todo  $x \in U$ .<sup>3</sup>

Um dos exemplos mais simples de uma submersão é considerar uma aplicação linear  $T : \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  de posto  $k$ . Note que neste exemplo sabemos que  $\{T^{-1}(c), c \in \mathbb{R}^k\}$  é uma partição de  $\mathbb{R}^{m+k}$  por subespaços afins (em particular variedades) de dimensão  $m$ . O resultado a seguir generaliza esta discussão.

### Teorema 1.9. Teorema da Submersão

Seja  $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  uma submersão suave. Então para todo  $p_0 \in U$  existe uma vizinhança  $U_0 \subset U$  de  $p_0$  tal que a partição  $\mathcal{F} = \{G^{-1}(c), c \in \mathbb{R}^k\} \cap U_0$  é difeomorfa à **folheação canônica**  $\mathcal{F}_0 = \{\pi^{-1}(c), c \in \mathbb{R}^k\}$ , onde  $\pi : \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  é definida como  $\pi(x, y) = y$ . Mais precisamente existe um difeomorfismo  $\tilde{\varphi} : V_0 \rightarrow U_0$  tal que  $G \circ \tilde{\varphi}(x, y) = \pi(x, y) = y$ .

### Exemplo 1.10.

Para ilustrar o Teorema 1.9, consideremos novamente o Exemplo 1.7. Se definirmos a função  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_3 - h(x_1, x_2),$$

vemos que  $\mathcal{F} = \{g^{-1}(c), c \in \mathbb{R}\}$  é o conjunto das translações verticais do gráfico da função  $h$  (as quais são movimentos rígidos). O difeomorfismo  $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definido por

$$\tilde{\varphi}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3 + h(x_1, x_2))$$

satisfaz

$$g \circ \tilde{\varphi}(x_1, x_2, x_3) = x_3 = \pi(x_1, x_2, x_3).$$

<sup>2</sup>O Teorema da Função Inversa garante que se  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tem  $DF(p)$  invertível, então existem vizinhanças  $U_0$  e  $V_0$  de  $p$  e  $F(p)$  respectivamente, tal que  $F|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$  se torna um difeomorfismo.

<sup>3</sup> $DG(x)$  é sobrejetora se  $\nabla g_i(x)$  são linearmente independente, ou equivalentemente, se existem  $k$  colunas linearmente independente.

Continuação.

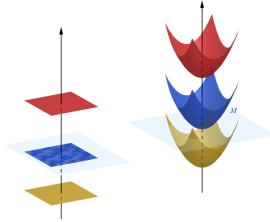


Figura 1.3: As folheações  $\mathcal{F}_0$  e  $\mathcal{F}$  no caso em que  $h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

*Prova do Teorema 1.9.* Seja  $A : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$  um movimento rígido (isometria no espaço Euclidiano) tal que a matriz  $D_y \tilde{G}(p_0)$  é invertível onde  $\tilde{G} = G \circ A$ . Defina  $\tilde{\psi}(x, y) = (x, \tilde{G}(x, y))$  e observe que

$$D\tilde{\psi}(p_0) = \begin{bmatrix} Id & 0 \\ D_x \tilde{G}(p_0) & D_y \tilde{G}(p_0) \end{bmatrix}$$

é um isomorfismo. Logo pelo Teorema da Função Inversa  $\tilde{\psi} : U_0 \rightarrow V_0$  é um difeomorfismo. Seja  $L = \{(x, c) \in (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k)\} \cap V_0$ .

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}^{-1}(L) &= \{(x, y) \in U_0, \psi(x, y) = (x, c)\} \\ &= \{(x, y) \in U_0, \tilde{G}(x, y) = c\} \end{aligned}$$

Assim  $G \circ A \circ \tilde{\psi}^{-1}(x, c) = c$ . A demonstração termina definindo  $\tilde{\varphi} = A \circ \tilde{\psi}^{-1}$ . □

### Exercício 1.11. Gráficos

Seja  $H : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  aplicação suave. Defina o gráfico

$$M = \{(x, y) \in V \times \mathbb{R}^k, y = H(x)\}$$

e a função  $G : V \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  como

$$G(x, y) = \sum_{i=1}^k (y_i - h_i(x))e_i,$$

Verifique que:

(a)  $M = G^{-1}(0)$ ,

## Continuação.

(b)  $G$  é submersão.

Note que o Teorema 1.9 implica em particular que cada conjunto de nível  $G^{-1}(c)$  de uma submersão  $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  é variedade mergulhada. Porém por vezes teremos que lidar com conjuntos de níveis de aplicações que não são necessariamente submersões. Mesmo assim como veremos a seguir,  $G^{-1}(c)$  será variedade se  $c$  for o que chamamos *valor regular*.

**Definição 1.12.**

Dado uma aplicação  $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  suave. Suponha que para  $c \in G(U)$  temos que  $DG(x)$  é sobrejetor  $\forall x \in G^{-1}(c)$ . Neste caso dizemos que  $c$  é **valor regular**.

**Observação 1.13. Teorema de Sard**

Dado uma aplicação suave  $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ , o teorema de Sard garante que o conjunto  $C$  de valores críticos, ou seja  $C = \{G(x); \text{posto } DG(x) < k\}$ , tem **medida nula**. Em outras palavras dado  $\epsilon > 0$  podemos cobrir  $C$  por um conjunto de cubos em  $\mathbb{R}^k$  com volume total menor que  $\epsilon$ , vide [Mil65].

**Teorema 1.14. Teorema do valor regular**

Seja  $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  uma aplicação suave e  $c$  um valor regular. Então  $M = G^{-1}(c)$  é variedade mergulhada no  $\mathbb{R}^{m+k}$  com dimensão  $m$ .

*Demonstração.* Observe que dado um valor regular  $c$  e um ponto  $p \in G^{-1}(c)$  então, por definição de valor regular,  $DG(p)$  é sobrejetor, i.e., existem  $k$  colunas de  $DG(p)$  que são linearmente independentes. Assim por continuidade é possível provar que tais  $k$  colunas de  $DG(x)$  continuam linearmente independentes para todo  $x$  contido em uma vizinhança  $U_0$  de  $p$ . Logo  $G|_{U_0} \rightarrow \mathbb{R}^k$  é uma submersão. Pelo teorema da submersão,  $G^{-1}(c) \cap U_0$  é variedade mergulhada e assim  $M = G^{-1}(c)$  é variedade mergulhada.  $\square$

**Observação 1.15. Valor singular**

Um valor  $c \in G(U)$  de uma aplicação  $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  é chamado **valor singular** se existe  $q \in G^{-1}(c)$  tal que  $\text{posto } DG(q) < k$ . Tal ponto  $q$  é chamado **ponto crítico**. Consideremos como exemplo a aplicação  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

## Continuação.

$g(x_1, x_2) = x_1x_2$ . Note que todo  $c \neq 0$  é valor regular, em particular as curvas  $g^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^2; x_2 = \frac{c}{x_1}\}$  são variedades mergulhadas (de dimensão 1). Por outro lado observamos que  $C = g^{-1}(0) = \{x_1 = 0\} \cup \{x_2 = 0\}$  não é variedade. Observe que embora para  $x \in g^{-1}(0)$  com  $x \neq (0, 0)$  tenhamos  $dg(x)$  sobrejetor, para  $q = (0, 0)$  temos  $dg(q) = [0, 0]$ . Ou seja a existência de um único ponto crítico  $q$  já pode implicar que o conjunto de nível deixe de ser uma variedade. Terminamos observando que pelo teorema de Lojasiewicz a pre imagem de um valor singular de uma aplicação analítica é uma estratificação. Para maiores detalhes, (e.g., definição de estratificação) vide [KP02].

Vimos pela Definição 1.6 e Exercício 1.11 que gráficos são variedades mergulhadas. O resultado a seguir implica o resultado recíproco, ou seja que toda variedade mergulhada é localmente um gráfico.

**Teorema 1.16. Teorema da Função Implícita**

Seja  $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  uma submersão suave. Então  $M = G^{-1}(c)$  é um gráfico local. Mais precisamente suponha que a matriz  $D_y G(p_1, p_2)$  é um isomorfismo onde  $(p_1, p_2)$  é tal que  $c = G(p_1, p_2)$ . Então existe uma vizinhança  $B$  de  $(p_1, p_2)$ , uma vizinhança  $W \subset \mathbb{R}^m$  de  $p_1$  uma aplicação suave  $H : W \rightarrow \mathbb{R}^k$  tal que:  $(x, y) \in B \cap M$  se e somente se  $y = H(x)$  com  $x \in W$ . Em particular  $G(x, H(x)) = c$ .

*Demonstração.* Na demonstração do Teorema 1.9 basta considerar  $A = Id$ . Com  $c$  fixado temos  $\tilde{\psi}^{-1}(x, c) = (x, \tilde{H}(x, c))$ . Então definimos  $H(x) = \tilde{H}(x, c)$ .  $\square$

**Exercício 1.17. Superfície de Revolução**

Seja  $g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave. Suponha que  $c$  é valor regular da função  $(r, x_3) \rightarrow g(r^2, x_3)$ . Seja

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, g(x_1^2 + x_2^2, x_3) = c\}.$$

Verifique que  $M$  é **superfície de revolução**, i.e., variedade mergulhada de dimensão 2 invariante por rotações que fixam o eixo  $x_3$  (vide o exemplo da Figura 1.4).

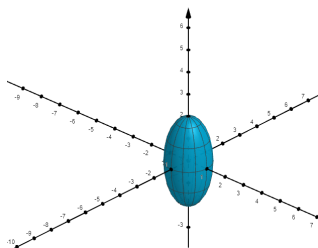


Figura 1.4:  $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{4}x_3^2 = 1\}$  ilustra o Exercício 1.17

### Observação 1.18.

No exercício anterior temos então uma variedade  $M$  que admite uma aplicação  $\mu : G \times M \rightarrow M$  (onde  $G = S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ ,  $M = \mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ ), definida como

$$\mu(g, (z, t)) = (gz, t).$$

Observe que tal aplicação  $\mu$  atende as propriedades a seguir:

- $\mu(e, x) = x$ ;
- $\mu(g_2, \mu(g_1, x)) = \mu(g_2 g_1, x)$ .

Em geral, uma aplicação  $\mu : G \times M \rightarrow M$  ( $G$  um grupo de Lie, por exemplo, um grupo fechado de matrizes, e  $M$  uma variedade) que satisfaz essas propriedades será denominada **ação**.

Uma outra forma em que encontrávamos variedades mergulhadas no espaço Euclidiano na disciplina de Cálculo II era via as imersões (as parametrizações).

### Definição 1.19.

Uma aplicação suave  $\varphi : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$  é chamada **imersão** se  $D\varphi(x)$  é injetora para todo  $x \in V$ .

### Teorema 1.20. Teorema de imersão

Seja  $\varphi : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$  uma imersão. Então dado  $p \in V$  existe uma vizinhança  $V_0 \subset V$  de  $p$  tal que  $\varphi(V_0)$  é variedade mergulhada. Mais precisamente, existe uma vizinhança  $\tilde{U}$  em  $\mathbb{R}^{m+k}$  de  $\varphi(p)$ , uma vizinhança  $\tilde{V}_0$  de  $(p, 0)$  em



## Continuação.

$\mathbb{R}^{m+k}$  e um difeomorfismo  $\tilde{\psi} : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \tilde{V}_0 \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$  tal que  $\tilde{\psi} \circ \varphi(x) = (x, 0)$ .

*Demonstração.* Escolha um movimento rígido  $A : \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$  tal que a aplicação  $\hat{\varphi} = A \circ \varphi$  tem a propriedade que a matriz  $(\frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial x_j})(p)$  é invertível onde  $1 \leq j \leq m$  e  $1 \leq i \leq m$ .

Vamos definir então

$$\begin{aligned} F(x, y) &= (\hat{\varphi}_1(x), \dots, \hat{\varphi}_m(x), \hat{\varphi}_{m+1}(x) + y_1, \dots, \hat{\varphi}_{m+k}(x) + y_k) \\ &= \hat{\varphi}(x) + (0, y) \end{aligned}$$

Observe que a matriz

$$DF(p) = \begin{bmatrix} \pi_1 \circ D\hat{\varphi}_p & 0 \\ \pi_2 \circ D\hat{\varphi}_p & Id \end{bmatrix}$$

é invertível, onde  $\pi_1(x, y) = x$  e  $\pi_2(x, y) = y$ .

Concluimos, assim, pelo teorema da função inversa que  $F : \tilde{V}_0 \rightarrow \tilde{U}$  é um difeomorfismo, para as vizinhanças apropriadas. A demonstração termina observando que a aplicação definida como  $\tilde{\psi} = F^{-1} \circ A$  atende as propriedades necessárias. De fato,

$$(x, 0) = F^{-1} \circ F(x, 0) = F^{-1} \circ \hat{\varphi}(x) = F^{-1} \circ A \circ \varphi(x).$$

□

**Exemplo 1.21.**

Consideremos novamente o gráfico de uma função suave  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , ou seja, o conjunto

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 = h(x_1, x_2)\}.$$

Definamos a aplicação  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  por

$$\varphi(x_1, x_2) = (x_1, x_2, h(x_1, x_2)),$$

## Continuação.

que é uma imersão pois

$$D\varphi(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ h_{x_1} & h_{x_2} \end{bmatrix}.$$

Considerando agora o difeomorfismo do Exemplo 1.7, temos

$$(\psi \circ \varphi)(x_1, x_2) = \psi(\varphi(x_1, x_2)) = \psi(x_1, x_2, h(x_1, x_2)) = (x_1, x_2, 0).$$

**Exercício 1.22.**

Seja  $M^2$  superfície mergulhada em  $\mathbb{R}^3$  invariante por rotação no eixo  $x_3$ , ou seja, uma superfície de rotação. Verifique que a aplicação  $\varphi : V \rightarrow M$  definida como

$$\varphi(t, \theta) = (r(t) \cos(\theta), r(t) \sin(\theta), h(t))$$

é uma parametrização de  $M^2$ , onde  $\beta(t) = (r(t), 0, h(t))$  é uma parametrização da curva geratriz com as propriedades que  $\|\beta'\| \neq 0$  e  $r(t) \neq 0$ . Em outras palavras verifique que  $\varphi$  é uma imersão e sua imagem está contida em  $M^2$ , vide Figura 1.5.

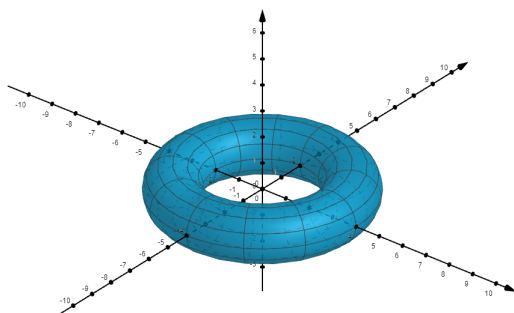


Figura 1.5: A aplicação  $\varphi(t, \theta) = ((\cos(t) - 3) \cos(\theta), (\cos(t) - 3) \sin(\theta), \sin(t))$  é uma parametrização que ilustra o Exercício 1.22.

## 1.2. Espaços tangentes e métrica induzida

Antes de definir espaço tangente, precisamos fixar o conceito de vetores com pé e fibrado tangente do espaço Euclidiano.

### Definição 1.23.

Dado um aberto  $V \subset \mathbb{R}^m$ , definimos:

- **fibrado tangente** de  $V$  como  $TV = V \times \mathbb{R}^m$ ,
- **projeção pé**  $\pi : TV \rightarrow V$  como  $\pi(q, v) = q$ ,
- **espaço tangente** em  $q$  como  $T_qV = (\{q\} \times \mathbb{R}^m) = \pi^{-1}(q)$
- **vetor com pé**  $q \in V$  como  $v_q = (q, v) \in T_qV$ .

Um vetor com pé  $v_q = (q, v)$  frequentemente modela uma *velocidade* de uma partícula passando pela *posição*  $q$ . De fato,  $v_q$  é o vetor velocidade da curva que modela o movimento retilíneo uniforme  $t \rightarrow q + tv$  para  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Mais geralmente dado uma curva suave  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow V$ , com  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t))$  definimos o **vetor velocidade** como:

$$\alpha'(t) = (\alpha(t), \dot{\alpha}(t)) \in T_{\alpha(t)}V$$

para todo  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , onde  $\dot{\alpha}(t) = (\frac{d}{dt}\alpha_1(t), \dots, \frac{d}{dt}\alpha_m(t))$ . Além disto, dado uma aplicação suave  $F : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , podemos criar uma aplicação linear entre espaços tangentes definindo  $dF_q : T_qV \rightarrow T_{F(q)}\mathbb{R}^n$  como

$$dF_q(v_q) = (F(q), DF(q)v).$$

Em particular definindo a curva  $\beta(t) = F \circ \alpha(t)$ , relemos a regra da cadeia como  $dF_{\alpha(0)}\alpha'(0) = \beta'(0)$ .

### Definição 1.24. Espaço tangente

Seja  $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$  uma  $m$ -variedade mergulhada e  $\varphi : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U \subset M$  uma parametrização. Então o subespaço  $T_pM = d\varphi_q T_qV \subset T_p\mathbb{R}^{m+k}$  é

## Continuação.

chamado de **espaço tangente** no ponto  $p = \varphi(q)$ .

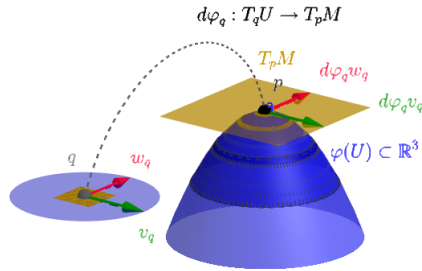


Figura 1.6: Dado uma imersão  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , uma base  $\{v_q, w_q\}$  de  $T_q U$  é levada em uma base  $\{d\varphi_q v_q, d\varphi_q w_q\}$  de  $T_p M$

Segue diretamente da definição anterior que  $\dim T_p M = m$ .

O exercício a seguir mostra que o espaço tangente não depende da parametrização escolhida, logo, está *bem definido*.

**Exercício 1.25.**

Considere duas parametrizações  $\varphi_i : V_i \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$  de uma variedade mergulhada  $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$  tal que  $W := \varphi_1(V_1) \cap \varphi_2(V_2) \neq \emptyset$ . Verifique que se  $\varphi_1(q_1) = p = \varphi_2(q_2)$  então  $(d\varphi_1)_{q_1} T_{q_1} \mathbb{R}^m = (d\varphi_2)_{q_2} T_{q_2} \mathbb{R}^m$ .

Veremos a seguir diferentes interpretações do espaço tangente. Em particular, o espaço tangente de uma superfície pode ser visto como o espaço dos vetores velocidades de curvas contidas na superfície (vide Figura 1.7). Além disso, se a superfície for uma superfície de nível  $M^2 = g^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^3; g(x) = c\}$ , então o espaço tangente em  $p$  será perpendicular à  $\nabla g(p)$ .

**Proposição 1.26.**

Seja  $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$  uma variedade mergulhada e  $p \in M$ . Então todo vetor de  $T_p M$  é a velocidade de uma curva contida em  $M$  e passando por  $p$ .

*Demonstração.* Seja  $\varphi : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$  uma parametrização tal que  $\varphi(q) = p$ . Se  $v_p \in T_pM$ , então existe  $w_q \in T_qV$  tal que  $v_p = d\varphi_q(w_q)$  (veja Definição 1.24). Seja  $\varepsilon$  suficientemente pequeno de forma tal que o segmento de reta  $r(t) = q + tw$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , esteja contido em  $V$ . Assim, a curva  $\alpha(t) = \varphi \circ r(t)$  é uma curva em  $M$  satisfazendo  $\alpha(0) = \varphi(r(0)) = \varphi(q) = p$  e  $\alpha'(0) = d\varphi_{r(0)}(r'(0)) = d\varphi_q(w_q) = v_p$ , como desejado.  $\square$

### Proposição 1.27.

Se  $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$  é a pré imagem de um valor  $c$  de uma submersão  $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ , então  $T_pM$  coincide com o núcleo de  $dG_p$ .

*Demonstração.* Seja  $v_p \in T_pM$  o vetor velocidade de uma curva  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  passando por  $p$ , vide Proposição 1.26. Sendo  $M = G^{-1}(c)$ , temos que  $G \circ \alpha(t) = c$  para todo  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Logo,

$$dG_p(v_p) = dG_{\alpha(0)}(\alpha'(0)) = (G \circ \alpha)'(0) = 0,$$

mostrando que  $v_p$  pertence ao núcleo de  $dG_p$ . Como  $v_p$  é qualquer, segue que  $T_pM \subset \text{Ker}(dG_p)$ .

Por outro lado, como  $G$  é uma submersão,  $\dim(\text{Im}(dG_p)) = k$ . Além disso, de Álgebra Linear sabemos que

$$\dim(\mathbb{R}^{m+k}) = \dim \text{Ker}(dG_p) + \dim(\text{Im}(dG_p)),$$

logo,

$$\dim(\text{Ker}(dG_p)) = m = \dim(T_pM),$$

concluindo que esses espaços coincidem.  $\square$

### Observação 1.28.

Dado uma submersão  $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  definida como

$$G(x) = (g_1(x), \dots, g_k(x)),$$

a Proposição 1.27 implica que os gradientes  $\nabla g_i(p) \in T_p\mathbb{R}^{m+k}$  são ortogonais a

## Continuação.

$T_p M$ . De fato, supondo que  $v_p = \alpha'(0)$

$$\begin{aligned} 0 &= DG_p(v_p) \\ &= (G \circ \alpha)'(0) \\ &= ((g_1 \circ \alpha)'(0), \dots, (g_k \circ \alpha)'(0)) \\ &= (\langle \nabla g_1(\alpha(0)), \alpha'(0) \rangle, \dots, \langle \nabla g_k(\alpha(0)), \alpha'(0) \rangle) \\ &= (\langle \nabla g_1(p), v \rangle, \dots, \langle \nabla g_k(p), v \rangle). \end{aligned}$$

**Observação 1.29.**

Em Cálculo II, dado uma superfície  $M = g^{-1}(c)$ , (para  $c$  valor regular de uma função  $g : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ) costumamos ter uma identificação entre o espaço tangente  $T_p M \subset T_p \mathbb{R}^3$  com um plano cujo vetor normal é dado pelo  $\nabla g(p)$ , i.e.,

$$\mathcal{P} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3; \sum_{i=1}^3 \frac{\partial g}{\partial x_i}(q)(x_i - p_i) = 0 \right\}$$

Tal plano **também é chamado plano tangente**. A identificação entre  $T_p M$  e  $\mathcal{P}$  é feita pela aplicação  $\exp_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida como  $\exp_p(v_p) = \gamma_{v_p}(1)$  onde  $t \rightarrow \gamma_{v_p}(t) = p + tv$ . Proposição 1.27 e a Observação 1.28 implicam que  $\exp_p(T_p M) = \mathcal{P}$ . Note que  $\exp_x(T_x \mathcal{P}) = \mathcal{P} \forall x \in \mathcal{P}$  e tal propriedade só é realizada por uma superfície em  $\mathbb{R}^3$  que seja um plano.

**Exercício 1.30.**

Determine o plano tangente ao toro

$$M = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 3)^2 + x_3^2 = 1\}$$

passando pelo ponto  $p = (\frac{7}{4}, \frac{7\sqrt{3}}{4}, \frac{2\sqrt{3}}{4})$ , vide Figura 1.7.

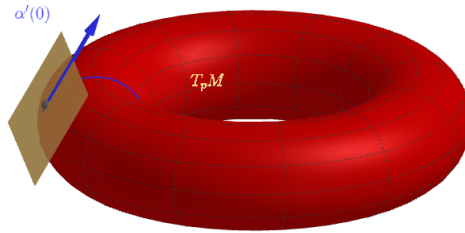


Figura 1.7: Plano tangente ao toro do Exercício 1.30

**Exemplo 1.31.**

Seja  $F : \mathbb{GL}^{m \times m}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}^{m \times m}(\mathbb{R})$  a aplicação suave  $F(A) = A^t A$ , onde  $\mathbb{GL}^{m \times m}(\mathbb{R})$  são as matrizes quadradas  $m \times m$  invertíveis,  $\mathcal{S}^{m \times m}(\mathbb{R})$  são as matrizes simétricas com entradas reais e  $A^t$  denotada a matriz transposta de  $A$ . Desejamos aqui:

- (a) verificar que  $Id$  é valor regular de  $F$  e assim concluir que

$$F^{-1}(Id) = \mathbb{O}(m) = \{Q \in \mathbb{GL}^{m \times m}(\mathbb{R}); Q^t Q = Id\}$$

é variedade mergulhada de  $\mathbb{GL}^{m \times m}(\mathbb{R})$ , a qual chamamos **grupo de Lie das matrizes ortogonais** ;

- (b) verificar que o espaço tangente em  $Q \in \mathbb{O}(m)$  é

$$T_Q \mathbb{O}(m) = \text{Ker } dF_Q = \{QX; X \in \mathfrak{o}(m)\}$$

onde  $\mathfrak{o}(m) = \{X; X^t + X = 0\}$  é chamada **álgebra de Lie do grupo das matrizes ortogonais**.

*Solução.*

(a). Aqui dado  $Q \in \mathbb{O}(m)$  desejamos verificar que  $dF_Q : T_Q \mathbb{GL}^{m \times m}(\mathbb{R}) \rightarrow T_{Id} \mathcal{S}^{m \times m}$  é sobrejetora. <sup>a</sup> Para tanto dado  $S \in \mathcal{S}^{m \times m}$  desejamos encontrar  $W \in T_Q \mathbb{GL}^{m \times m}(\mathbb{R})$  tal que  $dF_Q W = S$ .

Para encontrar um *candidato natural*  $W$  vamos seguir um *raciocínio reverso*. Suponha que já tivéssemos demonstrado que  $dF_Q$  é sobrejetor. Então  $T_Q \mathbb{GL}^{m \times m}(\mathbb{R}) = \text{Ker } dF_Q \oplus \mathcal{V}_Q$  sendo  $dF_Q|_{\mathcal{V}_Q} : \mathcal{V}_Q \rightarrow \mathcal{S}^{m \times m}$  isomorfismo. Se já tivéssemos demonstrado que  $Id$  fosse valor regular, saberíamos

## Continuação.

que  $T_Q\mathbb{O}(m) = \text{Ker } dF_Q$  (vide Proposição 1.27) e, assim,  $\mathcal{V}_Q$  seria um espaço transversal da variedade  $\mathbb{O}(m)$ . Continuando nosso raciocínio reverso e aceitando o item (b) (o qual afirma que o espaço tangente  $\mathbb{O}(m)$  são matrizes  $QX$  para  $X$  anti-simétrica) poderíamos concluir que  $\mathcal{V}_Q$  poderia ser escolhido como o espaço dos vetores  $Q\tilde{S}$  para matrizes simétricas  $\tilde{S}$ , uma vez que toda matriz é soma de matrizes anti-simétricas e simétricas.

Tendo um candidato  $W = Q\tilde{S}$  vamos considerar a curva  $t \rightarrow \beta(t) = Q + tQ\tilde{S}$  para  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$  onde  $\epsilon$  é pequeno suficiente. Utilizando o fato que  $\tilde{S}^t = \tilde{S}$  e  $Q^tQ = Id$  concluímos

$$\begin{aligned} dF_Q W &= dF_Q \beta'(0) \\ &= \frac{d}{dt} \{F \circ \beta\} |_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \{(Q + tQ\tilde{S})^t (Q + tQ\tilde{S})\} |_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \{Q^t Q + t\tilde{S}Q^t Q + tQ^t Q\tilde{S} + t^2\tilde{S}Q^t Q\tilde{S}\} |_{t=0} \\ &= 2\tilde{S}. \end{aligned}$$

Assim, dado  $S$  e escolhendo  $W = \frac{1}{2}QS$ , concluímos que  $dF_Q(W) = S$ . A arbitrariedade da escolha de  $S$  e  $Q$  implica que  $Id$  é valor regular e terminamos de verificar o item (a).

(b) Para verificar este item é suficiente verificar que

$$\{QX; X \in \mathfrak{o}(m)\} \subset \text{Ker } dF_Q = T_Q\mathbb{O}(m). \quad (1.2.1)$$

visto que os dois espaços vetoriais tem mesma a dimensão. Observe que

$$e^{tX} \in \mathbb{O}(m), \text{ para } X \in \mathfrak{o}(m) \quad (1.2.2)$$

onde  $e^{tX} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n A^n$  (exponencial matricial). De fato:

$$\begin{aligned} (e^{tX})^t (e^{tX}) &= e^{tX^t} e^{tX} \\ &= e^{-tX} e^{tX} \\ &= Id. \end{aligned}$$



Continuação.

Como  $\mathbb{O}(m)$  é um grupo,  $\alpha(t) := Qe^{tX} \in \mathbb{O}(m)$ . Logo  $Id = F(\alpha(t))$  e assim:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \{F \circ \alpha(t)\}|_{t=0} \\ &= dF_{\alpha(0)}\alpha'(0) \\ &= dF_Q QX \end{aligned}$$

o que termina também a prova da Equação (1.2.1)

<sup>a</sup>Podemos identificar  $\mathbb{R}^{m^2} = T_Q \mathbb{GL}^{m \times m}(\mathbb{R})$  e  $T_{Id} \mathbb{S}^{m \times m} = \mathbb{R}^{\frac{m^2+m}{2}}$ . A dimensão das matrizes anti simétricas é calculada levando em consideração que a diagonal é zero e a matriz é determinada pelas entradas abaixo da diagonal. Logo dimensão das anti-simétricas é  $\frac{m^2-m}{2}$ . A dimensão das matrizes simétricas é a dimensão das anti-simétricas somada com  $m$  (que corresponde agora aos elementos da diagonal, visto que as simétricas podem ter entradas não nulas na diagonal). Ou seja  $m + \frac{m^2-m}{2} = \frac{m^2+m}{2}$

**Observação 1.32.**

Como observado anteriormente,  $\mathbb{SO}(m)$  é a componente conexa da variedade  $\mathbb{O}(m)$  contendo a identidade e assim também é variedade com a mesma dimensão. Os grupos matriciais fechados  $\mathbb{O}(m)$ ,  $\mathbb{SO}(m)$ ,  $\mathbb{U}(m) = \{U \in \mathbb{GL}^{m \times m}(\mathbb{C}), \bar{U}^t U = Id\}$  (matrizes unitárias) e  $\mathbb{SU}(m) = \{U \in \mathbb{U}(m), \det U = 1\}$  são exemplos de grupos de Lie compactos, ou seja variedades  $G$  que são grupos e tal que as aplicações produto  $m : G \times G \rightarrow G$  (definida como  $m(g, h) = gh$ ) e inversa  $i : G \rightarrow G$  (definida como  $i(g) = g^{-1}$ ) são aplicações suaves (vide próximo capítulo). De fato, todos os subgrupos matriciais fechados de  $\mathbb{GL}^{m \times m}(\mathbb{R})$  e  $\mathbb{GL}^{m \times m}(\mathbb{C})$  são grupos de Lie. Bom notar também que  $\mathbb{GL}^{m \times m}(\mathbb{R})$  (matrizes com determinante diferente de zero) e  $\mathbb{SL}(m)$  (matrizes com determinante 1) são exemplos de grupos (de Lie) não compactos. Para maiores detalhes vide [AB15].

Sabendo que o espaço tangente a uma subvariedade mergulhada é um subespaço vetorial, é algo natural querer pensar em algumas estruturas usuais dos espaços vetoriais tais como produto interno e norma.

**Definição 1.33.**

Seja  $M^m$  variedade mergulhada em  $\mathbb{R}^{m+k}$ . Definimos a **métrica induzida** ou **primeira forma** como sendo o produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  em  $T_p \mathbb{R}^{m+k}$  restrito ao

## Continuação.

espaço tangente, isto é,

$$\mathbf{g}_p(u, v) = \langle u, v \rangle_p, \forall u, v \in T_p M, \forall p \in M.$$

Além disso, dada uma parametrização  $\varphi : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$ , os valores  $g_{ij}(q) = \mathbf{g}_{\varphi(q)}(d\varphi_q(e_i)_q, d\varphi_q(e_j)_q)$ , são os **coeficientes da métrica induzida** referentes a essa parametrização. Em particular  $g_{i,j} : V \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $g_{ij}(q)$  é uma função suave.

**Exercício 1.34. Superfície de Revolução**

Considere  $M$  uma superfície de revolução em  $\mathbb{R}^3$ . Temos então a parametrização

$$\psi(t, s) = (r(t) \cos(s), r(t) \sin(s), h(t)),$$

onde  $t \rightarrow \beta(t) = (r(t), 0, h(t))$  é a curva geratriz com  $\|\beta'(t)\| \neq 0$ . Então

$$\psi_t = \frac{\partial \psi}{\partial t} = (r'(t) \cos(s), r'(t) \sin(s), h'(t))$$

$$\psi_s = \frac{\partial \psi}{\partial s} = (-r(t) \sin(s), r(t) \cos(s), 0)$$

Verifique que a métrica em coordenadas é:

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} (r'(t))^2 + (h'(t))^2 & 0 \\ 0 & (r(t))^2 \end{bmatrix}$$

**1.3. Campos de vetores e o campo gradiente**

Vamos nesta seção recordar alguns conceitos e resultados vistos em Cálculo II. Mais resultados sobre campos de vetores serão discutidos no Capítulo 5.

**1.3.1. Campos de vetores****Definição 1.35.**

Um **campo  $\vec{F}$  suave** em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$  é uma aplicação suave  $\vec{F} : U \rightarrow$

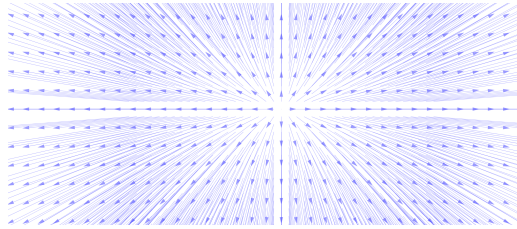


Figura 1.8: Campo  $\vec{F} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{3}{2} x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$

#### Continuação.

$U \times \mathbb{R}^m$  definida como  $\vec{F}(x) = (x, F(x))$  onde  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma aplicação suave.

Em resumo, um campo suave é uma aplicação do nosso *espaço de configurações*  $U$  para o nosso *espaço de fases*  $U \times \mathbb{R}^m$  tal que  $\pi \circ \vec{F}(x) = x$ , onde  $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  é a projeção canônica  $\pi(x, v) = x$ . Visto que nosso espaço de fases é um produto trivial é possível escrever o campo  $\vec{F}$  em termos dos **campos canônicos**  $\vec{e}_i(x) = (x, e_i)$  da forma

$$\vec{F} = \sum_i^m f_i \vec{e}_i, \quad (1.3.1)$$

sendo  $f_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , as componentes da aplicação  $F$  (vide Figura 1.3.1).

#### Teorema 1.36.

Dado um campo  $\vec{F}$  em  $U \subset \mathbb{R}^m$  de classe  $C^k$  e  $p \in U$ . Então existe uma única curva  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$  de classe  $C^k$  tal que

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \vec{F}(\gamma(t)) \\ p &= \gamma(0) \end{aligned}$$

#### Exemplo 1.37.

Seja  $F(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$  i.e.,  $\vec{F}(x_1, x_2) = x_1 \vec{e}_1 + \frac{3}{2} x_2 \vec{e}_2$ . Observe então a

## Continuação.

solução de  $\dot{\gamma}(t) = F(\gamma(t))$  com  $\gamma(0) = (1, 2)$  é  $\gamma(t) = (\exp(t), 2 \exp(\frac{3}{2}t))$ , vide Figura 1.9.

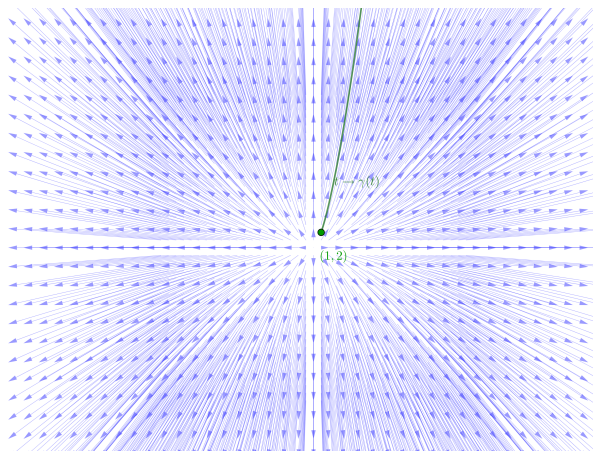


Figura 1.9: Campo  $\vec{F} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{3}{2} x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$  e curva integral  $t \rightarrow \gamma(t)$

O exemplo acima ilustra o que chamamos **campo linear**, ou seja a aplicação  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  é linear (i.e.,  $F(x) = Ax$ ). O Exemplo 1.37 também sugere como resolver E.D.Os de campos lineares associados a matrizes que podem ser diagonalizáveis.

### Teorema 1.38. Espectral

Seja  $A$  uma matriz simétrica  $m \times m$ . Então existe uma base ortonormal  $\{q_i\}$  de  $\mathbb{R}^m$  (i.e.,  $\langle q_i, q_j \rangle = 0$  se  $i \neq j$  e  $\|q_i\| = 1$ ) tal que:

1.  $Aq_i = \lambda_i q_i$ , i.e.,  $q_i$  é auto-vetor;
2.  $Q^t A Q = \Lambda$ , onde  $Q$  é a matriz com colunas  $q_i$  e  $\Lambda$  é a matriz diagonal de auto-valores  $\lambda_i$ .

Como aplicação direta do teorema espectral podemos resolver o exercício a seguir.

**Exercício 1.39.**

Seja  $A$  uma matriz simétrica  $m \times m$  e  $\{q_i\}$  uma base ortonormal de auto-vetores de  $A$  associado aos auto-valores  $\lambda_i$ . Defina o campo  $\vec{F}$  como  $F(x) = Ax$  e seja  $p = \sum_i c_i q_i$ . Verifique que a solução da E.D.O  $\dot{\gamma}(t) = F(\gamma(t))$  com  $\gamma(0) = p$  é:

$$\gamma(t) = \sum_i c_i e^{t\lambda_i} q_i$$

Lembre que a equação  $Av = \lambda v$  é equivalente à equação  $(A - \lambda Id)v = 0$ , e tal sistema tem solução não trivial se, e somente se,  $(A - \lambda Id)$  não for invertível, ou seja, se, e somente se,  $p(\lambda) = \det(A - \lambda Id) = 0$ .

**1.3.2. Campo gradiente**

Chamamos de **campo gradiente** de uma função  $f$  o campo

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \vec{e}_i.$$

Note que a equação acima parece depender dos campos canônicos. O Teorema de Representação de Riesz nos permite retirar essa dependência, como podemos ver na seguinte definição.

**Definição 1.40.**

Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Definimos o **vetor gradiente** de  $f$  em  $p \in U$ , denotado por  $\nabla f(p)$ , como sendo o único vetor de  $T_p \mathbb{R}^n$  satisfazendo

$$df(p)X = \langle \nabla f(p), X \rangle \quad \forall X \in T_p \mathbb{R}^n.$$

Observe que,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = df(p)e_i = \langle \nabla f(p), e_i \rangle. \quad (1.3.2)$$

Logo,

$$\nabla f(p) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla f(p), e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) e_i. \quad (1.3.3)$$

Como aprendemos em Cálculo II, segue da regra da cadeia, que *campo gradiente indica direção e sentido de maior crescimento da função  $f$  e, como vimos antes (vide Observação 1.28), ele é ortogonal as superfícies de níveis  $f^{-1}(c)$ .*

**Observação 1.41.**

Nem todo campo vetorial é o gradiente de uma função diferenciável. Para ver isto considere, por exemplo, o campo  $\vec{F}(x_1, x_2) = x_2\vec{e}_1 - x_1\vec{e}_2$ . Vamos supor por absurdo que existisse uma função  $f$  tal que  $\nabla f = \vec{F}$ . Então teríamos  $\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2$  e  $\frac{\partial f}{\partial x_2} = -x_1$ . Por outro lado,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ . Chegamos assim a um absurdo pois  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = -1$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 1$ . Logo não existe a tal  $f$ .

Uma vez recordado o relevante conceito de campos, podemos definir **um campo suave  $\vec{F}$  de uma variedade mergulhada  $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$**  como sendo uma aplicação que a cada  $p \in M$  associa  $\vec{F}(p) \in T_p M$  e que admite uma extensão local de um campo suave em  $\mathbb{R}^{m+k}$ . Vamos denotar o conjunto de campos suaves de  $M$  como  $\mathfrak{X}(M)$ .

**Campo gradiente Riemanniano**

Vimos na Definição 1.40 que o gradiente de uma função  $\tilde{f} : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}$  definida no espaço euclidiano, poderia ser intrinsecamente definido em termos do produto interno (ou seja, não depende de coordenadas). Além disto, o vetor  $\nabla f(p)$  indicava a direção e sentido de crescimento de  $\tilde{f}$  no ponto  $p$ .

Desejamos agora considerar a mesma discussão porém para uma função  $f$  que esteja definida em uma variedade  $M^m$ . Em particular, queremos encontrar o *campo tangente à variedade que indica o crescimento da função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  (restrição de  $\tilde{f}$  a  $M$ )*.

**Definição 1.42.**

Considere uma função  $\tilde{f} : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável e  $M \subset U$  uma subvariedade mergulhada em  $\mathbb{R}^{m+k}$ . Defina  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  a restrição da função  $\tilde{f}$  a  $M$ , ou seja,  $f = \tilde{f}|_M$ . Definimos o campo **gradiente Riemanniano** que associa a cada  $p \in M$  vetor com pé  $\text{grad } f(p) \in T_p M$  como o campo tangente a  $M$  que atende:

$$d\tilde{f}_p X = \langle \text{grad } f(p), X \rangle, \forall X \in T_p M. \quad (1.34)$$

Em particular,  $\text{grad } f(p)$  é a parte tangente de  $\nabla \tilde{f}(p)$ .

**Observação 1.43.**

No caso em que na definição anterior  $M$  seja a pre-imagem de um valor regular  $c$  de uma função suave  $g : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}$  (ou seja,  $M = g^{-1}(c)$ ), segue diretamente da Observação 1.28 que

$$\text{grad } f(p) = \nabla \tilde{f}(p) - \left\langle \nabla \tilde{f}(p), \frac{\nabla g(p)}{\|\nabla g(p)\|} \right\rangle \frac{\nabla g(p)}{\|\nabla g(p)\|}$$

Segue diretamente de (1.3.4) que a maior taxa de variação de  $f = \tilde{f}|_M$  ocorre na direção e sentido do vetor gradiente Riemanniano.

**1.3.3. Colchete de campos, um primeiro contato**

Nesta subseção apresentaremos rapidamente o operador colchete de campos e algumas de suas propriedades. No próximo capítulo discutiremos seu significado geométrico. A grosso modo veremos que o colchete de campos mede a não comutatividade dos fluxos dos campos. Porém, no momento estamos apenas interessados em sua definição no espaço Euclidiano e algumas de suas propriedades (a serem utilizadas ainda neste capítulo).

Sejam  $\vec{V} = \sum_i v_i(x) \vec{e}_i$  e  $\vec{W} = \sum_i w_i(x) \vec{e}_i$  dois campos de vetores no espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^{m+k}$ . Definimos o **campo colchete** como sendo

$$[\vec{V}, \vec{W}] = D_V \vec{W} - D_W \vec{V}, \quad (1.3.5)$$

onde (vide Exemplo 5.8)

$$D_W \vec{V}_p = \sum_{i=1}^m dv_i(W) \vec{e}_i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial v_i}{\partial W_p}(p) \vec{e}_i.$$

Na verdade,  $D_W \vec{V}_p$  é o campo cujas componentes em  $p$  são as derivadas direcionais das componentes de  $V$  com respeito a  $W_p$ .

**Exercício 1.44.**

Escreva  $[\vec{V}, \vec{W}]$  em termos dos campos canônicos  $\vec{e}_i$ .

**Proposição 1.45.**

- Se  $\vec{V}$  e  $\vec{W}$  são tangentes a uma subvariedade mergulhada  $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$ , então  $[\vec{V}, \vec{W}]$  é tangente a  $M$
- $[\vec{V}, \vec{W}] = -[\vec{W}, \vec{V}]$
- $[\vec{V}, \vec{W} + \lambda\vec{Z}] = [\vec{V}, \vec{W}] + \lambda[\vec{V}, \vec{Z}]$
- $[[\vec{V}, \vec{W}], \vec{Z}] + [[\vec{Z}, \vec{V}], \vec{W}] + [[\vec{W}, \vec{Z}], \vec{V}] = 0$

**1.4. Multiplicadores de Lagrange**

Problemas de otimização estão presentes no dia a dia de engenheiros e economistas, usualmente tais problemas estão sujeitos a uma ou várias restrições. Tais restrições podem ser vistas como variedades mergulhadas em espaços Euclidianos, frequentemente dados por submersões. Nesta seção iremos aplicar alguns dos conceitos e resultados anteriores para provar o clássico resultado de multiplicadores de Lagrange.

**Proposição 1.46.**

Considere uma função suave  $g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e sua curva de nível associada a um valor regular  $c$ ,

$$C = g^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^2, g(x) = c\}.$$

Seja  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  função suave. Suponha que  $u|_C$  (ou seja  $u$  restrita a  $C$ ) tenha um ponto de máximo ou mínimo em  $p \in C$ . Então,  $\nabla u(p)$  é perpendicular a  $C$ , ou seja, existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p).$$

*Demonstração.* Vamos dar uma prova para o caso em que  $p$  é máximo, o outro caso é análogo.

Como  $c$  é valor regular temos que existe uma parametrização  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow C$  com  $\alpha'(t) \neq 0$  e  $\alpha(0) = p$  (poderíamos, por exemplo, usar o teorema da função implícita e tomar  $\alpha(t) = (t + x_0, h(t + x_0))$ ).



Lembrando da Observação 1.28, temos que  $\nabla g(p)$  é ortogonal a  $\alpha'(0)$ . De fato,  $c = g(\alpha(t))$  para  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$  e derivando concluímos

$$0 = \frac{dc}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} g(\alpha(t)) \Big|_{t=0} = \langle \nabla g(p), \alpha'(0) \rangle.$$

Por outro lado, como  $u$  tem máximo em  $p = \gamma(0)$  temos que  $t \rightarrow u(\gamma(t))$  tem ponto crítico no interior e assim

$$0 = \frac{d}{dt} u(\alpha(t)) \Big|_{t=0} = \langle \nabla u(p), \alpha'(0) \rangle$$

As duas equações acima garantem que  $\nabla g(p)$  e  $\nabla u(p)$  são paralelos, ou seja,  $\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p)$  para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  $\square$

### Exemplo 1.47. Cobb-Douglas e orçamento de 2 produtos

Consideremos o seguinte problema clássico de micro-economia.

Seja  $C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 - w = 0 \text{ e } x_1, x_2 \geq 0\}$  o segmento de reta que representa um vínculo orçamentário de dois produtos. Ou seja, o consumidor tem um orçamento  $w$  e pode comprar quantidades  $x_1$  e  $x_2$  de produtos que custam  $R\$2$  e  $R\$1$ , respectivamente.

Nosso objetivo aqui é maximizar uma função utilidade dado a restrição orçamentária acima. Lembremos que uma função utilidade associa a cada cesta de produtos  $(x_1, x_2)$  um número  $u(x_1, x_2)$  que representa a preferência do consumidor por aquela cesta. Consideraremos aqui como função utilidade a função de Cobb Douglas

$$u(x) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}.$$

Pela Proposição 1.46, se  $s = (s_1, s_2)$  é um ponto de máximo, ele deve atender

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{2} s_1^{-\frac{1}{2}} s_2^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2} s_2^{-\frac{1}{2}} s_1^{\frac{1}{2}} \right) = \nabla u(s) &= \lambda \nabla g(s) = \lambda(2, 1) \\ w &= 2s_1 + s_2 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema acima concluímos que  $s(w) = (\frac{w}{4}, \frac{w}{2})$ . Ou seja, as quantidades dos produtos 1 e 2 que maximizam a função utilidade são  $\frac{w}{4}$  e  $\frac{w}{2}$ , respectivamente. A utilidade máxima é  $u(s(w)) = \frac{w}{2\sqrt{2}}$ .

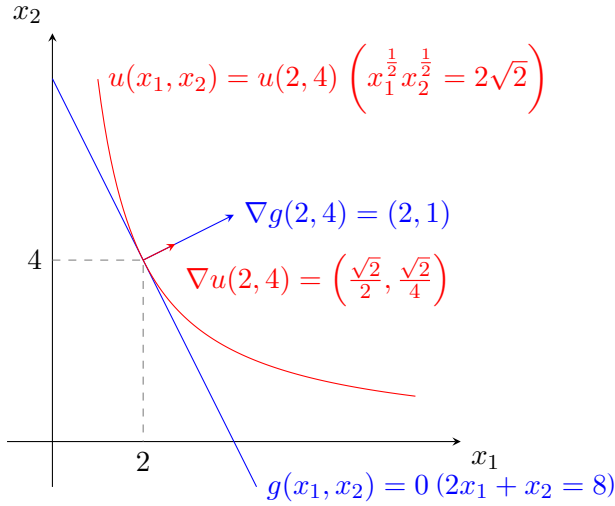


Figura 1.10: Representação do Exemplo 1.47: restrição orçamentária com  $w = 8$ , a utilidade máxima sujeita à restrição orçamentária<sup>5</sup>, e os gradientes de ambas funções no ponto de máximo  $p = (2, 4)$

### Observação 1.48. Shadow prices e família de vínculos

No caso bem particular de Cobb Douglas temos a existência de um único máximo  $s(w)$  para cada vínculo  $C_w = g^{-1}(w)$ , o que nos dá uma curva diferenciável  $w \rightarrow s(w) \in C_w$ , vide Figura 1.11. Em particular  $g \circ s(w) = w$  Por ser máximo temos:  $\nabla u(s(w)) = \lambda(w) \nabla g(s(w))$  Assim, ao multiplicar ambos os lados por  $s'(w)$  concluímos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dw} u \circ s(w) &= \langle \nabla u(s(w)), s'(w) \rangle \\ &= \lambda(w) \langle \nabla g(s(w)), s'(w) \rangle \\ &= \lambda(w) \frac{d}{dw} g \circ s(w) \\ &= \lambda(w) \end{aligned}$$

Vemos, assim, que neste caso a função  $w \rightarrow \lambda(w)$  pode ser interpretada como a taxa de crescimento da função utilidade ao longo da curva de máximos (vide Figura 1.4).

<sup>5</sup>Uma curva de nível da função utilidade costuma de ser chamada de **curva de indiferença**.

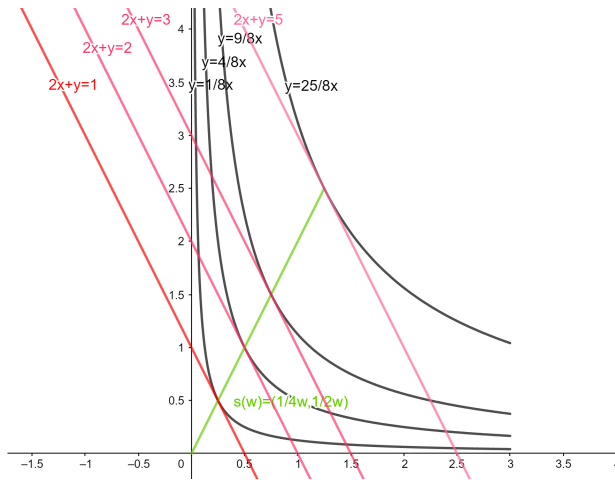


Figura 1.11: Curvas de máximos no caso particular de  $u$  sendo **Cobb Douglas** e vários vínculos dado por orçamentos, ilustrando a Observação 1.48. Lembre que em problemas gerais de multiplicadores de Lagrange não precisa existir uma curva bem definida  $w \rightarrow s(w)$

A seguir generalizaremos os multiplicadores de Lagrange para curvas planas para subvariedades mergulhadas no espaço Euclidiano.

**Teorema 1.49. Multiplicadores de Lagrange**

Sejam  $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  uma aplicação de classe  $C^1$  definida por  $G(x) = (g_1(x), \dots, g_k(x))$  e  $M = \{x \in \mathbb{R}^{m+k} \mid G(x) = c\}$  uma subvariedade regular. Seja  $u : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ , onde  $M \subset \tilde{U}$ . Suponha que existe  $q \in M$  tal que  $u|_M$  tem valor máximo ou mínimo local. Então,  $\nabla u(q)$  é ortogonal a  $T_q M$ , ou seja, existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  tal que

$$\nabla u(q) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla g_i(q).$$

*Demonstração.* Da Proposição 1.26 temos que para cada  $v_q \in T_q M$  existe uma curva  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  com  $\alpha'(0) = v_q$ . Visto que  $u|_M$  (função restrita a  $M$ ) tem um máximo ou mínimo em  $q \in M$ , temos que a função  $h(t) = u(\alpha(t))$  tem máximo ou mínimo interior em  $t = 0$ , logo,  $h'(0) = 0$ . Assim, pela regra da

cadeia,  $0 = h'(0) = \langle \nabla u(q), \alpha'(0) \rangle = \langle \nabla u(q), v_q \rangle$ . Como isto pode ser feito para qualquer outro  $v_q \in T_q M$  concluímos que  $\nabla u(q)$  é ortogonal a  $T_q M$ .

Por outro lado, sabemos que para cada  $1 \leq i \leq k$ ,  $\nabla g_i(q)$  é também ortogonal a  $T_q M$  (vide a Observação 1.28). Além disso, sendo  $DG(x)$  sobrejetora  $\forall x \in M$ , o conjunto  $\{\nabla g_i\}_{i=1}^k$  é uma base de  $T_q M^\perp$  (complemento ortogonal<sup>6</sup> de  $T_q M$ ). Conclui-se que  $\nabla u(p)$  é combinação linear de  $\{\nabla g_i\}_{i=1}^k$  como desejado.  $\square$

Do Teorema 1.49 podemos concluir uma condição *necessária* para que uma função  $u : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  tenha máximo ou mínimo sobre uma subvariedade regular  $M = G^{-1}(c_1, \dots, c_k)$  é a atender o sistema

$$\begin{cases} \nabla u(q) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla g_i(q) \\ c_1 = g_1(q) \\ \vdots \\ c_k = g_k(q) \end{cases}$$

### Exemplo 1.50. Cobb-Douglas e orçamento para três produtos

Seja  $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 > 0\}$  a superfície que representa um vínculo orçamentário de três produtos. Vamos considerar a função utilidade  $u(x) = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$ . Para determinar o ponto  $q \in S$  onde  $u|_S$  assume maior valor resolvemos o sistema dado pelo multiplicador de Langrange. Temos

$$\left( \frac{1}{3} x_1^{-\frac{2}{3}} x_2^{\frac{1}{3}} x_3^{\frac{1}{3}}, \frac{1}{3} x_2^{-\frac{2}{3}} x_1^{\frac{1}{3}} x_3^{\frac{1}{3}}, \frac{1}{3} x_3^{-\frac{2}{3}} x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{3}} \right) = \lambda(6, 3, 2)$$

$$6 = 6x_1 + 3x_2 + 2x_3,$$

onde  $q = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$  e  $u(q) = \sqrt[3]{\frac{2}{9}}$ . Visto que  $\bar{S}$  (fecho de  $S$ ) é fechado e limitado, e que o máximo não acontece no bordo  $\partial S$  (onde  $u$  é zero)  $q$  tem que ser de fato o ponto de máximo.

<sup>6</sup>Lembre-se que o complemento ortogonal de um subespaço vetorial é o conjunto de vetores do espaço que são ortogonais a tal subespaço.

Continuação.

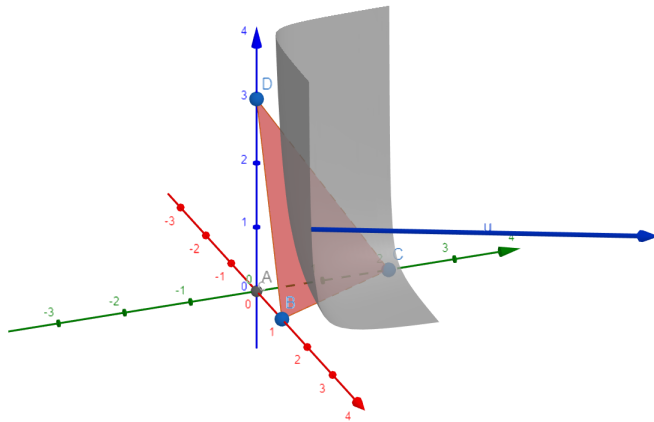


Figura 1.12: Superfície de nível  $u^{-1}\left(\sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right)$  (associada à função utilidade  $u$ ) tangente ao vínculo orçamentário  $S$  no ponto de máximo  $q$ , e o vetor  $N = \nabla g(q)$ .

### Exercício 1.51.

Determine o volume do maior paralelepípedo de faces paralelas aos planos coordenados que pode ser inscrito em  $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 9x_1^2 + 36x_2^2 + 4x_3^2 = 36\}$

Vamos agora rerepresentar o teorema dos multiplicadores de Lagrange em termos do gradiente Riemanniano.

### Proposição 1.52.

Seja  $M$  uma subvariedade mergulhada em  $\mathbb{R}^{m+k}$  e suponha que  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável em  $M$  (i.e., que admite extensões locais para  $\mathbb{R}^{m+k}$ ) e que  $f$  tem um ponto de máximo ou mínimo local em  $p \in M$ . Então  $\text{grad } f(p) = 0$ .

*Demonstração.* Seja  $p$  um ponto de máximo ou mínimo da função  $f$ . Sabemos que em uma vizinhança  $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^{m+k}$  de  $p$ ,  $M \cap \tilde{U}$  é a imagem inversa de um valor regular de uma aplicação diferenciável  $G : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^k$ .

Seja  $\tilde{f} : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}$  uma extensão de  $f$  a uma vizinhança de  $\mathbb{R}^{m+k}$  de  $p$ , ( $\tilde{U} \subset \tilde{U}$ ) ou seja,  $\tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\tilde{f}|_{\tilde{U} \cap M} = f$ . Pela Proposição 1.49,

$\nabla \tilde{f}$  é ortogonal a  $M$ , logo sua projeção ortogonal em  $T_p M$  é 0, mostrando que  $\text{grad } f(p) = 0$ .  $\square$

## 1.5. Hessiano e extremos

Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$ . Sabemos que  $df(p) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  é uma aplicação linear definida por  $df(p) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_m}(p) \right]$

Deixando o  $p$  variar, temos uma aplicação  $df : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  que é suave. Podemos então considerar a derivada da aplicação  $df$ .

### Definição 1.53.

Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$ . A segunda derivada de  $f$  no ponto  $p \in U$ ,  $\text{Hess } f(p) = D(df)(p)$ , é chamada de *Hessiano de  $f$  em  $p$* .

Assim, temos

$$\text{Hess } f(p) = \begin{bmatrix} d \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \\ \vdots \\ d \frac{\partial f}{\partial x_m}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(p) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_m}(p) \end{bmatrix} \quad (1.5.1)$$

### Exercício 1.54.

Determine o  $\text{Hess } f$  das funções  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

- (a)  $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2$
- (b)  $f(x_1, x_2) = -2x_1^2 - 2x_2^2$
- (c)  $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 2x_2^2$
- (d)  $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$

### Observação 1.55.

Vale destacar que a função  $f(x) = 2x_1 x_2$  é de fato a sela de cavalo girada de  $\pi/4$ ,

## Continuação.

vide Figura 1.13. De fato considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e note que  $f(x) = x^t Ax = 2x_1x_2$ . Perceba também que 1 e  $-1$  são autovalores dos autovetores  $\left\{ q_1 = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), q_2 = \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}$ . Assim podemos concluir que:

$$f(y_1q_1 + y_2q_2) = y_1^2 - y_2^2.$$

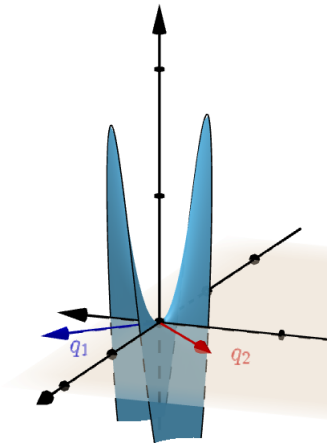


Figura 1.13: Gráfico de  $f(y_1q_1 + y_2q_2) = y_1^2 - y_2^2$

A matriz  $m \times m$  na equação 1.5.1 é chamada de **matriz Hessiana de  $f$** . Dado que  $f$  é de classe  $C^2$ , temos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)$$

pele teorema de Schwarz e, portanto,  $\text{Hess } f(p)$  é uma matriz simétrica. Consequentemente, a segunda derivada de  $f$ ,  $D(df)(p) = \text{Hess } f(p)$  é uma aplicação linear simétrica.

### 1.5.1. Extremos locais

De Cálculo I sabemos que os extremos locais de uma função suave são pontos críticos da mesma. Isto é, se  $f : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave e  $p \in (-\epsilon, \epsilon)$ , é um máximo ou mínimo local de  $f$ , então  $f'(p) = 0$ . Porém a função  $f(x) = x^3$  nos mostra que nem todo ponto crítico é um ponto de máximo ou mínimo local (de fato,  $f'(0) = 0$  e  $x = 0$  não é nem máximo nem mínimo). Isto motivou a procura de critérios mais precisos como, por exemplo, o *Critério da segunda derivada*:

Seja  $p \in (-\epsilon, \epsilon)$  é um ponto crítico de  $f$  (i.e.,  $f'(p) = 0$ ). Temos:

1. se  $f''(p) > 0$  então  $p$  é mínimo local;
2.  $f''(p) < 0$  então  $p$  é máximo local;

A prova se baseou no uso da fórmula de Taylor, i.e.,

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x - p) + \frac{1}{2}f''(p)(x - p)^2 + R(x - p)$$

onde  $x$  está suficientemente próximo de  $p$  e  $\lim_{x \rightarrow p} \frac{R}{(x-p)^2} = 0$ .

De fato, se  $f'(p) = 0$  e  $f''(p) > 0$ , então, dividindo a Formula de Taylor por  $(x - p)^2$  temos:

$$\frac{f(x) - f(p)}{(x - p)^2} = \frac{1}{2}f''(p) + \frac{R(x - p)}{(x - p)^2} > 0$$

e, assim,  $f(x) > f(p)$  para  $x$  próximo a  $p$  ( $p$  é mínimo local).

#### Exemplo 1.56.

A função  $f(x) = 2x^2 - x^4$  tem um ponto crítico em  $p = 0$  e a reta tangente ao gráfico de  $f$  em  $p$  é o eixo  $x$ . Para  $x$  próximo a  $p$  a função  $f$  é aproximada por  $h(x) = \frac{1}{2}f''(p)(x - p)^2 = 2x^2$



Continuação.

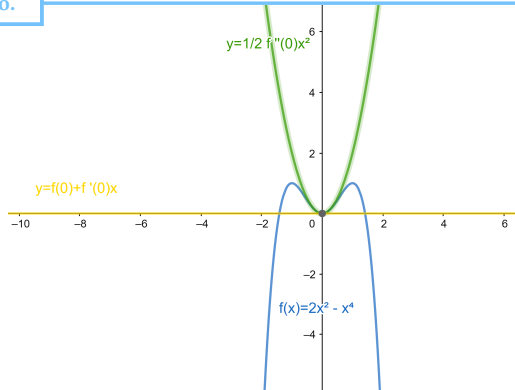


Figura 1.14: Gráfico de  $f(x) = 2x^2 - x^4$ , sua reta tangente em  $p = 0$  e sua aproximação quadrática

Iremos aqui generalizar tais argumentos para funções sobre abertos de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 1.57.**

Sejam  $U$  um aberto de  $\mathbb{R}^m$  e  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  função diferenciável, dizemos que  $p \in U$  é ponto de **mínimo local** (interior) se existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\forall x \in B_\epsilon(p) \subset U$  tem-se  $f(x) \geq f(p)$ .

Analogamente,  $q \in U$  é ponto de **máximo local** (interior) se existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\forall x \in B_\epsilon(q) \subset U$  tem-se  $f(x) \leq f(q)$ .

**Exemplo 1.58.**

Dado  $f(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - (x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4)$ , é possível observar na figura a seguir que  $p = (0, 0)$  é ponto de mínimo local de  $f$ .

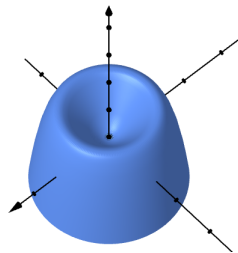


Figura 1.15:

**Proposição 1.59.**

Sejam  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável e  $p \in U$  um ponto de mínimo ou máximo local (interior). Então  $p$  é ponto crítico de  $f$ , i.e.,  $\nabla f(p) = 0$ .

*Demonstração.* Dado  $v_p \in T_p \mathbb{R}^m$ , considere uma curva suave  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$  tal que  $\alpha'(0) = v_p$ . Seja  $h = f \circ \alpha$ . Como  $p$  é máximo ou mínimo local, então  $t = 0$  é máximo ou mínimo interior de  $h = f \circ \alpha$ , logo

$$0 = h'(0) = \langle \nabla f(p), \alpha'(0) \rangle.$$

Como isto vale para todo vetor tangente concluímos que  $\nabla f(p) = 0$ . □

**Exemplo 1.60.**

Dado  $f(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 2$ ,  $p = (0, 0)$  é ponto de máximo interior e, portanto, ponto crítico. Note que o vetor normal do plano tangente é  $N = \left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), -\frac{\partial f}{\partial x_2}(p), 1\right) = (0, 0, 1)$ , logo, o plano tangente é paralelo ao plano de equação  $\{x_3 = 0\}$ .

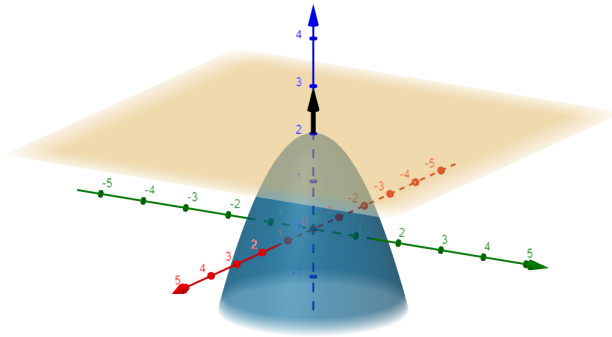


Figura 1.16:

Mas, se de um lado todo ponto de máximo ou mínimo interior é ponto crítico, nem todo ponto crítico é ponto de máximo ou mínimo local. Assim, tal como em Cálculo I, precisaremos de critérios mais finos para classificar pontos críticos, i.e., determinar se eles são de máximo, de mínimo ou sela.

**Exemplo 1.61.**

No gráfico de  $f(x) = x_1^2 - x_2^2 + \frac{3}{2}$  se observa que  $p = (0, 0)$  não é máximo nem mínimo local.

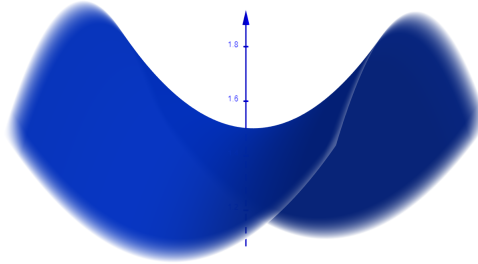


Figura 1.17:

**Teorema 1.62. Fórmula de Taylor de ordem 2**

Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  função de classe  $C^3$ . Então:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + df(p)(x - p) + \frac{1}{2}(x - p)^t \text{Hess } f(p)(x - p) + R(x - p) \\ &= f(p) + \langle \nabla f(p), (x - p) \rangle + \langle \text{Hess } f(p)(x - p), x - p \rangle + R(x - p) \end{aligned}$$

onde  $\lim_{x \rightarrow p} \frac{R(x-p)}{\|x-p\|^2} = 0$ .

**Observação 1.63.**

## Continuação.

Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ . Então

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(p) + \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) \right] \begin{bmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 - p_1 & x_2 - p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \end{bmatrix} \\ &= f(p) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)(x_1 - p_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)(x_2 - p_2) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p)(x_1 - p_1)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p)(x_1 - p_1)(x_2 - p_2) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(p)(x_2 - p_2)^2 \end{aligned}$$

O Teorema 1.62 garante que o polinômio

$$P_2(x) = f(p) + df(p)(x - p) + \frac{1}{2}(x - p)^t \text{Hess } f(p)(x - p),$$

chamado de **polinômio de Taylor de grau 2 em torno de  $p$** , aproxima a função  $f$  numa vizinhança de  $p$ .

Além disso, se  $p$  for um ponto crítico de  $f$ , então a forma quadrática

$$h(x) = \frac{1}{2}(x - p)^t \text{Hess } f(p)(x - p)$$

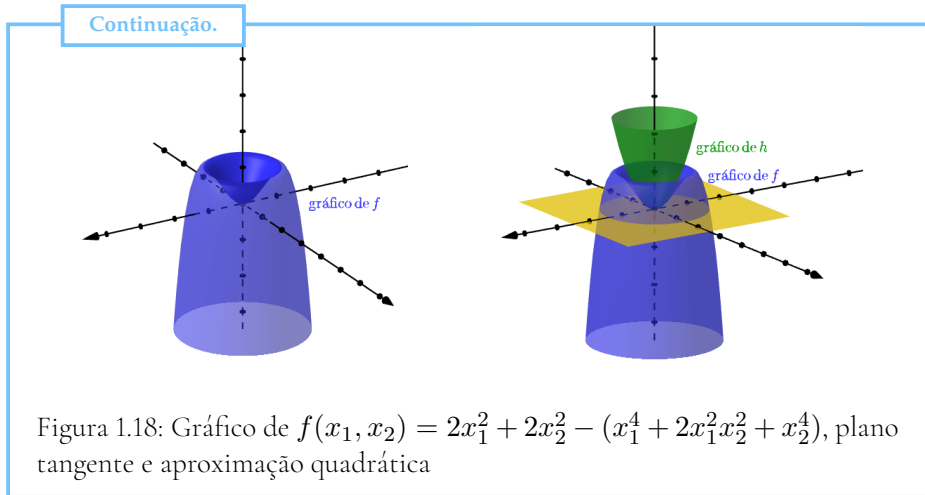
aproxima a função. Isso sugere que, tal como em Cálculo I, classificar pontos críticos esteja relacionado com a compreensão da segunda derivada.

Note que no Problema 1.54,  $P_2$  em torno de  $p = (0, 0)$  coincide com a própria função de  $f$ .

**Exemplo 1.64.**

Seja  $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - (x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4)$ . Considerando  $p = 0$  temos (pelo Problema 1.54) que  $P_2(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2$ . Note na Figura 1.18 que  $p = (0, 0)$  é um ponto de mínimo e assim um ponto crítico, i.e.,  $\nabla f(p) = (0, 0)$ . Logo, o plano tangente ao gráfico de  $f$  em  $p$  é  $\{x_3 = f(p) = 0\}$ . A Fórmula de Taylor garante que, próximo a  $p = (0, 0)$  o gráfico de  $f$  é aproximado por

$$h(x) = \frac{1}{2}(x - p)^t \text{Hess } f(p)(x - p) = P_2(x).$$



### 1.5.2. Critérios de classificação de pontos críticos

#### Teorema 1.65.

Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^3$ . Suponha que  $p \in U$  seja ponto crítico (i.e.,  $df(p) = 0$ ) e  $\det \text{Hess } f(p) \neq 0$

- Se todos os auto-valores  $\lambda_i$  de  $\text{Hess } f(p)$  são positivos (i.e.,  $\lambda_i > 0$ ), então  $p$  é mínimo.
- Se todos os auto-valores  $\lambda_i$  de  $\text{Hess } f(p)$  são negativos (i.e.,  $\lambda_i < 0$ ), então  $p$  é máximo.
- Se parte dos auto-valores  $\lambda_i$  de  $\text{Hess } f(p)$  são positivos, e a outra parte negativa, então  $p$  é sela.

#### Exemplo 1.66.

A função  $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \frac{3}{2}$  tem um mínimo local em  $(0, 0)$ . Observe que  $\text{Hess } f(0, 0)$  tem 2 como autovalor de multiplicidade 2.

Continuação.

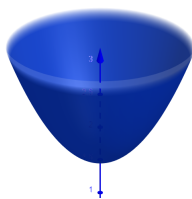


Figura 1.19:

A função  $f(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 2$  tem um máximo local em  $(0, 0)$ . O Hessiano de  $f$  tem um único autovalor  $-2$  de multiplicidade 2.

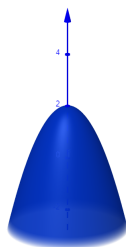


Figura 1.20:

Por outro lado, a função  $f(x) = x_1^2 - x_2^2 + \frac{3}{2}$  não tem nem máximo nem mínimo no ponto  $(0, 0)$ . De fato, os autovalores de  $\text{Hess } f(0, 0)$  são  $2$  e  $-2$ .

Continuação.

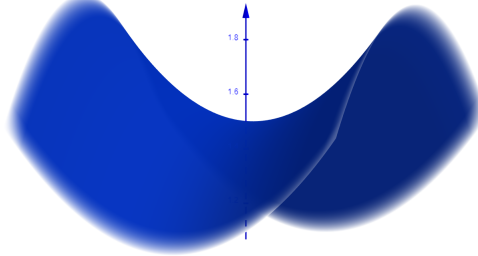


Figura 1.21:

*Prova do Teorema 1.65.* Vamos supor inicialmente que  $p$  está na origem,  $f(p) = 0$  e  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m$  são os auto-valores de  $\text{Hess } f(p)$ .

Pela fórmula de Taylor temos:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x)^t \text{Hess } f(p)(x) + R$$

Pelo teorema Espectral

$$Q^t \text{Hess } f(p)(x) Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{bmatrix} = \Lambda$$

onde  $Q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_m]$  é a matriz ortogonal cujas colunas são os autovetores (ortonormais)  $q_1, q_2, \dots, q_m$  de  $\text{Hess } f(p)(x)$  associados a  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ .

Sejam  $y_i, 1 \leq i \leq m$ , as coordenadas de  $x$  com respeito à base  $\{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ , ou seja,

$$x = y_1 q_1 + y_2 q_2 + \dots + y_m q_m = Qy, \quad (*)$$

onde  $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$ .

Substituindo nas duas equações acima temos:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{2} y^t Q^t \text{Hess } f(p) Q y + R \\
 &= \frac{1}{2} y^t (Q^t \text{Hess } f(p) Q) y + R \\
 &= \frac{1}{2} y^t \Lambda y + R \\
 &= \frac{1}{2} (\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_m y_m^2) + R \quad (**)
 \end{aligned}$$

Dividindo por  $\|x\|^2 = \|y\|^2$  temos:

$$\frac{f(x)}{\|x\|^2} \geq \frac{1}{2} \lambda_1 + \frac{R}{\|x\|^2} > 0$$

para  $x$  próximo a  $p$  ou seja  $p$  é mínimo.  $\square$

Entendido o fenômeno, podemos desenvolver um critério mais fácil de ser implementado (no qual não será necessário calcular os auto-valores explicitamente, mas apenas ter uma maneira de detectar seus sinais).

Iremos explorar o caso particular de dimensão dois.

### Corolário 1.67.

Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^3$ . Suponha que  $p \in U$  seja ponto crítico (i.e.,  $df(p) = 0$ ) e  $\det \text{Hess } f(p) \neq 0$

- (a) Se  $\det \text{Hess } f(p) > 0$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p) > 0$  então  $p$  é mínimo.
- (b) Se  $\det \text{Hess } f(p) > 0$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p) < 0$  então  $p$  é máximo.
- (c) Se  $\det \text{Hess } f(p) < 0$  então  $p$  é sela.

A demonstração da proposição segue como caso particular do teorema anterior e do teorema comentado a seguir.

<sup>6</sup>O leitor pode verificar a obtenção de (\*) e (\*\*) usando operações básicas de matrizes, começando por dimensões baixas.



**Teorema 1.68. Critério positivo definido**

Considere uma matriz simétrica  $A$ . Então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. Os auto-valores de  $A$  são todos positivos (i.e,  $\lambda_i > 0$ );
2.  $x^t Ax > 0, \forall x \neq 0$  ( $A$  é positiva-definida);
3.  $\det A_k > 0$  para todas as submatrizes  $A_k$  a esquerda, i.e as matrizes  $k \times k$  definidas como  $(a_k)_{ij} = a_{ij}$  para  $0 \leq i \leq k$  e  $0 \leq j \leq k$ .

Por exemplo, se  $m = 2$  e  $A = \text{Hess } f(0)$ , então  $A_1 = [\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(0)]$  e  $A_2 = \text{Hess } f(0)$ , e assim re-obtemos as hipóteses do item (a) da proposição anterior.

**Observação 1.69.**

Podemos também dar uma prova alternativa do Corolário 1.67 seguindo um argumento geométrico. Suponha que hipótese (a) seja verificada. Como  $\det \text{Hess } f(0) = \lambda_1 \lambda_2 > 0$  temos  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$  ou  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ . Assim pela demonstração do teorema anterior, o gráfico  $S$  da função  $h(x) = x^t \text{Hess } f(0)x$  é um parabolóide elíptico para cima (se  $\lambda_i > 0$ ) ou para baixo se  $(\lambda_i < 0)$ . Para decidir qual das opções observe que o gráfico de  $h(x_1, 0) = x_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0)$  descreve a parábola  $C = S \cap \{x_2 = 0\}$ . Como esta parábola é para cima (pois por hipótese  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0) > 0$ ), o gráfico de  $S$  é para cima. Logo  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$  e pelo Teorema anterior,  $0$  é ponto de mínimo. Os outros itens se provam de forma similar.

**Exercício 1.70.**

Considere  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  função definida como  $f(x_1, x_2) = 2(2x_1 - x_1^2)(2x_2 - x_2^2)$ . Determine e classifique os pontos críticos.

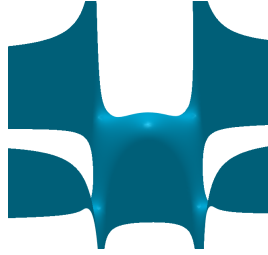


Figura 1.22: Gráfico da função do Exercício 1.70, onde podemos observar que  $(1, 1)$  é ponto de máximo local, e os pontos  $(0, 0)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(2, 2)$  são pontos de sela

### Observação 1.71. Curvatura de Gauss (Vide Seção 1.7)

Quando temos  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  função de classe  $C^3$  onde  $(0, 0) \in U$  é ponto crítico, temos que o plano tangente do gráfico em  $(0, 0, f(0, 0))$  é paralelo a  $\{x_3 = 0\}$ . Neste caso,  $K(q) = \det \text{Hess } f(0, 0) = \lambda_1 \lambda_2$  é chamada Curvatura de Gauss no ponto  $q = (0, 0, f(0, 0))$ . Assim se  $K(q) > 0$  o gráfico de  $f$  é aproximado por uma parabolóide elíptico e se  $K(q) < 0$  é aproximado por um parabolóide hiperbólico (sela de cavalo).

Mais geralmente, dado um gráfico  $S$  qualquer e  $q \in S$  podemos, após movimento rígido, descrevê-lo (pelo menos localmente) como um novo gráfico de uma função  $h$  em relação ao plano plano tangente  $T_q S$ . Assim o conceito de curvatura de Gauss pode ser definido para qualquer ponto  $q \in S$  bem como sua interpretação geométrica.

### 1.5.3. Fórmula de Taylor de ordem maior

Seja  $v = (v_1, \dots, v_m)$  vetor em  $\mathbb{R}^m$ . Considerando o conjunto de todas as funções de classe  $C^k$  em  $U \subset \mathbb{R}^m$  (denotada por  $C^k(U)$ ) podemos criar uma aplicação linear  $T : C^k(U) \rightarrow C^{k-1}(U)$  definida como

$$T(f) = \sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Em Cálculo II e Física costuma-se denotar  $v \cdot \nabla = T$  e assim

$$v \cdot \nabla = \sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Com tal notação podemos verificar que

$$\frac{1}{2}v^t \text{Hess } f(p)v = \frac{1}{2}(v \cdot \nabla)^2 f(p). \quad (1.5.2)$$

Afim de verificar Equação 1.5.2, façamos a conta para o caso particular em que  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (v \cdot \nabla)(w \cdot \nabla)f(p) &= (v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2})(w_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + w_2 \frac{\partial}{\partial x_2})f \\ &= v_1 w_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p) + v_1 w_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p) \\ &\quad + v_2 w_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p) + v_2 w_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(p) \\ &= [v_1 \quad v_2] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \\ &= v^t \text{Hess } f(p)w \end{aligned}$$

### Teorema 1.72.

Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  função de classe  $C^{k+1}$ ,  $p \in U$  e  $v = (x - p)$ . Então:

$$\begin{aligned} f(v + p) &= f(p) + (v \cdot \nabla)f(p) \\ &\quad + \frac{1}{2}(v \cdot \nabla)^2 f(p) \\ &\quad + \frac{1}{3!}(v \cdot \nabla)^3 f(p) \\ &\quad + \frac{1}{4!}(v \cdot \nabla)^4 f(p) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \frac{1}{k!}(v \cdot \nabla)^k f(p) \\ &\quad + R(v) \end{aligned}$$

Onde  $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{R(v)}{\|v\|^k} = 0$

**Observação 1.73.**

A notação  $v \cdot \nabla$  é muito sugestiva em espaços Euclidianos pois evoca a ideia do produto interno de  $v$  com  $\nabla$  e assim é fácil de ser lembrada. Porém no próximo capítulo iremos substituí-la em variedades  $M$  pela notação  $v \bullet$  para destacar que tal operador não depende da métrica (e assim não deveria evocar notação do gradiente, objeto que necessita de métrica). Também como será discutido ao final do próximo capítulo, a notação  $v \bullet$  será utilizada em Teoria Geométrica de Controle.

**1.5.4. Máximos e mínimos absolutos**

Em certos casos particulares é possível até determinar máximos e mínimos absolutos. Para isto usaremos o seguinte resultado:

**Teorema 1.74.**

Sejam  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e  $K \subset U$  um conjunto fechado e limitado (ou seja fechado tal que  $K \subset B_R(\mathbf{0})$ ). Então a função restrita  $f|_K$  possui um valor máximo e um valor mínimo.

O Teorema 1.74 sugere o seguinte algoritmo:

Passo 1: Determinar pontos críticos no interior de  $K$ ;

Passo 2: determinar candidatos a máximo ou mínimos de  $f|_{\partial K}$  (ex, via parametrizações ou multiplicadores de Lagrange)

Passo 3: comparar os candidatos determinados nos passos anteriores.

**Exemplo 1.75.**

Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $f(x) = 2x_1^2 + x_1 + x_2^2 - 2$  e  $K = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g(x) = x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$ . Vamos determinar os valores de máximos e mínimos absolutos de  $f|_K$  seguindo o algoritmo anterior.

Passo 1: A solução do problema  $\nabla f(x) = (0, 0)$  para  $x$  no interior de  $K$  é  $x = (-\frac{1}{4}, 0)$

Passo 2: Para determinar candidatos a máximo ou mínimos de  $f|_{\partial K}$  usaremos

## Continuação.

neste exemplo multiplicadores de Langrange.

$$\begin{aligned}(4x_1 + 1, 2x_2) = \nabla f(x) &= \lambda \nabla g(x) = \lambda(2x_1, 2x_2) \\ 4 &= x_1^2 + x_2^2\end{aligned}$$

Cujas soluções são:  $(2, 0)$ ,  $(-2, 0)$ ,  $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2})$ ,  $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2})$

Passo 3: Avaliando  $f$  nos pontos obtidos nos Passos 1 e Passo 2 concluímos:  $-\frac{17}{8} = f(-\frac{1}{4}, 0)$  é valor mínimo absoluto, e  $f(2, 0) = 8$  valor máximo absoluto.

Note que, como se mostra na figura a seguir, o ponto  $(2, 0)$  é um ponto de máximo global de  $f|_K$  que está no bordo de  $K$  e não é um ponto crítico de  $f$ .

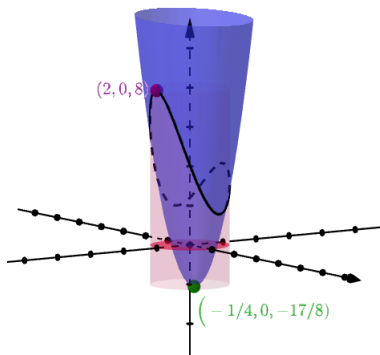


Figura 1.23:

## 1.6. \*Convergência do gradiente descendente

Nesta seção eletiva, iremos apresentar o conceito de gradiente descendente, o qual é relevante na área Aprendizado de Máquina.

**Definição 1.76.**

Dado uma função suave  $f : W \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  o algoritmo de gradiente descendente é definido como

$$w_{k+1} = w_k - \tau_k \nabla f(w_k)$$

gerando uma sequência  $\{w_k\}$  sendo que o passo  $\tau_k$  pode variar a cada interação.

O algoritmo já suscita duas questões:

(i) *Motivação*: Considere a solução da E.D.O com condição inicial  $w_0$ :

$$\gamma'(t) = -\nabla f \circ \gamma(t)$$

$$\gamma(0) = w_0$$

Sabemos que  $t \rightarrow f \circ \gamma(t)$  é uma função decrescente. Como os segmentos de retas  $t \rightarrow \alpha_k(t) = w_k - t \nabla f(w_k)$  com  $t \in [0, \tau_k]$  aproximam trechos de  $\gamma$ , caso  $w_k \rightarrow w_e$ , o ponto  $w_e$  seria um candidato para um ponto de mínimo local de  $f$ .

(ii) *Definição do step-size  $\tau_k$* : Existem várias opções de definição de  $\tau_k$ . Podemos considerar uma constante fixa a ser determinada no problema ou um passo adaptativo  $\tau_k$ , i.e., que varia a cada interação.

**Observação 1.77.**

Um exemplo de um algoritmo de passo iterativo é o assim chamado **backtracking line search**. Nele enquanto  $f(w_k) - f(w_k - \tau \nabla f(w_k)) < a\tau \|\nabla f(w_k)\|^2$  substitui-se  $\tau$  por  $b\tau$ , onde  $a$  frequentemente é escolhido como  $a = 10^{-4}$  e  $b = \frac{1}{2}$ . A sequência construída na Definição 1.76 é chamada **suficientemente decrescente** se existe  $c$  tal que para todo  $k$  tenhamos:

$$f(w_k) - f(w_{k+1}) \geq c \|\nabla f(w_k)\|^2.$$

Possível demonstrar que, sob condições de regularidade, i.e.,  $f(w + d) \leq f(w) + \langle \nabla f(w), d \rangle + \frac{L^2}{2} \|d\|^2$ , o backtracking line search produz um  $c$  para o qual  $\{w_n\}$  se torna suficientemente decrescente. Por outro lado, se  $\{w_n\}$  é suficientemente decrescente e converge para algum ponto  $w_e$  (que não necessariamente precisa ser um ponto de mínimo) então  $\nabla f(w_e) = 0$  ou seja  $w_e$  é crítico, vide [Bou23].

**Exemplo 1.78.**

Considere  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função  $h(w_1, w_2) = -2(2w_1 - w_1^2)(2w_2 - w_2^2)$ . Tal como no Exercício 1.70 temos que  $(0, 0)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(2, 2)$  são pontos de sela e  $(1, 1)$  é ponto de mínimo local. Ao aplicar o algoritmo do gradiente descendente bem perto de  $(1, 1)$  vemos que ele de fato gera uma sequência que irá convergir para este ponto de mínimo. Porém ao aplicarmos perto de um dos pontos de sela (que não seja o próprio ponto de sela) a sequência irá divergir. A seguir deixamos um programa simples em Python (com  $\tau$  constante), para que o(a) leitor(a) possa fazer alguns experimentos, vide [WBK20].

```
import numpy as np
from autograd import grad
def SeqGD(g, alpha, max_its, w):
    gradiente = grad(g)
    sequencia = [w]
    for k in range(0, max_its):
        w = w - alpha * gradiente(w)
        sequencia.append(w.tolist())
    return sequencia

def h(w):
    return -1*(2*(2*w[0]-w[0]**2))*(2*w[1]-w[1]**2)

pt_X = float(input('Entre com a coordenada
de partida x: '))
pt_Y = float(input('Entre com a coordenada
de partida y: '))
pt = np.array([pt_X, pt_Y])
aprend = float(input('Entre com passo: '))
int = int(input('Entre com número de interação: '))

print(f'Sequencia é : {SeqGD(h, aprend, int, pt)}')
```

Vemos a seguir que na vizinhança de um ponto  $w_e$  que é mínimo local, a sequência  $\{w_k\}$  converge para  $w_e$ . A prova é apresentada quando  $\tau_k$  é constante, porém resultado é ainda válido para  $\tau_k$  adaptativos.

**Teorema 1.79.**

Seja  $f : W \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  função de classe  $C^2$ . Suponha que exista  $w_e \in U$  tal que:

- (i)  $\nabla f(w_e) = 0$ ;
- (ii) os autovalores de  $\text{Hess } f(w_e)$  são positivos, i.e.,  $0 < \lambda_{\min} \leq \dots \leq \lambda_{\max}$ .

Então existe uma vizinhança  $B_\epsilon(w_e)$  de  $w_e$  tal que para todo  $w_0 \in B_\epsilon(w_e)$  temos que a sequencia iterada  $w_{k+1} = F(w_k)$  converge para  $w_e$ , onde

$$F(w) = w - \frac{1}{L} \nabla f(w) \text{ com } L > 2\lambda_{\max}.$$

*Demonstração.* Fácil verificar que:  $DF(w) = Id - \frac{1}{L} \text{Hess } f(w)$ . Logo os autovalores de  $DF$  são:  $(1 - \frac{\lambda_1}{L}) \geq \dots \geq (1 - \frac{\lambda_{\max}}{L})$  e assim

$$\|DF(w)\| = \sup_{\|v\|=1} DF(w)v = \max\left\{\left|1 - \frac{\lambda_{\min}}{L}\right|, \left|1 - \frac{\lambda_{\max}}{L}\right|\right\}$$

Por hipótese  $\frac{L}{2} > \lambda_{\max}$  e assim  $\frac{1}{2} > \frac{\lambda_{\max}}{L} \geq \frac{\lambda_{\min}}{L} > 0$ . Logo  $\|DF(w)\| < 1$ . O resultado segue então do Lema 1.80 a seguir que é uma versão simplificada do Lema da contração.  $\square$

**Lema 1.80.**

Seja  $F : W \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  aplicação de classe  $C^1$  tal que  $w_e \in W$  é ponto fixo de  $F$ , ou seja  $F(w_e) = w_e$ . Suponha que  $\|DF(w_e)\| < 1$ . Então existe uma vizinhança  $B_\epsilon(w_e)$  de  $w_e$  tal que:

- (a)  $F(B_\epsilon(w_e)) \subset B_\epsilon(w_e)$ ;
- (b) para todo  $w_0 \in B_\epsilon(w_e)$  temos que a sequencia  $w_{k+1} = F(w_k)$  ( $k \geq 0$ ) converge para  $w_e$ .

*Demonstração.* Visto que  $F$  é de classe  $C^1$  temos por hipótese que existe a vizinhança  $B_\epsilon(w_e)$  tal que  $\|DF(w)\| < c < 1$ . Assim pelo teorema do valor médio temos

$$\|F(x) - F(y)\| < c\|x - y\| \tag{1.6.1}$$



para qualquer  $x, y \in B_\epsilon(w_e)$ . Em particular, como  $w_e$  é ponto fixo,

$$\|F(w) - w_e\| = \|F(w) - F(w_e)\| \leq c\|w - w_e\| < c\epsilon < \epsilon$$

o que implica que  $F(w) \in B_\epsilon(w_e)$  e assim provamos item (a).

Aplicando indução a Eq. (1.6.1) junto com o fato de  $F(w_e) = w_e$  temos

$$\|F^k(w_0) - w_e\| \leq c^k\|w_0 - w_e\|$$

o que implica  $w_k \rightarrow w_e$  e assim concluímos a prova do item (b).  $\square$

Terminamos esta seção com algumas palavras sobre um exemplo de uma função custo ou função penalidade que se deseja minimizar em Aprendizado de Máquinas.

### Exemplo 1.81. Função penalidade associada ao cross entropy

Uma problema clássico em Aprendizado de Máquina, é desenvolver um algoritmo que, após ser treinado com *dados de aprendizagem*, consiga prever a probabilidade de novos dados pertencerem à certa classe. Mais precisamente utilizaremos um conjunto de pontos  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^P$  com  $x_i \in \mathbb{R}^m$  e  $y_i \in \{0, 1\}$  para construir uma função  $\rho : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que a primeira coordenada  $(\rho)_1(x)$  preveja a probabilidade do (novo) dado  $x \in \mathbb{R}^m$  ter valor  $y = 1$  e a segunda coordenada  $(\rho)_2(x)$  a probabilidade do dado  $x$  ter valor  $y = 0$ , em particular teremos  $(\rho)_1(x) + (\rho)_2(x) = 1$ . Por exemplo o dado  $x \in \mathbb{R}^m$  pode representar uma imagem (com  $m$  pixels) e o valor  $y$  pode representa se tal figura corresponde a um gato, ou um cachorro (supondo que vamos sempre alimentar o algoritmo com figuras que sejam de fato apenas de gatos e cachorros). Também fará parte do nosso modelo que os dados (em sua maioria) podem ser separados por algum hiperplano  $\{x \in \mathbb{R}^m; g_w(x) = \langle \bar{w}, x \rangle + w_0 = 0\}$  onde  $w = (w_0, \bar{w}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$  não é conhecido no início.

Vamos explicar a estratégia da construção de  $\rho$  e porque tal assunto está relacionado ao gradiente decrescente. Primeiro vamos definir algumas aplicações:

- (i)  $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ , onde  $\Omega = \{1, \dots, P\}$  e  $Z(i) = (y(i), 1 - y(i))$ ;
- (ii)  $\rho_w : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^2$  onde  $\rho_w(x) = (\sigma(g_w(x)), \sigma(g_{-w}(x)))$  sendo que a **função sigmoide**  $\sigma$  será definida na Eq. (1.6.2);
- (iii)  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  onde  $X(i) = x_i$ ;
- (iv)  $Y_w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  onde  $Y_w = \rho_w \circ X$ ;

## Continuação.

- (v)  $f : W \subset \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$  a função **penalidade**  $f(w) = \mathcal{E}(Z, Y_w)$  a qual medirá, a grosso modo falando, "quão distante" está a (densidade de probabilidade discreta)  $Y_w$  da (densidade de probabilidade discreta)  $Z$ , sendo que a definição da aplicação **cross entropy**  $\mathcal{E}(\cdot, \cdot)$  será dada na Eq. (1.6.3);

O algoritmo do gradiente descendente então é aplicado a função  $f : W \rightarrow \mathbb{R}$  para obter um ponto  $w_e \in W$  que realiza o mínimo de  $f$ . Finalmente a função procurada  $\rho : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^2$  é definida como  $\rho = \rho_{w_e}$ .

Vamos agora dar alguns detalhes a mais sobre os itens (ii) e (v).

- (ii) A função sigmoide  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$  é definida como:

$$\sigma(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}}. \quad (1.6.2)$$

Note que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma(t) = 1$  e  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \sigma(t) = 0$ . Em particular perceba que quanto mais positivo  $g_w(x)$  for (i.e., quanto mais afastado do lado positivo do hiperplano  $g_w(x) = 0$ ) mais próximo a primeira componente de  $\rho_w$  definida no item (ii) estará do valor  $y = 1$ . De forma análoga quanto mais negativo for  $g_w(x)$ , mais próximo a segunda componente de  $\rho_w$  estará do valor  $y = 1$ .

(v) Começemos com algumas palavras para criar uma intuição sobre cross entropy que mede 'quão distante' esta  $Y_w$  de  $Z$ . Vamos supor que para  $k_0$  fixo, nosso dado  $x_{k_0}$  tenha valor atribuído  $y_{k_0} = 1$ . Se o valor  $\rho_w(x_{k_0})$  é próximo a  $(1, 0)$  ou seja se  $\rho_w$  indica que o ponto tem alta probabilidade de ter valor 1 (o que é verdade pois  $y_{k_0} = 1$ ) deveríamos ter uma penalidade pequena, pois  $\rho_w$  está funcionando bem, pelo menos no ponto  $x_{k_0}$ . Se por outro lado  $\rho_w(x_{k_0})$  for próximo a  $(0, 1)$ , i.e., a função  $\rho_w$  indicar que o ponto tem baixa probabilidade de ter valor 1 (o que sabemos que não é verdade) deveríamos ter uma alta penalidade. Note que multiplicar  $y_{k_0}$  por  $\sigma(\langle \bar{w}, x_{k_0} \rangle + w_0)$  não modela o que desejamos, pelo contrário penaliza um bom desempenho. Nossa solução para modelar penalização de mau desempenho, será utilizar a função  $-\ln(t)$ . Observe que para  $t \in (0, 1]$  esta função é não negativa, que próximo a  $t = 1$  ela se aproxima a zero e próximo a  $t = 0$  ela fica muito grande. Então para modelar um mau desempenho é interessante multiplicar  $y_{k_0}$  por  $-\ln(\sigma(\langle \bar{w}, x \rangle + w_0))$ . Assim para qualquer outro ponto  $x_k$  (onde

## Continuação.

$y_k \in \{0, 1\}$ ) o custo ou penalidade é definido:

$$C_k = -\langle Z(k), \ln(Y_w(k)) \rangle = -\langle Z(k), \ln(\rho_w(x_k)) \rangle$$

onde  $Z_k = (y_k, 1 - y_k)$  e  $\ln$  é aplicado ao vetor  $Y_w(k) = \rho_w(x_k)$  (i.e., aplicado a cada componente, tal como na linguagem Python). Temos assim que

$$\mathcal{E}(Z, Y_w) := \frac{1}{P} \sum_{k=1}^P C_k = -\frac{1}{P} \sum_{k=1}^P \langle Z(k), \ln(Y_w(k)) \rangle \quad (1.6.3)$$

Escrito explicitamente:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(Z, Y_w) &= -\frac{1}{P} \sum_{k=1}^P y_k \ln(\sigma(\langle \bar{w}, x_k \rangle + w_0)) \\ &\quad - \frac{1}{P} \sum_{k=1}^P (1 - y_k) \ln(\sigma(-\langle \bar{w}, x_k \rangle - w_0)) \end{aligned}$$

Ou utilizando que  $1 - \sigma(t) = \sigma(-t)$  temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(Z, Y_w) &= -\frac{1}{P} \sum_{k=1}^P y_k \ln(\sigma(\langle \bar{w}, x_k \rangle + w_0)) \\ &\quad - \frac{1}{P} \sum_{k=1}^P (1 - y_k) \ln(1 - \sigma(\langle \bar{w}, x_k \rangle + w_0)) \end{aligned}$$

**Observação 1.82. normalização exponencial**

É possível definir a aplicação  $\rho_w$  de uma forma equivalente considerando normalização exponencial de um vetor, i.e.,  $\hat{\sigma}(s_0, s_1) = \left( \frac{e^{s_0}}{\sum_{c=0}^1 e^{s_c}}, \frac{e^{s_1}}{\sum_{c=0}^1 e^{s_c}} \right)$  e definindo

$$\hat{\rho}_w(x) = \hat{\sigma}(\langle \bar{w}, x \rangle + w_0, -\langle \bar{w}, x \rangle - w_0).$$

Não é difícil de verificar que  $\hat{\rho}_w(x) = \rho_{2w}(x)$ , o que significa que podemos usar uma ou outra aplicação ao minimizar.

## Continuação.

A aplicação  $\hat{\rho}_w$  permitirá considerar casos onde os valores atribuídos aos dados são não binários ( $c = 0 \cdots C - 1$ ) e os dados podem ser separados por hiperplanos  $\{x \in \mathbb{R}^m; g_{w^c}(x) = \langle x, \bar{w}^c \rangle + w_{0,c} = 0\}$  (indexados por  $c \in \{0 \cdots C - 1\}$  com  $C > 2$ ) onde novamente não sabemos de início os parâmetros  $w^c = (w_{0,c}, \bar{w}^c)$ . Podemos então definir  $\rho_w : W \rightarrow \mathbb{R}^C$  onde

$$\hat{\rho}_w(x) = \hat{\sigma}(g_{w^1}(x), \dots, g_{w^C}(x)).$$

para  $w = (w^1, \dots, w^C)$  e para

$$\hat{\sigma}(s_0, \dots, s_C) = \left( \frac{e^{s_0}}{\sum_{c=0}^C e^{s_c}}, \dots, \frac{e^{s_C}}{\sum_{c=0}^C e^{s_c}} \right).$$

Nesta generalização é necessário fazer alguns comentário sobre o domínio  $W$ . No caso  $C = 2$  considerávamos  $\bar{w}^0 = \bar{w}$  e  $\bar{w}^1 = -\bar{w}$  e assim de fato  $W = \mathbb{R}^m$ . Porém para  $C > 2$  os vetores normais  $\bar{w}^c$  não precisam ser múltiplos um do outro e teremos que considerar  $\|\bar{w}^c\| = 1$ . Desta forma o domínio  $W$  se torna  $C$  cópias de  $(\mathbb{R}, \mathbb{S}^{m-1})$  Neste caso seria bom aplicar a técnica do **gradiente riemanniano decrecente** para  $f(w) = \mathcal{E}(Z, Y_w)$ . Uma outra opção é manter  $W$  como  $\mathbb{R}^m$  mas adicionar um termo para lidar com o erro introduzido por não cuidar da questão dos vínculos, vide [Bou23] e [WBK20].

## 1.7. \*Curvatura de Gauss de superfícies

Por motivos didáticos estaremos considerando aqui sempre  $M = g^{-1}(c)$  uma superfície regular onde  $c$  será um valor regular de uma função  $g : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Após vermos o conceito de plano tangente de uma superfície de nível  $M$  seria natural nos perguntarmos por objetos que meçam quão diferente localmente a superfície possa ser de um plano. Uma possível abordagem seria olhar o vetor normal unitário  $\eta = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}$  e nos perguntarmos quão rápido ele gira. Ou seja pensando nele intuitivamente como uma alavanca (ou um Joystick de videogame) gostaríamos de ver quão rápido ele muda de posição. Claramente se ele nunca mudar de posição ou seja se sua derivada for zero, então  $M$  é (ou pelo menos parece ser) um plano. Isto nos motiva a definir o seguinte operador

**Definição 1.83.**

Dado um superfície regular  $M^2 = g^{-1}(c)$  em  $\mathbb{R}^3$  e campo unitário  $\eta = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}$  podemos definir a aplicação simétrica  $\mathcal{S}_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$  como

$$\mathcal{S}_p(X) := -D\eta_p X =: D_X \eta(p)$$

chamada **operador forma (shape operator) ou Weingarten operator**.

A definição acima claramente demanda várias explicações.

A primeira seria porque este operador de fato é um operador linear de  $T_p M$  para  $T_p M$ . Para ver isto considere uma curva  $t \rightarrow \alpha(t) \in M$  com  $\alpha'(0) = X \in T_p M$ . Podemos então definir a função  $f(t) = \langle \eta \circ \alpha(t), \eta \circ \alpha(t) \rangle = 1$ . Ao derivar  $f$  em  $t = 0$  concluímos que:

$$0 = f'(0) = 2\langle -\mathcal{S}_\eta X, \eta(p) \rangle$$

A equação acima então implica que de fato  $\mathcal{S}_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$

A segunda explicação que deveríamos dar é porque a aplicação  $\mathcal{S}_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$  é simétrica (e talvez porque este incômodo sinal de menos). Como isto exige um pouco mais de contas, coloquemos esta explicação em um pequeno lema.

**Lema 1.84.**

$\mathcal{S}_\eta(p) : T_p M \rightarrow T_p M$  é de fato simétrica.

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{S}_\eta X, Y \rangle &= \langle -(D_X \eta)_p, Y \rangle \\ &\stackrel{(*)}{=} \langle \eta_p, D_X Y \rangle \\ &\stackrel{(**)}{=} \langle \eta_p, D_Y X \rangle \\ &\stackrel{(*)}{=} \langle -(D_Y \eta)_p, X \rangle \\ &= \langle \mathcal{S}_\eta Y, X \rangle \end{aligned}$$

Igualdade (\*) segue definindo  $f(t) = \langle \eta \circ \alpha(t), Y \circ \alpha(t) \rangle = 0$  e derivando em  $t = 0$  (ou seja alterando levemente o truque acima discutindo). A igualdade (\*\*) seguirá da expressão 1.3.5 para o campo colchete.  $\square$

Uma vez definido o operador forma, podemos tentar medir quanto ele difere de zero, e assim tentar estabelecer uma medida de quanto  $M$  difere de um plano

(pelo menos localmente). Por ser um operador simétrico nada mais natural do que olhar para seus autovalores.

### Definição 1.85.

Os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  de  $\mathcal{S}_\eta(p) : T_pM \rightarrow T_pM$  são chamados **curvaturas principais**.

Antes interpretar o significado destes auto-valores, reformulemos o que vimos na demonstração do Teorema 1.65.

### Proposição 1.86.

Seja  $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  função de classe  $C^3$ . Suponha que  $p \in U$  seja ponto crítico (i.e,  $dh(p) = 0$ ) e que os autovalores  $\lambda_i$  de  $\text{Hess } h(p)$  sejam diferentes de zero, i.e,  $\det \text{Hess } h(p) \neq 0$ .

- (a) Se  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$  o gráfico associado a  $h$  é aproximado (perto de  $p$ ) por um parabolóide elíptico.
- (b) Se  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$  o gráfico associado a  $h$  é aproximado (perto de  $p$ ) por um parabolóide hiperbólico.

### Proposição 1.87.

Seja  $M$  o gráfico em  $\mathbb{R}^3$  de uma função  $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  suave tal que  $(0, 0) \in U$ ,  $h(0, 0) = 0$  e  $\nabla h(0, 0) = (0, 0)$ . Temos então:

- (a)  $T_{(0,0,0)}M = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ ,
- (b) se  $\eta(0, 0, 0) = (0, 0, 1)$  então  $\mathcal{S}_\eta(v, 0) = (\text{Hess } h(0, 0)v, 0)$ , onde  $\mathcal{S}_\eta$  é o operador forma.
- (c) As curvaturas principais em  $p$  são auto-valores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  do  $\text{Hess}h(0, 0)$  e assim  $M$  pode ser aproximado por um parabolóide elíptico (respectivamente parabolóide hiperbolóide) se  $\lambda_1\lambda_2 > 0$  (respectivamente se  $\lambda_1\lambda_2 < 0$ ).

*Demonstração.* (a) Ao definir  $g(x) = x_3 - h(x_1, x_2)$  temos que o vetor normal  $\nabla g(x) = (-\frac{\partial h}{\partial x_1}, -\frac{\partial h}{\partial x_2}, 1)$ . Assim  $\eta(0, 0, 0) = \nabla g(0, 0, 0) = (0, 0, 1)$  e consequentemente o plano tangente em  $(0, 0, 0)$  é  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ .

(b) Definamos a parametrização  $\psi(x_1, x_2) = (x_1, x_2, h(x_1, x_2))$  e com ela vetor normal e sua representação em uma parametrização (ou seja  $\eta \circ \psi = \tilde{\eta}$ )

$$\tilde{\eta}(x_1, x_2) = \frac{(-h_{x_1}, -h_{x_2}, 1)}{\sqrt{h_{x_1}^2 + h_{x_2}^2 + 1}}$$

onde  $h_{x_i} = -\frac{\partial h}{\partial x_i}$ . Seja  $\alpha = \psi(\tilde{\alpha})$ . Temos então:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\eta \alpha'(0) &= -\frac{d}{dt} \tilde{\eta} \circ \tilde{\alpha}(t) \Big|_{t=0} \\ &= -\left( \frac{d}{dt} \left( (h_{x_1} \circ \tilde{\alpha}(t))^2 + (h_{x_2} \circ \tilde{\alpha}(t))^2 + 1 \right)^{-1/2} \Big|_{t=0} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} -h_{x_1} \circ \tilde{\alpha}(t) \\ -h_{x_2} \circ \tilde{\alpha}(t) \\ 1 \end{bmatrix} \Big|_{t=0} \right) \\ &= 0 + \begin{bmatrix} h_{x_1 x_1}(0, 0) & h_{x_2 x_1}(0, 0) \\ h_{x_1 x_2}(0, 0) & h_{x_2 x_2}(0, 0) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}'_1(0) \\ \tilde{\alpha}'_2(0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

lembrando que  $\alpha'(0) = (\tilde{\alpha}'_1(0), \tilde{\alpha}'_2(0), 0)$

(c) segue direto da Proposição 1.86. □

Agora que temos uma interpretação do que são as curvaturas principais no caso particular descrito acima, podemos observar que toda superfície  $M = g^{-1}(c)$  pode ser rodada e localmente na vizinhança do ponto  $p$  recaímos na situação descrita na Proposição 1.87. Assim a proposição acima motiva a definição de curvatura de Gauss a seguir e implica o corolário apresentado abaixo.

### Definição 1.88.

Dado uma superfície regular  $M = g^{-1}(c)$  e sejam  $\lambda_1, \lambda_2$  curvaturas principais associadas a  $\eta(p) = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}(p)$ . A **curvatura de Gauss** em  $p \in M$  é definida como  $K(p) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$ .

**Corolário 1.89.**

Seja  $M = g^{-1}(c)$  superfície regular.

- (a) Se  $K(p) > 0$  então  $M$  é aproximado (perto de  $p$ ) por um parabolóide elíptico,  
 (b) se  $K(p) < 0$  então  $M$  é aproximado (perto de  $p$ ) por um parabolóide hiperbólico.

**Observação 1.90.**

Note que embora os sinais das curvaturas principais possam depender da escolha do sentido do vetor normal unitário  $\eta$  (ou seja para  $\hat{\eta} = -\eta$ ,  $\hat{\lambda}_i = -\lambda_i$ ) a curvatura de Gauss não depende da escolha do sentido do vetor  $\eta$ .

**Exercício 1.91.**

Utilizando diretamente a definição de  $\mathcal{S}_\eta$ , determine as curvaturas principais e curvatura de Gauss de um plano em  $\mathbb{R}^3$  e da esfera (canônica)  $\mathbb{S}^2(r)$  de raio  $r$  e centro zero em  $\mathbb{R}^3$  com vetor normal apontando para fora.

Para exemplos mais complicados, podemos calcular explicitamente curvaturas principais e curvatura de Gauss via parametrização, mas, antes de formalizar isto, precisamos do conceito de segunda forma, que não é mais que a aplicação bilinear associada ao operador de Weingarten (que, como vimos, é uma aplicação linear autoadjunta)

**Definição 1.92.**

Seja  $M \subset \mathbb{R}^2$  uma subvariedade mergulhada. A forma quadrática  $II_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$II_p(X) = \langle S_\eta(X), X \rangle, \quad (1.7.1)$$

é chamada de **segunda forma fundamental**.

**Observação 1.93.**

Se  $\psi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  é uma parametrização de  $M$ ,  $\eta$  vetor normal e  $\tilde{\eta}$  definido como  $\tilde{\eta} = \eta \circ \psi$ . então os coeficientes da segunda forma fundamental estão dados



## Continuação.

por

$$b_{ij} = \langle -\tilde{\eta}_{x_i}, \psi_{x_j} \rangle = \langle \tilde{\eta}, \psi_{u_i, u_j} \rangle.$$

**Proposição 1.94.**

Sejam  $M$  superfície mergulhada em  $\mathbb{R}^3$  e  $g_{ij}$  e  $b_{ij}$  os coeficientes da primeira e segunda forma, respectivamente. Então:

(a) a representação matricial do operador forma está dada por

$$[\mathcal{S}_\eta] = \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix};$$

(b) a curvatura de Gauss é dada por

$$\tilde{K}(x_1, x_2) = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2};$$

(c) a média das curvaturas principais,  $H = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$ , é calculada em coordenadas como:

$$\tilde{H}(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \left( \frac{b_{11}g_{22} - 2b_{12}g_{12} + g_{11}b_{22}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \right);$$

(d) e as curvaturas principais por  $\lambda_i = H \pm \sqrt{H^2 - K}$ .

*Demonstração.* Sejam  $a_{ij}$  funções tais que:

$$-\tilde{\eta}_{x_1} = a_{11}\psi_{x_1} + a_{21}\psi_{x_2}$$

$$-\tilde{\eta}_{x_2} = a_{12}\psi_{x_1} + a_{22}\psi_{x_2}$$

Multiplicando tais equações por  $\psi_{x_i}$  temos:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

a qual implica o item (a).

No caso dos itens (b) e (c) basta observar que  $K = \det[\mathcal{S}_\eta]$  e  $H = \text{tr}[\mathcal{S}_\eta]$  (deixamos o cálculo explícito aos leitores).

Para demonstrar (d) observe que o cálculo dos auto-valores de  $\mathcal{S}_\eta$  pode ser feito calculando o polinômio característico da matriz  $[\mathcal{S}_\eta] = [a_{ij}]$ . Assim,

$$0 = P(\lambda) = \det([\mathcal{S}_\eta] - \lambda Id) = \lambda^2 - \text{tr}[\mathcal{S}_\eta]\lambda + \det[\mathcal{S}_\eta] = \lambda^2 - 2H\lambda + K. \quad \square$$

### Exemplo 1.95. Superfície de Revolução

Considere  $M$  uma superfície de revolução em  $\mathbb{R}^3$ . Temos então a parametrização

$$\psi(t, s) = (r(t) \cos(s), r(t) \sin(s), h(t))$$

onde  $t \rightarrow \beta(t) = (r(t), h(t))$  é a curva geratriz com  $\|\beta'(t)\| \neq 0$ .

$$\begin{aligned}\psi_t &= \frac{\partial \psi}{\partial t} = (r'(t) \cos(s), r'(t) \sin(s), h'(t)) \\ \psi_s &= \frac{\partial \psi}{\partial s} = (-r(t) \sin(s), r(t) \cos(s), 0)\end{aligned}$$

Logo a métrica em coordenadas é:

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} (r'(t))^2 + (h'(t))^2 & 0 \\ 0 & (r(t))^2 \end{bmatrix}$$

Para calcula  $b_{ij}$  primeiro calculemos o vetor normal.

$$\tilde{\eta}(t, s) = \frac{\psi_t \times \psi_s}{\|\psi_t \times \psi_s\|} = \frac{(-\cos(s)h'(t), -\sin(s)h'(t), r'(t))}{\sqrt{(h')^2 + (r')^2}}$$

Em seguida calculemos as derivadas segundas:

$$\begin{aligned}\psi_{tt} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (r''(t) \cos(s), r''(t) \sin(s), h''(t)) \\ \psi_{ts} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial s} = (-r'(t) \sin(s), r'(t) \cos(s), 0) \\ \psi_{ss} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} = (-r(t) \cos(s), -r(t) \sin(s), 0)\end{aligned}$$

$$[b_{ij}] = \frac{1}{\sqrt{(h')^2 + (r')^2}} \begin{bmatrix} -r''(t)h'(t) + h''(t)r'(t) & 0 \\ 0 & r(t)h'(t) \end{bmatrix}$$

## Continuação.

Usando o item (b) da Proposição 1.94 podemos calcular a curvatura de Gauss.

$$\begin{aligned} K(p) &= \frac{1}{((r'(t))^2 + (h'(t))^2) r^2} \frac{(-r''(t)h'(t) + r'(t)h''(t)) r(t)h'(t)}{\sqrt{(r'(t))^2 + (h'(t))^2}} \\ &= \frac{-r''(t)(h'(t))^2 + r'(t)h'(t)h''(t)}{r(t) ((r'(t))^2 + (h'(t))^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Analogamente, pelo item (c) da Proposição 1.94 segue

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{1}{2r^2 ((r'(t))^2 + (h'(t))^2)} \\ &\quad \cdot \frac{(-r''(t)h'(t) + r'(t)h''(t)) (r(t))^2 + ((r'(t))^2 + (h'(t))^2) r(t)h'(t)}{\sqrt{(r'(t))^2 + (h'(t))^2}} \\ &= \frac{-r''(t)h'(t)(r'(t))^2 + (r(t))^2 r'(t)h''(t) + r(t)(r'(t))^2 h'(t) + r(t)(h'(t))^3}{2r^2 ((r'(t))^2 + (h'(t))^2)} \end{aligned}$$

Finalmente, se a curva  $\beta$  está parametrizada por comprimento de arco, ou seja,  $\|\beta'\| = 1$ , segue

$$\begin{aligned} K(p) &= \frac{-r''(t)(1 - (r'(t))^2) + r'(t)(-r'(t)r''(t))}{r(t) ((r'(t))^2 + 1 - (r'(t))^2)^{3/2}} \\ &= \frac{-r''(t)(1 - (r'(t))^2) - r''(t)(r'(t))^2}{r(t)} \\ &= -\frac{r''(t)}{r(t)}. \end{aligned}$$

## 1.8. \*Hessiana orlada

Recordamos no Teorema 1.49 o clássico teorema de multiplicadores de Lagrange, que garante uma condição necessária para que a restrição de uma função  $u$  em um variedade regular  $M = G^{-1}(c)$  tenha máximo ou mínimo em um ponto  $p \in M$ . Porém tal critério não garantiu que de fato a solução seja um ponto de máximo ou mínimo i.e., é um critério necessário porém não suficiente para existência de máximos e mínimos. Nos problemas clássicos de multiplicadores de Lagrange, as

funções  $u$ , são particulares o suficiente para admitirem apenas números finitos de candidatos a máximos e mínimos, então comparando-se os valores e usando compacidade de  $M$  estabelece-se que o valor menor é de fato o mínimo absoluto e o valor maior o máximo absoluto.

Recordaremos aqui o critério de **Hessianos orlados (ou bordered hessian)** o qual garante se um ponto crítico  $q \in M$  é máximo ou mínimo local da função restrita a variedade  $M$ .

Utilizaremos esta discussão para já introduzir o conceito de conexão Riemanniana associada a métrica induzida do ambiente. Por motivos puramente didáticos estaremos considerando aqui sempre  $S = g^{-1}(c)$  uma superfície onde  $c$  será um valor regular de uma função  $g : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Embora de fato seja possível em um ponto crítico falar de Hessiano intrínseco sem envolver a estrutura geométrica (métrica induzida), utilizando apenas os colchetes dos campos, achamos que esta seria uma boa oportunidade para introduzir o conceito de derivação intrínseca e ver como ele pode ser uma ferramenta útil.

### 1.8.1. Motivação e o Teorema do Hessiano Orlado

Sejam  $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  função definida como  $u(x) = \frac{1}{2}(\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2)$ , a superfície  $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g(x) = x_1 = c\}$ ,  $p = (c, 0, 0)$  e  $f = u|_S$ . Desejamos saber se  $p$  é ponto de máximo ou mínimo local de  $f$  e ao mesmo tempo motivar a apresentação do critério da Hessiana orlada.

Fácil ver que

- $f(x_2, x_3) = \frac{1}{2}(\lambda_1 c^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2)$
- $\text{grad } f(0, 0) = (0, 0)$
- $\text{Hess } f(0, 0) = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$  Assim  $p$  é máximo local de  $f$  se  $\lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$  e é mínimo se  $\lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$

Fizemos uma conta intrínseca. Mas e se quisermos fazer uma conta extrínseca, i.e., usando  $u$ ? Primeiro notemos que

$$\nabla u(p) = (\lambda_1 c, 0, 0) = \lambda \nabla g(p) = \lambda(1, 0, 0)$$

Ou seja, por multiplicador de Lagrange,  $p$  é o candidato para ser máximo ou mí-

nimo. Note também que  $\text{Hess } u(p) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$  e assim contém informa-

ção a mais, i.e não precisamos saber sinal de  $\lambda_1$ . Suponha que voce esteja ensinando um computador a se livrar da informação adicional (i.e.,  $\lambda_1$ ). Um bom

truque é usar a seguinte matriz orlada (colocando  $\nabla g(p) = (1, 0, 0)$  no bordo).

$$\overline{H}_3 = \overline{\text{Hess } u} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \text{ e } \overline{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Visto que  $\det \overline{H}_2 = (-1)\lambda_2$  e  $\det \overline{H}_3 = (-1)\lambda_2\lambda_3$  concluímos que:

- Se  $\det \overline{H}_2 < 0$  e  $\det \overline{H}_3 < 0$ , então  $p$  é mínimo de  $f$  ( $\lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$ ).
- Se  $\det \overline{H}_2 > 0$  e  $\det \overline{H}_3 < 0$ , então  $p$  é máximo de  $f$  ( $\lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$ ).

O truque da matriz orlada parece ser bom no caso em que a superfície  $S$  é um plano. Mas se  $S$  não for um plano? (vide Observação 1.7) Se  $S$  tiver curvatura diferente de zero? Para lidar com tal questão no lugar de usar  $\text{Hess } u(p)$  precisaremos em geral usar uma outra matriz simétrica  $H$ , relacionada ao conceito Hessiano Riemanniano (o qual vamos discutir dentro em breve).

### Definição 1.96. Matriz Hessiana orlada

Sejam  $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g(x) = c\}$  superfície regular e  $p \in S$  é tal que  $\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p)$ , onde  $u$  e  $g$  são suaves. Definimos:

$$H = \text{Hess } u(p) - \lambda \text{Hess } g(p)$$

Antes de discutir mais sobre  $H$  vamos apresentar o resultado desta seção que foi ilustrado pela nossa motivação.

### Teorema 1.97.

Seja  $p \in S$  com  $\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p)$ . Suponha que  $\frac{\partial g}{\partial x_1}(p) \neq 0$ .

- Se  $\det \overline{H}_2 < 0$  e  $\det \overline{H}_3 < 0$  então  $p$  é mínimo local de  $f$ .
- Se  $\det \overline{H}_2 > 0$  e  $\det \overline{H}_3 < 0$  então  $p$  é máximo local de  $f$ .

onde

$$\overline{H}_3 = \overline{H} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(p) & \frac{\partial g}{\partial x_3}(p) \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(p) & H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2}(p) & H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ \frac{\partial g}{\partial x_3}(p) & H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix}$$

Continuação.

$$\overline{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(p) \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(p) & H_{11} & H_{12} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2}(p) & H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$$

### Observação 1.98.

As vezes  $H$  pode ser expresso com outra notação. De fato, seja  $L : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  função, defina

$$L(\lambda, x) = u(x) - \lambda(g(x) - c).$$

Então

$$\nabla L(\lambda, x) = (g(x) - c, \nabla u(x) - \lambda \nabla g(x))$$

Se  $\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p)$  então  $H$  coincide com a matriz  $3 \times 3$  esquerda superior de Hess  $L(p, \lambda)$ . Observamos também que como  $H$  não é positiva definida ou negativa definida, o Teorema 1.97 não é corolário direto do Teorema 1.68 e Corolário 1.67.

## 1.8.2. \*\*Ideia da Prova

### Derivada Intrínseca e o Hessiano Riemanniano

Inspirado na discussão do gradiente Riemanniano  $\text{grad } f(p)$  podemos nos perguntar: Dados campos  $\vec{X}$  e  $\vec{Y}$  tangentes a superfície  $S$  como derivar  $\vec{X}$  na direção de  $\vec{Y}$  de forma que o resultado continue tangente a  $S$ ? Afinal mesmo que os 2 campos sejam tangente a  $S$ ,  $D_{\vec{Y}}\vec{X}$  pode não ser tangente a  $S$ . A solução será considerar a parte tangente de  $D_{\vec{Y}}\vec{X}$ .

### Definição 1.99. Conexão Riemanniana

Dado campos  $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$  definimos o operador  $\nabla : \mathfrak{X}(S) \times \mathfrak{X}(S) \rightarrow \mathfrak{X}(S)$  como

$$\nabla_Y \vec{X}(p) = D_{\vec{Y}}\vec{X}(p) - \left\langle D_{\vec{Y}}\vec{X}(p), \frac{\nabla g(p)}{\|\nabla g(p)\|} \right\rangle \frac{\nabla g(p)}{\|\nabla g(p)\|}$$

Tal operador será chamado **conexão Riemanniana associada a métrica induzida**.

Uma vez que sabemos derivar campos  $\vec{X}$  tangentes a  $S$ , podemos derivar o  $\text{grad } f$ , definindo o conceito do Hessiano intrínscio ou Riemanniano  $\mathcal{H}(p)$ .

### Definição 1.100. Hessiano Riemanniano

$$\mathcal{H}(p)(X, Y) = \langle \nabla_X \text{grad } f, Y \rangle, \quad X, Y \in T_p S$$

### Proposição 1.101.

Seja  $p \in S$ , com  $\text{grad } f(p) = 0$ .

- Se  $\mathcal{H}(p)$  é positivo definido (i.e., tenha auto-valores positivo). então  $p \in S$  é ponto de mínimo local.
- Se  $\mathcal{H}(p)$  é negativo definido (i.e., tenha auto-valores negativos). então  $p \in S$  é ponto de máximo local.

## De volta a discussão extrínscica

A Proposição 1.101 já resolve, pelo menos em teoria, nossa questão de determinar se um ponto crítico é ou não um ponto de máximo ou mínimo local. Porém na prática aplica-la diretamente para fazer uma conta, pode ser uma má ideia. Primeiro trata-se de uma conta intrínscica. Teríamos que sempre parametrizar a superfície de nível? Segundo e de fato a questão mais séria (que já aparecia no problema análogo em  $\mathbb{R}^2$ ) é que se só necessitamos saber os sinais dos autovalores, deveríamos ter um algoritmo onde esta informação fosse obtida sem gastar tanto tempo para calcular explicitamente algo que de fato não vamos utilizar. Cabe lembrar que nossa discussão para superfícies pode (e é) generalizada para dimensões maiores, e assim o tempo gasto para calcular auto-valores pode ser relevante. A álgebra linear nos dá um critério para resolver este tipo de questão. Então nosso objetivo será converter nossa conta intrínscica para uma conta extrínscica (vide Proposição 1.102 e Proposição 1.103) e adaptar um critério de algebra linear (vide Proposição 1.104) para determinar os sinais dos auto-valores, provando assim o Teorema 1.97.

### Proposição 1.102.

Para todo  $X, Y \in T_p S$

- (a)  $\mathcal{H}(p)(X, Y) = \text{Hess } u(p)(X, Y) + \langle \nabla u^\nu, D_X Y \rangle$ , onde  $\nabla u^\nu$  é a componente normal de  $\nabla u$ .

## Continuação.

(b)  $\mathcal{H}(p)(X, Y) = \text{Hess } u(p)(X, Y) - \lambda \text{Hess } g(p)(X, Y)$ , quando  $p$  é um ponto crítico intrínseco, i.e., quando  $\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p)$ .

*Demonstração.* Seja  $\xi$  vetor normal a  $S$ , i.e.,  $\xi = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}$ .

(a) Levando em conta a definição de  $\text{grad } u$ , do Hessiano Riemanniano  $\mathcal{H}$  e que  $\langle \xi, Y \rangle = 0$  podemos concluir que:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(p)(X, Y) &= \langle \nabla_X \text{grad } u, Y \rangle \\ &= \langle D_X \text{grad } u - \langle D_X \text{grad } u, \xi \rangle \xi, Y \rangle \\ &= \langle D_X \text{grad } u, Y \rangle \\ &= \langle D_X \nabla u - D_X (\langle \nabla u, \xi \rangle \xi), Y \rangle \\ &= \langle D_X \nabla u, Y \rangle - X \bullet \langle \nabla u, \xi \rangle \langle \xi, Y \rangle \\ &\quad - \langle \nabla u, \xi \rangle \langle D_X \xi, Y \rangle \\ &= \langle D_X \nabla u, Y \rangle + \langle \nabla u, \xi \rangle \langle \xi, D_X Y \rangle \\ &= \text{Hess } u(p)(X, Y) + \langle \nabla u^\nu, D_X Y \rangle. \end{aligned}$$

(b) Substituindo  $\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p)$  na equação do item (a) temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(p)(X, Y) &= \text{Hess } u(p)(X, Y) + \lambda \langle \nabla g, D_X Y \rangle \\ &= \text{Hess } u(p)(X, Y) - \lambda \langle D_X \nabla g, Y \rangle \\ &= \text{Hess } u(p)(X, Y) - \lambda \text{Hess } g(p)(X, Y). \end{aligned}$$

□

Segue assim do item (b) que no caso em que  $\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p)$ , temos que  $H|_{T_p S \times T_p S} = \mathcal{H}(p)$  Assim podemos reformular a Proposição 1.101 da seguinte maneira:

**Proposição 1.103.**

Seja  $p \in S$  tal que  $\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p)$  (i.e.,  $\text{grad } f(p) = 0$ ). Então:

- Se  $H|_{T_p S \times T_p S}$  é positivo definido, então  $p \in S$  é ponto de mínimo local.
- Se  $H|_{T_p S \times T_p S}$  é negativo definido então  $p \in S$  é ponto de máximo local.

A próxima proposição de Algebra Linear pode ser demonstrada usando a matriz apresentada na motivação, o teorema espectral e a lei de inércia de Sylvester



**Proposição 1.104.**

Seja  $A$  matriz simétrica e suponha que existe um plano  $V$  tal que a aplicação bilinear associada a  $A$  restrita a  $V \times V$  seja também simétrica. Ou seja existe aplicação simétrica  $\mathcal{H} : V \rightarrow V$  tal que  $Y^t A X = Y^t \mathcal{H} X$  para todo  $X, Y \in V$ . Vamos também supor que  $\mathcal{H}$  não seja degenerado. Seja  $w$  vetor normal a  $V$ . Suponha que  $w_1 \neq 0$ .

- (a) Se  $\det \bar{A}_2 < 0$  e  $\det \bar{A}_3 < 0$  então  $y^t A x|_{V \times V}$  é positivo definido.  
 (b) Se  $\det \bar{A}_2 > 0$  e  $\det \bar{A}_3 < 0$  então  $y^t A x|_{V \times V}$  é negativo definido.

$$\bar{A}_3 = \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & w_1 & w_2 & w_3 \\ w_1 & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ w_2 & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ w_3 & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & w_1 & w_2 \\ w_1 & A_{11} & A_{12} \\ w_2 & A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

*Demonstração.* Seja a base  $\{q_1, q_2, q_3\}$  como  $q_1 = \frac{w}{\|w\|}$ ,  $\mathcal{H}q_2 = \lambda_2 q_2$  e  $\mathcal{H}q_3 = \lambda_3 q_3$ . Temos então que  $Aq_2 = b_{12}q_1 + \lambda_2 q_2$  e  $Aq_3 = b_{13}q_1 + \lambda_3 q_3$ , onde  $b_{12} = \langle A(q_1), q_2 \rangle$  e  $b_{13} = \langle A(q_1), q_3 \rangle$ . Definamos agora base para  $\mathbb{R}^4$   $\bar{q}_0 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $\bar{q}_i = (0, q_i)$ , para  $i = 1 \cdots 3$ . Definindo  $Q$  a matriz ortogonal com colunas  $\bar{q}_j$  não é difícil verificar que:

$$Q^t \bar{A} Q = B = \begin{bmatrix} 0 & \|w\| & 0 & 0 \\ \|w\| & c_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{12} & \lambda_2 & 0 \\ 0 & b_{13} & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Por escalonamento (análogo a decomposição  $LU$ ), e utilizando o fato de  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  serem diferentes de zero temos que  $B$  é conjugado a:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \|w\| & 0 & 0 \\ \|w\| & \tilde{c}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Por outro lado ao escalonar diretamente  $A$  temos que  $A$  é conjugada a

$$D = \begin{bmatrix} 0 & w_1 & 0 & 0 \\ w_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que  $B$  e  $D$  são equivalentes, temos pela lei de inércia de Sylvester, que sinal de  $d_2$  e  $d_3$  são iguais a  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$ , respectivamente. A hipótese do item (a) e argumento usual de decomposição  $LU$  implicam que  $d_2$  e  $d_3$  tem sinais positivos e assim  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  são positivos. De forma análoga a hipótese do item (b) implica que  $d_2$  e  $d_3$  tem sinais negativos e assim  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  são negativos.

□

Proposições 1.103 e 1.104 implicam o Teorema 1.97.

## Campos e fluxos em variedades

Neste capítulo iremos explorar conceitos de campos, fluxos e veremos o teorema Frobenius. Tais resultados serão discutidos na linguagem mais geral de variedades *abstratas*. O(a) leitor(a) que se sentir mais confortável poderá considerar sempre que variedades são mergulhadas em espaços Euclidianos.

### 2.1. Variedades

Utilizando a regra da cadeia e a Definição 1.6 temos o seguinte exercício, que irá motivar a definição de variedades.

#### Exercício 2.1. Mudança de coordenadas

Seja  $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$  subvariedade mergulhada. Considere 2 parametrizações  $\varphi_i : V_i \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$  tal que  $W := \varphi_1(V_1) \cap \varphi_2(V_2) \neq \emptyset$ . Verifique:  $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1|_{V_{12}}$  é um difeomorfismo na sua imagem, onde  $V_{1,2} = \varphi_1^{-1}(W)$ .

#### Definição 2.2.

Uma variedade  $M^m$  de dimensão  $m$  é um espaço topológico Hausdorff com base enumerável que admite uma estrutura diferenciável, i.e., duplas  $(U_\alpha, \psi_\alpha)$  (**cartas**) tal que para cada  $\alpha$ ,  $U_\alpha$  é aberto de  $M$  e  $\psi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \psi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^m$  são homeomorfismos entre abertos, tais que:

(a)  $M = \cup_\alpha U_\alpha$ ;

## Continuação.

(b) se  $W = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , então  $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(W) \rightarrow \psi_\beta(W)$  é um difeomorfismo (veja Figura 2.1);

(c) a coleção  $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_\alpha$  (**atlas**) é máxima em relação aos itens acima.

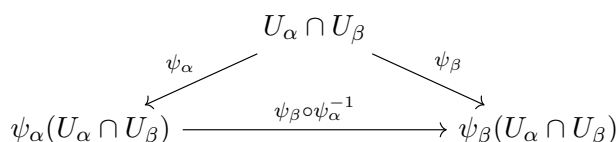


Figura 2.1:

### Observação 2.3.

De forma equivalente poderíamos definir uma **variedade coordenada**  $(M, \{\psi_\alpha, U_\alpha\})$  como espaço topológico Hausdorff com base enumerável  $M$ , dotada um atlas  $\{\psi_\alpha, U_\alpha\}$  satisfazendo (a) e (b). Assim uma variedade  $M$  com estrutura diferenciável seria definida como uma classe de equivalência das variedades coordenadas tais que as composições de inversa da coordenada de uma com a parametrização de outra seria suave. Em outras palavras, dizemos que  $(M, \{\psi_\alpha, U_\alpha\})$  é equivalente a  $(M, \{\phi_\beta, V_\beta\})$  se  $\psi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$  é suave (onde fizer sentido).

### Exemplo 2.4. A esfera

Vamos ilustrar o item (a) e (b) da Definição 2.2 para parametrizações estereográficas da esfera, a qual tem um interesse em si devido às suas propriedades conformes.

Denotemos por  $N$  o polo norte da esfera. Seja  $\psi_N$  a projeção estereográfica desde o polo norte  $N$  que, lembramos, está definida da seguinte maneira. Por cada ponto  $p = (x_1, x_2, x_3) \in S^2 \setminus \{N\}$  traçamos a reta  $r$  que une  $p$  e  $N$ , e fazemos corresponder o ponto  $q$  da interseção dessa reta com o plano  $x_1x_2$  (veja a figura 2.2), ou seja, a interseção da reta

$$r(t) = N + t(p - N) = (tx_1, tx_2, 1 + t(x_3 - 1))$$

com o plano  $x_3 = 0$ . Daí

$$t = \frac{1}{1 - x_3}$$

## Continuação.

e, portanto,  $\psi_N$  é a aplicação dada por

$$\psi_N(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3} \right).$$

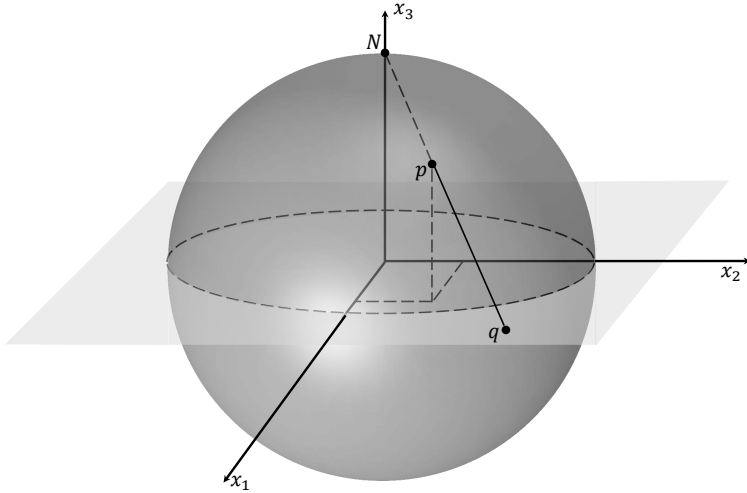


Figura 2.2: Projção estereográfica desde o polo norte.

Além disso, esta aplicação tem uma inversa que determinamos analogamente. Seja  $q = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , então a reta que une  $q$  e  $N$  está dada por

$$r(t) = N + t(q - N) = (tx_1, tx_2, 1 - t).$$

Fazendo a interseção desta reta com  $S^2$  temos

$$t^2 x_1^2 + t^2 x_2^2 + (1 - t)^2 = 1,$$

onde

$$t = \frac{2}{1 + x_1^2 + x_2^2}.$$

## Continuação.

Portanto a inversa de  $\psi_N$  é

$$\psi_N^{-1}(x_1, x_2) = \left( \frac{2x_1}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{2x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right).$$

Analogamente definimos a projeção estereográfica desde o polo sul  $S$  como sendo a aplicação  $\psi_S : S^2 \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por

$$\psi_S(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{x_1}{1 + x_3}, \frac{x_2}{1 + x_3} \right),$$

e cuja inversa é

$$\psi_S^{-1}(x_1, x_2) = \left( \frac{2x_1}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{2x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{1 - x_1^2 - x_2^2}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right).$$

Temos então:

- (a)  $S^2 = (S^2 \setminus \{S\}) \cup (S^2 \setminus \{N\})$ ;
- (b) Se  $p \in S^2 \setminus \{N, S\}$ , a composta  $\psi_N \circ \psi_S^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tem a expressão

$$\psi_N \circ \psi_S^{-1}(x_1, x_2) = \left( \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right),$$

que é claramente um difeomorfismo.

Isso mostra que a esfera é uma variedade de dimensão 2, bastando considerar o atlas maximal, ou usando esse atlas para definir a classe de equivalência de variedades coordenadas.

Interessante observar que, para dimensões baixas, por exemplo menor ou igual a três, uma variedade só pode ter uma estrutura diferenciável. Porém para dimensões maiores, a mesma variedade pode ter estruturas diferenciáveis diferentes i.e., se  $(U_\alpha, \psi_\alpha)$  e  $(\tilde{U}_\beta, \tilde{\psi}_\beta)$  são estruturas diferenciáveis, então  $\tilde{\psi}_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$  pode ser apenas um homeomorfismo. Por exemplo esferas  $S^7$  podem ter mais do que uma estrutura diferenciável.

Outra observação relevante é que toda variedade  $M^m$  pode ser vista, de acordo com Teorema de mergulho de Whitney, como variedade mergulhada em  $\mathbb{R}^{m+k}$  para um  $k$  suficientemente grande (i.e., admite um mergulho, vide próxima seção). Mesmo assim, como por vezes as variedades que estudamos carregam estruturas adicionais

que nos interessam, pode não ser conveniente considera-las como subvariedades mergulhadas em espaço Euclidiano, se o preço a pagar for a perda das estruturas adicionais pela quais temos interesse ou da facilidade de lidar com tais estruturas da forma natural com que elas aparecem. Por exemplo, algumas variedades são do tipo  $M = G/N$  onde  $G$  é grupo fechado de matrizes e  $N$  é grupo normal de matrizes de  $G$ . Assim  $M$  admite uma estrutura natural de grupo, de fato são grupos de Lie (vide próximo capítulo) porém não admitem *representação matricial* ou seja não serão visto diretamente como subgrupos de matrizes.

**Definição 2.5.**

Sejam duas variedades  $M$  e  $N$  com atlas  $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$  e  $\{(V_\beta, \phi_\beta)\}$ , respectivamente. Uma aplicação  $F : M \rightarrow N$  é chamada uma **aplicação suave em um ponto  $p$**  se existe uma vizinhança  $U_\alpha$  de  $p$  e uma vizinhança  $V_\beta$  de  $F(p)$  tal que a aplicação  $\phi_\beta \circ F \circ \psi_\alpha^{-1}$  é suave em  $\psi_\alpha(p)$  (vide Figura 2.3). Dizemos que  $F$  é uma **aplicação suave** se for suave para todo  $p \in M$ .

**Exercício 2.6.**

Verifique que tal definição não depende da escolha de cartas.

$$\begin{array}{ccc}
 U_\alpha \subset M & \xrightarrow{F} & V_\beta \subset N \\
 \downarrow \psi_\alpha & & \downarrow \phi_\beta \\
 \psi_\alpha(U_\alpha) & \xrightarrow{\phi_\beta \circ F \circ \psi_\alpha^{-1}} & \phi_\beta(V_\beta)
 \end{array}$$

Figura 2.3:

**Exercício 2.7.**

Sejam  $M^m$  e  $N^n$  subvariedades de  $\mathbb{R}^{m+k}$  e  $\mathbb{R}^{n+l}$  respectivamente. Suponha que exista uma aplicação suave  $F : \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^{n+l}$  tal que  $F(M) = N$ . Verifique que  $F|_M : M \rightarrow N$  é uma aplicação suave, no sentido definido acima. Conclua que:

- (a) se  $M$  é superfície invariante por rotação (recorde Exercício 1.17) então a rotação  $F = R_\theta$  induz um difeomorfismos  $F_M : M \rightarrow M$ ;

## Continuação.

- (b) Se  $M = \mathbb{O}(n)$  é o grupo ortogonal então a aplicação  $L_g : M \rightarrow M$  definida como  $L_g(x) = g \cdot x$  é suave, onde  $g \in \mathbb{O}(n)$  é uma matriz fixa.

## 2.2. Velocidades e derivações

Antes de definir espaço tangente em variedades gerais, vamos pensar em uma definição alternativa à Definição 1.24 para o caso de uma variedade mergulhada  $M^m$  em  $\mathbb{R}^{m+k}$ .

Dado um vetor  $v_q \in T_q\mathbb{R}^m$  podemos associar a ele um operador  $v_q : C^\infty(q) \rightarrow \mathbb{R}$  das funções suaves próximas a  $q$  da seguinte forma:

$$v_q \bullet h := \sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial h}{\partial x_i}(q), \quad (2.2.1)$$

onde  $v_i, 1 \leq i \leq m$ , são as coordenadas de  $v$  na base canônica.

Assim sendo, dado uma parametrização  $\varphi : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U \subset M, q \in V$  e  $v_q \in T_qV$ , o vetor  $d\varphi_q v_q \in T_{\varphi(q)}M$  pode ser visto como um operador sobre o espaço das funções diferenciáveis em uma vizinhança de  $\varphi(q)$ . Se  $f$  é uma função suave em uma vizinhança de  $\varphi(q) \in \mathbb{R}^{m+k}$ , temos, então, pela regra da cadeia:

$$\begin{aligned} (d\varphi_q v_q) \bullet f &= df_{\varphi(q)} d\varphi_q v_q \\ &= d(f \circ \varphi)_q v_q \\ &= v_q \bullet (f \circ \varphi) \\ &= \sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i}(q) \end{aligned}$$

onde  $\hat{f} = (f \circ \varphi)$ .

Tal conta nos motiva considerar vetores em  $T_pM$  como derivações e  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right\}$  como base de  $T_pM$ , onde  $p = \varphi(q)$ .

**Definição 2.8.**

Seja  $M$  variedade e  $p \in M$ . Considere  $C^\infty(p)$  a álgebra dos germes de funções suaves em  $p^1$ . O **espaço tangente**  $T_pM$  é definido como o espaço das



## Continuação.

**derivações lineares** em  $p$ , i.e., o conjunto das aplicações  $v_p: C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$  tais que:

1.  $v_p \bullet (af + bg) = av_p \bullet f + bv_p \bullet g$  ( $\mathbb{R}$ -lineares);
2.  $v_p \bullet (fg) = (v_p \bullet f)g(p) + f(p)(v_p \bullet g)$  (regra de Leibniz).

para todos  $f, g \in C^\infty(p)$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Seja  $(U, \psi)$  um sistema de coordenadas onde  $\psi(\cdot) = (x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot))$  é o sistema de coordenadas da vizinhança  $U$  contendo  $p$ . Considere  $\hat{f} := f \circ \psi^{-1}$  a representação de  $f \in C^\infty(p)$  no sistema de coordenadas  $\psi$ . Chamaremos **vetores coordenados** às derivações lineares:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) \bullet f := \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i} \Big|_{\psi(p)}. \quad (2.2.2)$$

**Proposição 2.9.**

Seja  $M^m$  uma variedade e  $p \in M$ . Então  $T_p M$  é um espaço vetorial e  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right\}$  é uma base de  $T_p M$ . Em particular,  $\dim T_p M = \dim M = m$ .

*Demonstração.* Fica ao cargo do leitor mostrar que  $T_p M$  é um espaço vetorial.

Mostremos agora que o conjunto  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right\}$  é linearmente independente em  $T_p M$ . Ou seja, desejamos provar que se  $\sum_i^m c_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p = 0$ , então  $c_i = 0$  para todo  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Para tanto basta derivar cada uma das funções coordenadas  $x_j: U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Mais precisamente,

$$0 = \left( \sum_i^m c_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) \bullet x_j = \sum_i^m c_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \bullet x_j = \sum_i^m c_i \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_i}(p) = \sum_i^m c_i \delta_{ij} = c_j.$$

Verifiquemos, agora, que  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right\}$  gera  $T_p M$ . Seja  $v_p \in T_p M$  e defina  $v_i := v_p \bullet x_i$ . Desejamos provar que

$$z_p := v_p - \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p = 0. \quad (2.2.3)$$

<sup>1</sup>Dizemos que duas funções  $f$  e  $g$  tem o **mesmo germe** em  $p$  se  $p$  está no domínio das duas e se existe uma vizinhança de  $p$  (comum aos dois domínios) onde  $f$  e  $g$  coincidem.

Para tanto, aceitemos momentaneamente que existe uma vizinhança  $U$  de  $p$  e funções  $g_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq m$ , tal que

$$f(\cdot) = f(p) + \sum_i (x_i(\cdot) - q_i)g_i(\cdot). \quad (2.2.4)$$

Utilizando as propriedades que definem a derivação linear concluímos que

$$\begin{aligned} v_p \bullet f &= v_p \bullet f(p) + v_p \bullet \left( \sum_i (x_i(\cdot) - q_i)g_i(\cdot) \right) \\ &= 0 + \sum_i (v_p \bullet x_i(\cdot)) g_i(p) + \sum_i (x_i(p) - q_i)v_p \bullet g_i(\cdot) \\ &= \sum_i g_i(p)v_p \bullet x_i(\cdot) \\ &= \sum_i g_i(p)v_i; \end{aligned}$$

bem como

$$\begin{aligned} &\left( \sum_j v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) \bullet f \\ &= \sum_j v_j \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \bullet f(p) + \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \bullet \left( \sum_i (x_i(\cdot) - q_i)g_i(\cdot) \right) \right) \\ &= \sum_j v_j \left( 0 + \sum_i \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \bullet x_i(\cdot) \right) g_i(p) + \sum_i (x_i(p) - q_i) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \bullet g_i(\cdot) \right) \\ &= \sum_{ij} v_j g_i(p) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \bullet (x_i(\cdot)) \\ &= \sum_{ij} v_j g_i(p) \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial x_j}(p) \\ &= \sum_{ij} v_j g_i(p) \delta_{ij} \\ &= \sum_i v_i g_i(p) \end{aligned}$$

As duas equações acima e a arbitrariedade da escolha de  $f$  implicam (2.2.3).

Por fim, para verificar a equação 2.2.4, defina  $\hat{f}(x) = f \circ \psi^{-1}(x)$  e  $\alpha(t) = q + t(x - q)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ). Pelo Teorema Fundamental do Cálculo aplicado a  $\hat{f} \circ \alpha$ , temos

$$\begin{aligned} f(\cdot) - f(p) &= \hat{f}(x) - \hat{f}(q) \\ &= (\hat{f} \circ \alpha)(1) - (\hat{f} \circ \alpha)(0) \\ &= \int_0^1 (\hat{f} \circ \alpha)'(t) dt \\ &= \int_0^1 \langle \nabla \hat{f}(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^m \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i}(\alpha(t)) (x_i(\cdot) - q_i) dt \\ &= \sum_{i=1}^m (x_i(\cdot) - q_i) \int_0^1 \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i}(\alpha(t)) dt \end{aligned}$$

Definindo  $\hat{g}_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i}(\alpha(t)) dt$  e  $g_i(\cdot) = \hat{g}_i \circ \psi(\cdot)$  concluí-se a demonstração da equação (2.2.4).  $\square$

Antes de apresentar a definição de derivada de uma aplicação  $F : M \rightarrow N$ , no caso de 2 variedades gerais, vamos primeiro supor que elas são mergulhadas em espaços Euclidiano. Então pela regra da cadeia temos para  $f \in C^\infty(N)$

$$\begin{aligned} dF_p(v) \bullet f &= df_{F(p)} dF_p(v_p) \\ &= d(f \circ F)_p v_p \\ &= v_p \bullet (f \circ F) \end{aligned}$$

Esta conta motiva a definição geral.

### Definição 2.10.

Seja  $F : M \rightarrow N$  uma aplicação suave e  $p \in M$ . A derivada de  $F$  em  $p$  é a aplicação linear  $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ , tal que se  $v_p \in T_p M$ , então  $dF_p v_p$  é o vetor tangente a  $F(p)$  atendendo

$$dF_p(v_p) \bullet f = v_p \bullet (f \circ F)$$

para todo  $f \in C^\infty(F(p))$ .

Observe que, de forma análoga ao caso Euclidiano,

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p = d\psi_q^{-1}(e_i|_q), \quad (2.2.5)$$

onde  $q = \psi(p)$  e  $e_i|_q$  é o  $i$ -ésimo vetor canônico em  $T_qU = \mathbb{R}^m$ .

### Observação 2.11.

Vale a pena aqui fixar algumas notações que iremos usar ao longo do texto. Reservaremos  $D$  para derivadas de aplicações de espaço Euclidianos (como era usual em Cálculo Diferencial) e para a conexão Euclidiana enquanto  $d$  será reservado para diferenciação de aplicação entre variedades, e  $\mathfrak{d}$  para derivação exterior de formas.

A definição acima em particular implica que a regra da cadeia passa a valer para variedades.

### Proposição 2.12.

Sejam  $F : M^m \rightarrow N^n$  uma aplicação suave, e  $\psi_\alpha(\cdot) = (x_1(\cdot), \dots, x_m(\cdot))$  e  $\phi_\beta(\cdot) = (y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot))$  sistema de coordenadas de  $M$  e  $N$  em torno de  $p$  e  $F(p)$ , respectivamente. Verifique que a representação matricial de  $dF_p$  nas bases  $\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p \right\}_{i=1}^m$  e  $\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial y_j} \right|_p \right\}_{j=1}^n$  é  $D\widehat{F}(q)$  onde  $\widehat{F} = \phi_\beta \circ F \circ \psi_\alpha^{-1}$  e  $q = \psi_\alpha(p)$ .

*Demonstração.* Por um lado, a entrada  $(i, j)$  da representação matricial de  $dF_p$  nas bases  $\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p \right\}_{i=1}^m$  e  $\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial y_j} \right|_p \right\}_{j=1}^n$  é  $\left( dF_p \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p \right) \bullet y_i$ . Por outro lado, definindo  $\widehat{F}(\cdot) = (f_1(\cdot), \dots, f_n(\cdot))$  temos que a entrada  $(i, j)$  de  $D\widehat{F}(q)$  é  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(q)$ . Concluímos então:

$$\begin{aligned} \left( dF_p \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p \right) \bullet y_i &= \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p \bullet (y_i \circ F) \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p (y_i \circ F \circ \psi_\alpha^{-1})(q) \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p (\pi_i \circ \phi_\beta \circ F \circ \psi_\alpha^{-1})(q) \\ &= \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(q), \end{aligned}$$

onde  $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é a projeção canônica da  $i$ -ésima componente. Ou seja,  $\pi_i(y_1, \dots, y_n) = y_i$ .  $\square$

A definição também permite inferir a definição de vetor tangente a uma curva. De fato, considerando  $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  como aplicação entre variedades, temos

$$\alpha'(0) \bullet f = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)|_{t=0}.$$

Em particular, num sistema de coordenadas  $\psi$ , escrevendo

$$\psi \circ \alpha(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t)),$$

temos

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^n u'_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \in T_p M.$$

Com as definições acima os conceitos de imersão, submersão e difeomorfismo vistos nos Capítulo 1 podem ser facilmente generalizados para variedades.

Neste contexto mais geral, uma imersão  $F: M \rightarrow N$  é chamada um **mergulho** se  $F: M \rightarrow F(M) \subset N$  é um homeomorfismo, considerando  $F(M)$  com a topologia induzida.

Além disso, considere variedades  $P$  e  $N$  com  $P \subset N$ . Diremos que  $P$  uma **subvariedade imersa** de  $N$  se a inclusão  $i: P \hookrightarrow N$  é uma imersão. Além disto, se  $i: P \hookrightarrow N$  for um mergulho, então  $P$  será uma **variedade mergulhada**. Convidamos o leitor ou leitora a comparar este conceito de variedade mergulhada com o conceito apresentado no Capítulo 1.

Terminamos esta seção recordando o teorema do posto, que generaliza os teoremas de submersão e imersão.

### Definição 2.13.

Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis e  $F: M \rightarrow N$  uma aplicação suave. Definimos o *posto* de  $F$  em  $p \in M$  como o posto de  $dF_p$ <sup>2</sup>.

### Exemplo 2.14.

Considere uma imersão injetora  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Então a aplicação  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida como  $F(x_1, x_2, x_3) = \varphi(x)$  é uma aplicação cuja derivada  $DF$  tem posto constante. Note que  $\{F^{-1}(p)\}$  são as fibras da submersão canônica  $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\pi(x) = (x_1, x_2)$ , e que a imagem  $F(U)$  é uma variedade mergulhada (para  $U$  pequeno).

<sup>2</sup>Lembre que o posto de uma aplicação linear é a dimensão da sua imagem.

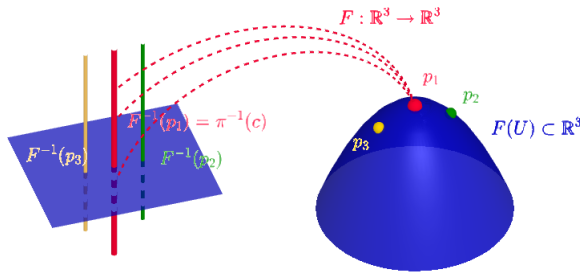


Figura 2.4: Exemplo 2.14 ilustrando o teorema do posto, vide Teorema 2.15

### Teorema 2.15.

Seja  $F : M^{m+n} \rightarrow N^{m+l}$  aplicação suave entre variedades. Suponha que  $dF_x$  tem posto  $m$  para todo  $x \in M$ . Então para todo  $p \in M$  existe uma vizinhança  $U_0$  de  $p$  tal que:

- (a)  $L = F(U_0)$  é variedade mergulhada,
- (b)  $\{F^{-1}(c)\}_{c \in L} \cap U_0$  são fibras de uma submersão.

*Demonstração.* Compondo a aplicação  $F$  com sistemas de coordenadas de  $M$  e  $N$  podemos supor que  $F : U \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^{m+l}$ . Desejamos demonstrar que existem vizinhanças  $U_1$  de  $F(p)$  e difeomorfismos  $\psi : V_0 \rightarrow U_0$  e  $\varphi : U_1 \rightarrow V_1$  tais que

$$\varphi \circ F \circ \psi(x, y) = (x, 0)$$

Podemos supor, após aplicar movimentos rígidos que  $\mathbb{R}^m \times \{0\} = DF_p(\mathbb{R}^{m+n})$ . Observe que  $D(\pi_1 \circ F)_x$  é sobrejetor para  $x$  próximo a  $p$ , onde  $\pi_1(x, y) = x$ . Concluimos, assim, pelo teorema de submersão que existe um difeomorfismo  $\psi$  tal que  $\pi_1 \circ F \circ \psi(x, y) = x$ . Consequentemente  $F \circ \psi(x, y) = (x, H(x, y))$

Observe que:

$$D(F \circ \psi)_p = \begin{bmatrix} Id & 0 \\ D_x H & D_y H \end{bmatrix}$$

Isto e o fato que posto  $D(F \circ \psi) = \text{posto } DF = m$  nos permite concluir que  $D_y H = 0$  ou seja  $H(x, y)$  é independente de  $y$ . Defina  $\hat{H}(x) = H(x, y)$ . Assim  $(x, \hat{H}(x)) = F \circ \psi(x, y) = F \circ \psi(x, 0)$ . Logo  $F \circ \psi(x, 0)$  é um gráfico o que nos permite concluir, pelo teorema da imersão (apos reduzir as vizinhanças se necessário) que existe um difeomorfismo  $\varphi$  tal que  $(x, 0) = \varphi \circ F \circ \psi(x, 0) = \varphi \circ F \circ \psi(x, y)$  o que termina a demonstração.  $\square$

**Exercício 2.16.**

Sejam  $H$  e  $K$  dois subgrupos fechados de  $\mathbb{O}(n)$ . Aceite o fato que todo grupo fechado se torna variedade mergulhada. Seja  $\phi : K \rightarrow H$  um homomorfismo de grupos que é de classe  $C^\infty$ . Prove que  $d\phi$  tem posto constante.

**2.3. Campos e fibrados vetoriais**

Recordemos que um campo  $\vec{F}$  suave em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$  era uma aplicação suave  $\vec{F} : U \rightarrow U \times \mathbb{R}^m$  definida como  $\vec{F}(x) = (x, F(x))$ , onde  $F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$  era uma aplicação suave  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Ou seja uma aplicação do nosso espaço de configurações  $U$  para o nosso espaço de fases  $U \times \mathbb{R}^m$  tal que  $\pi \circ \vec{F}(x) = x$  onde  $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  era a projeção canônica  $\pi(x, v) = x$ . Visto que nosso espaço de fases era um produto trivial era possível escrever o campo  $\vec{F}$  em termos dos campos canônicos  $\vec{e}_i(x) = (x, e_i)$  da seguinte forma  $\vec{F} = \sum_i f_i \vec{e}_i$ , (vide Definição 1.35 e Figura 2.5).

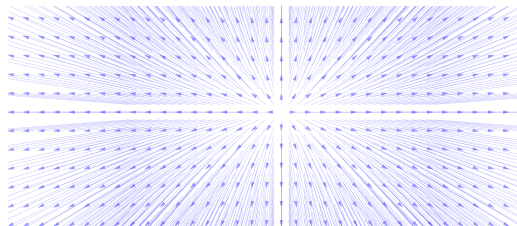


Figura 2.5: Campo  $\vec{F} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{3}{2} x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$

Agora inspirados pela discussão da seção anterior, também podemos identificar os campos canônicos com as derivações canônicas e assim escrever  $\vec{F} = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ .

Desejamos agora generalizar a discussão acima para variedades e assim precisamos discutir qual objeto desempenhará o papel do espaço de fases.

**Definição 2.17. Fibrado vetorial**

Sejam  $E$  e  $M$  variedades,  $\pi : E \rightarrow M$  uma submersão e  $G = GL(n)$  os autormorfismos de  $\mathbb{R}^n$ . Suponha que existe uma cobertura  $\{U_\alpha\}$  de  $M$  e

## Continuação.

difeomorfismos  $\varphi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$  tais que:

- (a)  $\pi \circ \varphi_\alpha(p, v) = p$  para todo  $(p, v) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^n$
- (b) se  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  então  $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha(p, v) = (p, \theta_{\beta, \alpha}(p)v)$  onde  $\theta_{\alpha, \beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$  é suave
- (c)  $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$  é máximo em relação aos itens acima.

A tripla  $(E, M, \pi)$  (por vezes também denotada por  $\mathbb{R}^n \rightarrow E \rightarrow M$ ) é chamada **fibrado vetorial de posto  $n$**  e projeção  $\pi$ . Para cada  $p \in M$  o espaço  $E_p := \pi^{-1}(p)$  é chamado de fibra sobre  $p$  e herda naturalmente uma estrutura de espaço vetorial.

## Exemplo 2.18.

- (a) O **fibrado tangente** de uma variedade  $M^m$  é definido como  $TM = \cup_{p \in M} T_p M$  onde a projeção  $\pi : TM \rightarrow M$  é a projeção canónica  $\pi(v_p) = p$ .
- (b) O **fibrado cotangente** de uma variedade  $M^m$  é definido como  $TM^* = \cup_{p \in M} T_p M^*$  onde  $T_p M^*$  é o espaço dual de  $T_p M$ .
- (c) o **fibrado normal** de uma subvariedade  $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$  é definido como  $\nu(M) = \cup_{p \in M} \nu_p(M)$ , onde  $\nu_p M$  é espaço normal a  $T_p M$ .

## Definição 2.19.

Dado um fibrado vetorial  $(E, M, \pi)$  uma **seção** é uma aplicação  $\xi : M \rightarrow E$  tal que  $\pi \circ \xi = id$ . Em particular, um **campo vetorial**  $\vec{F}$  é uma seção de  $TM$ . Denotaremos o conjunto (modulo) de campos vetoriais de  $M$  por  $\mathfrak{X}(M)$ .

De forma análoga, uma 1-forma diferencial de uma variedade  $M^m$  é uma seção de  $TM^*$  e se  $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$  for variedade mergulhada então um **campo normal** a  $M$  é uma seção de  $\nu(M)$ .

Dado dois fibrados vetoriais  $(E, M, \pi)$  e  $(\tilde{E}, \tilde{M}, \tilde{\pi})$  um **homomorfismo**  $F : E \rightarrow \tilde{E}$  é uma aplicação suave que induz uma aplicação suave  $f : M \rightarrow \tilde{M}$  que comuta com as projeções e que induz um homomorfismo linear entre  $E_p$  e  $E_{f(p)}$  para todo  $p$ .



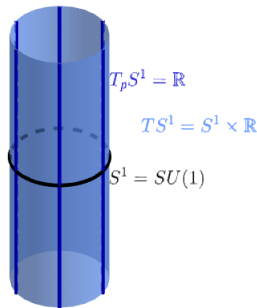


Figura 2.6: Fibrado tangente de  $S^1 = SU(1)$

Usando campos invariantes à esquerda (a ser definido no próximo capítulo) não é difícil verificar que o fibrado tangente  $TG$  de um grupo de Lie é de fato isomorfo a  $G \times T_e G$ , vide Figura 2.6. Isto porém não costuma acontecer com uma variedade geralmente.

### Exercício 2.20.

Prove que o fibrado tangente da esfera  $\mathbb{S}^2$  não é trivial, ou seja  $T(\mathbb{S}^2)$  não é isomorfo a  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$

## 2.4. Fluxos e colchete de campos

Nosso objetivo aqui é recordar alguns resultados de equações diferenciais, dentre eles o conceito de fluxo e suavidade das condições iniciais, estudar o conceito de *push-forward* e *pull back* de campos, bem como propriedades do colchete de campos (o qual mede a grosso modo a não comutatividade dos campos)

### Definição 2.21.

Continuação.

Dado um aberto  $U$  de uma variedade  $M$  e  $\vec{F} \in \mathfrak{X}(U)$ . Uma curva  $\alpha : I \rightarrow U \subset M$  é chamada **curva integral** de  $F$  se  $\alpha'(t) = \vec{F}(\alpha(t))$ .

**Teorema 2.22.**

Dado  $\vec{F} \in \mathfrak{X}(U)$  e  $p \in U$  existe uma única curva integral  $\alpha_p : I_p \rightarrow U$  de  $\vec{F}$  onde  $I_p$  é o maior intervalo contendo 0 e  $\alpha_p(0) = p$ .

**Definição 2.23. Fluxo**

Seja  $U_F = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times U, t \in I_x\}$ . Definimos o **fluxo** de  $\vec{F}$  como sendo a aplicação  $\varphi^F : U_F \rightarrow U$  definida por  $\varphi^F(t, x) = \alpha_x(t)$ . Além disto, para  $t$  fixo, denotamos  $\varphi_t^F(x) = \varphi^F(t, x)$ .

Por vezes na teoria Geométrica de Controle, e quando não causar confusão, denotamos o fluxo como  $e^{tF}(x)$ , justamente para destacar propriedades relevantes do fluxo.

**Teorema 2.24.**

Seja  $\vec{F} \in \mathfrak{X}(U)$  então  $U_F$  é um conjunto aberto de  $\mathbb{R} \times U$  contendo  $\{0\} \times U$  e  $\varphi^F$  é aplicação suave. Além disto:

- (a)  $\varphi_t^F$  é um difeomorfismo,
- (b)  $\varphi_{t+s}^F = \varphi_t^F \circ \varphi_s^F$  quando eles estiverem bem definidos.

Chamaremos um campo  $\vec{F} \in \mathfrak{X}(M)$  (ou seu fluxo) de **completo** se  $U_F = \mathbb{R} \times M$ . Exemplo de campos completos são campos definido em variedades compactas. Outro exemplo são os campos lineares em espaços Euclidianos.

**Observação 2.25.**

Pelo item (b),  $\varphi_{-t}$  existe e também é um difeomorfismo, sendo a inversa de  $\varphi_t$ . Quando o campo é completo,  $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  é chamado grupo a um parâmetro de difeomorfismos por ter estrutura de grupo.

**Exemplo 2.26. Fluxo de campo linear**

Dado  $A \in M^{m \times m}(\mathbb{R})$  a E.D.O

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= A\alpha(t) \\ \alpha(0) &= p,\end{aligned}$$

tem como solução  $\alpha(t) = e^{tA}p$  onde  $e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$ . Assim sendo, o fluxo de um campo linear  $F(x) = Ax$  é dado por  $\varphi(t, x) = e^{tA}(x)$ .

Vale também observar que a aplicação

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\rightarrow GL(n, \mathbb{R}) \\ t &\mapsto e^{tA}\end{aligned}$$

é um homomorfismo de grupos, ou seja,

$$e^{tA}e^{sA} = e^{(t+s)A},$$

que é a propriedade (b) do teorema anterior. Note, porém, que  $e^A e^B = e^B e^A$  se e somente se  $[A, B] = AB - BA = 0$ .

Vamos agora considerar um campo linear muito especial, os assim chamados **campos de Killing** em  $\mathbb{R}^3$ . Tais campos são caracterizados como sendo campos cujos fluxos são isometrias.

**Exemplo 2.27.**

Observemos primeiro a seguinte propriedade algébrica:

$$\text{Dado } \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3, \text{ defina } A_\xi \text{ como a matriz } \begin{pmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

é fácil verificar que  $A_\xi(v) = \xi \times v$ , para todo  $v \in \mathbb{R}^3$ .

Vamos definir o nosso campo de Killing como  $\vec{\xi}(p) = A_\xi p \in T_p \mathbb{R}^3$ . Pelo

## Continuação.

exemplo 2.26, o fluxo de  $\vec{\xi}'$  é dado por  $e^{tA_\xi}$ . Note que  $e^{tA_\xi} \in \mathbb{SO}(3)$ . De fato,

$$\begin{aligned} (e^{sA_\xi})(e^{sA_\xi})^t &= (e^{sA_\xi})(e^{s(A_\xi)^t}) \\ &= (e^{sA_\xi})(e^{-s(A_\xi)}) \\ &= (e^{sA_\xi - s(A_\xi)}) \\ &= e^0 = I. \end{aligned}$$

o que garante que  $e^{tA_\xi} \in \mathbb{O}(3)$  e, visto que  $e^{0A_\xi} = Id$ , concluímos que  $e^{tA_\xi} \in \mathbb{SO}(3)$ .

Desejamos agora verificar que o fluxo  $e^{tA_\xi}$  é uma rotação em torno do eixo  $\xi$ , com velocidade angular  $\|\xi\|$ .

Primeiro observe que como  $A_\xi(\xi) = \xi \times \xi = 0$ , então  $e^{tA_\xi}\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (tA_\xi)^n \xi = \xi$ , o que mostra que esta isometria fixa o eixo  $\xi$ .

Agora considere uma base ortonormal  $\{q_1, q_2, q_3\}$  com mesma orientação da base canônica  $\{e_i\}$  e tal que  $q_3 = \frac{\xi}{\|\xi\|}$ . Definamos o **fluxo de rotação em torno de  $\xi$  com velocidade angular  $\|\xi\|$**  (escrito na base  $\{q_i\}$ ) como:

$$\varphi_t = \begin{bmatrix} \cos(\|\xi\|t) & -\sin(\|\xi\|t) & 0 \\ \sin(\|\xi\|t) & \cos(\|\xi\|t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que de fato  $t \rightarrow \varphi_t$  é um fluxo (i.e.,  $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ ) e induz um campo  $\vec{Y}$ , i.e.,  $\frac{d}{dt}\varphi_t = \vec{Y} \circ \varphi_t$ . Utilizando o fato que  $e^{tA_\xi}(\xi) = \xi$  é fácil verificar que  $\vec{\xi}(p)$  e  $\vec{Y}(p)$  tem mesma direção e sentido. Por fim note que se de um lado  $\|\vec{Y}(p)\| = \|\xi\|\sqrt{p_1^2 + p_2^2}$  de outro temos:

$$\begin{aligned} \|\vec{\xi}(p)\| &= \|\xi \times p\| \\ &= \|\xi\|\|p\|\sin(\theta) \\ &= \|\xi\|\sqrt{p_1^2 + p_2^2} \end{aligned}$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre  $p$  e  $\xi$ . Concluímos então que  $\vec{\xi}(p) = \vec{Y}(p)$ ,  $\forall p$  e assim por unicidade de E.D.O temos,  $e^{tA_\xi} = \varphi_t$ , como queríamos verificar.

No próximo exercício veremos o operador **rotacional**  $\text{Rot} : \mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathfrak{X}(U)$

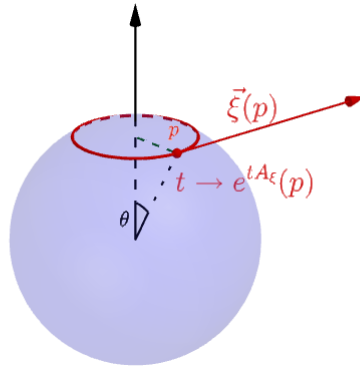


Figura 2.7: Ilustra Exemplo 2.27.

para um aberto  $U \subset \mathbb{R}^3$  e daremos sua interpretação para campo linear.

### Exercício 2.28.

Utilizaremos neste exercício a notação  $\mathbf{i} = \vec{e}_1$ ,  $\mathbf{j} = \vec{e}_2$  e  $\mathbf{k} = \vec{e}_3$  (a qual é inspirada nos quaternios). Seja  $\vec{F} = f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k}$  campo suave em aberto  $U \subset \mathbb{R}^3$  definamos:

$$\begin{aligned} \text{Rot } \vec{F} &= \nabla \times F \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{i} \\ &\quad - \left( \frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \right) \mathbf{j} \\ &\quad + \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

Dado campo linear  $\vec{\xi}(v) := A_\xi(v) = \xi \times v$  Verifique que:

$$\text{Rot } \vec{\xi} = 2\vec{\xi}$$

## Continuação.

concluindo em particular que  $\|\text{Rot } \vec{F}\|$  é duas vezes a velocidade angular da rotação  $e^{tA_\xi}$

**Observação 2.29.**

Dado um campo  $\vec{F} = f_1\vec{e}_1 + f_2\vec{e}_2$  em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$  podemos definir um operador  $\text{Rot } \mathfrak{X}(U) \rightarrow C^\infty(U)$  como  $\text{Rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)$ . Em particular se extendemos o campo  $\vec{F}$  para o campo  $\tilde{F}$  definindo  $f_3 = 0$  concluímos:  $\text{Rot } \tilde{F} = (\text{Rot } \vec{F})\vec{e}_3$

A seguir vemos um resultado importante, que afirma que se o campo for diferente de zero em uma vizinhança  $U$ , reduzindo  $U$  se necessário, as curvas integrais são difeomorfismos a uma folheação canônica (com folhas de dimensão 1). Ou seja, podemos “desintortar”, *retificar* localmente as linhas integrais.

**Exercício 2.30.**

Seja  $\vec{F}(x_1, x_2) = f_1(x_1, x_2)\vec{e}_1 + f_2(x_1, x_2)\vec{e}_2$ , onde  $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são suaves. Suponha que para  $\epsilon_0 > 0$  temos que  $\vec{F}(\epsilon_0, 0) = a\vec{e}_1$  onde  $a \neq 0$ . Seja  $\phi_t$  o fluxo de  $\vec{F}$ . Verifique que existe uma vizinhança  $U_0$  de  $(0, 0)$  tal que a aplicação  $\hat{\phi} : U_0 \rightarrow U_1$ , definida por  $\hat{\phi}(t, x_2) = \phi_t(\epsilon_0, x_2)$  é um difeomorfismo.

Não é difícil verificar que o exercício acima pode ser generalizado para campos não nulos em abertos de  $\mathbb{R}^m$  (deixamos a cargo do leitor esta verificação). A aplicação  $\hat{\phi}$  costuma ser chamada **retificação do fluxo**.

Vejam agora um novo operador que (diferente do operador  $\text{Rot}$ ) pode ser definido para toda dimensão.

**Definição 2.31.**

Considere um campo  $\vec{F} = \sum_{i=1}^m f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  em uma vizinhança  $U$  em  $\mathbb{R}^m$ . Defi-

## Continuação.

nimos o **divergente** do campo  $\vec{F}$  como:

$$\begin{aligned}\operatorname{Div} F &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^m \langle D_{\vec{e}_i} \vec{F}, \vec{e}_i \rangle\end{aligned}$$

O próximo exercício ilustra a fundamental interpretação do que é o divergente de um campo (e novamente pode ser generalizado para dimensões maiores).

**Exercício 2.32.**

Considere o campo linear  $\vec{F}$  em  $\mathbb{R}^2$ , definido como

$$\vec{F}(x) = \lambda_1 x_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 x_2 \vec{e}_2,$$

i.e.,

$$F(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

a) Esboce o fluxo para os seguintes casos:

- (i)  $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ ;
- (ii)  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ ;
- (iii)  $\lambda_2 > 0 > \lambda_1$ ;

b) Seja  $\hat{\phi}$  a retificação do fluxo, vide Problema 2.30. Definindo  $A(t, s) = \det(D \hat{\phi}(t, s))$  como o elemento de área, verifique que

$$\operatorname{Div} \vec{F}(\epsilon, 0) = \frac{d}{dt} [\ln A(t, 0)] \Big|_{t=0}.$$

onde  $\operatorname{Div}(\vec{F}) = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$  para  $\vec{F} = \sum_i f_i e_i \in \mathfrak{X}(\Omega)$

**Exercício 2.33.**

Seja  $C$  uma matriz  $3 \times 3$  real.

## Continuação.

- (a) Verifique que existem matrizes  $S$  simétrica e  $A$  anti-simétrica tal que  $C = S + A$  e que tal decomposição é única.
- (b) Sejam  $\vec{C}$ ,  $\vec{S}$  e  $\vec{A}$  campos lineares associados a  $C$ ,  $S$  e  $A$ . Verifique:

$$\begin{aligned}\text{Rot } \vec{C} &= \text{Rot } \vec{A} \\ \text{div } \vec{C} &= \text{div } \vec{S}.\end{aligned}$$

Vamos agora definir o colchete em termos das derivações lineares.

**Definição 2.34. Colchete**

Dados uma variedade  $M$  e dois campos  $\vec{X}, \vec{Y} \in \mathfrak{X}(M)$ , definimos o campo  $[\vec{X}, \vec{Y}] \in \mathfrak{X}(M)$  como:

$$[\vec{X}, \vec{Y}] \bullet f := \vec{X} \bullet (\vec{Y} \bullet f) - \vec{Y} \bullet (\vec{X} \bullet f)$$

para toda função suave  $f$  sobre  $M$ .

A seguir vamos verificar (no item (a)) que a definição geral dada acima implica a definição no espaço euclidiano apresentada (rapidamente) no capítulo anterior.

**Exercício 2.35.**

Dado um aberto  $\Omega$  em  $\mathbb{R}^n$ , considere os campos  $\vec{F}, \vec{G} \in \mathfrak{X}(\Omega)$  definidos como  $\vec{F} = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  e  $\vec{G} = \sum_j g_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ .

- (a) Prove que  $[\vec{F}, \vec{G}] = \nabla_{\vec{F}} \vec{G} - \nabla_{\vec{G}} \vec{F}$ , onde  $\nabla_X \vec{F}_p := (p, DF(p)X)$ .
- (b) Se  $\vec{F}$  e  $\vec{G}$  são campos lineares (i.e.,  $F = Ax$  e  $G = Bx$ ), então  $[\vec{F}, \vec{G}] = \vec{H}$ , onde  $\vec{H}$  é o campo linear dado por  $H(x) = -(AB - BA)x$ .

Dado um difeomorfismo  $\varphi : M \rightarrow N$  entre duas variedades de mesma dimensão, podemos definir uma aplicação  $\varphi_* : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(N)$  entre módulos de campos como:  $\vec{Y} = \varphi_* \vec{X}$  onde  $\vec{Y}(q) = d\varphi_{\varphi^{-1}(q)} \vec{X}(\varphi^{-1}(q))$ . Quando tivermos também que  $M = N$ , denotamos  $Ad(\varphi) := (\varphi^{-1})_*$ .

Por vezes, embora  $\varphi : M \rightarrow N$  não seja um difeomorfismo, é ainda possível relacionar certos campos em  $N$  com certos campos em  $M$ . De fato um campo  $\vec{Y} \in$



$\mathfrak{X}(N)$  é chamado  $\varphi$ -relacionado a um campo  $\vec{X} \in \mathfrak{X}(M)$  se

$$\vec{Y} \circ \varphi(\cdot) = d\varphi \vec{X}(\cdot).$$

Por exemplo, considere a submersão  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida como  $\varphi(x) = (x_1, x_2)$ . Para os campos

$$\vec{X} = f_1(x_1, x_2)\vec{e}_1 + f_2(x_1, x_2)\vec{e}_2 + f_3(x)\vec{e}_3,$$

$$\vec{Y} = f_1(x_1, x_2)\vec{e}_1 + f_2(x_1, x_2)\vec{e}_2$$

temos que  $\vec{Y} \circ \varphi(\cdot) = d\varphi \vec{X}(\cdot)$ , i.e.,  $\vec{Y}$  é  $\varphi$  relacionado a  $\vec{X}$ .

Observe que ser  $\varphi$  relacionado equivale a

$$(\vec{Y} \bullet h) \circ \varphi = \vec{X} \bullet (h \circ \varphi), \forall h \in C^\infty(N).$$

**Lema 2.36.**

Considere uma aplicação suave  $\varphi : M \rightarrow N$  e campos  $\vec{X}_i \in \mathfrak{X}(M)$  e  $\vec{Y}_i \in \mathfrak{X}(N)$  (para  $i = 1, 2$ ) tal que  $\vec{Y}_i$  é  $\varphi$ -relacionado a  $\vec{X}_i$ , ou seja  $\vec{Y}_i \circ \varphi(\cdot) = d\varphi \vec{X}_i(\cdot)$ . Então  $[\vec{Y}_1, \vec{Y}_2]$  é  $\varphi$  relacionado a  $[\vec{X}_1, \vec{X}_2]$  ou seja  $[\vec{Y}_1, \vec{Y}_2] \circ \varphi = d\varphi([\vec{X}_1, \vec{X}_2])$ .

*Demonstração.* Precisamos provar que  $([\vec{Y}_1, \vec{Y}_2] \bullet h) \circ \varphi = [\vec{X}_1, \vec{X}_2] \bullet (h \circ \varphi), \forall h \in C^\infty(N)$ . Temos

$$\begin{aligned} ([\vec{Y}_1, \vec{Y}_2] \bullet h) \circ \varphi &= (\vec{Y}_1 \bullet (\vec{Y}_2 \bullet h)) \circ \varphi - (\vec{Y}_2 \bullet (\vec{Y}_1 \bullet h)) \circ \varphi \\ &= \vec{X}_1 \bullet ((\vec{Y}_2 \bullet h) \circ \varphi) - \vec{X}_2 \bullet ((\vec{Y}_1 \bullet h) \circ \varphi) \\ &= \vec{X}_1 \bullet (\vec{X}_2 \bullet (h \circ \varphi)) - \vec{X}_2 \bullet (\vec{X}_1 \bullet (h \circ \varphi)) \\ &= [\vec{X}_1, \vec{X}_2] \bullet (h \circ \varphi) \end{aligned} \quad \square$$

**Exercício 2.37.**

Sejam  $M, N$  e  $K$  variedades, e  $\varphi : M \rightarrow N$  e  $\phi : N \rightarrow K$  difeomorfismos. Verifique que  $(\varphi \circ \phi)_* = \varphi_* \circ \phi_*$ .

**Exercício 2.38.**

Sejam  $\vec{X}$  e  $\vec{Y}$  campos lineares em  $\mathbb{R}^m$ .

- (a) Verifique que  $\text{Ad}(e^{tX})\vec{Y} = e^{-tX}\vec{Y}e^{tx}$

## Continuação.

$$(b) \text{ Conclua que } [\vec{X}, \vec{Y}] = \left. \frac{d}{dt} \left( \text{Ad}(e^{tX})\vec{Y} \right) \right|_{t=0}.$$

O item (b) do exercício acima pode ser generalizado para campos suaves em geral.

**Proposição 2.39.**

Sejam  $\vec{X}$  e  $\vec{Y}$  campos suaves em variedade  $M$ . Então:

$$[\vec{X}, \vec{Y}] = \left. \frac{d}{dt} \left( \text{Ad}(e^{tX})\vec{Y} \right) \right|_{t=0}. \quad (2.4.1)$$

*Demonstração.* Como os dois termos da expressão acima são termos contínuos bastará prova-la para ponto  $p$  (e assim vizinhança de  $p$ ) onde  $\vec{X}(p) \neq 0$ . A estratégia da prova é utilizar a retificação do fluxo de  $\vec{X}$  para reduzir ao caso em que um dos campos é  $\frac{\partial}{\partial x_1}$ , e neste caso a conta será mais simples. Considere então  $\varphi$  a retificação do fluxo  $e^{tX}$  e  $\psi = \varphi^{-1}$ . É possível verificar que

$$\varphi_* \frac{\partial}{\partial x_1} = \vec{X}. \quad (2.4.2)$$

Seja  $\vec{W} = \sum_i w_i \frac{\partial}{\partial x_i} := \psi_* \vec{Y}$ . Segue da definição em coordenadas que:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x_1}, \vec{W} \right] = \sum_i \frac{\partial w_i}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_i} = \left. \frac{d}{dt} \left( \text{Ad}(e^{t \frac{\partial}{\partial x_1}}) \vec{W} \right) \right|_{t=0}. \quad (2.4.3)$$

Precisamos agora observar que o Exercício 2.37 implica:

$$\text{Ad}(\psi e^{tX} \psi^{-1}) = \psi_* \text{Ad}(e^{tX}) \psi_*^{-1}. \quad (2.4.4)$$

Também notemos que (pela definição de  $\psi_*$ ), se  $\lim_{t \rightarrow 0} \vec{Z}_t(x) = \vec{Z}(x) \forall x$  então:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \psi_* \vec{Z}_t(y) = \psi_* \vec{Z}(y). \quad (2.4.5)$$

Finalmente podemos concluir que:

$$\begin{aligned}
 \psi_*[\vec{X}, \vec{Y}] &= [\psi_*\vec{X}, \psi_*\vec{Y}] \\
 &\stackrel{(2.4.2)}{=} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1}, \vec{W} \right] \\
 &\stackrel{(2.4.3)}{=} \frac{d}{dt} \left( \text{Ad}(e^{\psi_* t \vec{X}}) \psi_* \vec{Y} \right) \Big|_{t=0} \\
 &= \frac{d}{dt} \left( \text{Ad}(\psi e^{tX} \psi^{-1}) \psi_* \vec{Y} \right) \Big|_{t=0} \\
 &\stackrel{(2.4.4)}{=} \frac{d}{dt} \left( \psi_* \text{Ad}(e^{tX}) \psi_*^{-1} \psi_* \vec{Y} \right) \Big|_{t=0} \\
 &\stackrel{(2.4.5)}{=} \psi_* \frac{d}{dt} \left( \text{Ad}(e^{tX}) \vec{Y} \right) \Big|_{t=0}
 \end{aligned}$$

Assim  $\psi_*[\vec{X}, \vec{Y}] = \psi_* \frac{d}{dt} \left( \text{Ad}(e^{tX}) \vec{Y} \right) \Big|_{t=0}$  e consequentemente provamos Eq. (2.4.1).  $\square$

Interpretações de colchete de campos são apresentadas nos resultados a seguir.

**Lema 2.40.**

Sejam  $\vec{X}$  e  $\vec{Y}$  campos de uma variedade,  $e^{tX}$  e  $e^{sY}$  seus respectivos fluxos. Então as afirmações são equivalentes:

- (a)  $e^{tX} \circ e^{sY} = e^{sY} \circ e^{tX}$ .
- (b)  $[\vec{X}, \vec{Y}] = 0$

*Demonstração.* A demonstração a seguir está escrita no formato geral, mas para maior comodidade, o(a) leitor(a) pode considerar o caso linear para criar maior intuição.

Suponha (a), i.e.,  $e^{sY} = e^{-tX} \circ e^{sY} \circ e^{tX}$ . Pela Proposição 2.39

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} e^{sY} \Big|_{s=t=0} \\
 &= \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} e^{-tX} \circ e^{sY} \circ e^{tX} \Big|_{s=t=0} \\
 &= \frac{d}{dt} \text{Ad}(e^{tX}) Y \Big|_{t=0} \\
 &= [\vec{X}, \vec{Y}].
 \end{aligned}$$

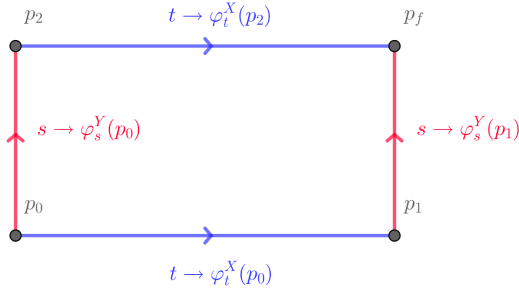


Figura 2.8: Ilustra Lema 2.40.

Suponha (b), i.e.,  $[\vec{X}, \vec{Y}] = 0$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{Ad}(e^{tX})Y|_{t=t_0} &= \text{Ad}(e^{t_0X}) \frac{d}{dt} \text{Ad}(e^{tX})Y|_{t=0} \\ &= \text{Ad}(e^{t_0X})[X, Y] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Assim  $\text{Ad}(e^{tX})Y = Y$  e conseqüentemente seus fluxos são iguais, i.e.,  $e^{sY} = e^{-tX} \circ e^{sY} \circ e^{tX}$ .  $\square$

Cabe destacarmos a seguir a relação entre  $\text{ad}(\vec{X})(\cdot) := [\vec{X}, \cdot]$  e  $\text{Ad}(e^{tX})$  utilizada na demonstração da proposição acima.

### Observação 2.41.

Seja  $\mathbb{V} = \mathfrak{X}(M)$  o espaço vetorial dos campos em  $M$ . Note que  $t \rightarrow \text{Ad}(e^{tX})$  é um fluxo em  $\mathbb{V}$ , ou seja  $\text{Ad}(e^{sX})\text{Ad}(e^{tX}) = \text{Ad}(e^{(s+t)X})$ . Derivando temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{Ad}(e^{tX})Y|_{t=t_0} &= \text{Ad}(e^{t_0X})[X, Y] \\ &= [\text{Ad}(e^{t_0X})X, \text{Ad}(e^{t_0X})Y] \\ &= [\vec{X}, \text{Ad}(e^{t_0X})Y] \\ &= \text{ad}(\vec{X}) \circ \text{Ad}(e^{t_0X})Y \end{aligned}$$

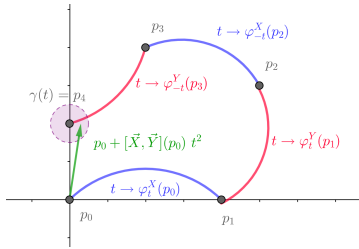


Figura 2.9: ilustra o Exercício 2.42

**Continuação.**

i.e.,  $\text{ad}(\vec{X})(\cdot)$  é o campo vetorial em  $\mathbb{V}$  associado ao fluxo  $t \rightarrow \text{Ad}(e^{tx})$  ou seja:

$$e^{t\text{ad}(\vec{X})} = \text{Ad}(e^{tx}).$$

**Exercício 2.42.**

Sejam  $\vec{X}$  e  $\vec{Y}$  campos lineares i.e.,  $X(p) = Ap$ ,  $Y(p) = Bp$ ,  $\forall p \in \mathbb{R}^m$  e  $e^{tA} = \varphi_t^X$  e  $e^{tB} = \varphi_t^Y$  seus fluxos. Dado  $p_0 \in \mathbb{R}^m$  defina a curva  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  como  $\gamma(t) = \varphi_{-t}^Y \circ \varphi_{-t}^X \circ \varphi_t^Y \circ \varphi_t^X(p_0)$ . Verifique (via expansão de Taylor) que:

$$\gamma(t) = p_0 + [\vec{X}, \vec{Y}](p_0)t^2 + R(t).$$

onde  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(t)}{t^2} = 0$

**2.5. Teorema de Frobenius**

Dado duas variedades  $M^{m+k}$  e  $B^k$ , e uma submersão  $\pi : M \rightarrow B$  temos uma partição do espaço por subvariedades  $\mathcal{F} = \{\pi^{-1}(b)\}_{b \in B}$ . Em particular os espaços tangentes  $T\pi^{-1}(b) = \mathcal{H}$  tem a interessante propriedade de que os colchetes de campos tangentes a  $\mathcal{H}$  continua sendo campos tangentes a  $\mathcal{H}$ , vide Exercício 2.48. Veremos a seguir nesta seção a recíproca deste resultado, em particular generalizar partições dadas por submersões.

### 2.5.1. Definições e resultado principal

#### Definição 2.43.

Uma  $m$ -distribuição  $\mathcal{H}$  em  $M^{m+k}$  é uma aplicação que associa a cada  $p \in M$  um  $m$ -subespaço  $\mathcal{H}(p) \subset T_p M$  (i.e, é uma seção da  $m$  Grassmaniana). Ela é suave se para todo ponto  $p_0 \in M$  existe uma vizinhança  $U$  de  $p_0$  e campos suaves  $\vec{X}_i \in \mathfrak{X}(U)$  ( $i = 1 \cdots m$ ) tal que para todo  $x \in U$  temos:

- (a)  $\vec{X}_i(x) \in \mathcal{H}(x)$ ;
- (b)  $\{\vec{X}_i(x)\}$  é base de  $\mathcal{H}(x)$ .

#### Definição 2.44.

Uma partição  $\mathcal{F} = \{L_x\}_{x \in M}$  de  $M$  por subvariedades imersas de mesma dimensão  $m$  é chamada **folheação** se localmente é descrita por uma submersão, ou seja para todo  $p \in M$  existe uma vizinhança  $U$  e uma submersão  $\pi : U \rightarrow B$  tal que  $\mathcal{F} \cap U$  é  $\{\pi^{-1}(c)\}$ , ou, dita de forma equivalente, é localmente difeomorfa a uma folheação canônica.

Denotaremos por  $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$  os campos em  $\mathfrak{X}(M)$  que atendem os itens (a) e (b) da Definição 2.43.

#### Exercício 2.45.

Seja  $\mathcal{F} = \{L_x\}_{x \in M}$  uma partição de  $M$  por subvariedades imersas de dimensão  $m$ . Verifique que as afirmações abaixo são equivalentes:

- (a)  $\mathcal{F}$  é uma folheação;
- (b) para cada vetor  $v \in T_p L_p$  existe um campo  $\vec{X}$  tal que  $\vec{X}(p) = v$  e  $\vec{X} \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$ .

#### Observação 2.46. Folheação singular

O exercício acima indica como generalizar a definição de folheação para uma folheação singular. Uma folheação singular é uma partição do espaço por subvariedades imersas (possivelmente de dimensões diferentes) que atendem o item (b).

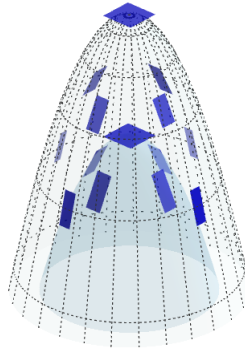


Figura 2.10: Exemplo de uma distribuição involutiva

#### Definição 2.47.

Uma distribuição  $\mathcal{H}$  de  $M$  é dita **involutiva** se a propriedade a seguir vale:

$$\text{Se } \vec{X}, \vec{Y} \in \mathfrak{X}(\mathcal{H}) \text{ então } [\vec{X}, \vec{Y}] \in \mathfrak{X}(\mathcal{H}).$$

O exercício a seguir fornece um exemplo de uma distribuição involutiva.

#### Exercício 2.48.

Sejam  $\mathcal{F} = \{L_x\}_{x \in M}$  uma  $m$ -folheação em  $M$  e a  $m$ -distribuição  $\mathcal{H} = T\mathcal{F}$  associada, i.e.,  $\mathcal{H}(x) = T_x L_x$  para todo  $x \in M$ . Verifique que  $\mathcal{H}$  é involutiva.

Vamos ver a seguir uma recíproca do exercício anterior.

#### Teorema 2.49. Frobenius

Seja  $\mathcal{H}$  uma  $m$ -distribuição em  $M^{m+k}$ . Suponha que  $\mathcal{H}$  seja involutiva. Então existe uma única folheação  $\mathcal{F} = \{L_x\}_{x \in M}$  tal que  $T_x L_x = \mathcal{H}_x \forall x \in M$ , ou seja,  $\mathcal{H}$  é uma **distribuição integrável**.

### 2.5.2. Prova do Teorema 2.49

**Lema 2.50.**

Sejam  $\mathcal{F} = \{L_x\}_{x \in M}$  uma folheação de codimensão  $k$  em  $M^{m+k}$  e  $N^m$  uma subvariedade imersa em  $M$  tal que  $T_p N = T_p L_p \forall p \in N$ . Então  $N$  é aberta em uma folha  $L_{p_0}$ .

*Demonstração.* Dado  $p_0 \in N$ , considere uma curva suave  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow N$  com  $\alpha(0) = p_0$  que fique contida em uma vizinhança  $U$  onde  $\mathcal{F}_U$  (folheação  $\mathcal{F}$  restrita à vizinhança  $U$ ) seja difeomorfa à folheação canônica  $\{\pi^{-1}(c)\}_{c \in \mathbb{R}^k}$  onde  $\pi : \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  é a projeção canônica. Assim, compondo com uma carta podemos supor que  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ . Por hipótese  $\alpha'_2(t) = 0$ . Logo  $\alpha_2(t) = \alpha_2(0)$  ou seja  $\alpha \subset \pi^{-1}(\alpha_2(0))$ . A arbitrariedade da escolha de  $\alpha$  implica que o aberto de  $N$  fica contido em  $\pi^{-1}(\alpha_2(0))$ . O argumento de conexidade então conclui a prova.  $\square$

Lema 2.50 garante a unicidade da folheação e a que a demonstração do Teorema 2.49 termina com o próximo lema.

**Lema 2.51.**

Dado  $p \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ , existe uma vizinhança  $U$  de  $p$  e uma folheação  $\mathcal{F} = \{L_x\}_{x \in U}$  em  $U$  tal que  $T_x L_x = \mathcal{H}_x \forall x \in U$ .

*Demonstração.* Por motivos didáticos vamos provar o Lema 2.51 no caso em que  $k = 1$  e  $m = 2$ . Caso geral é análogo e é um bom exercício para o(a)s aluno(a)s.

**Passo 1** Vamos primeiro demonstrar o Lema 2.51 no caso particular onde existe uma base  $\vec{X}_1, \vec{X}_2 \in \mathfrak{X}(\mathcal{H})$  tal que  $[\vec{X}_1, \vec{X}_2] = 0$ .

Após um movimento rígido podemos supor que  $\mathcal{H}(p) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ . Seja  $S$  um aberto no eixo  $x_3$ . Então podemos definir a aplicação  $\psi : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S \rightarrow \mathbb{R}^3$  por  $\psi(t_1, t_2, s) = \varphi_{t_1}^1 \circ \varphi_{t_2}^2 \circ (0, 0, s)$ , onde  $\varphi_{t_i}^i$ , é o fluxo do campo  $\vec{X}_i$ . Como  $\varphi_0^i = Id$  temos que

- $\frac{\partial}{\partial t_1} \psi(0, 0, 0) = \vec{X}_1(0)$
- $\frac{\partial}{\partial t_2} \psi(0, 0, 0) = \vec{X}_2(0)$
- $\frac{\partial}{\partial s} \psi(0, 0, 0) = (0, 0, 1)$



Assim  $D\psi(0, 0, 0)$  é invertível e pelo teorema da função inversa,  $\psi$  é um difeomorfismo (reduzindo  $U$ ). Definimos  $\mathcal{F} = \{L\}$  como a folheação dada por  $L_{\psi(t_1, t_2, s)} = \psi(U \cap \mathbb{R}^2 \times \{s\})$ .<sup>3</sup>

Vamos agora verificar que  $\mathcal{H}_x = T_x L_x$

$$\begin{aligned} D\psi_{(t_1, t_2, s)}(1, 0, 0) &= \frac{\partial}{\partial t_1} \psi(t_1, t_2, s) \\ &= \frac{\partial}{\partial t_1} \varphi_{t_1}^1 \circ \varphi_{t_2}^2 \circ (0, 0, s) \\ &= \vec{X}_1 \circ \varphi_{t_1}^1 (\varphi_{t_2}^2 \circ (0, 0, s)) \\ &= \vec{X}_1(\psi(t_1, t_2, s)) \end{aligned}$$

Visto que  $[\vec{X}_1, \vec{X}_2] = 0$ , temos pelo Lemma 2.40 que  $\psi(t_1, t_2, s) = \varphi_{t_1}^1 \circ \varphi_{t_2}^2(0, 0, s) = \varphi_{t_2}^2 \circ \varphi_{t_1}^1(0, 0, s)$  Assim temos:

$$\begin{aligned} D\psi_{(t_1, t_2, s)}(0, 1, 0) &= \frac{\partial}{\partial t_2} \psi(t_1, t_2, s) \\ &= \frac{\partial}{\partial t_2} \varphi_{t_2}^2 \circ \varphi_{t_1}^1 \circ (0, 0, s) \\ &= \vec{X}_2 \circ \varphi_{t_2}^2 (\varphi_{t_1}^1 \circ (0, 0, s)) \\ &= \vec{X}_2(\psi(t_1, t_2, s)) \end{aligned}$$

Uma vez provado que:

$$D\psi_{(t_1, t_2, s)}(1, 0, 0) = \vec{X}_1(\psi(t_1, t_2, s)) \in \mathcal{H}_{\psi(t_1, t_2, s)}$$

$$D\psi_{(t_1, t_2, s)}(0, 1, 0) = \vec{X}_2(\psi(t_1, t_2, s)) \in \mathcal{H}_{\psi(t_1, t_2, s)}$$

concluimos

$$T_{\psi(t_1, t_2, s)} L = D\psi_{(t_1, t_2, s)}(\mathbb{R}^2 \times \{0\}) = \mathcal{H}_{\psi(t_1, t_2, s)}$$

terminando a prova do lema no **Passo 1**.

**Passo 2** Vamos agora provar Lema 2.51 no caso geral, i.e., onde existe uma base  $\vec{Y}_1, \vec{Y}_2 \in \mathfrak{X}(\mathcal{H})$  tal que  $[\vec{Y}_1, \vec{Y}_2] \in \mathfrak{X}(\mathcal{H})$ .

<sup>3</sup>Usando a linguagem da Seção 2.6 é possível observar que  $\mathcal{F}$  fica contida nas órbitas dada pelos campos, isto é fenômeno geral de controle geométrico.

Continuaremos supondo que  $\mathcal{H}(p) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$  e  $S$  um aberto no eixo  $x_3$ .

Vamos definir  $[Y]$  como a matriz  $3 \times 2$  com colunas  $Y_1, Y_2$ . Visto que  $\mathcal{H}(p) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$  temos que  $[Y](p) = \begin{bmatrix} y_{11}(p) & y_{12}(p) \\ y_{21}(p) & y_{22}(p) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Como  $Y_1, Y_2$  são linealmente independentes, temos por continuidade dos campos que a matriz  $2 \times 2$  definidas  $[y_{ij}]_{i=1,2, j=1,2}$  é invertível. Definimos a matriz  $[A]_{2 \times 2}$  como a matriz inversa de  $[y_{ij}]_{i=1,2, j=1,2}$ .

Vamos agora definir a matriz  $[X]_{2 \times 2}$  como  $[X] = [Y][A]$ , ou seja,

$$[X] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \\ y_{31} & y_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Visto que  $[X]\mathbb{R}^2 = [Y][A]\mathbb{R}^2 = [Y]\mathbb{R}^2$  concluímos que os campos  $\vec{X}_1$  e  $\vec{X}_2$  (definidos como colunas da matriz  $[X]$ ) continuam sendo base de  $\mathcal{H}$ .

Note também que  $[\vec{X}_1, \vec{X}_2] = (0, 0, f)$ . Como  $S$  é (por continuidade) transversal a  $\mathcal{H}$  e  $[\vec{X}_1, \vec{X}_2] \in \mathfrak{X}(\mathcal{H})$ , concluímos que  $[\vec{X}_1, \vec{X}_2] = 0$ .

**Recaimos então no Passo 1** e concluímos a existência de uma folheação  $\mathcal{F}$  tal que  $T_x L = \mathcal{H}_x \forall x \in U$  terminando a prova do Lemma 2.51 e assim (pelo Lema 2.50) terminamos a demonstração do Teorema 2.49.  $\square$

## 2.6. \*Controle geométrico e o teorema de Stefan-Sussmann

Dado uma variedade  $M$  chamaremos uma coleção  $\{\vec{X}_u\}_{u \in U}$  de **sistema de controle geométrico**. Aqui iremos supor que os campos são completos. Usualmente  $U$  pode ter propriedades adicionais, e.g., ser uma outra variedade, um certo conjunto finito, um simplexo em  $\mathbb{R}^m$  etc).

### Exemplo 2.52.

Considere um trem de massa 1 unidade em uma linha reta. Suponha aceleração  $|u| \leq 1$ . Então os possíveis movimentos devem atender  $x_1''(t) = u^4$ . Considerando  $M = \mathbb{R}^2$  como o espaço posição e velocidade, nossas E.D.O's

## Continuação.

de grau 2 podem ser transformadas nas seguintes E.D.O's de grau 1.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ u \end{bmatrix}$$

Defina nossa família de campos como  $X_u(x) = (x_2, u)$ . Tal família descreve todos os movimentos de nosso trem. Uma função  $t \rightarrow u(t) \in U = [-1, 1]$  a qual mede determinada escolha em nosso sistema será chamada de **função controle** (e frequentemente ela é localmente constante, semi-continua). Consideremos por exemplo a seguinte questão. O trem deve embarcar as pessoas na estação  $x_1 = -a$  (com velocidade zero) e desembarcar as pessoas na estação  $x_1 = 0$  (com velocidade zero).

Uma das possibilidades de resolver tal questão seria tentar primeiro acelerar  $u = 1$  entre  $[0, t_1]$  e depois desacelerar com  $u = -1$  entre  $[t_1, t_f]$ . Em outras palavras consideraríamos a E.D.O descrita pelo campo  $X_1 = (x_2, 1)$  e no momento correto ( $t = t_1$ ) passariamos a considerar a E.D.O descrita pelo campo  $X_{-1} = (x_2, -1)$  e neste caso a função controle  $u : [0, t_f] \rightarrow [-1, 1]$  seria

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \leq t_1 \\ -1 & \text{se } t_1 < t \leq t_f \end{cases}$$

Resolvendo as E.D.O's e considerando certas interseções dos fluxos  $t \rightarrow \varphi_t^{X_1}$  e  $s \rightarrow \varphi_s^{X_{-1}}$  notamos que nosso problema de fato tem solução e que  $t_1 = \sqrt{a}$  e  $t_f = 2\sqrt{a}$ . A solução de nosso problema pode ser então pensada como uma curva contínua (suave por partes)  $t \rightarrow q_u(t) \in M$  que atende q.t.p (em quase todo ponto) a equação

$$\frac{d}{dt} q_u(t) = \vec{X}_{u(t)}(q_u(t))$$

e que é definida via *composição de fluxos*:

$$q_u(t) = \begin{cases} \varphi_t^{X_1}(-a, 0) & \text{se } 0 \leq t \leq \sqrt{a} \\ \varphi_t^{X_{-1}}(q_1) & \text{se } \sqrt{a} < t \leq 2\sqrt{a} \end{cases}$$

$$\text{onde } q_1 = \left(-\frac{a}{2}, \sqrt{a}\right) = \varphi_{\sqrt{a}}^{X_1}(-a, 0)$$

A solução acima para a questão embarcar passageiros em  $x_1 = -a$  e desembarcar  $x_1 = 0$  de fato *otimiza* o tempo (isto é demonstrado e.g. na teoria de Controle

<sup>4</sup>Comentaremos posteriormente que um modelo realista para um trem é  $x_1''(t) = u - r(x_1'(t))$ , onde  $r$  é uma resistência que aumenta com a velocidade  $v = x_1'(t)$ .

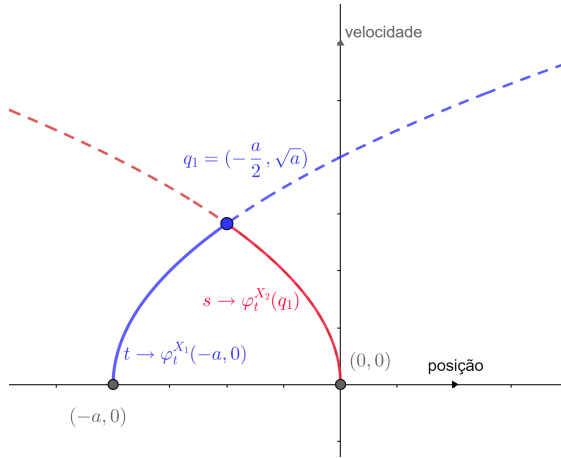


Figura 2.11: ilustra uma possível maneira de sair da estação  $-a$  (com velocidade zero) e chegando na estação  $0$  (com velocidade zero)

Geométrico utilizando Teoremas de Filippov e o Princípio do Máximo de Pontryagin).

O Exemplo 2.52 sugere a relevância de considerar os espaços de todas possíveis composições de fluxos.

### Definição 2.53.

Dado um sistema  $\mathcal{C} = \{\vec{X}_u\}_{u \in U}$  a **órbita** passando por um ponto  $q_0$  é definida como

$$\mathcal{O}(q_0) = \{\varphi_{t_n}^{X_n} \circ \dots \circ \varphi_{t_1}^{X_1}(q_0) \mid \forall \vec{X}_i \in \mathcal{C}, \forall t_i \in \mathbb{R}\}$$

### Exemplo 2.54.

Consideremos o sistema dos campos  $\{\vec{\xi}\}$  induzidos por uma ação de grupos de Lie  $\mu : G \times M \rightarrow M$ . Em outras palavras defina  $\vec{\xi}(p) = \frac{d}{dt} \mu(\exp(t\xi), p)|_{t=0}$  para  $\xi$  contido na álgebra de Lie  $\mathfrak{g} = T_e G$ . Neste caso as órbitas são

$$\mathcal{O}(q_0) = G(q_0) = \{\mu(g, q_0) \mid \forall g \in G\}.$$

**Continuação.**

Por exemplo, considere  $G = \mathbb{SO}(3)$ ,  $M = \mathbb{R}^3$  e ação multiplicação de matrizes  $\mu(g, v) = gv$ . Neste exemplo, se  $\|v\| \neq 0$  temos que  $G(v) = \mathbb{S}_{\|v\|}^2$  (ou seja esfera de centro  $0$  e raio  $\|v\|$ ) e se  $v = 0$  então a órbita é o ponto  $0 = G(0)$ . Neste exemplo vemos que órbitas são subvariedades e tais subvariedades podem ter dimensões diferentes. Veremos em breve que isto é um resultado mais geral.

**Definição 2.55.**

Dado um sistema  $\mathcal{C} = \{\vec{X}_u\}_{u \in U}$  o **conjunto alcançável** passando por um ponto  $q_0$  é definida como

$$\mathcal{A}(q_0) = \{\varphi_{t_n}^{X_n} \circ \dots \circ \varphi_{t_1}^{X_1}(q_0) \mid \forall \vec{X}_i \in \mathcal{C}, \forall t_i \geq 0\}$$

**Exemplo 2.56.**

Sejam  $M = \mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{C} = \{X_1 = (1, 1), X_{-1} = (-1, 1)\}$ . Neste caso o conjunto alcançável passado por  $0$  é um cone, i.e.  $\mathcal{A}(0) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; |x_1| \leq x_2\}$ . Observe que  $\mathcal{O}(0) = \mathbb{R}^2 \neq \mathcal{A}(0)$ .

**Observação 2.57.**

*Informalmente falando, o conjunto alcançável  $\mathcal{A}(q_0)$  indica todos os estados que podemos alcançar, daqui para frente. A órbita  $\mathcal{O}(q_0)$  contém não só tais estados mas contém também todos os estados que poderíamos ter alcançado se no passado tivéssemos tomado decisões diferentes. Tal como já ilustrado no Exemplo 2.56 conjunto alcançável não precisa coincidir com a órbita. No caso em que  $\vec{X} \in \mathcal{C} \Rightarrow -\vec{X}$  então dizemos que  $\mathcal{C}$  é **simétrico** e neste caso  $\mathcal{A}(q_0) = \mathcal{O}(q_0)$ . Existem situações em que o sistema não é simétrico, e mesmo assim os 2 conjuntos coincidem. Por exemplo poderíamos alterar Exemplo 2.56 considerando  $M = S^1 \times S^1$  (o qual é recoberto por  $\mathbb{R}^2$ ) e 2 campos  $\vec{Y}_1$  e  $\vec{Y}_2$  em  $M$  que se levantam para os campos  $\vec{X}_1$  e  $\vec{X}_2$  em  $\mathbb{R}^2$ . Aqui, devido a compacidade da órbita e propriedade dos fluxos é possível demonstrar que de fato o conjunto alcançável e órbita coincidem.*

Antes de apresentar o próximo resultado, convém generalizar nossa definição de folheação (regular) permitindo agora que as folhas tenham dimensões diferentes.

**Definição 2.58.**

Uma uma partição  $\mathcal{F} = \{L\}$  de  $M$  por variedades (imersas) sem auto-interseções (as chamadas **folhas**) é chamada **folheação singular** se para cada  $V_p \in T_p L_p$  (i.e., vetor tangente a folha  $L_p$  passando por  $p$ ) encontramos um campo local  $\vec{X}$  (definido em uma vizinhança  $U$  de  $p$ ) tal que  $\vec{X}(p) = V_p$  e  $\vec{X}(z) \in T_z L_z$ , para  $z \in U$ .

O Exemplo 2.54 ilustra a Definição 2.58 e nos leva a questionar se a partição por órbitas de um controle geométrico  $\mathcal{C} = \{\vec{X}_u\}_{u \in U}$  é sempre uma folheação singular. Além disto, como espaços tangentes de órbitas de uma ação  $\mu : G \times M \rightarrow M$  são invariantes pela ação de  $G$ , podemos também nos perguntar se uma propriedade como esta (e.g. ser invariante por pull-back i.e. invariante por  $\text{Ad}(e^{tx})$ ) é de fato o que caracterizaria espaços tangentes das órbitas de um controle geométrico. O teorema a seguir traz respostas positivas a estas questões.

**Teorema 2.59. Stefan -Sussmann**

Dado um sistema  $\mathcal{C} = \{\vec{X}_u\}_{u \in U}$  de campos completos em  $M$  então

- (a)  $\mathcal{F} = \{\mathcal{O}(q)\}_{q \in M}$  é uma folheação singular.
- (b)  $T_q \mathcal{O} = \text{gerado } \{\text{Ad}(\varphi_t^{\vec{X}}) \vec{Y}(q) \mid \vec{Y}, \vec{X} \in \mathcal{C}\}$

**Observação 2.60.**

Será conveniente para demonstração dos próximos resultados, estender a definição do operador  $\bullet$ . Como já havíamos visto antes  $\vec{X} \bullet \varphi := d\varphi \vec{X}$ . Agora iremos denotar  $q \bullet \vec{X} := \vec{X}(q)$  e  $q \bullet f := f(q)$ , ou seja podemos pensar que ponto operar em campos ou funções ao ser avaliado nele. Também podemos operar difeomorfismo  $\varphi$  em funções  $f$  como  $\varphi \bullet f := f \circ \varphi$ . Utilizando esta notação temos que  $\text{Ad}(\varphi) \vec{X} = \varphi \bullet \vec{X} \bullet \varphi^{-1}$ .

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{P}$  o grupo de difeomorfismos gerados pelos fluxos dos campos em  $\mathcal{C}$ . Tal como sugere o item (b) o candidato natural para desempenhar o papel de espaço tangente das órbitas é:

$$\Pi(q) := \text{span} \{q \bullet \text{Ad}(\varphi) \vec{X} \mid \forall \vec{X} \in \mathcal{C}, \forall \varphi \in \mathcal{P}\}.$$

Vamos agora entender a ideia da prova por meio da várias afirmações:

**Afirmção 1:**  $\Pi(q_0) \bullet \varphi_0 = \Pi(q)$ , onde  $q = q_0 \bullet \varphi_0$ , para  $\varphi_0 \in \mathcal{P}$ . Em particular  $\dim \Pi(q \bullet \varphi_0) = \dim \Pi(q_0)$

*Prova da afirmação:* De fato:

$$\begin{aligned} q_0 \bullet Ad(\varphi) \vec{X} \bullet \varphi_0 &= q_0 \bullet \varphi \bullet \vec{X} \bullet \varphi^{-1} \bullet \varphi_0 \\ &= q_0 \bullet \varphi_0 \bullet \varphi_0^{-1} \bullet \varphi \bullet \vec{X} \bullet \varphi^{-1} \bullet \varphi_0 \\ &= q \bullet Ad(\varphi \circ \varphi_0^{-1}) \vec{X} \quad \square \end{aligned}$$

Considere  $\{\vec{V}_i\}_{i=1}^m \subset Ad(\mathcal{P})\mathcal{C}$  tal que  $\{\vec{V}_i(q_0)\}$  é uma base de  $\Pi(q_0)$ . Defina  $G_q : U_0 \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$  como  $G_q(t_1, \dots, t_m) = q \bullet e^{t_1 V_1} \bullet \dots \bullet e^{t_m V_m}$ . Utilizando argumentos semelhantes aos utilizados na demonstração do teorema de Frobenius, podemos concluir a afirmação a seguir, a qual garante candidatos ao que costumamos chamar de **placa** de nossa folheação singular, i.e., grosso modo falando, abertos na topologia das folhas (não necessariamente do ambiente) conexos pequenos o suficientes.

**Afirmção 2:** Reduzindo  $U_0$  se necessário,  $G_q$  se torna variedade mergulhada  $G_q(U_0) \subset \mathcal{O}(q_0)$ .

**Afirmção 3:**  $d(G_q)_t T_t \mathbb{R}^m = \Pi(G(t))$

*Prova da afirmação:* Vamos verificar que  $d(G_q)_t T_t \mathbb{R}^m \subset \Pi(G(t))$ .

$$\begin{aligned} dG_q e_i &= \frac{d}{ds} q_0 \bullet e^{t_1 V_1} \bullet \dots \bullet e^{t_{i-1} V_{i-1}} \bullet e^{(t_i+s) V_i} \bullet e^{t_{i+1} V_{i+1}} \bullet \dots \bullet e^{t_m V_m} \Big|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds} q_0 \bullet e^{t_1 V_1} \bullet \dots \bullet e^{t_{i-1} V_{i-1}} \bullet e^{t_i V_i} \bullet e^{s V_i} \bullet \varphi \Big|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds} q_0 \bullet e^{t_1 V_1} \bullet \dots \bullet e^{t_{i-1} V_{i-1}} \bullet e^{t_i V_i} \bullet \varphi \bullet \varphi^{-1} \bullet e^{s V_i} \bullet \varphi \Big|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds} G_q(t) \bullet \varphi^{-1} \bullet e^{s V_i} \bullet \varphi \Big|_{s=0} = G_q(t) \bullet Ad(\varphi^{-1}) V_i \end{aligned}$$

onde  $\varphi = e^{t_{i+1} V_{i+1}} \bullet \dots \bullet \varphi = e^{t_m V_m}$ . O resto da prova segue do fato dos 2 subespaços terem mesma dimensão  $\square$

A próxima afirmação nos ajuda a *graduar* as placas e terminar a ideia da prova.

**Afirmção 4:** Se  $\hat{q} \in G_q(U_q) \cap G_{\tilde{q}}(\tilde{U}_{\tilde{q}})$  então  $G_{\hat{q}}(\hat{U}_{\hat{q}})$  é um conjunto aberto de  $G_q(U_q)$  e  $G_{\tilde{q}}(\tilde{U}_{\tilde{q}})$

*Prova da afirmação:* De fato os campos vetoriais  $\hat{V}_i$  são tangentes a distribuição (definida intrinsicamente)  $\Pi$  (o qual era espaço tangente de  $\in G_q(U_q)$ ) O resultado agora segue do fato que se um campo é tangente a uma subvariedade, então sua curva integral está contida na variedade.  $\square$

$\square$

Seja  $\text{Lie}(\mathcal{C})$  campos gerados por colchetes. Note que  $\text{Lie}(\mathcal{C})(q) \subset T_q\mathcal{O}$ . Vamos agora ver uma condição (aparentemente) técnica que nos permitirá garantir a igualdade. Tal condição também nos permitirá discutir uma versão do teorema singular de Frobenius bem como condições para o conjunto alcançável ter uma boa estrutura.

### Definição 2.61.

Um submódulo  $\mathcal{V}$  é localmente **finitamente gerado** sobre  $C^\infty(M)$  se para cada  $q$ , existe uma vizinhança  $U$  de  $q$  e campos vetoriais  $\vec{V}_1 \cdots \vec{V}_k$  de  $\mathcal{V}$  com domínio contendo  $U$  tal que  $\mathcal{V}|_U = \{\sum_i a_i \vec{V}_i | a_i \in C^\infty(U)\}$ .

### Exemplo 2.62.

Consideremos o módulo  $\mathcal{V}$  dos campos induzidos por uma ação de grupos de Lie  $\mu : G \times M \rightarrow M$  como  $\vec{\xi}(p) = \frac{d}{dt} \mu(\exp(t\xi), p)|_{t=0}$  para  $\xi$  contido na álgebra de Lie  $\mathfrak{g} = T_e G$ . Neste caso podemos considerar uma base  $\xi_1 \cdots \xi_n$  de  $\mathfrak{g}$  e assim a família de campos induzidos  $\vec{\xi}_i$ . Note que se  $\xi = \sum_i a_i \xi_i$  então  $\vec{\xi} = \sum_i a_i \vec{\xi}_i$  para funções constantes  $a_i$ . Isto prova que  $\mathcal{V}$  é (localmente) finitamente gerado.

### Observação 2.63.

Importante observar que na Definição 2.61 estamos solicitando a existência de funções  $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  suaves. Não basta assim que  $\{\vec{V}_i\}$  gere  $\mathcal{V}$  ou seja não é suficiente que para cada  $x_0$  fixo tenhamos  $\vec{V}(x_0) = \sum_i c_i \vec{V}_i(x_0)$  para constantes  $c_i$ . Precisamos



**Continuação.**

que tais  $c_i$  sejam na verdade  $c_i = a_i(x_0)$  para funções bem definidas  $a_i \in C^\infty(U)$ .

Existe uma condição (simples de verificar) que implica que  $\text{Lie } \mathcal{C}$  é finitamente localmente gerado (vide Agrachev e Sakhov?)

**Proposição 2.64.**

Se  $\mathcal{C}$  e  $M$  são analíticos, então  $\text{Lie}(\mathcal{C})$  é localmente finitamente gerado.

**Teorema 2.65.**

Se  $\text{Lie}(\mathcal{C})$  é localmente finitamente gerado, então  $\text{Lie}(\mathcal{C})(q) = T_q\mathcal{O} \forall q \in M$ .

Afim de provar este teorema, iremos precisar de dois lemas. O item (c) do Lema 2.66 é uma generalização do que é conhecido para grupos de Lie.

**Lema 2.66.** (a)  $\text{ad}(\vec{X})f\vec{Y} = \vec{X} \bullet f\vec{Y} + f\text{ad}(\vec{X})\vec{Y}$

(b)  $\text{Ad}(\varphi)f\vec{X} = \varphi \bullet f\text{Ad}(\varphi)\vec{X}$

(c)  $\text{Ad}(e^{tX}) = e^{t\text{ad}(X)}$

A seguir o lema central da demonstração do teorema, e que de que certa forma também generaliza resultado também conhecido em grupos de Lie, quando  $\mathcal{V}$  é uma subálgebra de Lie, i.e., módulo de campos invariantes a esquerda fechados pela aplicação  $\text{ad}$ .

**Lema 2.67.**

Seja  $\mathcal{V}$  o módulo de campos finitamente gerados sobre  $C^\infty(M)$ . Suponha que dado  $\vec{X} \in \mathfrak{X}(M)$  tenhamos  $\text{ad}(\mathcal{V}) = \{\text{ad}(\vec{X})\vec{Y} \mid \vec{Y} \in \mathcal{V}\}$ . Então  $\text{Ad}(e^{tX})\mathcal{V} = \mathcal{V}$

*Demonstração.* Vamos considerar  $\{\vec{V}_i\}$  tal que  $\mathcal{V}|_U = \{\sum_i a_i \vec{V}_i \mid a_i \in C^\infty(U)\}$ .

Definamos:

$$V_i(s) := \text{Ad}(e^{sX})\vec{V}_i \stackrel{(c)}{=} e^{s \cdot \text{ad}(X)}\vec{V}_i$$

Derivando:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_i(s) &= e^{s \operatorname{ad}(X)} \operatorname{ad}(X) V_i \\
 &= e^{s \operatorname{ad}(X)} \left( \sum_j a_{ij} \vec{V}_j \right) \\
 &\stackrel{(c)}{=} \operatorname{Ad}(e^{sX}) \left( \sum_j a_{ij} \vec{V}_j \right) \\
 &\stackrel{(b)}{=} \sum_j \operatorname{Ad}(e^{sX}) \bullet a_{ij} \operatorname{Ad}(e^{sX}) \vec{V}_j \\
 &= \sum_j b_{ji}(s) \vec{V}_j(s)
 \end{aligned}$$

onde  $b_{ji}(s) := \operatorname{Ad}(e^{sX}) \bullet a_{ij}$ . Assim em termos matriciais (colocando as funções componentes  $v_{ij}$  de  $V_i = \sum_k v_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k}$  nas colunas) temos  $\frac{d}{ds}[V] = [V][B]$

ou seja  $\frac{d}{ds}[V]^t = [B]^t[V]^t$ . Concluimos que  $[V]^t = e^{\left(\int_0^s [B(z)]^t dz\right)} V(0)^t$  e assim  $[V]^t(s) = C^t(s)V(0)^t$ . Logo  $V(s) = [V(0)][C(s)]$  ou seja  $\operatorname{Ad}(e^{sX}) \vec{V}_i = V_i(s) = \sum_j c_{ij}(s) \vec{V}_j \in \mathcal{V}$ . □

*Demonstração.* Vamos agora demonstrar o Teorema 2.65. Pela definição de  $\operatorname{Lie}(\mathcal{C})$  temos que  $\operatorname{ad}(\vec{X})\operatorname{Lie}(\mathcal{C}) \subset \operatorname{Lie}(\mathcal{C})$ . Segue pelo Lemma 2.67 (tomando  $\mathcal{V} = \operatorname{Lie}(\mathcal{C})$ ) que

$$\operatorname{Ad}(e^{tX})\operatorname{Lie}(\mathcal{C}) \subset \operatorname{Lie}(\mathcal{C}) \quad (2.6.1)$$

A equação acima e Teorema 2.59 implicam que  $\operatorname{Lie}(\mathcal{C})(q) = T_q\mathcal{O} \forall q \in M$ . □

Revejamos agora o teorema de Frobenius como um corolário do Teorema 2.65.

### Corolário 2.68.

Seja  $\mathcal{H}$  uma distribuição regular involutiva em  $M$  (i.e, se  $\vec{X}, \vec{Y} \in \Gamma(\mathcal{H})$  então  $[\vec{X}, \vec{Y}] \in \Gamma(\mathcal{H})$ ). Temos então que  $\mathcal{H}$  é integrável, i.e., existe uma folheação (regular)  $\mathcal{F} = \{L\}$  tal que  $\mathcal{H}_x = T_x L$ .

*Demonstração.* Como  $\mathcal{H}$  é distribuição (regular) básica, perto de  $p_0$  podemos encontrar um conjunto de campos  $\mathcal{C} = \{\vec{V}_i\}$  tal que  $\{\vec{V}_i(x)\}$  é base  $\mathcal{H}(x)$  para todo  $x$  próximo  $p_0$ . A condição que a distribuição é involutiva então implica que

$$\mathcal{H}(x) = \text{Lie } \mathcal{C}(x). \quad (2.6.2)$$

Visto que  $\text{Lie } \mathcal{C}$  é finitamente gerado, então pelo Teorema 2.65 e Equação (2.6.2) temos:

$$\mathcal{H}(x) = \text{Lie } \mathcal{C}(x) = T_x \mathcal{O}(x)$$

□

Podemos agora nos perguntar se podemos ter uma versão do teorema de Frobenius para distribuições singulares. Uma aplicação que a cada  $x \in M$  associa um subespaço  $\mathcal{H}(x) \in T_x M$ , sendo que as dimensões destes subespaços podem mudar ponto a ponto, é chamada **distribuição singular suave** se para cada  $x_0$  temos um conjunto de vetores  $\{\vec{V}_i\}$  suaves tais que  $\text{span } \{\vec{V}_i(x)\} = \mathcal{H}(x)$  para  $x$  próxima.

Note que  $\{\vec{V}_i(x)\}$  gera a distribuição mas não precisa ser uma base de  $\mathcal{H}(x)$  para todos os  $x$  próximos a  $x_0$  em particular mesmo supondo que a distribuição singular  $\mathcal{H}$  seja involutiva, não podemos seguir a demonstração do Corolário 2.68 para ter uma versão do *teorema Frobenius singular*. Nossa estratégia será considerar a a tese do Lema 2.67 como uma propriedade atendida por nossa distribuição singular e seguir então o resto da prova do Teorema 2.65.

### Definição 2.69.

Uma distribuição singular suave  $\mathcal{H}$  é **Ad invariante** se

$$\text{Ad}(e^{tX})\Gamma(\mathcal{H}) = \Gamma(\mathcal{H})$$

para qualquer  $\vec{X} \in \Gamma(\mathcal{H})$ , onde  $\Gamma(\mathcal{H})$  é conjunto de campos suaves tangentes a distribuição singular.

Segue direto do item (b) do Teorema 2.59, que, para uma distribuição  $\mathcal{H}$  Ad invariante temos:  $T_q \mathcal{O}(q) \subset \mathcal{H}(q)$ . Como a outra inclusão é imediata concluímos:

### Corolário 2.70.

Seja  $\mathcal{H}$  distribuição singular Ad invariante. Então existe uma folheação singular  $\mathcal{F} = \{L\}$  com  $T_q L_q = \mathcal{H}(q)$  para todo  $q \in M$ .

Concluimos esta seção apresentando um resultado que garante que sobe boas condições (e.g, quando  $\mathcal{C} = \{\vec{X}_u\}_{u \in U}$  é analítico) o conjunto alcançável, embora não precise ser uma variedade, pode ter boa estrutura, vide Exemplo 2.56.

### Teorema 2.71. Krener

Seja  $\text{Lie}(\mathcal{C})$  localmente finitamente gerado. Então  $\text{int}\mathcal{A}(q)$  é denso em  $\mathcal{A}(q)$  (na topologia da órbita  $\mathcal{O}(q)$ ).

*Demonstração.* Sejam  $q_0 \in M$  e  $q \in \mathcal{A}_{q_0} \subset \mathcal{O}_{q_0}$ . Desejamos mostrar que dado uma vizinhança  $U$  de  $q$  (na topologia  $\mathcal{O}_{q_0}$ ) temos  $\text{int}\mathcal{A}(q_0) \cap U \neq \emptyset$ . Vejamos primeiro a estratégia da prova. O ingrediente principal da demonstração será o argumento que se todos os campos  $\vec{Y} \in \mathcal{C}$  sempre fossem tangentes a uma variedade  $N \subset \mathcal{O}(q_0)$  com  $\dim N < \dim \mathcal{O}(q_0)$  então, como colchetes de campos tangentes a  $N \subset \mathcal{O}(q_0)$  ficam sempre tangentes a  $N$ , teríamos uma contradição com a hipótese que  $\text{Lie}(\mathcal{C})(x) = T_x\mathcal{O}(x)$ . A estratégia então será construir (por indução) variedades mergulhada  $N_i \subset \mathcal{A}(q_0)$ . Caso a dimensão  $N_i$  seja menor do que a dimensão de  $\mathcal{O}(q_0)$  poderemos (devido ao argumento acima) encontrar um campo  $\vec{Y}_{i+1}$  transversal a  $N_i$  (encolhendo um pouco  $N_i$  se necessário) e construiremos uma nova variedade  $N_{i+1}$  com  $\dim N_{i+1} = 1 + \dim N_i$  contendo a curva integral de  $\vec{Y}_{i+1}$ , ou seja  $N_{i+1} = \{N_i \bullet e^{s\vec{Y}_{i+1}}\}_{s \in (0, \epsilon_{i+1})}$ . Continuaremos a construir tais variedades até atingirmos o momento que a variedade  $N_n$  mergulhada tiver a dimensão da órbita. Neste momento  $N \subset \mathcal{A}_{q_0}$  se torna um aberto de  $\mathcal{A}_{q_0}$  e a prova terminará. Vamos agora dar mais detalhes da ideia da prova, apresentando explicitamente a construção para baixas dimensões das variedades  $N_i$  e deixando então para o leitor complementar o argumento de indução.

Sabemos  $q = q_0 \bullet e^{t_1 X_1} \bullet \dots \bullet e^{t_n X_n}$ . Definamos  $q_1^{\epsilon_1} := q_0 \bullet e^{t_1 X_1} \bullet \dots \bullet e^{t_{n-1} X_{n-1}} \bullet e^{(t_n - \epsilon_1) X_n}$  e a curva  $\psi_1^{\epsilon_1}(s_1) := q_1^{\epsilon_1} \bullet e^{s_1 X_n}$  com variável  $s_1$  pequena. Em particular  $\psi_1^{\epsilon_1}(\epsilon_1) = q$ . Reduzindo  $\epsilon_1$  e definindo  $I_1^{\epsilon_1} = (0, \epsilon_1)$ , temos que a curva  $\psi_1^{\epsilon_1}$  se torna um mergulho e assim  $N_1^{\epsilon_1} = \psi_1^{\epsilon_1}(I_1^{\epsilon_1})$  variedade mergulhada de dimensão 1. Caso a  $\dim \mathcal{O}_{q_0} = 1$  temos que  $N_1^{\epsilon_1}$  é aberto na órbita e contido em  $\mathcal{A}_{q_0}$  e assim e diminuindo  $I_1^{\epsilon_1}$  temos que  $N_1^{\epsilon_1} \subset (\text{int}\mathcal{A}(q_0) \cap U) \neq \emptyset$  como queríamos demonstrar.

Vamos então supor que  $\dim \mathcal{O}_{q_0} > 1$ . Notemos que dado  $\epsilon_1$  pequeno suficiente, existe sempre  $\vec{Y}_2 \in \mathcal{C}$  tal que  $\vec{Y}_2|_{N_1^{\epsilon_1}}$  não é tangente a variedade mergulhada  $N_1^{\epsilon_1}$ . De fato supanhamos que todo  $\vec{Y} \in \mathcal{C}$  é tangente a  $N_1^{\epsilon_1}$ . Então colchetes destes campos ficam tangentes a  $N_1^{\epsilon_1}$ . Assim  $\text{Lie}(\mathcal{C})(x) \subset T_x N_1$  para  $x \in N_1$ . Mas isto contraria a hipótese que  $\text{Lie}(\mathcal{C})(x) = T_x \mathcal{O}_{q_0}$ .

Reduzindo  $\epsilon_1$  e escolhendo  $\epsilon_2 < \epsilon_1$  pequeno suficiente, podemos garantir

(visto que  $Y_2$  não é sempre tangente a  $N_1^\epsilon$ ) que a aplicação a seguir é um mergulho:

$$\begin{aligned} \psi_2^{(\epsilon)} : I_1^2 \times I_2 &\rightarrow \mathcal{O}_{q_0} \\ (s_1, s_2) &\rightarrow \psi_1^{\epsilon_1}(s_1) \bullet e^{s_2 Y_2} \end{aligned}$$

onde  $(\epsilon) = (\epsilon_1, \epsilon_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $s_1 \in I_1^2 = (0, \epsilon_1 - \epsilon_2)$  e  $s_2 \in I_2 = (0, \epsilon_2)$ . Assim  $N_2^{(\epsilon)} = \psi_2^{(\epsilon)}(I_1^2 \times I_2)$  é variedade mergulhada. Se  $\dim \mathcal{O}_{q_0} = 2$  então esta variedade mergulhada é um aberto na órbita e contida em  $\mathcal{A}_{q_0}$ . Reduzindo  $\epsilon_2 < \epsilon_1$   $N_2^{(\epsilon)} \subset (\text{int } \mathcal{A}(q_0) \cap U) \neq \emptyset$  como queríamos demonstrar. Caso a dimensão  $\dim \mathcal{O}(q_0) > 2$  continuamos a construção por indução, como discutido no início até finalmente termos  $\dim N_n^{(\epsilon)} = \dim \mathcal{O}(q_0)$ . Tendo mesma dimensão então  $\dim N_n^{(\epsilon)}$  (reduzindo  $(\epsilon)$ ) torna-se um aberto e a demonstração é concluída.  $\square$



## Integração

## 3.1. Definições e propriedades básicas

Recordemos aqui as definições necessárias para estabelecer o conceito de integral de Riemann.

Sejam  $A = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m]$  um  $m$ -retângulo,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  função limitada e  $P$  uma partição de  $A$  por retângulos menores  $S = [t_{i,1}, t_{(i+1),1}] \times \cdots \times [t_{j,m}, t_{(j+1),m}]$ . Defina

$$m_S(f) := \inf\{f(x), x \in S\}$$

$$M_S(f) := \sup\{f(x), x \in S\}$$

$$\text{vol}(S) = (t_{(i+1),m} - t_{i,m}) \cdots (t_{(j+1),1} - t_{j,1})$$

$$L(f, P) := \sum_{S \in P} m_S(f) \text{vol}(S)$$

$$U(f, P) := \sum_{S \in P} M_S(f) \text{vol}(S)$$

**Exercício 3.1.**

Seja  $\tilde{P}$  um refinamento de  $P$ . Verifique que:  $L(f, P) \leq L(f, \tilde{P})$  e  $U(f, \tilde{P}) \leq U(f, P)$ .

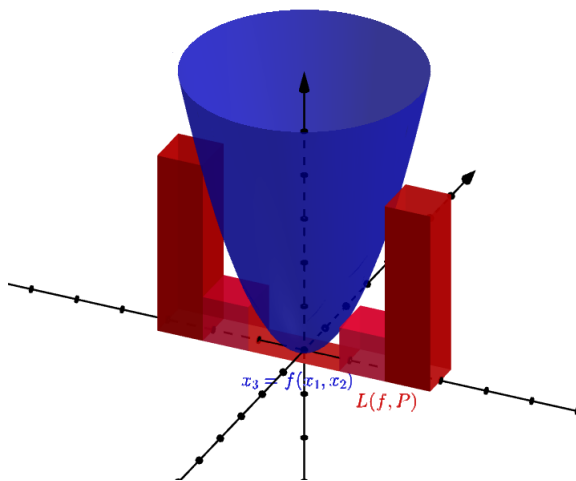


Figura 3.1:  $L(f, P) = \sum_{S \in P} m_S(f) \text{vol}(S)$  onde  $f(x) = x_1^2 + x_2^2$  e  $A = [-3, 3] \times [-1/2, 1/2]$

### Exercício 3.2.

Sejam  $\tilde{P}$  e  $P$  duas partições (uma não precisa ser refinamento da outra). Verifique que:  $L(f, P) \leq U(f, \tilde{P})$ .

Definimos agora os números:

$$L(f) := \sup_P \{L(f, P)\}; \quad U(f) := \inf_P \{U(f, P)\}$$

### Definição 3.3.

Uma função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  limitada é chamada *integrável* se:

$$L(f) = U(f).$$

O número

$$\int_A f := L(f) = U(f)$$

é chamado *integral de f em A*.



**Exercício 3.4.**

Uma função limitada  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável, se e somente se para cada  $\epsilon > 0$  existe uma partição  $P$  tal que  $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$ .

**Definição 3.5.**

Um conjunto  $B$  tem *medida nula* se para cada  $\epsilon > 0$  existe uma cobertura de  $m$ -retângulos fechados  $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  tal que  $\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(U_i) < \epsilon$ .

**Teorema 3.6.**

Sejam  $A$  um  $m$ -retângulo fechado,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  e uma função limitada e seja  $B = \{x \in A \mid f \text{ não é contínuo em } x\}$ . Então  $f$  é integrável se e somente se  $B$  tem medida nula.

Seja  $R$  uma região em  $\mathbb{R}^m$  a função característica de  $R$  é a função  $\chi_R : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  definida como:

$$\chi_R(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in R \\ 0 & \text{se } x \notin R \end{cases}$$

**Proposição 3.7.**

Seja  $R$  uma região contida em um  $m$ -retângulo  $A$ . Então  $\chi_R$  é integrável se e somente se  $\partial R$  tem medida nula.

É possível demonstrar que o produto de funções integráveis é uma função integrável.

**Definição 3.8.**

Dado uma função limitada  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  integrável em  $A$  e  $\partial R$  com medida nula, definimos:

$$\int_R f = \int_A f \cdot \chi_R$$

Também é possível que a soma e a diferença de funções integráveis são funções integráveis. Sabendo disso, obtemos as propriedades a seguir.

**Exercício 3.9.**

Sejam  $R_1$  e  $R_2$  regiões contidas em um retângulo  $A$  com bordos de medida nula e com  $R_1 \cap R_2$  com medida nula. Dados  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  funções limitadas e integráveis. Verifique:

1.  $\int_{R_1} f + g = \int_{R_1} f + \int_{R_1} g$
2.  $\int_{R_1} cf = c \int_{R_1} f$
3.  $\int_{R_1 \cup R_2} f = \int_{R_1} f + \int_{R_2} f$

**3.2. Teorema de Fubini**

O Teorema de Fubini (Teorema 3.15) a ser apresentado em breve em sua generalidade implicará diretamente a seguinte proposição:

**Proposição 3.10.**

Seja  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Então:

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} f = \int_a^b \left( \int_c^d f(x) dx_2 \right) dx_1 = \int_c^d \left( \int_a^b f(x) dx_1 \right) dx_2$$

Aplicando a Proposição 3.10 à função  $f \cdot \chi_R$ , onde  $R \subset [a, b] \times [c, d]$  é uma região cujo bordo tem medida nula, podemos concluir os seguintes resultados conhecidos.

**Proposição 3.11.**

Seja  $R = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid h_1(x_1) \leq x_2 \leq h_2(x_1)\}$  onde  $h_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ , são funções suaves. Seja  $f$  uma função contínua em um retângulo contendo  $R$ . Então

$$\int_R f = \int_a^b \left( \int_{h_1(x_1)}^{h_2(x_1)} f(x) dx_2 \right) dx_1$$

De forma análoga temos resultado para região entre gráficos em relação a  $x_2$ .

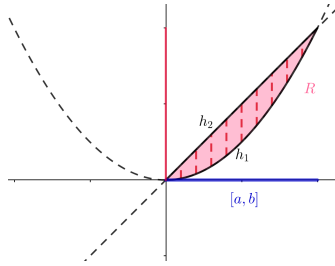


Figura 3.2: Figura da região integrada no Exemplo 3.2

### Proposição 3.12.

Seja  $R = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid h_1(x_2) \leq x_1 \leq h_2(x_2)\}$  onde  $h_i : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ , são funções suaves. Seja  $f$  uma função contínua em um retângulo contendo  $R$ . Então

$$\int_R f = \int_c^d \left( \int_{h_1(x_2)}^{h_2(x_2)} f(x) dx_1 \right) dx_2$$

### Exemplo 3.13.

A fim de ilustrar a Proposição 3.11 considere as funções  $h_1(x_1) = x_1^2$  e  $h_2(x_1) = x_1$  (vide Figura 3.2). Para  $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ , temos

$$\int_R f = \int_0^1 \int_{x_1^2}^{x_1} x_1 x_2 dx_2 dx_1 = \int_0^1 x_1 \frac{1}{2} (x_1^2 - x_1^4) dx_1 = \frac{1}{24}$$

Observe que o Exemplo pode ser resolvido também usando 3.12. Deixamos ao leitor(a) a verificação deste fato.

### Exercício 3.14.

Sejam  $R = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq x_2^2, x_1 + x_2 \leq 2\}$  e  $f(x) = x_2$ . Determine  $\int_R f$ .

**Teorema 3.15.**

Sejam  $A \subset \mathbb{R}^m$  e  $B \subset \mathbb{R}^n$   $m$ -retângulo e  $n$ -retângulo, respectivamente, e  $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável. Defina a função  $g_x(y) := f(x, y)$ . Então as funções  $L(g_x)$  e  $U(g_x)$  são integráveis e

$$\int_{A \times B} f = \int_A L(g_x) dx = \int_A U(g_x) dx.$$

De forma análoga, definindo  $h_y(x) := f(x, y)$ , temos que  $L(h_y)$  e  $U(h_y)$  são integráveis e

$$\int_{A \times B} f = \int_B L(h_y) dy = \int_B U(h_y) dy.$$

Note que se  $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, então  $g_x$  é integrável.

*Demonstração.* Considere uma partição  $P \{S_A \times S_B\}$  de  $A \times B$ . Observe que para todo  $x \in S_A$  temos

$$\sum_{S_B} m_{S_A \times S_B}(f) \text{vol}(S_B) \leq \sum_{S_B} m_{S_B}(g_x) \text{vol}(S_B) = L(g_x, P_B) \leq L(g_x).$$

Assim:

$$\begin{aligned} L(f, P) &= \sum_{S_A, S_B} m_{S_A \times S_B}(f) \text{vol}(S_A \times S_B) \\ &= \sum_{S_A} \left( \sum_{S_B} m_{S_A \times S_B}(f) \text{vol}(S_B) \right) \text{vol}(S_A) \\ &\leq L(L(g_x), P_A) \end{aligned}$$

De forma análoga se prova  $U(U(g_x), P_A) \leq U(f, P)$ . Assim:

$$L(f, P) \leq L(L(g_x), P_A) \leq U(L(g_x), P_A) \leq U(U(g_x), P_A) \leq U(f, P).$$

Como  $f$  é integrável  $\int_{A \times B} f = \int_A L(g_x) dx$ .

Argumentos análogos mostram os outros itens do Teorema.  $\square$

No exercício a seguir, vemos uma aplicação interessante do teorema de Fubini, onde a estratégia que sugerimos ao leitor(a) é e considerar  $U$  como região entre dois gráficos horizontais e re-escrever  $\int_U f dx$ .

**Exercício 3.16.**

Calcule  $\int_1^4 \int_{\frac{\ln(y)}{2}}^{\ln(2)} \frac{1}{\exp(x)+1} dx dy$

**Exemplo 3.17.**

Consideremos o problema do tempo enfrentado por uma pessoa em duas filas consecutivas, com tempo de espera médio  $m_1 = 10$  e  $m_2 = 5$  respectivamente. Seja  $X_i$  a variável aleatória que descreve possíveis tempos de espera na fila  $i$  (com  $i = 1, 2$ ) e aceitemos que a probabilidade de  $X_i$  estar entre  $a < b$  seja dada por:

$$P(a \leq X_i \leq b) = \int_a^b \rho_i(x_i) dx_i$$

onde a função densidade de probabilidade  $\rho_i$  é definida como:

$$\rho_i(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_i < 0 \\ \frac{\exp(-\frac{x_i}{m_i})}{m_i} & \text{se } x_i \geq 0. \end{cases}$$

Visto que as variáveis aleatórias são independentes, aceitaremos também que a função de probabilidade conjunta é dada por  $\rho(x_1, x_2) = \rho_1(x_1)\rho_2(x_2)$ , visto que as variáveis aleatórias são independentes.

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_1 < 0 \text{ ou } x_2 < 0 \\ \frac{\exp(-\frac{x_1}{m_1}) \exp(-\frac{x_2}{m_2})}{m_1 m_2} & \text{se } x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Nosso objetivo neste exemplo é calcular a probabilidade do indivíduo em menos de 20 minutos sair das duas filas.

No *passo 1* determinamos a região  $U$  onde iremos integrar função  $\rho$ . Baseado onde a função  $\rho$  não será zero, podemos escolher  $U := \{x \in \mathbb{R}^2; x_1 + x_2 \leq 20, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ .

No *passo 2* (baseado no passo 1) escolhemos a técnica de integração. Visto que  $U$  está entre 2 gráficos  $h_1(x_1) = 0$  e  $h_2(x_1) = 20 - x_1$  com domínio  $x_1 \in [0, 20]$  é natural escolher a técnica de Fubini.

$$P(0 \leq X_1 + X_2 \leq 20) = \int_U \rho dx = \int_0^{20} \left( \int_0^{20-x_1} \rho dx_2 \right) dx_1$$

## Continuação.

No passo 3 armamos e resolvemos a integral.

$$\begin{aligned}
 \int_U \rho dx &= \int_0^{20} \int_0^{20-x_1} \left( \frac{\exp(\frac{-x_1}{10}) \exp(\frac{-x_2}{5})}{10 \cdot 5} dx_2 \right) dx_1 \\
 &= \int_0^{20} \frac{\exp(\frac{-x_1}{10})}{10} \left( -\exp(\frac{-20+x_1}{5}) + \exp(0) \right) dx_1 \\
 &= \frac{1}{10} \int_0^{20} \exp\left(\frac{-x_1}{10}\right) - \exp\left(-4 + \frac{x_1}{10}\right) dx_1 \\
 &= -\exp(-4) \left( \exp\left(\frac{x_1}{10}\right) \Big|_0^{20} - \exp\left(-\frac{x_1}{10}\right) \Big|_0^{20} \right) \\
 &= -2e^{-2} + 1 + e^{-4}
 \end{aligned}$$

## 3.3. Partição da unidade

Nesta seção vamos a introduzir as ferramentas necessárias para integrar em uma variedade  $M$  de dimensão  $m$ .

**Definição 3.18.**

Uma coleção de funções  $\{\rho_i\}$  de funções suaves em  $M$  é chamada *partição da unidade* se:

- (a)  $0 \leq \rho_i(x) \leq 1$ ;
- (b) A coleção  $\{\text{supp } \rho_i\}_{i \in I}$ , onde  $\text{supp } \rho_i = \overline{\{x \in M \mid \rho_i(x) \neq 0\}}$ , é **localmente finita**, i.e., para todo  $x \in M$  existe uma vizinhança  $U$  contendo  $x$  tal que o número de  $i$ 's tal que  $U \cap \text{supp } \rho_i \neq \emptyset$  é finito.
- (c)  $\sum_i \rho_i = 1$ .

**Teorema 3.19. partição estritamente subordinada**

Seja  $\{U_\alpha\}$  uma cobertura aberta de  $M$ . Então existe uma partição da unidade  $\{\rho_\alpha\}$  tal que  $\text{supp } \rho_\alpha \subset U_\alpha$ .

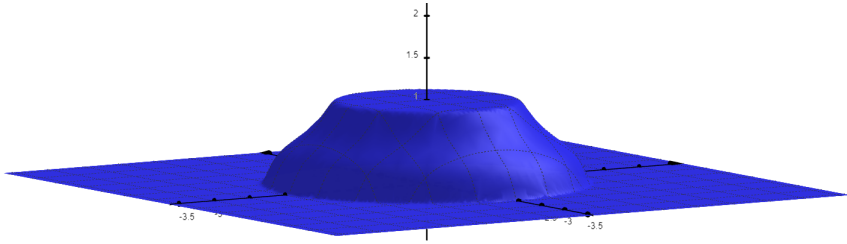


Figura 3.3: Função bump function

**Teorema 3.20. partição com suporte compacto**

Seja  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  uma cobertura aberta de  $M$ . Então existe uma partição da unidade  $\{\rho_\beta\}_{\beta \in J}$  com suporte compacto, tal que para cada  $\beta$  existe um  $\alpha$  tal que  $\text{supp } \rho_\beta \subset U_\alpha$ .

Observe que frequentemente não é possível ter uma partição da unidade com suporte compacto, estritamente subordinada a cobertura de uma variedade não compacta.

*Ideia da demonstração do Teorema 3.20* Defina  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \exp(-1/x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

e  $b : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$b(x) = \frac{h(4 - x_1^2 - \cdots - x_m^2)}{h(4 - x_1^2 - \cdots - x_m^2) + h(x_1^2 + \cdots + x_m^2 - 1)}$$

Aceitemos o resultado a seguir.

**Lema 3.21.**

Dado uma cobertura  $\{U_\alpha\}$  de  $M$  existe um refinamento localmente finito  $\{V_i\}$ , com coordenadas  $\{V_i, \psi_i\}$ , tal que  $\psi(V_i) = D(3)$  (disco de raio 3).

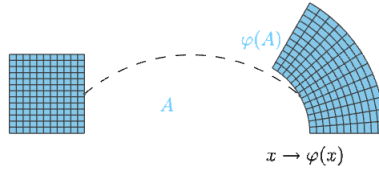


Figura 3.4: ilustrando teorema de mudança de variável

Seja  $b_i : M \rightarrow \mathbb{R}$  definida como:

$$b_i(x) = \begin{cases} b \circ \psi_i(x) & , x \in V_i \\ 0 & \text{se } x \notin V_i \end{cases}$$

A partição da unidade é definida então como:  $\rho_i = \frac{b_i}{\sum_j b_j} \square$

### 3.4. Mudança de variáveis

#### Teorema 3.22.

Seja  $\varphi : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  difeomorfismo de classe  $C^1$  e  $f : \varphi(A) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  função de suporte compacto. Então:

$$\int_{\varphi(A)} f(y) dy = \int_A f \circ \varphi(x) |\det D\varphi| dx$$

#### 3.4.1. Exemplo e exercícios

##### Exemplo 3.23.

Dado  $U = \{x \in \mathbb{R}^2; \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} \leq 1\}$  desejamo calcular  $\int_U x_1^2 dx$

No passo 1 determinamos a região  $U$ . Notemos que  $\partial U = \{x \in \mathbb{R}^2; \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} = 1\}$  ou seja a região  $U$  é a região delimitada pela elipse  $\partial U$ .



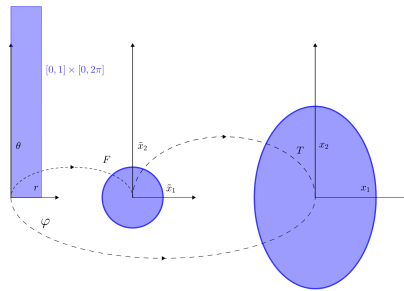


Figura 3.5: Ilustrando Exemplo 3.23

**Continuação.**

No passo 2 (baseado no passo 1) escolhemos a técnica de integração. Notemos que para  $\tilde{U} = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^2; \tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 \leq 1\}$  temos  $T(\tilde{U}) = U$  onde  $T(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (2\tilde{x}_1, 3\tilde{x}_2)$ . Ou seja  $U$  é uma região que é a deformação linear do disco  $\tilde{U}$ , este por sua vez é uma região invariante por rotação. Estas observações sugerem que uma técnica natural de integração é mudança de variável e que a parametrização adequada seja a composta de uma parametrização polar  $F(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$  com a transformação linear  $T$ . Mais precisamente definimos  $\varphi : V \rightarrow \tilde{U}$  como  $\varphi(r, \theta) = (2r \cos(\theta), 3r \sin(\theta))$  para  $V = \{(r, \theta); 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ , vide Figura 3.5.

No passo 3 armamos e resolvemos a integral. Para tanto notemos que  $D\varphi = 6r$ . Assim

$$\begin{aligned} \int_U x_1^2 dx &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2r \cos(\theta))^2 6r d\theta dr \\ &= \int_0^1 24r^3 \pi dr \\ &= 6\pi. \end{aligned}$$

**Exercício 3.24.**

Dado  $U = \{x \in \mathbb{R}^2; \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} \leq 1\}$  calcule  $\int_U x_2^2 dx$

**Exercício 3.25.**

Calcule  $\int_U x_1^2$  onde

$$U := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

**3.4.2. Demonstração do Teorema 3.22**

Por meio de **4 Afirmações** vamos reduzir a demonstração do Teorema a demonstração do caso particular descrito no Lema 3.26 (onde  $f = 1$  e  $A$  será uma vizinhança pequena  $U$  de um ponto  $a \in A$  onde iremos supor que  $D\varphi(a) = Id$ )

Para provar o Lema 3.26 utilizaremos os seguintes ingredientes:

- hipótese de indução (o teorema vale em  $\mathbb{R}^1$ )
- que para  $U$  pequeno  $\varphi = F \circ H$  onde

$$\begin{aligned} H(x) &= (\varphi_1(x), \dots, \varphi_{m-1}(x), x_m) \\ F(y) &= (y_1, \dots, y_{m-1}, \varphi_m(H^{-1}(y))) \end{aligned}$$

- Teorema de Fubini.

Observamos que as afirmações dependerão uma das outras, e aparecerão indiretamente na prova do Lema.

**Afirmação 1:** *Para demonstrar o teorema basta provar que ele vale nos conjuntos de uma cobertura finita de abertos relativamente compactos de  $\text{supp } f$ . Isto é, vamos supor que dada uma tal cobertura  $U_\alpha$  vale*

$$\int_{\varphi(U_\alpha)} h_\alpha(y) dy = \int_{U_\alpha} (h_\alpha \circ \varphi)(x) |\det D\varphi| dx \quad (3.4.1)$$

para toda função integrável  $h_\alpha$  com suporte compacto em  $U_\alpha$ .

*Demonstração.* Seja  $\{\rho_\alpha\}$  partição da unidade estritamente subordinada a  $\{U_\alpha\}$ .

Aplicando Eq (3.4.1) em  $h_\alpha(y) = \rho_\alpha(y)f(y)$  temos:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(A)} f(y)dy &= \sum_{\alpha} \int_{\varphi(A)} \rho_\alpha(y) \cdot f(y)dy \\ &= \sum_{\alpha} \int_{\varphi(U_\alpha)} \rho_\alpha(y) \cdot f(y)dy \\ &= \sum_{\alpha} \int_{U_\alpha} \rho_\alpha(\varphi(x))f(\varphi(x))|\det D\varphi|dx \\ &= \int_A (f \circ \varphi)(x)|\det D\varphi|dx \end{aligned}$$

□

**Afirmção 2:** Para demonstrar o teorema basta prova-lo no caso  $f = 1$

*Demonstração.* Observe primeiro que, pelas propriedades da integral, se o teorema é válido para  $f = 1$ , então é válido para  $f$  constante (\*). Seja  $K$  um retângulo contido em  $\varphi(A)$ ,  $P$  uma partição de  $K$  e  $f_S = m_S(f)$ . Assim

$$\begin{aligned} L(f, P) = \sum_{S \in P} m_S(f)\text{vol}(S) &= \sum_{S \in P} \int_S f_S dy \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{S \in P} \int_{\varphi^{-1}(S)} f_S \circ \varphi |\det D\varphi| dx \\ &\leq \sum_{S \in P} \int_{\varphi^{-1}(S)} f \circ \varphi |\det D\varphi| dx \\ &= \int_{\varphi^{-1}(K)} f \circ \varphi |\det D\varphi| dx. \end{aligned}$$

De forma análoga

$$\int_{\varphi^{-1}(K)} f \circ \varphi |\det D\varphi| dx \leq U(f, P).$$

Assim, considerando todas as partições  $P$ , concluímos pela definição de integral que

$$\int_{\varphi^{-1}(K)} f \circ \varphi |\det D\varphi| dx = \int_K f dx.$$

Segue da Afirmção 1 a Afirmção 2.

□

**Afirmção 3:** Se o teorema vale para difeomorfismos  $H$  e  $F$  então ele é válido para o difeomorfismo composto  $\varphi = F \circ H$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \int_{F \circ H(A)} f dz &= \int_{H(A)} f \circ F |\det DF| dy \\ &= \int_A f \circ F \circ H |\det DF| |\det DH| dx \\ &= \int_A f \circ \varphi |\det D\varphi| dx \quad \square \end{aligned}$$

□

**Afirmção 4:** O teorema é válido quando  $\varphi$  é aplicação linear

*Demonstração.* As afirmações 1 e 2 implicam que basta provar que

$$\int_{\varphi(U)} 1 dy = \int_U |\det \varphi| dx,$$

o que é deixado como exercício. □

□

Dado um ponto  $a \in A$  e compondo  $\varphi$  como  $(D\varphi(a))^{-1}$ , as afirmações reduzem a demonstração do teorema a provar o lema.

**Lema 3.26. (Principal)**

Seja  $\varphi : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  difeomorfismo de classe  $C^1$ . Suponha que exista  $a \in A$  tal que  $D\varphi(a) = Id$ . Então existe uma vizinhança relativamente compacta  $U$  de  $a$  tal que:

$$\int_{\varphi(U)} dy = \int_U |\det D\varphi| dx \quad (3.4.2)$$

*Demonstração.* Quando a dimensão de  $\mathbb{R}^m$  é 1 o resultado é provado em Cálculo. Vamos supor por indução que o teorema é verdadeiro para  $m - 1$

Defina aplicação  $H : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$H(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_{m-1}(x), x_m).$$

A hipótese de que  $D\varphi(a) = Id$  garante que  $DH = Id$  e assim que  $H$  é um difeomorfismo, se restringirmos o  $U$ .

Defina aplicação  $F : H(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$F(y) = (y_1, \dots, y_{m-1}, \varphi_m(H^{-1}(y))).$$

Reduzindo  $U$  temos que  $F$  é difeo e que

$$\varphi = F \circ H$$

Pela Afirmação 3, basta provar o Lemma 3.26 para  $H$  e  $F$ . Vamos demonstrar para  $H$  (prova de  $F$  é analoga). Definindo  $h_c = H(x_1, \dots, x_{m-1}, c)$  temos por Fubini (\*) e pela hipótese de indução (\*\*)

$$\begin{aligned} \int_{h(W \times [a,b])} 1 dy &\stackrel{(*)}{=} \int_{[a,b]} \left( \int_{h(W \times x_m)} 1 dy_1 \cdots dy_{m-1} \right) dx_m \\ &\stackrel{(**)}{=} \int_{[a,b]} \left( \int_W |\det Dh_{x_m}| dx_1 \cdots dx_{m-1} \right) dx_m \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_{W \times [a,b]} |\det Dh_{x_m}| dx \end{aligned}$$

□

### 3.5. Um pouco de integrais triplas

Nas seções anteriores concentramos nossos exemplos e exercícios em  $\mathbb{R}^2$ . Desejamos aqui ilustrar a teoria de integração com mais alguns exemplos agora em  $\mathbb{R}^3$  e ao mesmo tempo destacar procedimentos padrões para calcular integrais.

O ponto de partida de todo cálculo de integral tripla é começar por tentar entender sob qual região estamos integrando. A compreensão da região de integração irá sugerir qual técnica de integração parece ser mais adequada para problema tratado, além de quais deveriam ser os limites de integração (uma vez escolhido a técnica). *Em geral* em Cálculo III:

- a região  $U$  em  $\mathbb{R}^3$  é dada por *desigualdades*;
- seu bordo  $\partial U$  é composto por pedaços de superfícies (variedades de dimensão 2) que são dadas por *igualdades*.

Assim se estuda primeiro as superfícies dadas pelas igualdades para então determinar a região. Em particular merece destaque que em Cálculo III é comum que a região (e seu bordo) ou tenha alguma simetria (invariante por rotação ou translação) ou seja deformação de alguma região simétrica. Assim não custa recordar ou resumir como aluno(a)s de Cálculo III podem identificar facilmente as simetrias e deformações mais comuns.

- **Superfície de revolução:** Como já vimos,

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3, g(x_1^2 + x_2^2, x_3) = c\},$$

é uma superfície invariante por rotação. A forma mais simples de reconhecer se  $S$  é de fato dado pelo vínculo  $g(x_1^2 + x_2^2, x_3) = c$  (o que por vezes não é imediato para um(a) leitor(a) iniciante) é substituir  $r^2 = x_1^2 + x_2^2$  na igualdade que define  $S$  e verificar se após a substituição sobram apenas as variáveis  $r$  e  $x_3$  na igualdade, i.e.,  $g(r^2, x_3) = c$ . Para esboçar  $S$  basta considerar a curva geratriz  $C = S \cap \{x_1 = 0\} = \{(0, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | g(x_2^2, x_3) = c\}$  e gira-la em torno do eixo  $x_3$ , vide mais discussões no Exemplo 3.28.

- **Superfície invariante por translação:**

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3; g(x_1, x_2) = c\}$$

é uma superfície onde falta a variável  $x_3$  e assim invariante por aplicações  $F_c(x) = x + ce_3$  (translações na direção de  $e_3$ ). Para esboça-la basta considerar a curva plana  $C = \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3; g(x_1, x_2) = c\}$  e translada-la na direção de  $x_3$ , vide mais discussões no Exemplo 3.29.

- **Deformação por transformação linear:** Seja

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3; g\left(\frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{b}, \frac{x_3}{c}\right) = d\}$$

onde  $a, b, c$  são números positivos. Note que  $S = T(\tilde{S})$  onde  $\tilde{S} = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^3; \tilde{g}(\tilde{x}) = d\}$  e  $T(\tilde{x}) = (a\tilde{x}_1, b\tilde{x}_2, c\tilde{x}_3)$ . Então para esboçar  $S$  basta esboçar  $\tilde{S}$  e deforma-la pela transformação  $T$ , vide mais discussões no Exemplo 3.29.

Discussões análogas podem ser feitas para superfícies de rotação ou translação em torno dos outros eixos  $x_1$  e  $x_2$ .

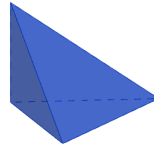


Figura 3.6: Ilustrando Exemplo 3.27

**Exemplo 3.27.**

Desejamos integrar  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1$  no tetraedro  $U$  limitado pelos planos coordenados e o plano  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$ .

No *passo 1*, determinamos a região  $U$ . Após esboçá-las descobrimos que a região está entre dois gráficos associados as funções  $h_1(x_1, x_2) = 0$  e  $h_2(x_1, x_2) = \frac{1}{3}(6 - x_1 - 2x_2)$  com domínios  $D = \{x \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x_1 \leq 6, 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{2}(6 - x_1)\}$ , vide Figura 3.6.

No *passo 2* (baseado no passo 1) escolhemos a técnica de integração. No caso por estarmos entre dois gráficos, vamos escolher aplicar o Teorema de Fubini.

$$\int_U f(x) dx = \int_D \left( \int_{h_1}^{h_2} f(x) dx_3 \right) dx_1 dx_2.$$

No *passo 3* armamos e resolvemos a integral. Em particular usamos novamente Fubini para integrar sobre  $D$ .

$$\begin{aligned} \int_U f(x) dx &= \int_0^6 \left( \int_0^{\frac{1}{2}(6-x_1)} \left( \int_0^{\frac{1}{3}(6-x_1-2x_2)} x_1 dx_3 \right) dx_2 \right) dx_1 \\ &= \int_0^6 \left( \int_0^{\frac{1}{2}(6-x_1)} \frac{1}{3}(6-x_1-2x_2)x_1 dx_2 \right) dx_1 \\ &= \int_0^6 \left( \int_0^{(3-\frac{x_1}{2})} \left( 2x_1 - \frac{x_1^2}{3} \right) - 2x_2 \frac{x_1}{3} dx_2 \right) dx_1 \\ &= \int_0^6 \left( 3 - \frac{x_1}{2} \right) \left( 2x_1 - \frac{x_1^2}{3} \right) - \left( 3 - \frac{x_1}{2} \right)^2 \frac{x_1}{3} dx_1 \\ &= 9. \end{aligned}$$

**Exemplo 3.28.**

Calculemos  $\int_U \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} dx$  onde

$$U := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \geq \sqrt{3x_1^2 + 3x_2^2}, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}.$$

No *passo 1* determinamos a região  $U$ . Uma das superfícies que contém parte de  $\partial U$  é a superfície  $S_1 = g_1^{-1}(0)$  onde  $g_1(x) = x_3 - \sqrt{3x_1^2 + 3x_2^2}$ . Ao substituir  $r^2 = x_1^2 + x_2^2$  em  $g_1(x) = 0$  ficamos com  $0 = x_3 - \sqrt{3}|r|$  o que implica que  $S_1$  é uma superfície de revolução. Assim sendo para esboçá-la precisamos descobrir a curva geratriz no plano  $x_1 = 0$ , i.e., a curva dada por  $x_3 = \sqrt{3}|x_2|$  e gira-la obtendo assim o cone  $S_1$ . A outra superfície que contém parte de  $\partial U$  é  $S_2 = g_2^{-1}(1)$  onde  $g_2(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  ou seja a esfera de raio 1. A região  $U$  então é a região acima do cone  $S_1$  e abaixo da esfera  $S_2$  (considerando referencial canônico), vide Figura 3.7.

No *passo 2* (baseado no passo 1) escolhemos a técnica de integração. Por ser uma região invariante por rotação escolhemos mudança de variável utilizando uma parametrização adaptada a rotação. Mais precisamente, como se trata de um setor em uma bola, optamos pela parametrização esférica.

$$\varphi(v, t, r) = (r \sin(v) \cos(t), r \sin(v) \sin(t), r \cos(v)).$$

A figura indica que definindo  $V = \{(v, t, r) \mid 0 \leq v \leq \frac{\pi}{6}, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq t \leq \pi\}$  temos  $\varphi(V) = U$ .

No *passo 3* armamos e resolvemos a integral. Note que  $\det D\varphi = r^2 \sin(v)$ . Seja  $f = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  temos:

$$\begin{aligned} \int_U f(x) dx &= \int_V f \circ \varphi \det D\varphi dv dt dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} r^3 \sin(v) dv dt dr \\ &= \frac{\pi}{2} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right). \end{aligned}$$



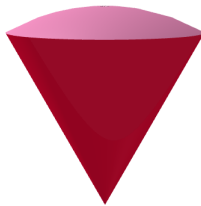


Figura 3.7: Ilustrando Exemplo 3.28

**Exemplo 3.29.**

Dado  $U = \{x \in \mathbb{R}^3; 0 \leq x_3 \leq 7 - x_1 - x_2, \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} \leq 1\}$  calculemos o centro de massa de  $U$ , i.e., o ponto  $p = (p_1, p_2, p_3)$  onde  $p_i = \frac{\int_U x_i dx}{\text{vol}(U)}$  e  $\text{vol}(U) = \int_U dx$  (volume de  $U$ ).

No *passo 1* determinamos a região  $U$ . Observe que parte do bordo  $\partial U$  está contido no plano  $S_1$  dado pela equação  $x_3 = 7 - x_1 - x_2$  e pelo plano  $x_3 = 0$ , ambos gráficos. A outra parte do bordo  $\partial U$  fica contida na superfície  $S_2$  dada pela equação  $\frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} = 1$ . visto que esta igualdade não tem a variável  $x_3$  podemos concluir que a superfície  $S_2$  é invariante por translações  $F_s(x) = x + se_3$ . Notemos também que tal superfície  $S_2$  é deformação de um cilindro  $\tilde{S}_2$  dado pela equação  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ , ou seja  $S_2 = T(\tilde{S}_2)$  para  $T(\tilde{x}) = (2\tilde{x}_1, 3\tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ . Concluimos que a região  $U$  fica contida entre 2 gráficos e dentro de um *cilindro deformado*, vide Figura 3.8.

No *passo 2* (baseado no passo 1) escolhemos a técnica de integração. Por ser uma região determinada entre gráficos em um domínio  $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} \leq 1\}$  utilizaremos Fubini e para  $f = x_i$  ou  $f = 1$  calcularemos

$$\begin{aligned} \int_U f dx &= \int_D \left( \int_0^{7-x_1-x_2} f dx_3 \right) dx_1 dx_2 \\ &= \int_D g dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Para integrar a função  $g$  (que dependerá da função  $f$ ) iremos escolher então mudança de variável  $\varphi(r, \theta) = (2r \cos(\theta), 3r \sin(\theta))$ , observando que

## Continuação.

$D\varphi = 6r$  e para  $V = \{(r, \theta); 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$  temos  $D = \varphi(V)$ , recorde detalhes no Exemplo 3.23.

No passo 3 armamos e resolvemos a integral. Nas contas a seguir utilizaremos o fato da região  $D$  ser invariante por reflexões nos eixos  $x_1$  e  $x_2$  o que nos garante que

$$\int_D x_1 dx_1 dx_2 = \int_D x_2 dx_1 dx_2 = \int_D x_1 x_2 dx_1 dx_2 = 0. \quad (3.5.1)$$

Também utilizaremos as integrais do Exemplo 3.23 e Exercício 3.24, i.e.,

$$\int_D x_1^2 dx_1 dx_2 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2r \cos(\theta))^2 6r d\theta dr = 6\pi. \quad (3.5.2)$$

$$\int_D x_2^2 dx_1 dx_2 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (3r \sin(\theta))^2 6r d\theta dr = \frac{27\pi}{2}. \quad (3.5.3)$$

Podemos agora calcular  $p_i = \frac{\int_U x_i dx}{\text{vol}(U)}$ .

$$\begin{aligned} \text{vol}(U) &= \int_D \left( \int_0^{7-x_1-x_2} 1 dx_3 \right) dx_1 dx_2 \\ &= \int_D (7 - x_1 - x_2) dx_3 dx_1 dx_2 \\ &\stackrel{(3.5.1)}{=} \int_D 7 dx_1 dx_2 \\ &= 42\pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_U x_1 dx &= \int_D \left( \int_0^{7-x_1-x_2} x_1 dx_3 \right) dx_1 dx_2 \\ &= \int_D x_1 (7 - x_1 - x_2) dx_1 dx_2 \\ &\stackrel{(3.5.1)}{=} \int_D -x_1^2 dx_1 dx_2 \\ &\stackrel{(3.5.2)}{=} -6\pi \end{aligned}$$

Continuação.

$$\begin{aligned}
 \int_U x_2 dx &= \int_D \left( \int_0^{7-x_1-x_2} x_2 dx_3 \right) dx_1 dx_2 \\
 &= \int_D x_2 (7 - x_1 - x_2) dx_1 dx_2 \\
 &\stackrel{(3.5.1)}{=} \int_D -x_2^2 dx_1 dx_2 \\
 &\stackrel{(3.5.3)}{=} -\frac{27\pi}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_U x_3 dx &= \int_D \left( \int_0^{7-x_1-x_2} x_3 dx_3 \right) dx_1 dx_2 \\
 &= \frac{1}{2} \int_D (7 - (x_1 + x_2))^2 dx_1 dx_2 \\
 &= \frac{1}{2} \int_D 49 dx_1 dx_2 - \frac{1}{2} \int_D 14(x_1 + x_2) dx_1 dx_2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_D x_1^2 dx_1 dx_2 + \frac{1}{2} \int_D 2x_1 x_2 dx_1 dx_2 + \frac{1}{2} \int_D x_2^2 dx_1 dx_2 \\
 &\stackrel{(3.5.1)}{=} \frac{1}{2} \int_D 49 dx_1 dx_2 + \frac{1}{2} \int_D x_1^2 dx_1 dx_2 + \frac{1}{2} \int_D x_2^2 dx_1 dx_2 \\
 &\stackrel{(3.5.2)}{=} \frac{49}{2} (6\pi) + \frac{1}{2} (6\pi) + \frac{1}{2} \int_D x_2^2 dx_1 dx_2 \\
 &\stackrel{(3.5.3)}{=} \frac{49}{2} (6\pi) + \frac{1}{2} (6\pi) + \frac{1}{2} \left( \frac{27\pi}{2} \right) \\
 &= \frac{627\pi}{4}
 \end{aligned}$$

Concluimos então que:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \frac{\int_U x_1 dx}{\text{vol}(U)} = -\frac{1}{7} \\
 p_2 &= \frac{\int_U x_2 dx}{\text{vol}(U)} = -\frac{9}{28}
 \end{aligned}$$

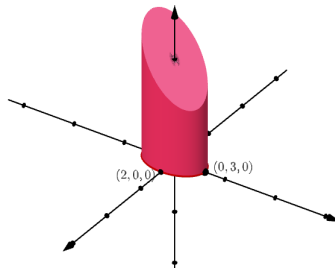


Figura 3.8: Ilustrando Exemplo 3.29

Continuação.

$$p_3 = \frac{\int_U x_3 dx}{\text{vol}(U)} = \frac{209}{56}$$

### 3.6. Teoremas clássicos de Gauss, Stokes e Green

Desejamos aqui nesta seção relembrar os teoremas de Gauss e Stokes (em geral vistos em uma disciplina de Cálculo III), os quais serão demonstrados (utilizando a linguagem de formas diferenciais) no próximo capítulo.

Ao longo desta seção  $S$  será sempre uma superfície mergulhada de  $\mathbb{R}^3$  a qual será (a menos de um conjunto finito de curvas) imagem de uma parametrização, i.e., uma imersão  $\varphi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ . Tal superfície será sempre orientada, ou seja admitirá um vetor normal unitário contínuo ao longo de  $S$ . Tal vetor normal unitário  $\vec{N}$  pode ser descrito em termos da orientação como:

$$\vec{N} \circ \varphi(x_1, x_2) = c \frac{\varphi_{x_1} \times \varphi_{x_2}}{\|\varphi_{x_1} \times \varphi_{x_2}\|}$$

onde  $|c| = 1$  (onde o sinal será escolhido de acordo com a orientação).

#### 3.6.1. Fluxo através de superfícies e teorema clássico de Gauss

Começamos por relembrar os conceitos de integral de superfície e fluxo ao longo de superfície.

Dado uma função  $f$  definida na vizinhança de  $S$  podemos então definir a **integral de superfície** como

### Definição 3.30.

$$\int_S f |\text{vol}_S| := \int_V f \circ \varphi \|\varphi_{x_1} \times \varphi_{x_2}\| dx$$

Observaremos no próximo capítulo que a mudança de variável garantirá que a definição acima não depende de parametrização.

### Observação 3.31.

No caso em que  $f = 1$  a integral é chamada **área de  $S$** . No caso em que  $V$  é um retângulo a interpretação da área de  $S$  segue direto da definição de integral dupla. Ou seja dado um  $\epsilon > 0$  podemos encontrar uma partição  $P$  tal que

$$\left| \int_S f |\text{vol}_S| - \sum_{V_i \in P} f \circ \varphi(c_i) \|\varphi_{x_1} \times \varphi_{x_2}\| |\text{vol}(V_i)| \right| < \epsilon$$

sendo que o somatório pode ser interpretado como a área de uma superfície  $\tilde{S}$  que é união de faces de paralelepíedros com arestas definidas por vetores coordenados  $\varphi_{x_1}$  e  $\varphi_{x_2}$ .

### Exemplo 3.32.

Calculemos  $\int_S (1 - x_3) |\text{vol}_S|$  onde

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3; x_3 = 1 - x_1^2 - x_2^2, x_3 \geq 0\}.$$

*Passo 1: Estudamos a superfície.* Identificamos que  $S$  é um gráfico e uma superfície de revolução ( $x_3 = 1 - r^2$  onde  $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ )

*Passo 2: Escolhemos a técnica de integração.* Baseado no Passo 1 e simplicidade do problema, utilizaremos a definição e escolheremos a parametrização de superfície de revolução, i.e.,

$$\varphi(r, \theta) = (\alpha_1(r) \cos(\theta), \alpha_1(r) \sin(\theta), \alpha_2(r))$$

onde  $\alpha(r) = (\alpha_1(r), 0, \alpha_2(r))$  é a curva geratriz (i.e., plana que é a interseção

## Continuação.

de  $S$  ao plano  $x_2$ ). Como no nosso caso  $\alpha(r) = (r, 0, 1 - r^2)$  e temos:

$$\varphi(\theta, r) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), 1 - r^2)$$

*Passo 3: Armamos e resolvemos a integral dupla.* Para tanto determinamos o domínio de integração  $V = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ , o elemento de área  $\|\varphi_r \times \varphi_\theta\| = r\sqrt{1 + 4r^2}$  e avaliamos  $f \circ \varphi = 1 - (1 - r^2) = r^2$

$$\begin{aligned} \int_S f |\text{vol}_S| &= \int_U f \circ \varphi \|\varphi_{x_1} \times \varphi_{x_2}\| dx \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 (r\sqrt{1 + 4r^2}) dr d\theta \\ &= \pi \left( \frac{5\sqrt{5}}{12} + \frac{1}{60} \right) \end{aligned}$$

Se além disto tivermos um campo  $\vec{F}$  definido na vizinhança de  $S$  **definimos o fluxo de  $\vec{F}$  através de  $S$**  como a integral de superfície onde consideramos  $f = \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle$  ou seja:

$$\begin{aligned} \int_S \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S &= \int_V \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \circ \psi \|\psi_{x_1} \times \psi_{x_2}\| dx_1 dx_2 \\ &= c \int_V \left\langle \vec{F} \circ \psi, \frac{\psi_{x_1} \times \psi_{x_2}}{\|\psi_{x_1} \times \psi_{x_2}\|} \right\rangle \|\psi_{x_1} \times \psi_{x_2}\| dx_1 dx_2 \\ &= c \int_V \langle \vec{F} \circ \psi, \psi_{x_1} \times \psi_{x_2} \rangle dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

**Exemplo 3.33.**

Calculemos o fluxo  $\int_S \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S$  orientada com vetor unitário com componente  $\vec{e}_3$  negativa. onde:

$$\vec{F} = x_2 x_3 \vec{e}_1 + x_1 x_3 \vec{e}_2 + x_2 x_1 \vec{e}_3$$

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3; x_3 = \sqrt{x_1 + x_2}, 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1, \}$$

*Passo 1: Estudamos a superfície.*  $S$  é um gráfico, i.e,  $x_3 = h(x_1, x_2)$ , onde  $h(x) = \sqrt{x_1 + x_2}$ . Note que não é superfície de revolução (embora esteja contida em uma, o domínio do gráfico não é um disco).

## Continuação.

Passo 2: Escolhemos a parametrização. Visto que é um gráfico temos:

$$\varphi(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \sqrt{x_1 + x_2})$$

com  $V = \{x \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$

Passo 3: Armamos e resolvemos a integral dupla. Substituindo

$$F \circ \psi = \left(x_2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) \vec{e}_1 + \left(x_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) \vec{e}_2 + \left(x_2 x_1\right) \vec{e}_3$$

e calculando vetor normal (levando em conta a orientação):

$$\begin{aligned} -\|N\| \vec{N} \circ \varphi &= (\varphi_{x_1} \times \varphi_{x_2}) \\ &= -\frac{\partial h}{\partial x_1} \vec{e}_1 - \frac{\partial h}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ &= -\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right) \vec{e}_1 - \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right) \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{aligned}$$

temos que  $\langle F \circ \psi, \vec{N} \rangle \|\vec{N}\| = -x_2 x_1$ . O fluxo é:

$$\begin{aligned} \int_S \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S &= - \int_V \langle F \circ \psi, \psi_{x_1} \times \psi_{x_2} \rangle dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 x_2 x_1 dx_1 dx_2 \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

**Teorema 3.34. Teorema de Gauss**

Sejam  $S$  superfície compacta (não necessariamente conexa) orientada por um vetor unitário normal  $\vec{N}$  apontando para fora e  $U$  região delimitada por uma superfície  $S$  mergulhada (possivelmente união disjunta de superfícies mergulhadas  $S_i$ ) ou seja  $\partial U = S$ . Considere um campo suave  $\vec{F}$  definido em uma vizinhança contendo  $U$ . Então

$$\int_U \text{Div } \vec{F} \, dx = \int_S \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S.$$

**Observação 3.35. Equação de continuidade**

Consideremos um fluido com velocidade  $\vec{v}$  e densidade  $\rho$ . Dado uma região aberta  $U \subset \mathbb{R}^3$  contornada por uma superfície compacta  $S$  (i.e.,  $\partial U = S$ ) orientada por um vetor normal unitário  $\vec{N}$  apontando para fora. Estamos aqui considerando o princípio que o fluido não é criado nem destruído, ou seja a quantidade que decresce em  $U$  deve coincidir com o fluxo através de  $S$  i.e.,:

$$-\frac{d}{dt} \int_U \rho dx = \int_S \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S$$

onde  $\vec{F} = \rho\vec{v}$ . Aplicando o teorema de Gauss temos:

$$\int_U -\frac{d}{dt} \rho dx = \int_S \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S = \int_U \text{Div } \vec{F} dx$$

A arbitrariedade na escolha de  $U$  garante que:

$$\frac{d}{dt} \rho + \text{Div}(\rho\vec{v}) = 0 \tag{3.6.1}$$

Demonstraremos o Teorema 3.34 no próximo capítulo usando formas diferenciais e o conceito de variedade com bordo. Cabe aqui ressaltar que o teorema também vale para situações mais gerais do que as discutidas no próximo capítulo, quando  $S$  não é necessariamente variedade suave mas sim uma união finita de superfícies. Para demonstrar este caso mais geral faz-se necessário ir além de das variedades com bordo, e introduzir o conceito de cadeias, o que não faremos neste texto. Porém acreditamos que uma vez que o(a) leitor(a) tenha compreendido as ideias centrais de formas diferenciais em variedade com bordo, entenderá mais facilmente a generalização apresentada em topologia algébrica. Mesmo não demonstrando o teorema de Gauss para o caso em que  $S$  não é uma superfície e sim união de superfícies, apresentamos a seguir um exemplo desta situação, visto sua fundamental utilidade em cálculos e modelagens.

**Exemplo 3.36.**



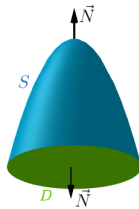


Figura 3.9: Ilustrando Exemplo 3.36

**Continuação.**

Calcule  $\int_S \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S$ , onde

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 4 - x_1^2 - x_2^2, x_3 \geq 0\}$$

$$\vec{F} = (x_1 + \exp(x_2))\vec{e}_1 + (x_2x_3 + \sin^2(x_1))\vec{e}_2 + (5 + x_3^2)\vec{e}_3$$

$$0 < \langle \vec{N}, \vec{e}_3 \rangle$$

*Passo 1: Estudamos a superfície.* Nossa superfície  $S$  é um gráfico ( $x_3 = h(x_1, x_2)$ ) e uma superfície de revolução ( $x_3 = 4 - r^2, x_3 \geq 0$  onde  $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ ).

*Passo 2: Baseado no Passo 1, escolhemos a técnica de integração.* O campo  $\vec{F}$  é em princípio um campo complicado para calcular o fluxo diretamente. Porém o cálculo do  $\text{Div } \vec{F} = (1 + 3x_3)$  é de fato bem mais fácil. Assim optaremos em calcular o fluxo utilizando o teorema de Gauss, ou seja calculando o  $\text{Div } \vec{F}$  na região  $U$  delimitada por  $S$ . Porém aqui temos um problema. A superfície  $S$  não é compacta, então não podemos utilizar o teorema diretamente. A questão é resolvida considerando a superfície  $D = \{x \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$  (orientada com vetor normal apontando para baixo, i.e.,  $-\vec{e}_3$ ) e aplicando o teorema de Gauss a nova superfície  $\tilde{S} = S \cup D$ . Note que aqui a nova superfície  $\tilde{S}$  não é uma variedade e sim união de 2 variedades, então estaremos aplicando uma versão mais geral do teorema de Gauss, vide Figura 3.9. Temos então:

$$\int_U \text{Div } \vec{F} dx = \int_{\tilde{S}} \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_{\tilde{S}} = \int_S \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S + \int_D \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_D$$

## Continuação.

ou seja:

$$\int_S \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S = \int_U \text{Div } \vec{F} dx - \int_D \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_D$$

*Passo 2.1* Afim de calcular  $\int_U \text{Div } \vec{F} dx$ , visto que  $S$  é uma superfície de revolução e gráfico, iremos escolher uma mudança de variável seguida por Fubini. Aqui o difeomorfismo sera parametrização cilíndrica:

$$\tilde{\varphi}(r, \theta, x_3) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), x_3)$$

com domínio

$$\tilde{V} = \{(r, \theta, x_3) | 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2, 0 \leq x_3 \leq 4 - r^2\}$$

*Passo 2.2* Afim de calcular  $\int_D \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_D$  utilizaremos a fórmula de fluxo e parametrização  $\varphi(r, \theta) = (r \sin(\theta), r \cos(\theta))$  e domínio  $V = \{(r, \theta); 0 \leq r \leq 2\}$  observando que  $\langle \vec{F}, (-\vec{e}_3) \rangle \circ \varphi = -5$ .

*Passo 3: Armamos e resolvemos a integral.*

*Passo 3.1*

$$\begin{aligned} \int_U \text{Div } \vec{F} dx &= \int_{\tilde{V}} (1 + 3x_3) r dx_3 d\theta dr \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{4-r^2} (1 + 3x_3) r dx_3 d\theta dr \\ &= 2\pi \int_0^2 r \left( x_3 + \frac{3}{2} x_3^2 \right) \Big|_0^{4-r^2} dr \\ &= 40\pi \end{aligned}$$

*Passo 3.2*

$$\begin{aligned} \int_D \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_D &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 -5r dr d\theta \\ &= -20\pi \end{aligned}$$

## Continuação.

Assim

$$\begin{aligned}\int_S \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S &= \int_U \text{Div } \vec{F} dx - \int_D \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_D \\ &= 40\pi + 20\pi \\ &= 60\pi.\end{aligned}$$

**3.6.2. Trabalho e os teoremas clássicos de Stokes e Green**

Antes de enunciar o clássico teorema de Stokes, precisamos relembrar os objetos que aparecem em seu enunciados.

**Definição 3.37.**

Seja  $C$  uma curva suave (mergulhada) em  $\mathbb{R}^m$  e  $f$  uma função suave definida em uma vizinhança  $C$ . A **integral de linha** ou integral de  $f$  ao longo de  $C$  é definida como:

$$\int_C f |\text{vol}_C| := \int_a^b f \circ \alpha(t) \|\alpha'(t)\| dt$$

onde  $\alpha : [a, b] \rightarrow C$  uma parametrização regular de  $C$  (i.e,  $\|\alpha'\| \neq 0$ ).

Quando temos um campo  $\vec{F}$  suave em uma vizinhança da curva  $C$  podemos definir um tipo especial de integral de linha chamado trabalho. Para tanto precisamos também considerar em  $C$  uma **orientação** ou seja consideramos um campo unitário  $\vec{T}$  tangente a  $C$ . O **trabalho** de  $\vec{F}$  ao longo de  $C$  orientada por  $\vec{T}$  é:

$$\begin{aligned}\int_C \langle \vec{F}, \vec{T} \rangle \text{vol}_C &= \int_a^b \left\langle \vec{F} \circ \alpha(t), \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \right\rangle \|\alpha'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \langle \vec{F} \circ \alpha(t), \alpha'(t) \rangle dt\end{aligned}$$

onde  $\alpha$  é uma parametrização de  $C$  com  $\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \vec{T} \circ \alpha$ .

É possível demonstrar que integral de linha não depende da parametrização. Da mesma forma o trabalho de  $\vec{F}$  ao longo da curva orientada  $C$  não depende da parametrização, somente de sua orientação. Note em particular que *trabalho ao longo da curva ligando  $p_0$  a  $p$  é menos o trabalho da curva ligando  $p$  a  $p_0$ .*

**Proposição 3.38. Campo conservativo**

Considere um campo suave  $\vec{F}$  em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$ . As seguintes afirmações são equivalentes:

- (a)  $\vec{F}$  é um campo conservativo, i.e., existe uma função suave  $f \in C^\infty(U)$  tal que  $\vec{F} = \nabla f$ ;
- (b) o trabalho de  $\vec{F}$  não depende do caminho ligando um ponto fixo  $p_0 \in U$  a qualquer ponto  $p \in U$ .

*Demonstração.* (a)  $\Rightarrow$  (b). Dado um campo  $\vec{F} = \nabla f$  e um caminho  $C$  ligando dois pontos  $p_0$  e  $p$ , considere uma parametrização  $\gamma : [0, 1] \rightarrow C$  com mesma orientação de  $C$ . Então

$$\begin{aligned} \int_C \langle \vec{F}, \vec{T} \rangle \text{vol}_C &= \int_0^1 \langle \vec{F} \circ \gamma, \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (f \circ \gamma) dt \\ &= f \circ \gamma(1) - f \circ \gamma(0) \\ &= f(p) - f(p_0). \end{aligned}$$

Tal equação implica que o trabalho de um campo conservativo depende apenas do ponto inicial e final e não do caminho que os liga.

(b)  $\Rightarrow$  (a). Por hipótese a função  $f(p) = \int_C \langle \vec{F}, \vec{T} \rangle \text{vol}_C$  está bem definida sendo  $C$  uma curva qualquer ligando  $p_0$  a  $p$ . Escolha  $\epsilon > 0$  pequeno o suficiente tal que  $\gamma(t) = p + t\epsilon\vec{e}_i \in U$  para qualquer  $t \in [0, 1]$ . Assim:

$$\begin{aligned} f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) &= \int_{C \cup \gamma} \langle \vec{F}, \vec{T} \rangle \text{vol}_C - \int_C \langle \vec{F}, \vec{T} \rangle \text{vol}_C \\ &= \int_\gamma \langle \vec{F}, \vec{T} \rangle \text{vol}_C \\ &= \int_0^1 f_i(p + t\epsilon\vec{e}_i) \epsilon dt \\ &= f_i(p)\epsilon + g(\epsilon) \end{aligned}$$

onde  $g(\epsilon) = \epsilon \int_0^1 f_i(p + t\epsilon\vec{e}_i) - f_i(p) dt$ . Visto que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{g}{\epsilon} = 0$  concluímos pela unicidade da derivada que  $\frac{\partial}{\partial x_i} f(p) = f_i(p)$ . A arbitrariedade de  $i$  e da escolha de  $p \in U$  garantem assim que  $\nabla f = \vec{F}$ .

□

A proposição acima é boa para encontrar a função potencial  $f$  uma vez que soubermos que o campo já é conservativo, porém não é muito eficiente para verificar que o campo é de fato conservativo, pois teríamos que de alguma forma garantir que o trabalho independe de integração ao longo de todos os caminhos ligando  $p_0$  a qualquer  $p$ . A proposição a seguir garante uma forma eficiente para verificar que um campo é conservativo. Ela seguirá no caso  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{R}^2$  dos teoremas clássicos de Stokes e Green que veremos em breve. No caso geral ela será uma consequência do teorema de Stokes (para formas diferenciais) aplicado a uma superfície com bordo composto por 2 curvas ligando  $p_0$  e  $p$ .

### Proposição 3.39.

Seja  $\vec{F} = \sum_{i=1}^m f_i \vec{e}_i$  um campo suave em uma aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$  simplesmente conexo. <sup>a</sup> Então  $\vec{F}$  é conservativo, se e somente se,  $\frac{\partial}{\partial x_j} f_i = \frac{\partial}{\partial x_i} f_j$ .

<sup>a</sup>Um aberto  $U$  é simplesmente conexo se toda curva fechada pode ser deformado continuamente para um ponto.

### Observação 3.40.

A proposição anterior se generaliza no próximo capítulo da seguinte forma: toda 1-forma  $\omega$  em um aberto simplesmente conexo  $U$ , é fechada ( $d\omega = 0$ ) se e somente se for exata (i.,.e existe  $f$  tal que  $df = \omega$ ).

O outro ingrediente que precisamos recordar é o de orientação induzida no bordo de uma superfície. Seja  $V \subset \mathbb{R}^2$  um aberto relativamente compacto (i.e., tal que  $\bar{V}$  é compacto) com bordo  $\partial V = \cup_{i=1}^k C_i$  sendo uma união finita de curvas  $C_i$  sem auto-interseção e regulares. A orientação induzida em  $\partial V$  é definida da seguinte maneira: dado  $x \in \partial V$ , podemos encontrar  $Q \in SO(2)$  tal que  $Q\vec{e}_1$  é vetor normal ao bordo apontando para fora da região  $V$ . Então o campo  $\vec{T}$  ao longo de  $\partial V$  que define a **orientação induzida** é definido como  $\vec{T}(x) = Q\vec{e}_2(x)$ .

### Exemplo 3.41. Orientação induzida

Seja  $V = \{x \in \mathbb{R}^2; \frac{1}{2} < \|x\| < 1\}$ . Note que  $\partial V$  é união de dois círculos  $C_1 = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| = \frac{1}{2}\}$  e  $C_2 = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| = 1\}$ . Quando dotamos o bordo com a orientação induzida, temos que  $C_1$  é orientado no sentido horário e  $C_2$  no sentido anti-horário.

Agora que entendemos orientação induzida no bordo  $\partial V = \cup_{i=1}^k C_i$ , estamos finalmente prontos para entender orientação do bordo de uma superfície  $S$

orientada por um vetor  $\vec{N}$ . Suponha que  $V \subset \tilde{V} \subset \mathbb{R}^2$  e que  $S$  admite uma parametrização  $\varphi : \tilde{V} \rightarrow S$  compatível com a orientação de  $S$  ou seja tal que  $\vec{N} \circ \varphi = \frac{\varphi_{x_1} \times \varphi_{x_2}}{\|\varphi_{x_1} \times \varphi_{x_2}\|}$ . A orientação de  $\partial S$  é então dada pela orientação das curvas  $\varphi(C_i)$ . Em particular se  $\partial S$  for conexo, a sua orientação coincide com a orientação induzida pela regra da mão direita em relação  $\vec{N}$ , vide Figura 3.10.

Estamos finalmente prontos para enunciar o teorema de Stokes.

### Teorema 3.42. Stokes

Seja  $S$  superfície mergulhada orientada por um vetor normal  $\vec{N}$  com bordo  $C$  (possivelmente desconexo) com orientação induzida  $\vec{T}$ . Dado um campo suave  $\vec{F}$  definido na vizinha de  $S$  temos:

$$\int_S \langle \text{Rot } \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S = \int_C \langle \vec{F}, \vec{T} \rangle \text{vol}_C$$

### Exemplo 3.43.

Calcule o trabalho  $\int_C \langle \vec{F}, \vec{T} \rangle \text{vol}_C$  onde

$$\begin{aligned} \vec{F} &= (-x_2^3)\vec{e}_1 + (x_1^3)\vec{e}_2 + (-x_3^3)\vec{e}_3 \\ C &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 3, x_1 + x_2 + x_3 = 1\} \end{aligned}$$

sendo  $C$  curva orientada no sentido anti-horário quando visto de cima (em relação ao eixo  $x_3$ ).

*Passo 1: Estudamos a curva* Trata-se de uma curva contida na interseção de um plano e um cilindro, sendo assim fronteira de uma superfície  $S$  contido neste plano. Note que  $S$  é gráfico da função altura  $h(x_1, x_2) = 1 - x_1 - x_2$  com domínio  $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq \sqrt{3}\}$ .

*Passo 2: baseado no Passo 1, vamos escolher a técnica de integração.* Iremos aqui calcular o trabalho utilizando o teorema de Stokes. Para tanto iremos escolher o gráfico  $S$  descrito no passo 1, orientado pelo vetor normal  $\vec{N}$  com terceira componente positiva, vide Figura 3.10. Em outras palavras desejamos calcular o fluxo definido no lado direito da equação:

$$\int_C \langle \vec{F}, \vec{T} \rangle \text{vol}_C = \int_S \langle \text{Rot } \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S$$

A superfície de  $S$  é parametrizada por  $\varphi(x_1, x_2) = (x_1, x_2, h(x_1, x_2))$  e

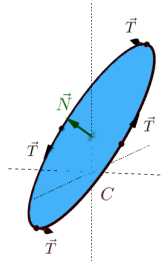


Figura 3.10: Ilustrando Exemplo 3.43

**Continuação.**

$(x_1, x_2) \in D$ . Assim:

$$\varphi_{x_1} \times \varphi_{x_2} = \|N\| \vec{N} \circ \varphi = (-h_{x_1}) \vec{e}_1 + (-h_{x_2}) \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

Note também que:  $\text{Rot } \vec{F} = (3x_1^2 + 3x_2^2) \vec{e}_3$

Passo 3: *Armamos e resolvemos a integral.* Baseado no Passo 2 temos:

$$\begin{aligned} \int_C \langle \vec{F}, \vec{T} \rangle \text{vol}C &= \int_S \langle \text{Rot } \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S \\ &= \int_D \langle \text{Rot } \vec{F} \circ \varphi, \varphi_{x_1} \times \varphi_{x_2} \rangle dx \\ &= \int_D (3x_1^2 + 3x_2^2) dx \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} 3r^2 r dr d\theta \\ &= \frac{27\pi}{2}. \end{aligned}$$

onde (\*) utiliza a mudança de variável e parametrização polar.

Considerando  $S$  uma superfície plana, ou seja um aberto  $V \subset \mathbb{R}^2$ , vemos que o teorema clássico de Stokes implica diretamente o teorema clássico de Green.

**Corolário 3.44. Green**

Seja  $V \subset \mathbb{R}^2$  aberto relativamente compacto sendo seu bordo  $\partial V = C$  composto de um número finito de curvas suaves, com orientação induzida por  $\vec{T}$ . Dado um campo

## Continuação.

suave  $\vec{F} = f_1\vec{e}_1 + f_2\vec{e}_2$  em uma vizinhança de  $V$  temos:

$$\int_V \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx = \int_C \langle \vec{F}, \vec{T} \rangle \text{vol}_C$$

De forma análoga ao teorema de Gauss, precisamos destacar que os teoremas clássicos de Stokes e de Green, também são verdadeiros quando as curvas que compõem o bordo de  $V$  são suave por partes (e não apenas regulares). Tal generalização em particular é utilizada no exercício a seguir.

**Exercício 3.45.**

Utilizando o teorema de Green e a Proposição 3.38 demonstre a Proposição 3.39 quando  $U$  é aberto em  $\mathbb{R}^2$ .

**3.6.3. Aplicações as Equações de Maxwell (\*)**

Nosso modesto objetivo nesta subseção é observar como as formulações integrais das equações de Maxwell implicam suas formulações diferenciais, utilizando para isto os teoremas de Gauss e Stokes. Não iremos aqui discutir todos os conceitos da rica teoria de eletromagnetismo, nem toda história entre século XVIII e XIX que culminaram na síntese apresentada por Maxwell. Para tanto aconselhamos o(a) leitor(a) procurar a rica literatura da área.

Um *campo elétrico*  $\vec{E}$  em Física é definido em cada ponto  $x \in \mathbb{R}^3$  como a força experimentada por uma carga de teste estática em  $x$ , dividido pela carga de teste ou seja dado uma *carga teste estática*  $q$  em  $x$  **campo elétrico**  $\vec{E}$  é definido como  $\vec{F}_e = q\vec{E}$ . O campo elétrico  $\vec{E}$  pode ser estático (campo eletrostático), i.e., sem dependência temporal ou pode depender do tempo (sendo por exemplo a soma de um campo eletrostático com um campo elétrico induzido). Em particular toda carga  $q_0$  induzi, pela **Lei de Coulomb**, um campo eletrostático  $\vec{E}(x) = -\text{grad } \psi(x)$  onde  $\psi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definido como  $\psi(x) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0\|x\|}$  é chamado potencial eletrostático, e  $\epsilon_0$  é constante elétrica.

**Observação 3.46. Lei de Gauss**

A *formulação integral da Lei de Gauss* garante que: o fluxo de uma campo elétrico passando por uma superfície fechada qualquer é proporcional a carga elétrica contida no interior da região delimitada pela superfície. *Mais precisamente: dado uma distribuição continua de cargas elétricas com densidade de carga  $\rho(x)$  em*



## Continuação.

uma região  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  limitada por uma superfície compacta  $S$ , i.e,  $S = \partial\Omega$ , então o campo elétrico  $\vec{E}$  gerado pelas cargas é dado por:

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega} \rho(x) dx = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

onde  $Q$  é a carga total de  $\Omega$  e  $\epsilon_0$  é constante elétrica. Assim pela teorema de Gauss temos:

$$\int_{\Omega} \text{div } \vec{E} dx = \int_S \langle \vec{E}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S = \int_{\Omega} \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x) dx$$

Visto que a equação acima vale para toda região podemos concluir que:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x) \quad (3.6.2)$$

Podemos também nos perguntar se o argumento acima pode nos dizer algo sobre os campos magnéticos. A grosso modo uma carga teste  $q$  em movimento induz uma força chamada força magnética. Mais precisamente, suponha que na vizinhança de  $x$  não tenhamos campos elétrico  $\vec{E}$ , então  $\vec{B}(x, t)$  é definido como  $\vec{F}(x, \vec{v}, t) = q\vec{v} \times \vec{B}$  onde  $\vec{v}$  é a velocidade da partícula de carga teste  $q$ . Mais geralmente se na região também tivermos um campo elétrico a força sofrida pela partícula (força eletromagnética) é descrita pela lei de **Lorentz**.

$$\vec{F}(x, \vec{v}, t) = q(\vec{E}(x, t) + \vec{v} \times \vec{B}(x, t)).^1 \quad (3.6.3)$$

Como recordaremos em breve, correntes podem induzir campos magnéticos. Mas eles também são naturalmente induzido por ímãs (materiais ferromagnético). Neste caso a grosso modo a disposição diferente dos seus eletrons em movimentos, permite um campo magnético resultante.

Observa-se também que ao dividir um ímã em 2 pedaços, cada pedaço continua com polo norte e polo sul, não importa quão pequeno o ímã seja. Físicos concluem assim que: *não existe (pelo menos até o presente) carga magnética*. Dito de outra maneira: **não existe monopolos magnético** (em escala macroscópica). Esta lei pode então ser descrita, utilizando o Teorema de Gauss, como no Exemplo 3.46, da seguinte forma:

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (3.6.4)$$

onde  $\vec{B}$  é campo magnético.

<sup>1</sup>Observeq que  $\vec{F}$  não é um campo em aberto  $U \subset \mathbb{R}^3$  e sim um campo no fibrado tangente  $TU$ .

Vamos agora relacionar campos elétricos  $\vec{E}(x, t)$  e  $\vec{B}(x, t)$  por meio da seguinte lei.

### Observação 3.47. Lei de Faraday-Maxwell

A lei de Faraday formulada por Maxwell garante que a circulação de campos elétrico em torno de um caminho fechado é igual ao ritmo de decaimento do campo magnético através da superfície limitada pelo caminho. Mais precisamente, considere uma superfície  $S$  orientada com bordo  $C$  com orientação induzida.

$$\mathcal{V} := \int_C \langle \vec{E}, \vec{T} \rangle \text{vol}_C = -\frac{d}{dt} \int_S \langle \vec{B}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S$$

Utilizando o teorema de Stokes podemos reformular a lei de Faraday como:

$$\int_S \text{Rot} \vec{E} \text{vol}_S = \int_S \langle -\frac{d}{dt} \vec{B}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S$$

A arbitrariedade de  $S$  implica:

$$\text{Rot} \vec{E} = -\frac{d}{dt} \vec{B} \quad (3.6.5)$$

A integral de linha  $\mathcal{V} = \int_C \langle \vec{E}, \vec{T} \rangle \text{vol}_C$  acima é chamada **voltagem**. Relembremos que a voltagem é relacionada com a corrente elétrica (a grosso modo variação de fluxo de carga por uma seção) via a lei de Ohm. Mais precisamente a **corrente elétrica passando por uma superfície  $D$**  é definida como  $I = \int_D \langle \vec{J}, \vec{N} \rangle \text{vol}_D$  onde  $\vec{J}(x) = \rho(x)\vec{v}(x)$  é vetor corrente densidade de corrente. A **Lei de Ohm** garante que  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$  onde  $\sigma$  é chamada condutividade. Quando consideramos um fio cilíndrico com seção  $D$ , comprimento  $l$  com condutividade homogênea (i.e.,  $\sigma$  é constante) podemos conectar estes conceitos re obtendo a clássica Lei de Ohm que aprendemos no colégio. Mais precisamente, como estamos considerando que  $\vec{E}$  é constante, perpendicular as seções transversais do fio, temos  $\|\vec{E}\| = \frac{1}{l}\mathcal{V}$ . Assim

$$I = |D| \|\vec{J}\| = \sigma |D| \|\vec{E}\| = \frac{\sigma |D|}{l} \mathcal{V}$$

Logo

$$\mathcal{V} = RI \text{ onde } R = \left( \frac{l}{\sigma |D|} \right)$$

Tendo recordado a Lei de Ohm e a relação entre voltagem e a corrente elétrica, podemos compreender melhor a relevância da Lei de Faraday a qual garante

que a variação de campo magnético passando por um disco, induz uma voltagem. Substituindo a curva fechada por um solenoide, vemos que a variação de um campo elétrico gera corrente no solenoide. A grosso modo este é o princípio para gerar eletricidade em uma usina elétrica. De forma equivalente se tivermos uma corrente, passando por um solenoide, isto gerará variação campo magnético. Utilizando esta ideia pode-se montar um motor elétrico.

Compreendida a lei de Faraday, é natural nos perguntarmos se existe uma equação recíproca, onde  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  trocariam de certa forma os seus papéis. Quando  $\text{Rot}\vec{J} = 0$ , por exemplo quando consideramos uma corrente não alternada atravessando um fio homogêneo, o experimento de Ampère garante que:

$$\int_C \langle \vec{B}, \vec{T} \rangle \text{vol}_C = \mu_0 I = \mu_0 \int_S \langle \vec{J}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S$$

onde  $\mu_0$  é constante de permeabilidade. Porém como proposto por Maxwell (e comprovado experimentalmente) por vezes  $\text{Rot}\vec{J} \neq 0$  e será necessário acrescentar um termo a mais na equação acima.

#### Observação 3.48. Ampère-Maxwell

A formulação integral sugerida por Maxwell da equação de Ampère é:

$$\int_C \langle \vec{B}, \vec{T} \rangle \text{vol}_C = \mu_0 \int_S \langle \epsilon_0 \frac{d}{dt} \vec{E} + \vec{J}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S$$

Assim pelo teorema de Stokes temos:

$$\int_S \langle \text{Rot}\vec{B}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S = \int_C \langle \vec{B}, \vec{T} \rangle \text{vol}_C = \mu_0 \int_S \langle \epsilon_0 \frac{d}{dt} \vec{E} + \vec{J}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S$$

A arbitrariedade de  $S$  então garante que:

$$\text{Rot}\vec{B} = \mu_0 \left( \epsilon_0 \frac{d}{dt} \vec{E} + \vec{J} \right) \quad (3.6.6)$$

Podemos agora juntar as Equações (3.6.2), (3.6.4), (3.6.5) e (3.6.6):

#### Definição 3.49. Equações de Maxwell

Continuação.

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{Rot} \vec{E} = -\frac{d}{dt} \vec{B}$$

$$\operatorname{Rot} \vec{B} = \mu_0 \left( \epsilon_0 \frac{d}{dt} \vec{E} + \vec{J} \right)$$

onde  $\vec{E}$  é campo elétrico,  $\vec{B}$  é campo magnético,  $\epsilon_0$  é constante elétrica e  $\mu_0$  é constante de permeabilidade. As equações acima estão descritas no S.I (sistema Internacional de unidades).

## Formas diferenciáveis

Formas diferenciais aparecem na *teoria de integração* (sintetizando e unificando vários resultados tais como teorema de Gauss, Stokes e Green) na descrição de *algumas EDPs*, em *Topologia Algébrica*, na *síntese de princípios de Mecânica e Teoria de Controle*, entre outros tópicos. Neste capítulo iremos introduzir formas diferenciáveis e dar uma ideia da demonstração do teorema de Stokes.

### 4.1. Motivação

Para fins de motivação, introduziremos nesta seção uma nova linguagem a partir de ferramentas conhecidas de Álgebra Linear e Cálculo. No final veremos como o Teorema de Green tem uma escrita natural usando essa linguagem. Destacamos que definiremos todos os objetos formalmente nas próximas seções e que nesta seção o(a) leitor(a) não precisa ficar muito preocupado com detalhes.

Sejam  $U \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto aberto. Para cada  $p \in U$ , vamos denotar por  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  o referencial de campos ortonormais canônicos e por  $\{dx_1, dx_2\}_p$  sua base dual<sup>1</sup>. Definimos uma **1-forma** sobre  $U$  como sendo uma combinação linear da base dual, ou seja,

$$\eta(p) = f_1(p)dx_1 + f_2(p)dx_2,$$

onde  $f_1, f_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$  são funções suaves. Assim, para cada  $W = w_1\vec{e}_1(p) +$

<sup>1</sup>Lembre que o **espaço dual** de um espaço vetorial  $\mathbb{V}$  é o espaço vetorial de todos os funcionais lineares sobre  $\mathbb{V}$ . Além disso, no caso de dimensão finita, a **base dual**  $\{dx_i\}_{1 \leq i \leq \dim(\mathbb{V})}$  satisfaz  $dx_i(e_j) = \delta_{i,j}$  para todo  $1 \leq i, j \leq \dim(\mathbb{V})$ .

$w_2 \vec{e}_2(p) \in T_p U$  temos

$$\eta(p)(W) = f_1(p)dx_1(W) + f_2(p)dx_2(W) = f_1(p)w_1 + f_2(p)w_2.$$

Consideremos agora para cada  $p \in U$  a aplicação bilinear e anti-simétrica  $(dx_1 \wedge dx_2)_p : T_p \mathbb{R}^2 \times T_p \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida como:

$$(dx_1 \wedge dx_2)_p(W_1, W_2) = \det \begin{bmatrix} dx_1(W_1) & dx_1(W_2) \\ dx_2(W_1) & dx_2(W_2) \end{bmatrix},$$

que mede a área do losango determinado pelos vetores  $W_1$  e  $W_2$  (vide Figura 4.1).<sup>2</sup> Analogamente, podemos definir

$$\begin{aligned} (dx_2 \wedge dx_1)_p(W_1, W_2) &= \det \begin{bmatrix} dx_2(W_1) & dx_2(W_2) \\ dx_1(W_1) & dx_1(W_2) \end{bmatrix} \\ &= -(dx_1 \wedge dx_2)_p(W_1, W_2). \end{aligned}$$

Por fim, seguindo a mesma lógica das definições anteriores – e lembrando que o determinante de uma matriz com linhas linearmente dependentes é zero, definimos  $dx_i \wedge dx_i = 0$  em  $U$  para  $i \in \{1, 2\}$ .

Tais definições sugerem que podemos estender  $\wedge$  a um produto de 1-formas, conhecido como **produto wedge** (ou produto cunha). Para isso vamos pedir que, além das propriedades anteriores, tal produto também seja bilinear em ambos os fatores. Assim, dadas as 1-formas

$$F^b = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 \quad \text{e} \quad G^b = g_1 dx_1 + g_2 dx_2,$$

onde  $f_i : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g_i : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são funções suaves,  $i \in \{1, 2\}$ , temos

$$\begin{aligned} F^b \wedge G^b &= (f_1 dx_1 + f_2 dx_2) \wedge (g_1 dx_1 + g_2 dx_2) \\ &= (f_1 dx_1) \wedge (g_1 dx_1) + (f_1 dx_1) \wedge (g_2 dx_2) \\ &\quad + (f_2 dx_2) \wedge (g_1 dx_1) + (f_2 dx_2) \wedge (g_2 dx_2) \\ &= f_1 g_1 dx_1 \wedge dx_1 + f_1 g_2 dx_1 \wedge dx_2 + f_2 g_1 dx_2 \wedge dx_1 + f_2 g_2 dx_2 \wedge dx_2 \\ &= (f_1 g_2 - f_2 g_1) dx_1 \wedge dx_2. \end{aligned}$$

Observe que a definição acima equivale a definirmos  $F^b \wedge G^b$  pontualmente por

$$(F^b \wedge G^b)_p(W_1, W_2) = \det \begin{bmatrix} F^b(p)(W_1) & F^b(p)(W_2) \\ G^b(p)(W_1) & G^b(p)(W_2) \end{bmatrix}.$$

<sup>2</sup>Aprendemos em Álgebra Linear que  $(dx_1 \wedge dx_2)_p$  é a única aplicação bilinear e anti-simétrica satisfazendo  $(dx_1 \wedge dx_2)_p(e_1, e_2) = 1$ .

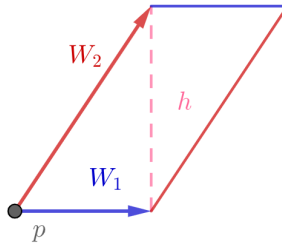


Figura 4.1:  $\det \begin{bmatrix} b & a \\ 0 & h \end{bmatrix} = b \cdot h = \text{area}$

Uma aplicação  $p \rightarrow f(p)(dx_1 \wedge dx_2)_p$  será chamada **2-forma** em  $U$  onde  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave (usualmente chamada de 0-forma).

Um exemplo conhecido de uma 1-forma é a diferencial de uma função  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  suave. Ou seja, diferenciando a 0-forma  $f$  obtemos a 1-forma  $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2$ . De forma análoga podemos definir a **diferencial** de uma 1-forma  $F^b = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$  como sendo a 2-forma

$$dF^b := df_1 \wedge dx_1 + df_2 \wedge dx_2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} dF^b &= df_1 \wedge dx_1 + df_2 \wedge dx_2 \\ &= \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \right) \wedge dx_1 + \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \right) \wedge dx_2 \\ &= -\frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \text{Rot}(\vec{F}) dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

onde  $\vec{F} = f_1 \vec{e}_1 + f_2 \vec{e}_2$  e  $\text{rot}(\vec{F}) := \det \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ f_1 & f_2 \end{bmatrix}$ .

Consideramos agora uma curva  $C$  suave, mergulhada, simples, sem auto-interseção e com orientação anti-horária.

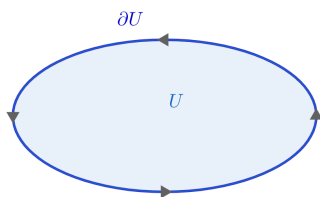


Figura 4.2: Região  $U$  e  $\partial U$  com orientações compatíveis

Dado uma 1-forma  $F^b = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$  definimos a integral de  $F^b$  sobre  $C$  como sendo o trabalho do campo  $\vec{F}$  ao longo de  $C^3$ , ou seja,

$$\int_C F^b := \int_C \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$

Definimos também a integral de uma 2-forma  $\eta = h dx_1 \wedge dx_2$  sobre  $U$  como sendo a integral dupla de  $h$  sobre  $U$ , ou seja,

$$\int_U \eta = \int_U h dx_1 dx_2.$$

Suponha agora que  $C$  é uma curva fechada e que  $U$  é a região interna da curva. Diremos que a orientação (anti-horária) de  $C$  induz **uma orientação** em  $C = \partial U$  (compatível com orientação canônica de  $U$ ).

Assim, o clássico teorema de Green:

$$\int_U \text{rot} \vec{F} dx_1 dx_2 = \int_{\partial U} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

pode ser reescrito na linguagem de formas como

$$\int_U dF^b = \int_{\partial U} F^b.$$

Neste capítulo veremos, no **Teorema de Stokes** (vide Teorema 4.32), como a relação anterior também é válida em variedades sob certas hipóteses.

<sup>3</sup>Lembre que se  $\vec{F}$  representa um campo de forças, então o trabalho realizado pela força  $\vec{F}$  ao deslocar uma partícula ao longo de  $C$  é dado por

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_0^1 \langle \vec{F}(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle dt, \quad (4.1.1)$$

onde  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma parametrização de  $C$  que respeita a orientação.



## 4.2. Produto wedge e formas

### 4.2.1. Produto wedge

Dado um espaço vetorial  $\mathbb{V}$ , lembremos que um  $(0, k)$ -**tensor**  $\tau$  é simplesmente um  $k$ -funcional linear  $\tau: \mathbb{V} \times \cdots \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ . O espaço vetorial dos  $(0, k)$  tensores – aqui denotado por  $T^k(\mathbb{V})$  – admite um **produto tensorial**. Dados  $\tau_1 \in T^k(\mathbb{V})$  e  $\tau_2 \in T^l(\mathbb{V})$ , seu produto tensorial  $\tau_1 \otimes \tau_2 \in T^{k+l}(\mathbb{V})$  é definido como

$$(\tau_1 \otimes \tau_2)(W_1, \dots, W_k, W_{k+1}, \dots, W_{k+l}) := \tau_1(W_1, \dots, W_k) \tau_2(W_{k+1}, \dots, W_{k+l}).$$

onde  $W_i \in \mathbb{V}$ . Um tensor  $\tau \in T^k(\mathbb{V})$  é chamado **simétrico** se ele for invariante por permutações, ou seja

$$\tau(W_1, \dots, W_k) = \tau(W_{\sigma(1)}, W_{\sigma(2)}, \dots, W_{\sigma(k)}),$$

para todas permutações  $\sigma$  no grupo de permutações  $\mathfrak{S}_k$ . Um tensor  $\tau \in T^k(\mathbb{V})$  será chamado **anti-simétrico** ou **alternado** se

$$\tau(W_1, \dots, W_k) = \text{sgn}(\sigma) \tau(W_{\sigma(1)}, W_{\sigma(2)}, \dots, W_{\sigma(k)}),$$

$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_k$ , onde  $\text{sgn}(\sigma)$  denota o sinal da permutação  $\sigma$ . Denotaremos por  $\Lambda^k(\mathbb{V})$  o espaço dos  $k$  tensores alternados.

#### Exemplo 4.1.

Seja  $\mathbb{V}$  um espaço vetorial de dimensão  $m$  e  $B$  uma base de  $\mathbb{V}$ . Defina

$$\det : \overbrace{\mathbb{V} \times \mathbb{V} \times \cdots \times \mathbb{V}}^{m\text{-vezes}} \rightarrow \mathbb{R}$$

por

$$\det(W_1, W_2, \dots, W_m) = \det \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1m} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m1} & w_{m2} & \cdots & w_{mm} \end{pmatrix},$$

## Continuação.

onde  $w_{ij}$  é a  $i$ -ésima coordenada do vetor  $W_j$  na base  $B$ . Segue das propriedades dos determinantes que  $\det \in \Lambda^m(\mathbb{V})$ .

Vamos definir a projeção  $\text{Alt}_k: T^k(\mathbb{V}) \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{V})$  como:

$$\text{Alt}_k(\tau)(W_1, \dots, W_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \text{sgn}(\sigma) \tau(W_{\sigma(1)}, W_{\sigma(2)}, \dots, W_{\sigma(k)}),$$

e com tal projeção podemos definir o **produto wedge** (ou **produto cunha**). Dados  $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{V})$  e  $\eta \in \Lambda^l(\mathbb{V})$  o produto wedge  $\omega \wedge \eta \in \Lambda^{k+l}(\mathbb{V})$  é:

$$\omega \wedge \eta := \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}_{(k+l)}(\omega \otimes \eta).$$

**Observação 4.2.**

Se  $\omega_1, \dots, \omega_k \in \Lambda^1(\mathbb{V}) = T^1(\mathbb{V})$  são  $(0, 1)$ -tensores, então

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)(W_1, \dots, W_k) = \det \begin{pmatrix} \omega_1(W_1) & \omega_1(W_2) & \dots & \omega_1(W_k) \\ \omega_2(W_1) & \omega_2(W_2) & \dots & \omega_2(W_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_k(W_1) & \omega_k(W_2) & \dots & \omega_k(W_k) \end{pmatrix}$$

Em particular, segue da observação acima (ou direto da definição) que se  $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$  então

$$\omega_1 \wedge \omega_2(W_1, W_2) = \omega_1(W_1)\omega_2(W_2) - \omega_1(W_2)\omega_2(W_1)$$

**Proposição 4.3.**

Seja  $\mathbb{V}$  espaço vetorial de dimensão  $m$ . Para todo  $\omega, \xi \in \Lambda^k(\mathbb{V})$ ,  $\eta \in \Lambda^l(\mathbb{V})$ ,  $\theta \in \Lambda^m(\mathbb{V})$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

1.  $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$ ;
2.  $(\omega + \xi) \wedge \eta = \omega \wedge \eta + \xi \wedge \eta$ ;
3.  $(\lambda\omega) \wedge \eta = \lambda(\omega \wedge \eta)$ ;
4.  $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl}\eta \wedge \omega$ .

Além disto, se  $\omega_1, \dots, \omega_m$  é uma base de  $T^1(\mathbb{V})$ , então  $\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_r}$ ,  $1 \leq i_1 <$

**Continuação.**

$\dots < i_r \leq m$ , se torna uma base de  $\Lambda^r(\mathbb{V})$  e, portanto,  $\Lambda^r(\mathbb{V})$  tem dimensão  $\binom{m}{r}$ . Em particular,  $\Lambda^m(\mathbb{V}) \cong \mathbb{R}$ .

Note que  $\Lambda^m(\mathbb{V}) \cong \mathbb{R}$  implica que  $\dim(\Lambda^m(\mathbb{V})) = 1$  e, portanto,

$$\Lambda^m(\mathbb{V}) = \{c \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_m; c \in \mathbb{R}\},$$

onde  $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$  é a base dual de uma base de  $V$ .

**Observação 4.4.**

Como consequência do resultado anterior podemos descrever os tensores alternados de  $\mathbb{R}^3$ :

- (a) para cada  $\omega \in T^1(\mathbb{R}^3)$  existe um único vetor  $Z \in \mathbb{R}^3$  tal que  $\omega(W) = \langle W, Z \rangle$  para todo  $W \in \mathbb{R}^3$ , o que segue do Teorema de Representação de Riesz. Cabe aqui destacar a dependência do produto interno para associar  $Z$  com  $\omega$ .
- (b) para cada  $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$  existe um único vetor  $Z \in \mathbb{R}^3$  tal que  $\omega(W_1, W_2) = \det(Z, W_1, W_2)$  para todo  $W_1, W_2 \in \mathbb{R}^3$ ;
- (c) para cada  $\omega \in \Lambda^3(\mathbb{R}^3)$  existe um único  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $\omega(W_1, W_2, W_3) = c \det(W_1, W_2, W_3)$  para todo  $W_1, W_2, W_3 \in \mathbb{R}^3$ ;

**4.2.2. Formas diferenciais**

Neste ponto estamos interessados em estudar tensores alternados definidos sobre o espaço tangente a uma variedade diferenciável  $M$ . Como no caso de campos diferenciáveis, gostaríamos que o tensor alternado varie (suavemente) sobre a variedade. Definimos, assim, os conceitos de campos tensoriais e de formas diferenciais sobre variedades.

**Definição 4.5.**

Um  $(0, k)$  **campo tensorial suave** em uma variedade  $M$  é uma aplicação

$$\tau : \overbrace{\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}^{k\text{-vezes}} \rightarrow C^\infty(M)$$

## Continuação.

definida por

$$\tau(\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_k)(p) = \tau_p(\vec{X}_1(p), \dots, \vec{X}_k(p)),$$

onde  $\tau_p$  é um  $(0, k)$ -tensor para todo  $p \in M$  (ou seja,  $\tau_p \in T^k(T_p M)$ ).

Em outras palavras, um  $(0, k)$  campo tensorial suave é uma seção do fibrado tensorial  $TM^* \otimes \dots \otimes TM^*$ .

## Definição 4.6.

Uma  **$k$ -forma diferencial** em  $M$  é um  $(0, k)$ -campo tensorial suave  $\omega$  em  $M$  tal que  $\omega_p$  é alternado para cada  $p \in M$  (ou seja,  $\omega_p \in \Lambda^k(T_p M)$ ). Denotaremos o conjunto das  $k$ -formas (diferenciais) em  $M$  por  $\Omega^k(M)$ .

Analogamente, uma  $k$ -forma diferencial é uma seção do fibrado dos  $(0, k)$ -tensores alternados  $\Lambda^k TM^*$ .

Podemos agora definir o produto wedge  $\wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^l(M) \rightarrow \Omega^{k+l}(M)$  como

$$(\omega \wedge \eta)_p := \omega_p \wedge \eta_p$$

Como consequência da Proposição 4.3 temos que se  $(U, \psi)$  é uma carta de  $M$ , então  $\omega \in \Omega^k(M)$  pode ser descrita localmente como

$$\omega|_U = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \quad (4.2.1)$$

onde,  $a_{i_1, \dots, i_k} : U \rightarrow \mathbb{R}$  são funções suaves e  $\{dx_i\}$  são **1-formas duais** aos campos coordenados  $\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\right\}$ , i.e.,

$$dx_i \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right) (p) = (dx_i)_p \left( \frac{\partial}{\partial x_j} (p) \right) = \delta_{ij}$$

Vemos a seguir todos os exemplos das formas diferenciais em  $\mathbb{R}^3$ , vide Observação 4.4.

Exemplo 4.7. Formas em  $\mathbb{R}^3$ 

Sejam  $U$  aberto em  $\mathbb{R}^3$ ,  $\vec{F} \in \mathfrak{X}(U)$  com  $\vec{F} = \sum_{i=1}^3 f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $h \in C^\infty(U)$  e  $\{dx_i\}$  a base dual dos campos coordenados. Então podemos construir:

## Continuação.

(a) uma 1-forma em  $U$  como  $\mathbf{g}_F^0(W) = \langle W, \vec{F} \rangle$ , ou seja,  $\mathbf{g}_F^0 = \sum f_i dx_i$ .

(b) uma 2-forma em  $U$  como

$$\begin{aligned} \nu_F(W_1, W_2) &= \det(\vec{F}, W_1, W_2) \\ &= \det \begin{bmatrix} f_1 & w_{11} & w_{12} \\ f_2 & w_{21} & w_{22} \\ f_3 & w_{31} & w_{32} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ou seja,  $\nu_F = f_1(dx_2 \wedge dx_3) - f_2(dx_1 \wedge dx_3) + f_3(dx_1 \wedge dx_2)$ .

Lembremos que:

$$(dx_2 \wedge dx_3)(W_1, W_2) = \det \begin{bmatrix} dx_2(W_1) & dx_2(W_2) \\ dx_3(W_1) & dx_3(W_2) \end{bmatrix}$$

$$(dx_1 \wedge dx_3)(W_1, W_2) = \det \begin{bmatrix} dx_1(W_1) & dx_1(W_2) \\ dx_3(W_1) & dx_3(W_2) \end{bmatrix}$$

$$(dx_1 \wedge dx_2)(W_1, W_2) = \det \begin{bmatrix} dx_1(W_1) & dx_1(W_2) \\ dx_2(W_1) & dx_2(W_2) \end{bmatrix}$$

(c) uma 3-forma em  $U$  como

$$\begin{aligned} \omega(W_1, W_2, W_3) &= h \det(W_1, W_2, W_3) \\ &= h \det \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix} \\ &= h \det \begin{bmatrix} dx_1(W_1) & dx_1(W_2) & dx_1(W_3) \\ dx_2(W_1) & dx_2(W_2) & dx_2(W_3) \\ dx_3(W_1) & dx_3(W_2) & dx_3(W_3) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ou seja  $\omega = h dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ .

O exercício anterior motiva já fixarmos uma notação

$$\text{vol}_{\mathbb{R}^3} = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \quad (4.2.2)$$

Note que  $\text{vol}_{\mathbb{R}^3}(W_1, W_2, W_3)_p$  mede o volume determinado pelo paralelogramo que tem como arestas os vetores  $W_i \in T_p\mathbb{R}^3$ , quando  $\{W_i\}$  tem mesma orientação que a base canônica  $\{e_i\} \subset T_p\mathbb{R}^3$ .<sup>4</sup> Discutiremos mais sobre o conceito de volume em variedades (não necessariamente  $\mathbb{R}^3$ ) quando formos introduzir o conceito de orientação em variedades, vide Subseção 4.4.1.

#### Exercício 4.8.

Sejam  $U$  aberto em  $\mathbb{R}^3$  e  $\xi = \{\vec{\xi}_i\}_{i=1}^3$  um **referencial ortonormal** em  $U$  ou seja campos de vetores tais que para cada  $x \in U$  temos que  $\{\vec{\xi}_i(x)\}_{i=1}^3$  é base ortonormal de  $T_x\mathbb{R}^3$ . Suponha que  $\xi$  tenha mesma orientação do referencial canônico  $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^3$ , ou seja, para cada  $x \in U$ ,  $\{\vec{\xi}_i(x)\}$  e  $\{\vec{e}_i(x)\}$  tem mesma orientação em  $T_x\mathbb{R}^3$ . Considere as 1-formas  $\{\theta_i\}_{i=1}^3$  duais a  $\xi$  ou seja  $\theta_i(\vec{\xi}_j) = \delta_{ij}$ . Demonstre que

$$\text{vol}_{\mathbb{R}^3} = \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3.$$

O Exemplo 4.7 também nos motiva a introduzir a notação de **contração**: dado um campo  $\vec{F} \in \mathfrak{X}(M)$  e uma  $k$ -forma  $\omega \in \Omega^k(M)$  definimos a  $k-1$  forma (contração de  $\omega$  por  $\vec{F}$ ) como

$$i_{\vec{F}}\omega(W_1, \dots, W_{k-1}) = \omega(\vec{F}, W_1, \dots, W_{k-1})$$

O próximo exercício ilustra o significado de  $i_{\vec{e}_3}\text{vol}_{\mathbb{R}^3} = dx_1 \wedge dx_2$  e mais geralmente  $i_{\vec{F}}\text{vol}_{\mathbb{R}^3}$ .

#### Exercício 4.9.

Seja  $\vec{N}$  um campo unitário em uma vizinhança  $U \subset \mathbb{R}^3$  e a distribuição  $\mathcal{H}$  em  $U$  ortogonal ao campo  $\vec{N}$ . Defina para cada  $x \in U$  a projeção ortogonal  $\pi_x : T_x\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{H}_x$ . Dado um ponto  $p \in \mathbb{R}^3$  e uma base  $\{W_1, W_2, \vec{N}(p)\}$  de  $T_p\mathbb{R}^3$ , definamos  $A := i_{\vec{N}}\text{vol}_{\mathbb{R}^3}(W_1, W_2)$ . Verifique que  $A$  é a área do paralelogramo com arestas  $\pi_p(W_1)$  e  $\pi_p(W_2)$  quando a orientação de  $\{W_1, W_2, \vec{N}(p)\}$  é a mesma da base canônica  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . Observe que caso

<sup>4</sup>Lembremos que duas bases induzem a mesma orientação se a matriz mudança de base tem determinante positivo.

Continuação.

as orientações sejam diferentes então  $i_{\vec{F}} \text{vol}_{\mathbb{R}^3}(W_1, W_2) = -A$ , vide Figura 4.3.

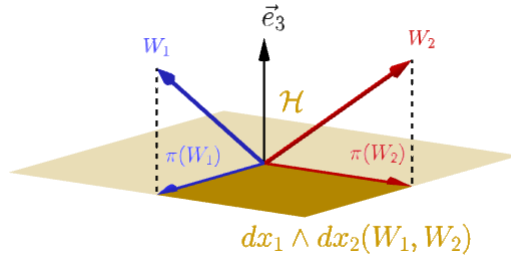


Figura 4.3: ilustra Exercício 4.9

Podemos agora criar uma aplicação linear entre  $k$  formas de variedades. Mais precisamente, uma aplicação suave entre variedades,  $\phi : M^m \rightarrow N^n$  induz uma aplicação linear  $\phi^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$  via **pull back** dos tensores induzidos em no espaço tangente, i.e,

$$(\phi^*\omega)_p(W_1, \dots, W_k) := \omega_{\phi(p)}(d\phi_p W_1, \dots, d\phi_p W_k), \quad W_i \in T_p M. \quad (4.2.3)$$

O pullback também preserva o produto wedge, e assim induz um homomorfismos.

**Proposição 4.10.**

Seja  $\phi : M \rightarrow N$  uma aplicação suave entre variedades. Então, para toda  $\omega \in \Omega^k(N)$  e  $\eta \in \Omega^l(N)$  temos

$$\phi^*(\omega \wedge \eta) = (\phi^*\omega) \wedge (\phi^*\eta).$$

Um dos primeiros exemplos de pullback está relacionado ao trabalho de um campo.

**Exercício 4.11.**

Dado um aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$ , uma curva parametrizada  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  e um campo  $\vec{F} \in \mathfrak{X}(U)$  podemos definir:  $\mathfrak{g}_F^0(\cdot) = \langle \vec{F}, \cdot \rangle$ . Verifique que

## Continuação.

$$\alpha^* g_F^0 = \langle \vec{F}(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle dt.$$

A próxima proposição será útil quando revisarmos mudança de variáveis (agora utilizando a linguagem de formas)

**Proposição 4.12.**

Seja  $A \in M^{m \times m}(\mathbb{R})$ . Se  $\omega$  é  $(0, m)$ -tensor alternado em  $\mathbb{R}^m$ , então

$$\omega(AW_1, AW_2, \dots, AW_m) = \det(A) \omega(W_1, W_2, \dots, W_m).$$

Em particular se  $\phi : U_0 \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U_1 \subset \mathbb{R}^m$  é uma aplicação suave e  $\omega$  é uma  $m$ -forma  $f dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_{m-1} \wedge dx_m$ , então

$$\phi^* \omega = f \circ \phi \det(d\phi) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_{m-1} \wedge dx_m.$$

*Demonstração.* Mantendo em mente que  $(dx_i)_0$  atua em  $\mathbb{R}^m$  e  $dx_i$  é uma forma em  $U$  vamos passar a utilizar uma única notação afim de facilitar a exposição. Sabemos pela Proposição 4.3 que  $\dim \Lambda^m(\mathbb{R}^m) = 1$  e assim existem  $b, c \in \mathbb{R}$  tal que:

$$\omega = b dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m \quad (4.2.4)$$

$$\omega(A(\cdot), \dots, A(\cdot)) = c dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m((\cdot), \dots, (\cdot)) \quad (4.2.5)$$

Equação (4.2.5) implica:

$$\omega(Ae_1, \dots, Ae_m) = c \quad (4.2.6)$$

enquanto (4.2.4) implica

$$\omega(Ae_1, \dots, Ae_m) = b \det A \quad (4.2.7)$$

Assim segue das Equações (4.2.6) e (4.2.7) que  $c = b \det A$ . Logo pelas Equações (4.2.4) e (4.2.5) concluímos

$$\omega(A(\cdot), \dots, A(\cdot)) = b \det A dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m = \det A \omega.$$

□

Terminamos esta seção com um exercício que será interessante para compreender (localmente) fluxos de campos através de superfícies e que ilustra os conceitos de contração e pullback.



**Exercício 4.13.**

Sejam  $\vec{F} = \sum_{i=1}^3 f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , onde  $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  são funções suaves.

(a) Definindo  $\nu_F := i_{\vec{F}} \text{vol}_{\mathbb{R}^3}$ , verifique que

$$\nu_F(W_1, W_2)_p = \langle \vec{F}, W_1 \times W_2 \rangle$$

para todo campo  $\vec{W}_i \in \mathfrak{X}(U)$ .

(b) Considere um mergulho:

$$\begin{aligned} \varphi : V \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (v_1, v_2) &\longrightarrow (\varphi_1(v_1, v_2), \varphi_2(v_1, v_2), \varphi_3(v_1, v_2)) \end{aligned}$$

Mostre que

$$\varphi^* \nu_F = \left\langle \vec{F} \circ \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial v_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v_2} \right\rangle dv_1 \wedge dv_2.$$

**4.3. Derivada exterior**

Desejamos nesta seção generalizar a definição de derivada de uma 1-forma apresentada na Seção 4.1 a derivada de uma  $k$ -forma sobre uma variedade. Mais precisamente, queremos definir um operador  $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$  de maneira que, dada uma forma  $\omega$  descrita em coordenadas locais em uma carta  $(U, \psi)$  por (recorde Eq. (4.2.1))

$$\omega|_U = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

tenhamos:

$$d\omega|_U = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} da_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \quad (4.3.1)$$

A existência e unicidade deste operador é garantida na proposição a seguir:

**Proposição 4.14.**

Existe um único operador  $d : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$  atendendo:

- (a) Se  $f \in \Omega^0(M)$ , então  $df \in \Omega^1(M)$  é a diferencial da função  $f \in C^\infty(M)$ , i.e.,

$$df_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p dx_i.$$

- (b) A composição  $\Omega^k(M) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^{k+2}(M)$  é identicamente nula, i.e.  $d^2 = 0$ ;
- (c)  $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^j \omega \wedge d\eta$ , para todos  $\omega \in \Omega^j(M)$  e  $\eta \in \Omega^{k-j}(M)$ .

O operador caracterizado na proposição anterior é chamado de **derivada exterior**. Além das propriedades descritas nessa proposição, a derivada exterior satisfaz a seguinte propriedade fundamental:

**Proposição 4.15.**

Dadas duas variedades  $M$  e  $N$ , e uma aplicação suave  $\psi : M \rightarrow N$ , temos

$$\psi^* \circ d = d \circ \psi^*.$$

**Proposição 4.16.**

Dado uma  $k$ -forma  $\omega$  e  $k + 1$  campos suaves  $\vec{X}_0, \dots, \vec{X}_k \in \mathfrak{X}(M)$  temos:

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, \dots, X_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i X_i \bullet \omega(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k), \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

onde  $\widehat{X}_i$  denota a omissão daquele elemento  $X_i$ .

Em particular se  $\omega \in \Omega^1(M)$  temos:

$$d\omega(X_0, X_1) = X_0 \bullet \omega(X_1) - X_1 \bullet \omega(X_0) - \omega([X_0, X_1])$$

O exercício a seguir descreve (a menos de constantes) as equações de Maxwell para o eletromagnetismo (quando  $\rho = 0$  e  $\vec{J} = 0$ ) em termos da 2-forma denominada tensor eletromagnético. Ao trabalhar neste exercício, o(a) leitor(a) terá a possibilidade de utilizar as seguintes propriedades:  $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ , a Equation (4.3.1) e e que  $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ .

### Exercício 4.17.

Seja  $U_0$  aberto em  $\mathbb{R}^3$  e considere campos não autônomos

$$\vec{E}(t, \cdot) = \sum_{i=1}^3 E_i(t, \cdot) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\vec{B}(t, \cdot) = \sum_{i=1}^3 B_i(t, \cdot) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Defina  $U = \mathbb{R} \times U_0$  e  $F \in \Omega^2(U)$  como  $F([t, x], [\tilde{t}, \tilde{x}]) = [t, x]^t A[t, x]$  onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) Descreva  $F$  em termos de  $dt$  e  $dx_i$ ;
- (b) verifique que

$$dF = 0 \Leftrightarrow \begin{aligned} \text{Rot } \vec{E} &= -\frac{d\vec{B}}{dt} \\ \text{div}(\vec{B}) &= 0 \end{aligned}$$

- (c) seja  $\epsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 0; \\ -1 & \text{se } i = 1, 2, 3. \end{cases}$   
e considere o operador linear  $*$   $\Omega^2(\mathbb{R}^4) \rightarrow \Omega^2(\mathbb{R}^4)$  definido como

$$*dx_i \wedge dx_j = \epsilon_i \epsilon_j dx_k \wedge dx_l,$$

onde  $(i, j, k, l)$  é uma permutação par de  $(0, 1, 2, 3)$  e  $dt =$

## Continuação.

$dx_0$ . Verifique que:

$$d * F = 0 \Leftrightarrow \begin{aligned} \text{Rot } \vec{B} &= \frac{d \vec{E}}{dt} \\ \text{div}(\vec{E}) &= 0 \end{aligned}$$

**Observação 4.18.**

Como comentando anteriormente, o exercício acima descreve (a menos de constantes) as equações de Maxwell para o eletromagnetismo, no caso em que a densidade de carga  $\rho = 0$  e o vetor  $\vec{J} = 0$ . Para obter o caso geral (novamente sem nos preocuparmos com as constantes) precisamos apenas considerar a definição mais geral do operador linear  $*$  :  $\Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{4-k}(U)$  <sup>a</sup>

$$*(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) = \text{sgn}(i_1, \dots, i_n) \epsilon_{i_1} \cdots \epsilon_{i_p} dx_{i_{p+1}} \cdots \wedge dx_{i_n}$$

Com esta definição temos (com calculos análogos) que:

$$* d * F = \hat{J} \Leftrightarrow \begin{aligned} \text{Rot } \vec{B} &= \vec{J} + \frac{d \vec{E}}{dt} \\ \text{div}(\vec{E}) &= \rho \end{aligned}$$

onde  $\hat{J} = -\rho dx_0 + J_1 dx_1 + J_2 dx_2 + J_3 dx_3$ .

<sup>a</sup>o operador estrela de Hodge associado a métrica de Lorentz  $g_0 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$

A seguir uma proposição importante que permitirá utilizarmos o teorema de Stokes para concluir teoremas de integração de Cálculo III (que envolvem divergente e rotacional).

**Proposição 4.19.**

Sejam  $U$  aberto em  $\mathbb{R}^3$  e campo  $\vec{F} = \sum_{i=1}^3 f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{X}(U)$ . Definamos a 1-forma  $\mathfrak{g}_F^0 := \langle \vec{F}, (\cdot) \rangle$  Temos então que:

(a)  $d(i_{\vec{F}} \text{vol}_{\mathbb{R}^3}) = \text{div } \vec{F} \text{vol}_{\mathbb{R}^3}$ .

(b)  $d \mathfrak{g}_F^0 = i_{\text{rot} \vec{F}} \text{vol}_{\mathbb{R}^3}$

*Demonstração.* Recordemos primeiro as propriedades que vamos utilizar, vide Proposições 4.3, 4.14 e Exercício 4.13.

$$(i) \quad dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i,$$

$$(ii) \quad df_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j,$$

$$(iii) \quad i_{\vec{F}} \text{vol}_{\mathbb{R}^3} = f_1 dx_2 \wedge dx_3 - f_2 dx_1 \wedge dx_3 + f_3 dx_1 \wedge dx_2$$

**Item (a)**

$$\begin{aligned} d(i_{\vec{F}} \text{vol}_{\mathbb{R}^3}) &= df_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - df_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + df_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &\stackrel{(ii)}{=} \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_1}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_2 \wedge dx_3 - \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_2}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\ &\quad + \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_3}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &\stackrel{(i)}{=} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\ &\quad + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &\stackrel{(i)}{=} \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &= \text{div}(\vec{F}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \end{aligned}$$

Item (b)

$$\begin{aligned}
 dg_F^0 &= \sum_{i=1}^3 df_i \wedge dx_i \\
 &\stackrel{(ii)}{=} \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \right) \wedge dx_1 \\
 &\quad + \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3 \right) \wedge dx_2 \\
 &\quad + \left( \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx_3 \right) \wedge dx_3 \\
 &\stackrel{(i)}{=} \left( \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 \\
 &\quad + \left( \frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \right) dx_1 \wedge dx_3 \\
 &\quad + \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 \\
 &\stackrel{(iii)}{=} i_{\text{rot}\vec{F}} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3
 \end{aligned}$$

□

#### 4.4. Integração e teorema de Stokes

Seja  $\omega = f dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_m$ , uma  $m$ -forma com suporte compacto em  $\mathbb{R}^m$ .

Defina

$$\int_U \omega := \int_U f dx_1 \dots dx_m.$$

Se  $\phi: V \rightarrow U$  é um difeomorfismo entre dois abertos de  $\mathbb{R}^m$  que preserva orientação (i.e, tal que  $\det D\phi > 0$ ), então por mudança de variáveis temos:

$$\int_U \omega = \int_V \phi^* \omega. \quad (4.4.1)$$

Como veremos a seguir esta equação será peça fundamental para integração em variedades orientáveis.

### 4.4.1. Orientação e forma volume

#### Definição 4.20.

Dizemos que uma  $m$ -forma  $\omega$  em uma variedade  $M^m$  é uma **forma volume** em  $M$  se ela nunca se anula, ou seja, se para todo  $p \in M$  existe uma base  $\{e_i\}$  de  $T_p M$  tal que  $\omega_p(e_1, \dots, e_m) \neq 0$ . Se  $M^m$  possui uma forma volume dizemos que  $M^m$  é uma **variedade orientável** e que é orientada pela escolha da forma volume.

Existe uma forma equivalente de pensarmos em orientabilidade de uma variedade em termos de um atlas compatível com sua estrutura diferencial.

#### Proposição 4.21.

Uma variedade  $M$  é orientável se e somente se  $M$  admite um atlas coerentemente orientável  $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ , i.e, tal que  $\det d(\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}) > 0$ .

Podemos estabelecer uma relação de equivalência entre as formas volumes. Dizemos que duas  $m$ -formas volumes  $\omega$  e  $\eta$  são equivalentes se  $\omega = f\eta$  com  $f > 0$ . Neste caso dizemos que  $\omega$  e  $\eta$  induzem a mesma orientação em  $M$ . Caso contrário dizemos que  $\omega$  e  $\eta$  induzem orientações opostas.

Uma forma volume  $\omega$  induz uma orientação nos espaços tangentes a  $M$  da seguinte forma: para cada  $p \in M$ , uma base  $\{e_i\}$  de  $T_p M$  tem uma orientação induzida se  $\omega_p(e_1, \dots, e_m) > 0$ .

Observe que a 3-forma  $\text{vol}_{\mathbb{R}^3} = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$  é uma forma volume em  $\mathbb{R}^3$ . De fato  $\text{vol}_{\mathbb{R}^3}(e_1, e_2, e_3) = 1 > 0$  o que implica também que é compatível com a orientação canônica.

Nosso primeiro exemplo de orientação em subvariedade mergulhada é uma curva regular, orientada por um vetor tangente unitário.

#### Exemplo 4.22. Elemento de comprimento

Seja  $C$  uma curva regular (curva mergulhada) em  $\mathbb{R}^m$  orientada por um vetor unitário  $\vec{T}$  tangente a  $C$ . Podemos então definir o **elemento de comprimento** como a 1-forma

$$\text{vol}_C = \mathcal{I}^* \mathbf{g}_T^0 \in \Omega^1(C)$$

onde  $\mathcal{I} : C \rightarrow \mathbb{R}^m$  é a inclusão e  $\mathbf{g}_T^0 = \langle \vec{T}, \cdot \rangle$ . Em particular se  $\alpha : (-\delta, \delta) \rightarrow$

## Continuação.

$C$  é uma parametrização regular com orientação coerente (i.e.,  $\vec{T} = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}$ ) podemos observar que  $\alpha^* \text{vol}_C = \|\alpha'\| dt$ .

Podemos agora revisitar o Exercício 4.11 e examiná-lo de forma intrínseca (independente de parametrização).

**Exercício 4.23.**

Seja  $C$  curva mergulhada,  $\mathcal{I} : C \rightarrow \mathbb{R}^m$  inclusão e  $\vec{F}$  campo definido em uma vizinhança de  $C$ . Suponha que  $C$  seja orientada por um vetor unitário  $\vec{T}$ . Definindo  $\mathbf{g}_F^0 = \langle \vec{F}, \cdot \rangle$ , verifique que:

$$\mathcal{I}^* \mathbf{g}_F^0 = \langle \vec{F}, \vec{T} \rangle \text{vol}_C$$

onde  $\mathbf{g}_F^0 = \langle \vec{F}, \cdot \rangle$ .

Nosso próximo exemplo de subvariedade orientada é uma superfície mergulhada com a orientação induzida por um campo normal.

**Exemplo 4.24. Elemento de área de uma superfície**

Sejam  $S^2$  uma superfície mergulhada em  $\mathbb{R}^3$ ,  $U$  é vizinhança de  $S$  de  $\mathbb{R}^3$  e  $\vec{N} \in \mathfrak{X}(U)$  um campo tal que  $\vec{N}|_S$  é normal a  $S$  e  $\|\vec{N}\| = 1$ . Então  $\vec{N}$  induz uma orientação  $\text{vol}_S \in \Omega^2(S)$  chamada **elemento de área** da seguinte forma (vide Figura 4.4):

$$\text{vol}_S = \mathcal{I}^*(i_{\vec{N}} \text{vol}_{\mathbb{R}^3}) \in \Omega^2(S)$$

onde  $\mathcal{I} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  é a inclusão. Dito de outra forma, se  $W_1, W_2 \in T_p S$

$$\text{vol}_S(W_1, W_2) = \det \begin{bmatrix} N_1 & w_{11} & w_{12} \\ N_2 & w_{21} & w_{22} \\ N_3 & w_{31} & w_{32} \end{bmatrix}$$

Podemos observar também que se  $\varphi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  é uma parametrização coerente com orientação (i.e., o vetor  $\frac{\partial \varphi}{\partial v_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v_2}$  tem mesmo sentido que o vetor  $\vec{N}$ ) então

$$\varphi^* \text{vol}_S = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial v_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v_2} \right\| dv_1 \wedge dv_2.$$



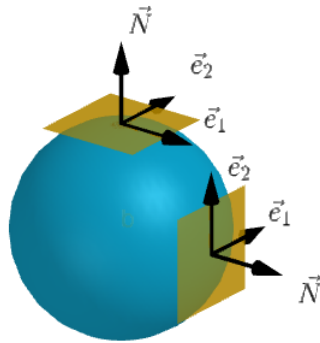


Figura 4.4: ilustrando Exemplo 4.24

Estabelecido intrinsecamente a forma elemento de área podemos revisitar o Exercício 4.13.

#### Exercício 4.25.

Considere uma superfície mergulhada  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ , campo normal unitário  $\vec{N} \in \mathfrak{X}(U)$ , a aplicação inclusão  $\mathcal{I} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  e a 2-forma  $\text{vol}_S \in \Omega(S)$  no Exemplo 4.24. Considere um campo  $\vec{F}$  na vizinhança  $U$  de  $S$ . Verifique que:

$$\langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S = \mathcal{I}^*(i_{\vec{F}} \text{vol}_{\mathbb{R}^3})$$

Como vimos na Definição 1.33, dado uma variedade mergulhada  $M^m$  mergulhada em  $\mathbb{R}^{m+k}$ , podemos induzir um produto interno em cada espaço tangente vindo do produto Euclidiano usual. Tal produto interno era chamado de *métrica induzida*. Mais geralmente, como veremos no Capítulo 5, uma variedade pode admitir uma métrica  $\mathbf{g}$  (um produto interno em cada espaço tangente que varia suavemente de ponto a ponto) que não precisa vir necessariamente de um ambiente euclidiano. A dupla  $(M, \mathbf{g})$  é chamada de **variedade Riemanniana**.

A seguir veremos o conceito de forma volume Riemanniana que generaliza Equação 4.2.2 e o Exemplo 4.24.

#### Proposição 4.26.

Seja  $(M^m, \mathbf{g})$  uma variedade Riemanniana e orientável.

(a) Então existe uma única  $m$ -forma  $\text{vol}_M$  (**forma volume Riemanniana**) que

## Continuação.

induz a orientação de  $M$  e tal que  $\text{vol}_M(e_1, \dots, e_m)_p = 1$  para toda base  $\{e_i\}$  ortonormal de  $T_pM$  com orientação de  $M$ .

(b) Dado um sistema de coordenadas compatível  $(U_\alpha, \psi_\alpha)$  temos que:

$$(\psi_\alpha^{-1})^* \text{vol}_M = \sqrt{\det[g_{i,j}]} dx_1 \cdots dx_n$$

$$\text{onde } g_{i,j} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right).$$

*Demonstração.* Vamos mostrar o item (a). Seja  $\eta$  uma forma volume em  $M$  (que existe pois  $M$  é orientável). Note primeiro que dado duas bases ortonormais  $\{e_i\}$  e  $\{\tilde{e}_i\}$  de  $T_pM$  de mesma orientação temos (vide Proposição 4.12)

$$\eta(e_1, \dots, e_m) = \eta(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_m) \quad (4.4.2)$$

Dado um referencial ortonormal local  $\{e_i\}$  em  $U$  (campos ortonormais suaves em uma vizinhança  $U$ ) podemos definir  $\eta(e_i) = f$  para uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  suave. A equação (4.4.2) garante que  $f$  não depende do referencial e da vizinhança  $U$ . A forma volume  $\omega$  é definida então como  $\omega = \frac{1}{f}\eta$ .

Agora provemos o item (b). Seja  $[g_{i,j}] = A\Lambda A^t$  onde  $\Lambda$  é a matriz diagonal com autovalores (positivos). Defina  $[E] = A\sqrt{\Lambda^{-1}}A^t$ . Sejam  $\{e_i\}$  as colunas de  $[E]$ . Note que  $\delta_{i,j} = g(e_i, e_j) = [e_i]^t [g_{i,j}] [e_j]$ .

$$\begin{aligned} 1 = \text{vol}_M(e_1, \dots, e_m) &= \text{vol}\left(E \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, E \frac{\partial}{\partial x_m}\right) \\ &= \det E \text{vol}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right) \\ &= \det E f \end{aligned}$$

onde  $\text{vol} = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$ . Assim  $f = \frac{1}{\det E} = \sqrt{[g_{i,j}]}$ .  $\square$

#### 4.4.2. Integração de formas

Vamos agora definir integração de  $m$ -formas com *pequeno suporte* em variedade orientável  $M^m$ . Seja  $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$  um atlas coerente de  $M$  e  $\omega$  uma  $n$ -forma com suporte compacto contido em  $U_\alpha$ . Podemos então definir:

$$\int_{U_\alpha} \omega := \int_{\psi(U_\alpha)} (\psi^{-1})^* \omega.$$

Observe que se consideramos outra carta  $(U_\beta, \psi_\beta)$  e acontecer que o suporte  $\omega$  esteja contido em  $U_\beta \cap U_\alpha$ , então obtemos o mesmo número. Isto segue da Eq. (4.4.1), da Proposição 4.21 e do fato que  $(\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1})^* = (\psi_\alpha^{-1})^* \circ \psi_\beta^*$ .

Assim como no caso de integração de funções sobre uma variedade, precisamos do conceito de partição da unidade estabelecido na Definição 3.18 afim de definir a integração de uma  $m$ -forma com suporte compacto (não necessariamente pequeno). Lembramos especialmente o Teorema 3.19, que garante que qualquer cobertura  $\{U_\alpha\}$  de uma variedade  $M$  (orientável ou não) admite uma partição da unidade subordinada, i.e., uma partição que atende  $\text{supp } f_\alpha \subset U_\alpha$ .

Seja  $\omega$  uma  $m$ -forma com suporte compacto. Denote por  $K = \text{supp } \omega$  e considere uma cobertura finita de  $K$  por vizinhanças coordenadas  $U_\alpha$ . Considere  $\{f_\alpha\}$  uma partição da unidade subordinada  $\{U_\alpha\}$ . Observe que  $f_\alpha \omega$  tem suporte compacto contido em  $U_\alpha$  e defina

$$\int_M \omega := \sum_\alpha \int_{U_\alpha} f_\alpha \omega.$$

É possível mostrar que esta definição não depende da cobertura ou da partição da unidade. Também nota-se aqui que o fato de  $K$  ser compacto é importante, pois, por exemplo, garante que a soma acima é finita.

Uma vez definida a integração de  $m$ -formas com suporte compacto podemos generalizar (4.4.1).

#### Proposição 4.27.

Sejam  $M^m$  e  $N^m$  variedades orientáveis e  $\phi: M \rightarrow N$  um difeomorfismo que preserva orientação. Se  $\omega$  é uma  $m$ -forma com suporte compacto em  $N$ , então

$$\int_N \omega = \int_M \phi^* \omega.$$

Vejamos nosso primeiro exemplo de integração ao longo de uma variedade de dimensão 1, i.e., ao longo de uma curva.

#### Exemplo 4.28. Trabalho

Analogamente ao caso bi-dimensional (vide equação (4.1.1)), se  $\vec{F} = \sum_{i=1}^m f_i \vec{e}_i$  representa um campo suave com suporte compacto em  $\mathbb{R}^m$ , então o **trabalho** realizado pela força  $\vec{F}$  ao deslocar uma partícula ao longo de uma curva regular

## Continuação.

$C$  orientado por um vetor unitário  $\vec{T}$  é dado por

$$\mathcal{T} := \int_C \langle \vec{F}, \vec{T} \rangle \text{vol}_C.$$

Pelo Exercício 4.23, temos  $\mathcal{T} = \int_C \nu_F$  para  $\nu_F = \mathcal{I}^* \mathbf{g}_F^0 \in \Omega^1(C)$  onde  $\mathcal{I} : C \rightarrow \mathbb{R}^m$  é a inclusão e  $\mathbf{g}_F^0 = \sum_{i=1}^m f_i dx_i$ .

Vejamos agora a integração de uma 2-formas em uma superfície em  $\mathbb{R}^3$ .

**Exemplo 4.29. Fluxo através de uma superfície**

Seja  $S^2$  superfície mergulhada em  $\mathbb{R}^3$  orientada por um campo normal unitário  $\vec{N}$  definido em uma vizinhança de  $S$ . Seja  $\vec{F}$  um campo suave com suporte compacto definido em uma vizinhança de  $S$ . O fluxo através da superfície  $S$  é definido por

$$\Phi = \int_S \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S$$

Se definimos  $\nu_F = \mathcal{I}^*(i_{\vec{F}} \text{vol}_{\mathbb{R}^3}) \in \Omega^2(S)$ , para a inclusão  $\mathcal{I} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  então temos pelo Exercício 4.13 que  $\Phi = \int_S \nu_F$ .

**4.4.3. Variedade com bordo e o Teorema de Stokes**

Seja  $\alpha : [0, 1] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$  parametrização suave regular. Definindo  $C$  como imagem de  $\alpha$  e considerando uma função suave  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  sabemos pelo Teorema Fundamental do Cálculo que:

$$\int_C df = f(\alpha(1)) - f(\alpha(0))$$

Este é um caso particular do que chamaremos *teorema de Stokes*. Afim de enunciar o teorema de Stokes, precisamos apresentar rapidamente o conceito de variedades com bordo e orientação induzida no bordo.

**Definição 4.30.**

Uma variedade suave com bordo  $M^m$  é um espaço topológico Hausdorff com base enumerável com atlas suave (maximal)  $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$  formado por conjuntos abertos  $U_\alpha$  que são homeomorfos ou ao espaço Euclidiano ou ao semi-

**Continuação.**

espaço superior  $\mathbb{H}^m = \{(x_1, \dots, x_m), x_m \geq 0\}$ . O bordo  $\partial M$  é o subconjunto de  $M$  tal que as parametrizações levam  $\partial\mathbb{H}^m$  em  $\partial M$ .

É possível verificar que o bordo em particular herda uma estrutura de subvariedade. Importante aqui perceber que quando lidamos com as mudanças  $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : U \subset \mathbb{H}^m \rightarrow V \subset \mathbb{H}^m$  devemos pensar em difeomorfismo que admite extensão para aberto em  $\mathbb{R}^m$ .

Uma forma de construir subvariedades com bordo é dada pelo teorema a seguir, vide Figura 4.5

**Teorema 4.31.**

Seja  $M^m$  variedade (sem bordo) e  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  aplicação suave com  $0 \in g(M)$  sendo valor regular. Então  $N := g^{-1}[0, \infty)$  é variedade com bordo, sendo que  $\partial N = g^{-1}(0)$ .

Considere o semi-plano superior  $\mathbb{H}^m$  com orientação dada por  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$ . A orientação induzida no bordo  $\partial\mathbb{H}^m = \{x_m = 0\}$  é  $(-1)^m dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{m-1}$ . É possível demonstrar que se  $\phi : \mathbb{H}^m \rightarrow \mathbb{H}^m$  é um difeomorfismo que preserva orientação (ou seja se estende localmente para difeomorfismos locais em  $\mathbb{R}^m$  e tem  $\det d\phi > 0$ ) então sua restrição  $\phi|_{\partial\mathbb{H}^m} \rightarrow \partial\mathbb{H}^m$  também preserva orientação (i.e.,  $\det (D\phi|_{\partial\mathbb{H}^m}) > 0$ ). Esta observação em particular permite concluir que uma variedade com bordo com atlas coerente tem uma orientação naturalmente induzida em seu bordo. Em particular se  $\psi$  é carta deste atlas então  $[\partial M]|_{\partial U} = \psi^*[\partial\mathbb{H}^m]$  onde  $U \subset M$  é aberto contendo pontos do bordo, vide Figura 4.5

**Teorema 4.32. Teorema de Stokes**

Seja  $\omega$  uma  $(m - 1)$ -forma com suporte compacto em uma variedade orientável  $M^m$ , e considere  $\partial M$  com a orientação induzida. Então

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Em particular se  $M$  for orientável compacta sem bordo então  $\int_M d\omega = 0 \forall \omega \in \Omega^{m-1}(M)$ .

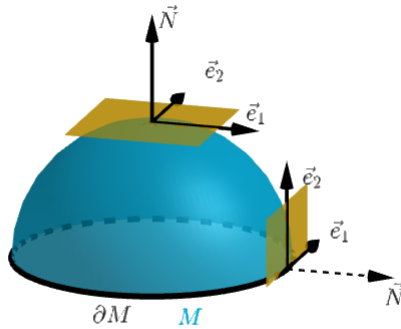


Figura 4.5: Variedade com bordo com orientação induzida. Note em particular que  $\widetilde{M} = \mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$  e  $g : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  função altura, i.e.,  $g(x) = x_3$ . Então  $M = g^{-1}[0, \infty)$  é variedade com bordo, ilustrando Teorema 4.31

*Demonstração.* Consideremos primeiro que o suporte de  $\omega$  é pequeno ou seja está completamente contido na vizinhança  $U_\alpha$  de uma carta, onde  $U_\alpha = \mathbb{H}^m$  ou  $U_\alpha = \mathbb{R}^m$  e provemos o teorema para esta situação. Por motivos didáticos vamos explicitar a prova deste caso para  $m = 2$ , deixando para o leitor completar os detalhes para o caso  $m > 2$ . Ou seja consideramos  $\omega = h_1 dx_1 + h_2 dx_2$  e assim  $d\omega = \left(\frac{\partial h_2}{\partial x_1} - \frac{\partial h_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2$

**Caso 1:**  $U_\alpha = \mathbb{R}^2$ . Neste caso, como não temos bordo, desejamos demonstrar que  $\int_{\mathbb{R}^2} d\omega = 0$ . Vamos supor que o suporte está contido em  $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ . Concluimos pelo teorema de Fubinni e pelo teorema fundamental que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} d\omega &= \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} \left(\frac{\partial h_2}{\partial x_1} - \frac{\partial h_1}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} dx_1 dx_2 - \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} dx_2 dx_1 \\ &= \int_{b_1}^{b_2} h_2(a_2, x_2) - h_2(a_1, x_2) dx_2 - \int_{a_1}^{a_2} h_1(x_1, b_2) - h_1(x_1, b_1) dx_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Caso 2:**  $U_\alpha = \mathbb{H}^2$ . Neste caso teremos que lidar com o bordo e devemos supor

que o suporte de  $\omega$  está contida em  $[a_1, a_2] \times [0, b_2]$ . Novamente o teorema de Fubini e teorema fundamental garantem que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{H}^2} d\omega &= \int_0^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} \left( \frac{\partial h_2}{\partial x_1} - \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \\ &= \int_0^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} dx_1 dx_2 - \int_{a_1}^{a_2} \int_0^{b_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} dx_2 dx_1 \\ &= \int_0^{b_2} h_2(a_2, x_2) - h_2(a_1, x_2) dx_2 - \int_{a_1}^{a_2} h_1(x_1, b_2) - h_1(x_1, 0) dx_1 \\ &= \int_{a_1}^{a_2} h_1(x_1, 0) dx_1 = \int_{\partial \mathbb{H}^2} \omega \end{aligned}$$

**Caso geral:** Vamos agora supor que o suporte de  $\omega$  não está contido em uma vizinhança  $U_\alpha$  de um sistema de coordenada. Porém é fácil verificar que o suporte de  $f_\alpha \omega$  está contido no interior de  $U_\alpha$ . Temos então pelos casos descritos acima que

$$\int_M d(f_\alpha \omega) = \int_{U_\alpha} d(f_\alpha \omega) = \int_{\partial U_\alpha} f_\alpha \omega = \int_{\partial M} f_\alpha \omega$$

A equação acima permite concluir que:

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \int_M d\left(\sum_\alpha f_\alpha \omega\right) = \sum_\alpha \int_M d(f_\alpha \omega) \\ &= \sum_\alpha \int_{\partial M} f_\alpha \omega = \int_{\partial M} \sum_\alpha f_\alpha \omega = \int_{\partial M} \omega. \end{aligned}$$

□

Nos corolários a seguir iremos usar as notações dos Exemplos 4.29 e 4.28

### Corolário 4.33. Teorema de Gauss clássico

Sejam  $M^3 \subset \mathbb{R}^3$  uma variedade orientável (com orientação de  $\mathbb{R}^3$ ) com bordo e  $\vec{F}$  campo com suporte compacto definido em uma vizinhança de  $M$ . Prove que

$$\int_M \operatorname{div}(\vec{F}) \operatorname{vol}_{\mathbb{R}^3} = \int_S \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \operatorname{vol}_S,$$

## Continuação.

onde  $\vec{N}$  é campo unitário, ortogonal ao bordo  $S = \partial M$  apontando para fora, e  $S$  tem orientação induzida por  $\vec{N}$ .

Demonstração.

$$\begin{aligned} \int_M \operatorname{div}(\vec{F}) \operatorname{vol}_{\mathbb{R}^3} &\stackrel{(i)}{=} \int_M d(i_{\vec{F}} \operatorname{vol}_{\mathbb{R}^3}) \\ &\stackrel{(ii)}{=} \int_S \mathcal{I}^*(i_{\vec{F}} \operatorname{vol}_{\mathbb{R}^3}) \\ &\stackrel{(iii)}{=} \int_S \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \operatorname{vol}_S \end{aligned}$$

onde Proposição 4.19 é utilizada na igualdade (i), Teorema 4.32 na igualdade (ii) e Exercício 4.25 na igualdade (iii). □

**Corolário 4.34. Teorema de Stokes clássico**

Seja  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície mergulhada orientada por um campo normal unitário  $\vec{N}$ , com bordo  $C = \partial S$  com orientação induzida. Dado uma campo  $\vec{F}$  de suporte compacto definido em uma vizinhança de  $S$  prove que:

$$\int_S \langle \operatorname{rot}(\vec{F}), \vec{N} \rangle \operatorname{vol}_S = \int_C \langle \vec{F}, \vec{T} \rangle \operatorname{vol}_C,$$

onde  $\vec{T}$  é campo unitário tangente a  $C$  compatível com orientação de  $C$ .

Demonstração.

$$\begin{aligned} \int_S \langle \operatorname{rot}(\vec{F}), \vec{N} \rangle \operatorname{vol}_S &\stackrel{(i)}{=} \int_S \mathcal{I}^*(i_{\operatorname{rot}(\vec{F})} \operatorname{vol}_{\mathbb{R}^3}) \\ &\stackrel{(ii)}{=} \int_S \mathcal{I}^*(d\mathbf{g}_F^0) \\ &\stackrel{(iii)}{=} \int_S d(\mathcal{I}^* \mathbf{g}_F^0) \\ &\stackrel{(iv)}{=} \int_C \mathcal{I}^* \mathbf{g}_F^0 \\ &\stackrel{(v)}{=} \int_C \langle \vec{F}, \vec{T} \rangle \operatorname{vol}_C, \end{aligned}$$



onde Exercício 4.25 é utilizado na igualdade (i), Proposição 4.19 na igualdade (ii), Proposição 4.15 na igualdade (iii), Teorema 4.32 na igualdade (iv) e Exercício 4.23 na igualdade (v). □

#### 4.4.4. \* Comentários sobre invariantes topológicos

Terminamos esta seção sobre formas com os dois exercícios que destacam como formas podem ser usadas como invariante topológicos, i.e., para identificar espaços que não podem ser difeomorfos um ao outro.

##### Exercício 4.35.

Considere a 1-forma  $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 - \{0, 0\})$  definida como  $\omega := \frac{1}{x^2+y^2}(-ydx + xdy)$ .

- (a) verifique que  $\omega$  é fechada, ou seja  $d\omega = 0$ ,
- (b) verifique que  $\int_{S^1} \omega = 2\pi$ ,
- (c) conclua que  $\omega$  não é exata, ou seja não existe  $\eta$  tal que  $d\eta = \omega$ .

##### Exercício 4.36. \*\*Lema de Poincaré

Dado um aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  denotamos  $H^k(U)$  o grupo de cohomologia de de Rham, i.e., o conjunto das  $k$ -formas fechadas em  $U$  (i.e,  $d\omega = 0$  onde  $\omega$  é  $k$ -forma em  $U$ ) quociente pelas formas exatas (i.e.,  $\omega = d\eta$  onde  $\eta$  é  $k-1$  forma).

1. Sejam

$$\begin{aligned} s : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow (x, 0) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, t) &\longrightarrow x. \end{aligned}$$

Prove que se  $\pi^* \circ s^* : H^k(\mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow H^k(\mathbb{R}^{n+1})$  é um isomorfismo então  $s^* : H^k(\mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow H^k(\mathbb{R}^n)$  é um isomorfismo.

## Continuação.

2. Toda forma em  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  pode ser vista como combinação de 2 tipos de formas:

$$(I) \pi^* \phi f(x, t)$$

$$(II) \pi^* \phi f(x, t) dt,$$

onde  $\phi$  é forma em  $\mathbb{R}^n$ . Seja  $K : \Omega^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$  operador linear definido da seguinte maneira:

$$(I) K(\pi^* \phi f(x, t)) = 0$$

$$(II) K(\pi^* \phi f(x, t)) = \pi^* \phi \int_0^t f(x, s) ds$$

Prove que  $1 - \pi^* s^* = (-1)^{k-1} dK - Kd$ .

3. Conclua que

$$H^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} 0 & \text{se } k > 0; \\ \mathbb{R} & \text{se } k = 0. \end{cases}$$

## 4.5. \*Geodésicas e uma introdução a mecânica

### 4.5.1. Estrutura simplética de $TM^*$

Sejam  $TM^* = \cup_p (T_p M)^*$  fibrado cotangente e  $\pi : TM^* \rightarrow M$  a projeção canônica.

#### Definição 4.37.

A variedade  $TM^*$  admite uma 1-forma  $\theta \in \Omega^1(TM^*)$  (forma tautológica) definida como:

$$\theta(Z_\eta) = \eta(d\pi Z_\eta) \text{ onde } Z_\eta \in T_\eta(TM^*)$$

e uma 2-forma definida como

$$\omega := -d\theta.$$

Continuação.

$(TM^*, \omega)$  é uma **variedade simpléctica**, ou seja uma variedade com uma 2-forma  $\omega$  fechada e não degenerada.

**Notação:** Ao longo desta seção denotaremos 0, 1 e 2 formas, bem como seus respectivos pull backs por parametrizações pelos mesmos símbolos, evitando sobrecargas de notações nas apresentações.

Em coordenadas  $\psi : U \subset TM^* \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  temos:

$$\theta = \sum_i p_i dq_i$$

$$\omega = \sum_i dq_i \wedge dp_i$$

Em particular:  $\omega((p, q), (\tilde{p}, \tilde{q})) = [q \ p] \begin{bmatrix} 0 & Id \\ -Id & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{q} \end{bmatrix}$

Como  $\omega$  é não degenerada, dada um Hamiltoniano  $h : TM^* \rightarrow \mathbb{R}$  existe um único campo  $\vec{h}$  (**campo Hamiltoniano**) definido como:

$$\omega(\vec{h}, \cdot) = dh(\cdot)$$

Seja  $N = h^{-1}(c)$  hipersuperfície regular. Note que:

- $\vec{h}$  é ortogonal simplécticamente a  $N$  ou seja  $\omega(\vec{h}, x) = 0, \forall x \in TN$
- $dh(\vec{h}) = 0$  i.e.,  $\vec{h}$  é tangente a  $N$ .

Por outro lado  $\dim(N^\omega) = \dim TM^* - \dim(N) = 1$  onde  $N^\omega$  é o ortogonal simpléctico. Assim  $\vec{h}$  gera a 1-distribuição  $N^\omega \subset TN$ .

Em coordenadas  $\vec{h} = (\frac{\partial h}{\partial p}, -\frac{\partial h}{\partial q})$ . Também a **equação Hamiltoniana**

$$\beta'(t) = \vec{h}(\beta(t))$$

pode ser escrita em coordenadas como:

$$\begin{aligned} q'(t) &= \frac{\partial h}{\partial p}(q(t), p(t)) \\ p'(t) &= -\frac{\partial h}{\partial q}(q(t), p(t)) \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

Visto que  $\vec{h}$  gera  $N^\omega \subset TN$  para  $N = h^{-1}(c)$ , as soluções da equação de Hamilton ficam contidas em  $N$  ou seja  $h(\beta) = ct$ .

**Observação 4.38.**

O fato de solução de equação de Newton  $\gamma : I \rightarrow M$  ( $m\gamma''(t) = -\nabla U$ ) ter energia total  $E : TM \rightarrow \mathbb{R}$  ( $E(v_q) = \frac{m}{2}\|v_q\|^2 + U(q)$ ) conservada (i.e.  $E(\gamma'(t)) = ct$ ) pode ser entendido também no contexto de geometria simplética. De fato veremos que certos Lagrangianos geram um difeomorfismo  $\mathcal{L} : TM \rightarrow TM^*$  e  $\beta(t) = \mathcal{L}(\gamma'(t))$  será solução da equação Hamilton de  $h : TM^* \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $h = E \circ \mathcal{L}^{-1}$  (vide Exemplo 4.45).

**4.5.2. Relações entre Lagrangianos e Hamiltonianos****Exemplo 4.39. Motivando a linguagem Lagrangiana**

Seja  $M^n$  variedade mergulhada em  $\mathbb{R}^{n+k}$ , o produto Euclidiano de  $\mathbb{R}^{n+k}$  induz um produto interno  $g_0$  no fibrado tangente  $TM$  e assim podemos medir a distância entre pontos  $p, q \in M$  como  $d(p, q) = \inf_{\beta} l(\beta)$  para todas  $\beta$  curva (suave por parte) com  $\beta(0) = p$  e  $\beta(1) = q$ , onde  $l(\beta) = \int_0^1 \sqrt{g_0(\beta'(t), \beta'(t))} dt$ . Podemos nos perguntar se existe uma curva  $\gamma$  que minimiza distância, ou seja que minimiza o funcional  $\beta \rightarrow l(\beta)$  para curvas  $\beta$  com  $\beta(0) = p$  e  $\beta(1) = q$ . Este é um exemplo típico do que charemos um problema variacional e  $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $L(\cdot) = \|\cdot\|^2$  será o Lagrangiano associado ao problema.

**Observação 4.40.**

É possível provar (teorema de Hopf Rinow) que o problema tem solução quando  $M$  é compacta (ou mais geralmente completa em relação a  $d$ ).

**Observação 4.41.**

Veremos na Parte II que o problema de minimizar  $l$  é equivalente ao problema de minimizar a energia cinética  $\beta \rightarrow e(\beta)$  onde  $e(\beta) = \frac{1}{2} \int_0^1 \|\beta'\|^2 dt$ . Uma das vantagens é que  $L(\cdot) = \|\cdot\|^2$  é suave e mais fácil de trabalhar.

**Definição 4.42.**

Uma curva suave  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  é **solução de Euler Lagrange** associado a um Lagrangiano  $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$  se  $\frac{d}{ds} \delta(\gamma_s)|_{s=0} = 0$  para toda variação de curvas

## Continuação.

(suaves por partes)  $s \rightarrow \gamma_s$  com  $\gamma_s(0) = \gamma(0)$  e  $\gamma_s(1) = \gamma(1)$ ,  $\gamma_0 = \gamma$  onde

$$\delta(\gamma_s) = \int_0^1 L(\gamma'_s(t)) dt$$

Aqui uma variação suave por partes de  $\gamma$  é uma aplicação  $\psi : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, 1] \rightarrow M$  tal que  $\gamma_s = \psi(s, \cdot)$  e  $\psi|_{(-\epsilon, \epsilon) \times [t_i, t_{i+1}]}$  é suave (para uma partição de  $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$ ), em particular, o vetor velocidade da variação  $V(t) = \frac{\partial}{\partial s} \psi(0, t)$  é contínuo ao longo de  $\gamma$ .

**Lema 4.43.**

uma curva  $\gamma$  é solução de Euler Lagrange, se e somente se em coordenadas ela atende a equação de Euler Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q}(q(t), q'(t)) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), q'(t)) \right) \quad (4.5.2)$$

*Demonstração.* Consideremos uma partição tal que  $\alpha([-\epsilon, \epsilon] \times [t_i, t_{i+1}])$  esteja contido em uma vizinhança coordenada, denotando em coordenadas  $p_s(t)$  tal variação. Seja  $V(t) = \frac{\partial}{\partial s} \gamma_s(t)|_{s=0}$  a velocidade da variação e  $\tilde{V} = \frac{d}{ds} p_s|_{s=0}$  sua representação em coordenadas.

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \delta(\gamma_s)|_{s=0} &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\partial}{\partial s} L(q_s(t), q'_s(t)) dt \\ &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), q'(t)) \tilde{V}(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), q'(t)) \tilde{V}'(t) dt \\ &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q}(\gamma'(t)) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\gamma'(t)) \right) \right\} \tilde{V}(t) dt \\ &+ \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\gamma'(t)) \tilde{V}(t) \right) dt \end{aligned}$$

Teorema fundamental do Cálculo,  $V(0) = 0 = V(1)$  e soma telescópica implicam:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \delta(\gamma_s)|_{s=0} &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q}(\gamma'(t)) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\gamma'(t)) \right) \right\} \tilde{V}(t) dt \\ &+ \sum_i \left( \mathcal{L}(\gamma'(t)) V(t) \right) \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} \\ &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q}(\gamma'(t)) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\gamma'(t)) \right) \right\} \tilde{V}(t) dt \end{aligned}$$

Utilizando a arbitrariedade da escolha da variação  $\gamma_s(t)$ , e.g,

$$\tilde{V}(t) = f(t) \left\{ \frac{\partial L}{\partial q}(\gamma'(t)) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\gamma'(t)) \right) \right\}$$

onde  $f \geq 0$  é nula fora de  $[t_i, t_{i+1}]$ , prova-se que Eq. (4.5.2) equivale a  $0 = \frac{d}{ds} \delta(\gamma_s)|_{s=0}$   $\square$

#### Definição 4.44.

A aplicação  $\mathcal{L} : TM \rightarrow TM^*$  definida como:

$$\mathcal{L}(v_q)(w_q) = \frac{d}{ds} L(v_q + sw_q)|_{s=0}$$

é chamada *transformada de Legendre*.

Em coordenadas temos:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q})(\cdot) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} dq_i$$

Seja por exemplo  $L(v_q) = \frac{m}{2} \|v_q\|^2 - U(q)$ . Neste caso:

$$\mathcal{L}(v_q)(w_q) = \frac{d}{ds} \left( \frac{m}{2} \langle v_q + sw_q, v_q + sw_q \rangle - U(q) \right) \Big|_{s=0} = \langle mv_q, w_q \rangle$$

Este Lagrangiano é um exemplo do que chamamos *Lagrangiano hiper-regular*, i.e, Lagrangiano onde  $\mathcal{L}$  é um difeomorfismo.

**Exemplo 4.45. Equação de Newton em  $\mathbb{R}^n$** 

Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  solução da equação de Newton  $m\gamma''(t) = -\nabla U(\gamma(t))$ . Note que

$$q'_i(t) = \dot{q}_i(t), \quad \dot{q}'_i(t) = -\frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \quad (4.5.3)$$

Assim, pelo Lema 4.43,  $\gamma$  é solução de Euler Lagrange associada a

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \|\dot{q}\|^2 - U(q).$$

Neste exemplo temos:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \sum_i p_i d\dot{q}_i$$

onde  $p_i = m\dot{q}_i$ . Dado a energia total  $E : TM \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$E(q, \dot{q}) := \mathcal{L}(q, \dot{q})(v_q) - L(v_q) = \frac{m}{2} \|\dot{q}\|^2 + U(q),$$

podemos definir o hamiltoniano  $h : TM^* \rightarrow \mathbb{R}$  como:

$$h(q, p) := E \circ \mathcal{L}^{-1} = \frac{1}{2m} \|p\|^2 + U(q).$$

Note então que:

$$\vec{h}(q, p) = \left( \frac{\partial h}{\partial p}, -\frac{\partial h}{\partial q} \right) = \left( \frac{p}{m}, -\nabla U \right).$$

Substituindo  $p_i = m\dot{q}_i$  na Eq. (4.5.3) temos:

$$q'_i(t) = \frac{p_i}{m}, \quad p'_i(t) = -\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}. \quad (4.5.4)$$

Em outras palavras verificamos que a equação de Euler de  $L$  equivale a equação Hamiltoniana, ou seja ilustramos a proposição a seguir.

**Proposição 4.46.**

Sejam

## Continuação.

- $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$  uma Lagrangiano hiper-regular.
- $E : TM \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $E(v_q) = \mathcal{L}(v_q)(v_q) - L(v_q)$ ,
- $h : TM^* \rightarrow \mathbb{R}$  Hamiltoniano definido como  $h = E \circ \mathcal{L}^{-1}$

Então  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  é solução de Euler Lagrange de  $L$  sse  $\alpha = \mathcal{L}(\gamma')$  for solução da equação Hamiltoniana de  $h$ .

*Demonstração.* Dado  $\mathcal{L}(q(t), q'(t)) = (q(t), p(t))$  desejamos verificar que  $(q(t), q'(t))$  atende Eq. (4.5.2) sse  $(q(t), p(t))$  atende Eq. (4.5.1). Para tanto iremos derivar  $h(q, p) = E \circ \mathcal{L}^{-1}(q, p)$ . Iniciemos o calculo dos termos. Como  $L(q, \dot{q}) = (q, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}})$  temos:

$$D\mathcal{L} = \begin{bmatrix} Id & 0 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}} \end{bmatrix} \text{ e } D\mathcal{L}^{-1} = \begin{bmatrix} Id & 0 \\ -\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}}\right)^{-1} \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} & \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}}\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

Visto que  $E(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L(q, \dot{q})$

$$\frac{\partial E}{\partial q}(q, \dot{q}) = \dot{q} \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) = \dot{q} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}}$$

Substituindo em:  $Dh(q, p) = DE(q, \dot{q})D\mathcal{L}^{-1}(q, p)$  temos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial q} & \frac{\partial h}{\partial p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} & \dot{q} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Id & 0 \\ -\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}}\right)^{-1} \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} & \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}}\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial h}{\partial q}(q(t), p(t)) = -\frac{\partial L}{\partial q}(q(t), q'(t))$$

$$\frac{\partial h}{\partial p}(q(t), p(t)) = q'(t)$$

As Eq. acima implicam que:  $(q(t), q'(t))$  atende Eq. (4.5.2) i.e.,

$$\frac{\partial L}{\partial q}(q(t), q'(t)) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), q'(t)) \right)$$

SSE  $(q(t), p(t))$  atende Eq. (4.5.1) i.e.,

$$q'(t) = \frac{\partial h}{\partial p}(q(t), p(t))$$

$$p'(t) = -\frac{\partial h}{\partial q}(q(t), p(t))$$

□



### 4.5.3. Geodésicas e equação de Newton

Dado uma variedade mergulhada  $M^n$  em  $\mathbb{R}^{n+k}$  vimos anteriormente que dado campo  $\vec{Y}$  tangente a  $M$  tínhamos uma forma de derivar  $\vec{Y}$  em  $p \in M$  na direção de um vetor  $\vec{X}(p) \in T_pM$  obtendo um vetor ainda em  $T_pM$ . Tal operação era feita pela conexão Riemanniana

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

$$\nabla_{\vec{X}} \vec{Y}(p) = (D\tilde{Y}(p)\vec{X}(p))^T$$

onde  $\tilde{Y}$  é uma extensão local de  $\vec{Y}$  e  $(\cdot)^T$  é a projeção ortogonal em  $TM$ .

O operador  $\nabla$  induz um outro operador que age nos campos  $t \rightarrow V(t) \in T_{\gamma(t)}M$  ao longo de curvas  $t \rightarrow \gamma(t) \in M$  chamado *derivada covariante*:

$$\frac{\nabla}{dt} V(t) = (V'(t))^T$$

Uma curva suave  $\gamma : I \rightarrow M$  é chamada *geodésica* se:

$$\frac{\nabla}{dt} \gamma'(t) = (\gamma'(t))^T = 0$$

Visto que  $\frac{d}{dt} \|\gamma'(t)\|^2 = 2\langle \frac{\nabla}{dt} \gamma', \gamma' \rangle = 0$ , geodésica tem velocidade constante. Mostraremos na Parte II que  $\gamma$  sempre *minimiza localmente distância*. Ela também pode ser vista como uma solução de Euler Lagrange associada de  $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $L(v_q) = \frac{1}{2} \|v_q\|^2$  para vetores  $v_p \in T_pM$  e  $\|v\|^2 = g_0(v, v)$  onde  $g_0$  é a métrica induzida em  $TM$  pelo produto Euclidiano de  $\mathbb{R}^{n+k}$ .

A grosso modo falando poderíamos pensar em uma geodésica como descrevendo uma partícula (de massa  $m = 1$ ) no espaço  $M$  sem nenhuma força (do espaço) atuando sobre ela, e assim se movendo da forma a consumir menor energia. Porém o que acontece se nossa particular estiver sobre a influência de um campo de  $M$ ?

Seja  $U : M \rightarrow \mathbb{R}$  função potencial (suave) e  $\text{grad}U$  gradiente Riemanniano, ou seja  $\text{grad}U = (\nabla \tilde{U})^T$  onde  $\tilde{U}$  é uma extensão local. Uma curva  $\gamma : I \rightarrow M$  atende a equação de Newton associada ao potencial  $U$  se:

$$\frac{\nabla}{dt} \gamma'(t) = -\text{grad}U$$

**Proposição 4.47.**

Uma curva suave  $\gamma : I \rightarrow M$  atende a equação de Newton associada ao potencial

## Continuação.

$U$  se e somente se é solução de Euler Lagrange de  $L(v_q) = \frac{1}{2}g_0(v_q, v_q) - U(q)$ .

*Demonstração.* Considere uma variação  $(s, t) \rightarrow \gamma_s(t)$  de  $\gamma_0 = \gamma$ ,  $\gamma_s(0) = \gamma(0)$ ,  $\gamma_s(1) = \gamma(1)$  e campo velocidade  $V(t) = \frac{\partial}{\partial s}\gamma_s(t)|_{s=0}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\delta(\gamma_s)|_{s=0} &= \frac{d}{ds} \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} L(\gamma'_s(t)) dt \\ &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \gamma_s(t), \gamma'_s(t) \right\rangle|_{s=0} - \frac{d}{ds} U(\gamma_s(t))|_{s=0} dt \\ &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{d}{dt} V(t), \gamma'(t) \right\rangle - \langle \nabla(U)(\gamma(t)), V(t) \rangle dt \\ &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} -\langle V(t), \gamma''(t) \rangle - \langle V(t), \nabla(U)(\gamma(t)) \rangle dt \\ &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d}{dt} \left( \langle V(t), \gamma'(t) \rangle \right) dt \end{aligned}$$

O resto da demonstração segue os mesmos argumentos da demonstração da Eq. (4.5.2), i.e., aplicar o teorema fundamental do cálculo, soma telescópica e a escolha arbitrária da variação, i.e., do campo velocidade  $t \rightarrow V(t) \in T_{\gamma(t)}M$ , com  $V(0) = V(1) = 0$

□

Veremos a seguir que se  $U < c$  então uma curva suave  $\gamma : I \rightarrow M$  atendendo a uma equação de Newton associada ao potencial  $U$  pode ser vista (a menos de reparametrização) como geodésica da métrica de Jacobi  $g = (c - U)g_0$ , i.e., solução de Euler Lagrange para o Lagrangiano  $L_c(v) = \frac{1}{2}g(v, v)$ .

**Proposição 4.48.**

Seja  $U : M \rightarrow \mathbb{R}$  função potencial tal que  $U < c$  e  $\gamma : I \rightarrow M$  solução de Euler Lagrange de  $L(v_q) = \frac{1}{2}g_0(v_q, v_q) - U(q)$  com energia  $c$ . Então existe uma reparametrização  $\beta$  de  $\gamma$  que é solução de Euler Lagrange de  $L_c(v) = \frac{(c-U)}{2}g_0(v, v)$  com energia 1. Aqui  $g_0$  denota a métrica induzida em  $TM$  pela métrica Euclidiana  $\mathbb{R}^{m+k}$ .

*Demonstração.* Considere os Hamiltonianos associados  $L$  e  $L_c$

$$h(p_q) = \frac{1}{2}\|p\|^2 + U(q)$$

$$h_c(p_q) = \frac{\|p\|^2}{2(c-U(q))}$$

É possível verificar que  $N = h^{-1}(c) = h_c^{-1}(1)$  e que  $c$  e  $1$  são valores regulares de  $h$  e  $h_c$ . Visto que  $\vec{h}$  e  $\vec{h}_c$  geram o ortogonal simplético  $N^\omega \subset TN$  (lembre  $\dim N^\omega = 1$ ), eles são múltiplos um dos outros, i.e.,  $\vec{h}_c = \lambda \vec{h}$  para uma função suave  $\lambda : N \rightarrow \mathbb{R}$ .

Seja  $\alpha$  tal que  $\vec{h}(\alpha(t)) = \alpha'(t)$ . Defina  $f(t) = \int_0^t \frac{dz}{\lambda \circ \alpha(z)} = s$ . Assim  $(f^{-1})'(s) = \frac{1}{f'(t)} = \lambda \circ \alpha(t)$ . Defina  $\beta(s) = \alpha(f^{-1}(s))$ . Como  $\vec{h}_c(\alpha(t)) = \lambda \circ \alpha(t) \vec{h}(\alpha(t))$  temos:

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= \lambda \circ \alpha(t) \vec{h}(\alpha(t)) \\ &= \vec{h}_c(\alpha(t)) \\ &= \vec{h}_c(\alpha(f^{-1}(s))) \\ &= \vec{h}_c(\beta(s)) \end{aligned}$$

Assim  $\pi(\beta(s)) = \pi(\alpha(f^{-1}(s))) = \gamma(f^{-1}(s))$ . Ou seja a geodésica  $\pi(\beta(s))$  da métrica  $g$  é uma reparametrização da solução da eq. de Newton  $\gamma$ .  $\square$

#### 4.6. \*Otimização e o princípio do máximo de Pontryagin

Na Seção 2.6 introduzimos a questão de como poderíamos modelar as possíveis maneiras de um trem ideal (sem atritos) descrito como um ponto na reta, i.e.,  $t \rightarrow x_1(t) \in \mathbb{R}$ , sair da estação  $-a = x_1(0)$  e chegar na estação  $0 = x_1(t_1)$ . Supondo que nosso trem tivesse aceleração  $x_1''(t) = u(t)$ , onde  $u \in [-1, 1]$ , passamos a descrever seus possíveis movimentos como composição das curvas integrais dos campos  $\vec{X}_u(q) = (q_2, u)$  definidos no espaço *posição*  $\times$  *velocidade*  $T\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ . Familiarizados com o conceito de controle geométrico  $\{\vec{X}_u\}$ , vimos os conceitos de conjuntos alcançáveis  $\mathcal{A}(q_0)$ , órbitas  $\mathcal{O}(q_0)$  e algumas de suas interessantes propriedades.

Nesta seção gostaríamos de introduzir mais um elemento da teoria de controle geométrico, um *funcional custo*, no espaço das funções de controles  $t \rightarrow u(t) \in U$ . Por exemplo no problema do trem, poderíamos nos perguntar sobre o custo do

tempo de viagem ou o custo de algo que poderia refletir no consumo do combustível (e.g, energia cinética).

Vamos agora fixar as notações, estabelecer as hipóteses que estaremos trabalhando e formular mais precisamente o problema que desejamos abordar.

- $\{\vec{X}_u\}$  será um controle geométrico (definido em todo lugar) em variedade  $M$ ;
- $t \rightarrow u(t) \in L^\infty([0, t_1], U)$  onde  $U \subset \mathbb{R}^m$  são as **funções de controles** admissíveis;
- dado uma função controle  $t \rightarrow u(t)$  denotamos  $t \rightarrow q_u$  a solução da E.D.O (q.t.p) do campo (não autônomo)  $\vec{X}_{u(t)}$ , i.e.,  $q'_u(t) = \vec{X}_{u(t)}(q_u(t))$ ;
- $q \rightarrow \vec{X}_u(q)$  é suave para  $u$  fixo;
- $(q, u) \rightarrow \vec{X}_u(q) \in C^0(M \times \bar{U})$ ;
- $(q, u) \rightarrow \frac{\partial}{\partial q} \vec{X}_u(q) \in C^0(M \times \bar{U})$ ;
- $\varphi : M \times U \rightarrow \mathbb{R}$  nosso **custo infinitesimal** satisfaz as mesmas condições de regularidade apresentadas acima;
- $J^{t_1}(u) := \int_0^{t_1} \varphi(q_u(t), u(t)) dt$  é o **custo** dentre todos os controles admissíveis.

Nosso objetivo consiste em procurar candidatos para uma solução com dois estados fixos  $q_0$  e  $q_1$  em  $M$  e que minimize o custo. Em outras palavras definindo  $\Omega = \{q_u \in L^\infty([0, t_1], U); q_u(0) = q_0, q_u(t_1) = q_1\}$  procuramos  $\tilde{u} \in \Omega$  que atenda as *condições necessárias* para o problema:

$$J(\tilde{u}) = \inf_{u \in \Omega} J(u) \quad (4.6.1)$$

A solução  $t \rightarrow \tilde{u}$  do Problema (4.6.1) é chamada **controle ótima** e  $t \rightarrow q_{\tilde{u}}(t)$  é chamada **trajetória ótima**. Poderemos considerar  $t_1$  fixo ou  $t_1$  livre. Por exemplo, no problema do trem, poderíamos otimizar o tempo ( $t_1$  é livre e  $\varphi = 1$ ) ou poderíamos otimizar a eficiência energética ( $t_1$  é fixo e  $\varphi = u+v$ ).

Nossa estratégia para abordar o problema 4.6.1 será criar um novo controle geométrico  $\{\hat{X}_u\}_{u \in U}$  em  $M \times \mathbb{R}$  como  $\hat{X}_u(q, s) = (\vec{X}_u(q), \varphi(q, u))$  A solução  $t \rightarrow \hat{q}_u(t)$  de  $\hat{q}'_u(t) = \hat{X}_u(\hat{q}_u(t))$  com condição inicial  $\hat{q}_u(0) = (q_0, 0)$  é

$$\hat{q}_u(t) = \left( q_u(t), \int_0^t \varphi(q_u(s), u(s)) ds \right)$$

Desejamos agora formular a *condição necessária* para (4.6.1) em termos do conjunto alcançável deste novo controle geométrico. Aproveitemos para revisar nosso conceito de conjunto alcançável, agora dependente de um tempo fixo ou dos tempos até um tempo fixo.

- $\widehat{\mathcal{A}}_{q_0}(t) := \{\hat{q}_u(t) | u \in L^\infty([0, t], U)\}$
- $\widehat{\mathcal{A}}_{q_0}^t := \cup_{0 \leq \tau \leq t} \widehat{\mathcal{A}}_{q_0}(\tau)$
- $\widehat{\mathcal{A}}_{q_0} := \cup_{0 \leq \tau < \infty} \widehat{\mathcal{A}}_{q_0}(\tau)$

**Proposição 4.49.**

Se  $t \rightarrow \tilde{u}$  é um controle ótimo em  $[0, t_1]$ , então  $\hat{q}_{\tilde{u}}(t_1) \in \partial \widehat{\mathcal{A}}_{q_0}(t_1)$

*Demonstração.* Defina  $I_{q_1} = \{(q_1, y), y < J^{t_1}(\tilde{u})\} \subset M \times \mathbb{R}$ . Suponha por absurdo que  $I_{q_1} \cap \widehat{\mathcal{A}}_{q_0}(t_1) \neq \emptyset$ . Então existe  $t \rightarrow \hat{q}_u(t)$  com  $\hat{q}_u(0) = (q_0, 0)$  e  $\hat{q}_u(t_1) = (q_1, y_1) \in I_{q_1}$  com  $J^{t_1}(u) = y_1 < J^{t_1}(\tilde{u})$  o que seria uma contradição. □

A grosso modo desejamos discutir aqui *condições necessárias* para que  $\hat{q}_{\tilde{u}}(t_1) \in \partial \widehat{\mathcal{A}}_{q_0}(t_1)$ . Tais condições serão apresentadas no Princípio do máximo de Pontryagin (abreviado por PMP), o qual formularemos primeiro de forma geométrica (explicitando o conjunto alcançável) e discutindo a ideia da prova. Em seguida reformularemos PMP como aparece mais comumente em livros de Engenharia, aplicando o critério em alguns exemplos.

Ambas as formulações do PMP utilizarão a linguagem Hamiltoniana, motivo pelo qual escolhemos este tópico para ilustrar um pouco o uso de formas diferenciais em cursos de engenharia. Maiores detalhes podem ser encontrado em Agrachev e Sachkov, onde esta exposição está baseada,<sup>5</sup>

**4.6.1. Uma versão geométrica do PMP**

Iniciemos fixando a notação adequada. Utilizaremos aqui a estrutura simplética em  $TN^*$  apresentada na Seção 4.5.1. Sejam  $\{\vec{Y}_u\} \subset \mathfrak{X}(N)$  um sistema de controle e Hamiltoniano  $h : TN^* \times U \rightarrow \mathbb{R}$  definida como:  $h_u(\lambda) = \lambda(\vec{Y}_u)$ . Para um controle admissível  $t \rightarrow u(t)$  a trajetória  $t \rightarrow q_u(t) \in N$  é a solução de  $q'_u(t) = \vec{Y}_{u(t)}(q_u(t))$ .

<sup>5</sup>Andrei A. Agrachev, Yuri L. Sachkov *Control Theory from the Geometric Viewpoint* Springer Verlag EMS, volume 87 (2004)

**Teorema 4.50. PMP geométrico**

Seja  $t \rightarrow \tilde{u}(t)$  um controle admissível, com  $q_{\tilde{u}}(t_1) \in \partial\mathcal{A}_{q_0}(t_1)$ . Então existe uma curva Lipschitz  $t \rightarrow \lambda(t) \in T^*N$  tal que:

- (a)  $\lambda(t) \neq 0, \pi(\lambda(t)) = q_{\tilde{u}(t)}$
- (b)  $\lambda'(t) = \vec{h}_{\tilde{u}}(\lambda(t))$
- (c)  $h_{\tilde{u}}(\lambda(t)) = \max_{u \in U} h_u(\lambda(t))$

**Observação 4.51.**

Utilizando fato que fluxos de campos (não-autônomos) são difeomorfismo, é possível provar que hipótese  $q_{\tilde{u}}(t_1) \in \partial\mathcal{A}_{q_0}(t_1)$  implica que:

$$q_{\tilde{u}}(t) \in \partial\mathcal{A}_{q_0}(t), \text{ para } t \in [0, t_1]. \quad (4.6.2)$$

**Preparativos para prova do Teorema 4.50**

Nosso modesto objetivo nesta subseção é apenas dar os ingredientes necessários para compreender a ideia da prova do PMP. Em particular desejamos entender como o item (c) do Teorema 4.50 pode ser interpretado em termos geométricos e sua relação com a Figura 4.6. Iniciemos discutirmos um pouco mais sobre campos não autônomos, suas curvas integrais e seus fluxos.

**Teorema 4.52. Carathéodory**

Considere um campo vetorial não autônomo  $\vec{V}_t$ . Suponha que:

1.  $t \rightarrow \vec{V}_t(q)$  é mensurável e localmente limitado
2.  $q \rightarrow \vec{V}_t(q)$  é suave;
3.  $|\frac{\partial v_i(q,t)}{\partial q}| \leq C_{I,K}$  para  $\vec{V}_t(q) = \sum_i v_i(t, q)\xi_i$

Então existe  $\varphi : D(X) \subset M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow M$  tal que:

- (a)  $t \rightarrow \varphi_{t_0}^t(q)$  é Lipschitz com respeito a  $t$  e suave  $q \rightarrow \varphi_{t_0}^t(q)$
- (b)  $\frac{d\varphi_{t_0}^t}{dt} = \vec{V}_t(\varphi_{t_0}^t(q))$  para quase todo  $t$  e  $\varphi_{t_0}^{t_0}(q) = q$ .

**Notação:**  $\exp \left( \int_0^t V_s ds \right) := \varphi^t$  e  $\exp \left( \int_{t_0}^t V_s ds \right) := \varphi_{t_0}^t$

**Observação 4.53.**

Considere um campo vetorial linear não autônomo  $\vec{V}_t$  em  $\mathbb{R}^m$ , i.e.,

$$\vec{V}_t(q) = \sum_i \left( \sum_j a_{ij}(t) q_j \right) \vec{e}_i$$

onde  $t \rightarrow [a_{ij}] = A(t) \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ . Então o fluxo é dado por uma série (de Volterra) i.e., para  $0 \leq s_n \leq s_{n-1} \leq s_{n-2} \cdots \leq t$

$$\exp \left( \int_0^t \vec{V}_s ds \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \cdots \int_0^{s_{n-1}} A_{s_n} \cdots A_{s_1} ds_n \cdots ds_1$$

Em particular se  $A_{s_1}$  commuta com  $A_{s_2}$  então  $\exp \left( \int_0^t \vec{V}_s ds \right) = e^{\int_0^t A(s) ds}$  ou seja coincide de fato com a exponencial matricial.

O Lemma (item (b)) a seguir descreve o fluxo da soma de campos (autônomos ou não). A grosso modo uma curva integral da soma de campos  $\vec{Z}_s + \vec{W}_s$  é a composição da linha integral de  $\vec{Z}_s$  com a linha integral de um outro campo, o qual seria o campo  $\vec{W}_s$  sob o efeito do pushforward do fluxo de  $\vec{Z}_s$ . Em particular como esperado, se os campos comutassem, o fluxo da soma seria apenas a composição dos fluxos.

**Lema 4.54.**

Definindo  $\varphi_z^t := \exp(\int_z^t Z_s ds)$  e  $\varphi^t := \exp(\int_0^t Z_s ds)$  temos:

- (a)  $(\cdot) \bullet \exp \left( \int_0^t Z_s + W_s ds \right) = (\cdot) \bullet \exp \left( \int_0^t Ad(\varphi^s) W_s ds \right) \bullet \varphi^t$
- (b)  $(\cdot) \bullet \exp \left( \int_0^t Z_s + W_s ds \right) = (\cdot) \bullet \varphi^t \bullet \exp \left( \int_0^t (\varphi_s^t)_* W_s ds \right)$

*Demonstração.* **(a):** Denotando  $\phi^t = \exp \left( \int_0^t Z_s + W_s ds \right) = \psi^t \bullet \varphi^t$  temos:

$$\begin{aligned}
 \cancel{(\cdot) \bullet \phi^t \bullet \vec{Z}_t} + (\cdot) \bullet \phi^t \bullet \vec{W}_t &= (\cdot) \bullet \phi^t \bullet (\vec{Z}_t + \vec{W}_t) \\
 &= (\cdot) \bullet \frac{d}{dt} \phi^t \\
 &= (\cdot) \bullet \left( \frac{d}{dt} \psi^t \right) \bullet \varphi^t + (\cdot) \bullet \psi^t \bullet \frac{d}{dt} (\varphi^t) \\
 &= (\cdot) \bullet \left( \frac{d}{dt} \psi^t \right) \bullet \varphi^t + \cancel{(\cdot) \bullet \psi^t \bullet (\varphi^t) \bullet \vec{Z}_s}
 \end{aligned}$$

Assim  $(\cdot) \bullet \phi^t \bullet \vec{W}_t = (\cdot) \bullet \psi^t \bullet \varphi^t \bullet \vec{W}_t = (\cdot) \bullet \left( \frac{d}{dt} \psi^t \right) \bullet \varphi^t$ . Logo

$$\begin{aligned}
 (\cdot) \bullet \left( \frac{d}{dt} \psi^t \right) &= (\cdot) \bullet \phi^t \bullet \vec{W}_t \bullet \varphi^{-t} \\
 &= (\cdot) \bullet \psi^t \bullet \varphi^t \bullet \vec{W}_t \bullet (\varphi^t)^{-1} \\
 &= (\cdot) \bullet \psi^t \bullet Ad(\varphi^t) \vec{W}_t
 \end{aligned}$$

o que implica que  $\psi^t = \exp \left( \int_0^t Ad(\varphi^s) \vec{W}_s ds \right)$  terminando a prova do item (a).

**(b)** Segue do item (a) que:

$$\begin{aligned}
 \exp \left( \int_0^t Z_s + W_s ds \right) &= \exp \left( \int_0^t Ad(\varphi^s) W_s ds \right) \bullet \varphi^t \\
 &= \varphi^t \bullet \varphi^{-t} \bullet \exp \left( \int_0^t Ad(\varphi^s) W_s ds \right) \bullet \varphi^t \\
 &\stackrel{(i)}{=} \varphi^t \bullet \exp \left( \int_0^t Ad(\varphi^{-t}) Ad(\varphi^s) W_s ds \right) \\
 &= \varphi^t \bullet \exp \left( \int_0^t Ad(\varphi_t^s) W_s ds \right) \\
 &= \varphi^t \bullet \exp \left( \int_0^t (\varphi_t^s)_* W_s ds \right)
 \end{aligned}$$

A igualdade (i) segue do fato que para campo  $\vec{K}_s$  :

$$\varphi^{-t} \bullet \exp \left( \int_0^t K_s ds \right) \bullet \varphi^t = \exp \left( \int_0^t Ad(\varphi^{-t}) K_s ds \right) \quad (4.6.3)$$

Afim de demonstrar a equação acima considere  $t$  fixo e defina:

$$\theta^z = \varphi^{-t} \bullet \exp \left( \int_0^z K_s ds \right) \bullet \varphi^t.$$



Então:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\theta^z &= \varphi^{-t} \bullet \frac{d}{dz} \exp\left(\int_0^z K_s ds\right) \bullet \varphi^t \\ &= \varphi^{-t} \bullet \exp\left(\int_0^z K_s ds\right) \bullet K_z \bullet \varphi^t \\ &= \varphi^{-t} \bullet \exp\left(\int_0^z K_s ds\right) \bullet \varphi^t \bullet \varphi^{-t} \bullet K_z \bullet \varphi^t \\ &= \theta^z \bullet Ad(\varphi^{-t})K_z \end{aligned}$$

assim  $\varphi^{-t} \bullet \exp\left(\int_0^z K_s ds\right) \bullet \varphi^t = \theta^z = \exp\left(\int_0^z Ad(\varphi^{-t})K_s ds\right)$  Trocando  $z$  por  $t$  concluímos a Equação (4.6.3).  $\square$

Apresentamos agora o principal ingrediente da prova do PMP. Aplicando o Lema (4.54) ao nosso contexto, definindo  $\vec{Z}_s = \vec{Y}_{\tilde{u}(s)}$  e  $\vec{W}_s = \vec{Y}_{u(s)} - \vec{Y}_{\tilde{u}(s)}$  temos:

$$q_0 \bullet \exp\left(\int_0^{t_1} Y_{u(s)} ds\right) = q_0 \bullet \exp\left(\int_0^{t_1} Y_{\tilde{u}(s)} ds\right) \bullet \exp\left(\int_0^{t_1} G_{s,u(s)} ds\right) \tag{4.6.4}$$

onde  $\vec{G}_{s,u} = (\varphi_s^{t_1})_* (\vec{Y}_u - \vec{Y}_{\tilde{u}(s)})$  para  $s \in [0, t_1]$ . Vemos a seguir que todos os vetores  $\vec{G}_{s,u}(q_1)$  estão de um lado do hiperplano, o qual é o núcleo de um funcional linear  $\lambda_1 \in T_{q_1} N^*$ , vide Figura 4.6.

**Proposição 4.55.**

Se  $q_1 = q_{\tilde{u}}(t_1) \in \partial \mathcal{A}_{q_0}(t_1)$  então existe  $\lambda_1 \in T_{q_1} N^*$  tal que

$$\lambda_1(\vec{G}_{s,u}(q_1)) \leq 0$$

para  $s \in S$ , onde  $S \subset [0, t_1]$  é o conjunto dos pontos de Lebesgue do controle  $s \rightarrow \tilde{u}(s)$ .<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Um ponto  $s \in [0, t_1]$  é chamado ponto de Lebesgue de  $\tilde{u}$ , se  $\lim_{s \rightarrow s_0} \int_{s_0}^s |\tilde{u}(z) - \tilde{u}(s_0)| dz = 0$ . Em um ponto de Lebesgue  $\int 0^t u(z) dz$  é diferencialvel. Além disto  $[0, 1] - S$  tem medida nula.

*Demonstração.* Tal resultado segue direto da seguinte afirmação:

$$T_{q_1} \mathcal{O}_{q_0} = \text{cone}\{\vec{G}_{s,u}(q_1); s \in S, u \in U\} \Rightarrow q_1 \in \text{int}(\mathcal{A}_{q_0}(t_1)) \tag{4.6.5}$$

Vamos apenas discutir aqui a *ideia da prova* de (4.6.5). É possível escolher  $0 < s_1 < \dots < s_k \subset S$  e  $u_i \in U$  tal que

$$\text{cone}\{\vec{G}_{s_i, u_i}(q_1)\}_{i=1}^k = T_{q_1} \mathcal{O}(q_0) \quad (4.6.6)$$

Escolhamos também  $\epsilon > 0$  tal que  $[s_i, s_i + \epsilon) \cap [s_j, s_j + \epsilon) = \emptyset$  Para cada  $x = (x_1, \dots, x_k) \in [0, \epsilon)^k \subset \mathbb{R}^k$  podemos associar um controle  $s \rightarrow u_x(s)$  como:

$$u_x(s) = \begin{cases} u_i & \text{se } s \in [s_i, s_i + x_i] \\ \tilde{u}(s) & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Definamos a aplicação  $F : [0, \epsilon)^k \rightarrow \mathcal{O}_{q_0}$  como

$$F(x) = \exp\left(\int_0^{t_1} Y_{u_x(s)} ds\right).$$

É possível provar que  $F$  é Lipschitz e diferenciável em  $0$ . Pela (4.6.4) e construção de  $s \rightarrow u_x(s)$  concluímos:

$$\begin{aligned} F(x) &= q_1 \bullet \exp\left(\int_0^{t_1} G_{s, u_x(s)} ds\right) \\ &= q_1 \bullet \exp\left(\int_{s_1}^{s_1+x_1} G_{s, u_1} ds\right) \\ &\quad \bullet \dots \bullet \exp\left(\int_{s_k}^{s_k+x_k} G_{s, u_k} ds\right) \end{aligned}$$

Não é difícil verificar que  $\frac{\partial F}{\partial x_i}(0) = \vec{G}_{s_i, u_i}(q_1)$ . Tal fato e a hipótese (4.6.6) permitem concluir que:

$$DF(0)([0, \epsilon)^k) = T_{q_1} \mathcal{O}_{q_0} \quad (4.6.7)$$

Utilizando a Equação (4.6.7) é possível demonstrar que  $F(0)$  fica contido no interior da imagem de  $F$  o que conclui a ideia da prova de (4.6.5). □

### Ideia da prova do Teorema 4.50

Definamos nossa curva  $s \rightarrow \lambda_s \in T_{q_{\tilde{u}(s)}}^* N$  como:

$$\lambda_s = \lambda(s) = (\varphi_s^{t_1})^* \lambda_1 \in T_{q_{\tilde{u}(s)}}^* N^*. \quad (4.6.8)$$

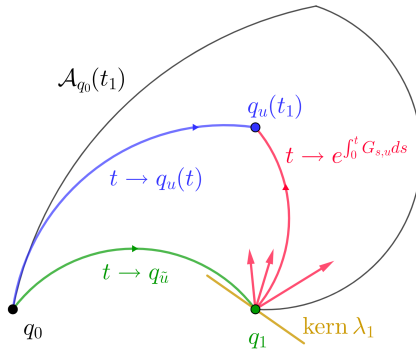


Figura 4.6: A figura ilustra Proposição 4.55 (i.e.,  $\lambda_1(\vec{G}_{s,u}(q_1)) \leq 0$ ) e  $q_0 \bullet \exp\left(\int_0^{t_1} Y_{u(s)} ds\right) = q_0 \bullet \exp\left(\int_0^{t_1} Y_{\tilde{u}(s)} ds\right) \bullet \exp\left(\int_0^{t_1} G_{s,u(s)} ds\right)$

Utilizando geometria simplética é possível provar que o pullback do fluxo de  $\vec{Y}_{\tilde{u}}$  coincide com o fluxo do campo Hamiltoniano associado ao hamiltoniano  $h_{\tilde{u}}$ , i.e.,

$$\left(\exp\left(\int_t^{t_1} \vec{Y}_{\tilde{u}(s)} ds\right)\right)^* = \exp\left(\int_{t_1}^t \vec{h}_{\tilde{u}(s)} ds\right) \tag{4.6.9}$$

Equações (4.6.8) e (4.6.9) implicam então os item (a) e (b) do PMP.

Nosso objetivo agora é verificar o item (c), i.e.,

$$h_{\tilde{u}}(\lambda(s)) = \max_{u \in U} h_u(\lambda(s)) \tag{4.6.10}$$

onde  $h : TN^* \times U \rightarrow \mathbb{R}$  é  $h_u(\lambda) = \lambda(\vec{Y}_u)$ . Segue da Proposição 4.55 e da linearidade de  $\lambda_1$  que:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lambda_1(\vec{G}_{s,u}(q_1)) \\ &= \lambda_1(d(\varphi_s^{t_1})\vec{Y}_u \circ (\varphi_s^{t_1})^{-1}(q_1)) - \lambda_1(d(\varphi_s^{t_1})\vec{Y}_{\tilde{u}(s)} \circ (\varphi_s^{t_1})^{-1}(q_1)) \\ &= \lambda_s(\vec{Y}_u \circ (\varphi_s^{t_1})^{-1}(q_1)) - \lambda_s(\vec{Y}_{\tilde{u}(s)} \circ (\varphi_s^{t_1})^{-1}(q_1)) \\ &= \lambda_s(\vec{Y}_u \circ q_{\tilde{u}}(s)) - \lambda_s(\vec{Y}_{\tilde{u}(s)} \circ q_{\tilde{u}}(s)) \\ &= h_u(\lambda(s)) - h_{\tilde{u}}(\lambda(s)) \end{aligned}$$

assim  $h_{\tilde{u}}(\lambda(s)) \geq h_u(\lambda(s))$ , o que implica a Equação (4.6.10).  $\square$

### 4.6.2. Formulação clássica do PMP (tempo fixo)

#### Teorema 4.56.

Seja  $\{X_u\}_{u \in U}$  um controle geométrico  $M$  e  $t \rightarrow \tilde{u}(t)$  um controle optimal para o problema do tempo fixo  $t_1$

$$q'_u(t) = X_{u(t)}(q_u(t)); \quad q_u(0) = q_0, q_u(t_1) = q_1$$

$$J(u) = \int_0^{t_1} \varphi(q_u(t), u(t)) dt \rightarrow \min$$

Então existe uma curva  $(\lambda(t), c) \neq (0, 0)$ , tal que

(a)  $c = 0$  or  $c = -1$

(b)  $\lambda'(t) = \vec{h}_{\tilde{u}, c}(\lambda(t))$

(c)  $h_{\tilde{u}, c}(\lambda(t)) = \max_{u \in U} h_{u, c}(\lambda(t))$

onde  $h_{u, c}(\lambda) = \lambda(X_u) + c\varphi(q, u)$

*Demonstração.* Iremos aplicar aqui o PMP geométrico, i.e., Teorema 4.50, a variedade  $N := M \times \mathbb{R}$ . Note que  $c$  deveria aparecer visto que estamos lidando com  $(TM \times \mathbb{R})^*$ . Afim de garantir que  $c$  é não positivo, no lugar de considerar  $\hat{X}_u = (X_u, \varphi)$ , definamos  $Y_{u, v} = (X_u, \varphi + v)$ , onde  $v \geq 0$  é uma variável extra de controle.

O controle  $t \rightarrow (\tilde{u}(t), 0)$  é um minimum de  $\hat{J}(u, v) = \int_0^{t_1} (\varphi(q_u, u) + v) dt$  e assim sua solução  $\hat{q}_{(\tilde{u}, 0)}$  encontra o bordo do conjunto alcançável  $\hat{\mathcal{A}}_{(q_0, 0)}$  (associado a  $Y_{u, v}$ ). Logo podemos aplicar o Teorema 4.50 ao novo controle  $\{Y_{u, v}\}$ .

O Hamiltoniano  $\hat{h}_{u, v} : TM^* \oplus T\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  é

$$\hat{h}_{u, v}(\lambda, a) = \lambda(X_u) + a(\varphi + v).$$

A equação  $(\lambda'(t), a'(t)) = \vec{\hat{h}}_{(\tilde{u}, v)}(\lambda(t), a(t))$  torna-se

$$y'(t) = -\frac{\partial \hat{h}}{\partial x} = 0$$

$$x'(t) = \frac{\partial \hat{h}}{\partial y} = \varphi(q_{\tilde{u}}(t)) + v$$

$$\lambda'(t) = \vec{\hat{h}}_{\tilde{u}}(\lambda(t), a(t))$$

onde  $h_u(\lambda, a) = \lambda(X_u) + a\varphi$ ,  $\lambda(t) = \sum_i \xi_i(t) dq_i$  e  $a(t) = y(t)dx$ . A primeira equação já implica que  $y(t) = c$ .

Afim de prova que a constante  $c = y(t)$  é não positiva (onde  $a(t) = y(t)dx$ ), recorde que:

$$\hat{h}_{(\tilde{u},0)}(\lambda_t, a(t)) = \max_{v \geq 0, u \in U} \hat{h}_{u,v}(\lambda_t, a(t)) \tag{4.6.11}$$

onde  $\hat{h}_{u,v}(\lambda, a) = \lambda(X_u) + a(\varphi + v)$ . Substituindo  $t \rightarrow (\tilde{u}(t), v)$  no lado direito da Equação (4.6.11) nós concluímos que  $c$  é não positivo. Como pode ser verificado na prova do PMP, podemos *rescalonar*  $\lambda$  com um número positivo, e assim podemos escolher  $c = -1$  or  $c = 0$ .

Substituindo  $t \rightarrow (u(t), 0)$  no lado direito da Equação (4.6.11) nos provamos:

$$h_{\tilde{u}}(\lambda_t) = \max_{u \in U} h_u(\lambda_t)$$

onde  $h_u(\lambda) = \lambda(X_u) + c\varphi$ .

□

**Exemplo 4.57.**

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} u^2(t) dt, \text{ onde } u \in \mathbb{R};$$

$$q_2(t) = \dot{q}_1(t) \quad q_1(0) = x_0 < 0; \quad q_1(t_1) = 0.$$

$$\dot{q}_2(t) = u(t); \quad q_2(0) = 0, \quad q_2(t_1) = 0$$

Desejamos encontrar candidatos para minimizar  $J$ , para o tempo fixo  $t_1$ .

O Hamiltoniano é:

$$\begin{aligned} h_u(\lambda) &= \lambda(X_u) + c\varphi \\ &= \lambda(q_2, u) + c \frac{u^2}{2} \\ &= \xi_1 q_2 + \xi_2 u + c \frac{u^2}{2} \end{aligned}$$

$$h_u(\lambda) = h_u((q_1, q_2), (\xi_1, \xi_2)) = \xi_1 q_2 + \xi_2 u + c \frac{u^2}{2}, \text{ com } c = 0 \text{ ou}$$

## Continuação.

$c = -1$ . A equação Hamiltoniana  $\lambda'(t) = \vec{h}_{\tilde{u}}(\lambda(t))$  torna-se:

$$\dot{\xi}_1(t) = -\frac{\partial h_u}{\partial q_1} = 0$$

$$\dot{\xi}_2(t) = -\frac{\partial h_u}{\partial q_2} = -\xi_1(t)$$

$$\dot{q}_1(t) = \frac{\partial h_u}{\partial \xi_1} = q_2(t)$$

$$\dot{q}_2(t) = \frac{\partial h_u}{\partial \xi_2} = \tilde{u}(t)$$

Destas equações já podemos concluir que  $\xi_1(t) = \xi$  (i.e., é constante).

**Caso abnormal:**  $c = 0$ . Visto que  $(\lambda, c) \neq (0, 0)$  e  $\xi_1$  é constante, inferimos que  $\xi_2$  não poderia ser zero. O princípio de maximalidade do PMP

$$\begin{aligned} \xi_1(t)q_2(t) + \tilde{u}\xi_2 &= h_{\tilde{u}}(\lambda(t)) \\ &= \max_{u \in \mathbb{R}} h_u(\lambda(t)) \\ &= \max_{u \in \mathbb{R}} (\xi_1(t)q_2(t) + u\xi_2(t)) \end{aligned}$$

e isto não pode acontecer.

**Caso normal:**  $c = -1$ . O Hamiltoniano é  $h_u((q_1, q_2), (\xi_1, \xi_2)) = \xi_1 q_2 + \xi_2 u - \frac{u^2}{2}$ . Pela maximalidade do PMP  $\frac{\partial h_{\tilde{u}}}{\partial u}(\lambda(t)) = 0$  e assim  $\xi_2(t) = \tilde{u}(t)$ . Substituindo isto nas equações Hamiltonianas:

$$\dot{\xi}_1(t) = -\frac{\partial h_u}{\partial q_1} = 0$$

$$\dot{\xi}_2(t) = -\frac{\partial h_u}{\partial q_2} = -\xi_1(t)$$

inferimos que  $\tilde{u}(t) = \alpha t + \beta$  com  $\alpha, \beta$  sendo constante.

Agora vamos determinar o candidato  $t \rightarrow q_{\tilde{u}}$ .

Nós sabemos que:  $h_u((q_1, q_2), (\xi_1, \xi_2)) = \xi_1 q_2 + \xi_2 u - \frac{u^2}{2}$  and  $\xi_2(t) =$

## Continuação.

$\tilde{u}(t) = \alpha t + \beta$ . Substituindo nas equações Hamiltoniana

$$\dot{\xi}_1(t) = -\frac{\partial h_u}{\partial q_1} = 0$$

$$\dot{\xi}_2(t) = -\frac{\partial h_u}{\partial q_2} = -\xi_1(t)$$

$$\dot{q}_1(t) = \frac{\partial h_u}{\partial \xi_1} = q_2(t)$$

$$\dot{q}_2(t) = \frac{\partial h_u}{\partial \xi_2} = \tilde{u}(t)$$

concluimos

$$q_1(t) = \frac{2x_0}{t_1^3}t^3 - \frac{3x_0}{t_1^2}t^2 + x_0$$

$$\tilde{u}(t) = \frac{12x_0}{t_1^3}t - \frac{6x_0}{t_1^2}$$

Antes de passar para a próxima versão do PMP, vamos comentar sobre um modelo de trem um pouco mais realista do que o utilizado em nossa discussão motivadora e apresentar (sem desenvolver os detalhes) candidato natural utilizado em engenharia para minimizar gasto de energia. Para maiores detalhes vide: <sup>6</sup>

**Observação 4.58. Minimizando energia cinética**

Consideremo o problema de achar um candidato para minimizar  $J$ , para um tempo

---

6

(HP) P.G. Howlett and P.J. Pudney, *Energy-Efficient Train Control*, Advances in Industrial Control, Springer (1995)

(PUI) G.Popa, C Udriște, I Țevy *Train Control Problem* U.P.B. Sci. Bull., Series A, Vol. 82, Iss. 3, (2020)

## Continuação.

fixo  $t_1$ .

$$J(u) = \int_0^T u_+(t)v(t) dt, \text{ onde } u_+ = \frac{u + |u|}{2};$$

$$v'(t) = u - r(v(t)); \quad x(0) = 0; \quad x(t_1) = x_1.$$

$$r(v) = a + bv + cv^2; \quad a, b, c > 0$$

$$v \geq 0; \quad v(0) = 0, \quad v(t_1) = 0$$

$$u \in [-1, 1];$$

Hamiltoniano é  $h_u(q, \xi) = -u_+q_2 + \xi_1q_2 + \xi_2(u - r(q_2))$  e nos casos em que  $h_u$  seja suave  $\mathcal{X}(t) = \vec{h}_u(\lambda(t))$  torna-se:

$$\dot{\xi}_1(t) = -\frac{\partial h_u}{\partial q_1} = 0$$

$$\dot{\xi}_2(t) = -\frac{\partial h_u}{\partial q_2} = -u_+ - \xi_1(t) + \xi_2 r'(q_2(t))$$

$$\dot{q}_1(t) = \frac{\partial h_u}{\partial \xi_1} = q_2(t)$$

$$\dot{q}_2(t) = \frac{\partial h_u}{\partial \xi_2} = \tilde{u}(t)$$

Estudando em vários casos conclui-se que:

- (1)  $\xi_2(t) > q_2(t)$ , então  $u = 1$  (**aceleração máxima**) no intervalo  $[0, T_1]$
- (2)  $\xi_2 = q_2$  para  $t \in [T_1, T_2]$  quando  $q_2(t) = q_2(T_1)$ , (**velocidade de cruzeiro**)
- (3)  $0 < \xi_2(t) < q_2(t)$  para  $t \in [T_2, T_3]$  e  $\xi_2(T_3) = 0$  (**diminuição**)
- (4)  $\xi_2(t) < 0$  for  $t \in [T_3, T]$  and  $q_2(T) = 0$  (**parada total**)  $\square$

#### 4.6.3. PMP e otimização do tempo

##### Teorema 4.59.

Seja  $\{\vec{X}_u\}_{u \in U}$  um controle geométrico em  $M$  e  $t \rightarrow \tilde{u}(t)$  uma função de controle



**Continuação.**

ótima para o problema de otimização de tempo  $t_1$ , i.e.,

$$q'_u(t) = \vec{X}_{u(t)}(q_u(t)); \quad q_u(0) = q_0, q_u(t_1) = q_1$$

$$J(u) = \int_0^{t_1} 1 dt \rightarrow \min$$

Então existe uma curva  $\lambda(t) \neq 0$ , tal que:

- (a)  $h_{\tilde{u}}(\lambda(t)) = c \geq 0$
  - (b)  $\lambda'(t) = \vec{h}_{\tilde{u}}(\lambda(t))$
  - (c)  $h_{\tilde{u}}(\lambda(t)) = \max_{u \in U} h_u(\lambda(t))$
- onde  $h_u(\lambda) = \lambda(\vec{X}_u)$

Para demonstrar o teorema acima utiliza-se argumento semelhante ao do Teorema 4.56 ou seja considera-se em  $N = M \times \mathbb{R}$  o sistema de controle geométrico  $\{Y_{\hat{u}} = (X_u, 1 + v)\}$ ,  $\hat{u} = (u, v)$  com  $v \geq 0$ , aplicando a adaptação geométrica a seguir:

**Proposição 4.60. PMP geométrico para tempo livre**

Seja  $t \rightarrow \tilde{u}(t)$  um controle admissível com  $q_{\tilde{u}}(t_1) \in \partial(\cup_{|t-t_1| < \delta} \mathcal{A}_{q_0}(t))$  para algum  $t_1$  e  $\delta \in [0, t_1]$ .

Then there exists a Lipschitz curve  $t \rightarrow \lambda(t) \in T^*N$  so that:

- (a)  $\lambda(t) \neq 0, \pi(\lambda(t)) = q_{\tilde{u}(t)}$
- (b)  $\lambda'(t) = \vec{h}_{\tilde{u}}(\lambda(t))$
- (c)  $h_{\tilde{u}}(\lambda(t)) = \max_{u \in U} h_u(\lambda(t))$
- (d)  $h_{\tilde{u}}(\lambda(t)) \geq 0.$

Por sua vez a proposição acima segue como corolário do Teorema 4.50 após aplica-lo ao novo sistema  $\{Z_{\hat{u},w} = wY_{\hat{u}}\}$ , o qual descreve reparametrizações de soluções de  $\vec{Y}_{\hat{u}}$  i.e.,  $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} (\theta'(t) > 0)$  e  $\frac{d}{dt}q_{\hat{u}}(\theta(t)) = \theta'(t)Y_{\hat{u} \circ \theta}(q_{\hat{u}}(\theta(t)))$

**Exemplo 4.61.**

## Continuação.

$$\begin{aligned}
 J(u) &= \frac{1}{2} \int_0^{t_1} 1 \, dt, \text{ where } u \in [-1, 1]; \\
 q_2(t) &= \dot{q}_1(t) \quad q_1(0) = x_0 < 0; \quad q_1(t_1) = 0. \\
 \dot{q}_2(t) &= u(t); \quad q_2(0) = 0, \quad q_2(t_1) = 0
 \end{aligned}$$

Nós desejamos achar um candidato que minimize  $J$ , i.e., minimize o tempo  $t_1$

O Hamiltoniano é:

$$\begin{aligned}
 h_u(\lambda) &= \lambda(X_u) \\
 &= \lambda(q_2, u) \\
 &= \xi_1 q_2 + \xi_2 u
 \end{aligned}$$

$h_u(\lambda) = h_u((q_1, q_2), (\xi_1, \xi_2)) = \xi_1 q_2 + \xi_2 u$ . A equação  $\lambda'(t) = \vec{h}_{\tilde{u}}(\lambda(t))$  torna-se:

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_1(t) &= -\frac{\partial h_u}{\partial q_1} = 0 \\
 \dot{\xi}_2(t) &= -\frac{\partial h_u}{\partial q_2} = -\xi_1(t) \\
 \dot{q}_1(t) &= \frac{\partial h_u}{\partial \xi_1} = q_2(t) \\
 \dot{q}_2(t) &= \frac{\partial h_u}{\partial \xi_2} = \tilde{u}(t)
 \end{aligned}$$

Desta equação podemos concluir que  $\xi_1(t) = c_1$  (i.e., é constante) e assim  $\xi_2(t) = -c_1 t + c_0$ . A hipótese  $\lambda(t) \neq 0$ , então implica que  $\xi_2 \neq 0$

O princípio de maximalidade de PMP

$$\begin{aligned}
 \xi_1(t) q_2(t) + \tilde{u} \xi_2 &= h_{\tilde{u}}(\lambda(t)) \\
 &= \max_{u \in [-1, 1]} h_u(\lambda(t)) \\
 &= \max_{u \in [-1, 1]} (\xi_1(t) q_2(t) + u \xi_2(t))
 \end{aligned}$$

Dai concluímos  $\tilde{u}(t) = \text{sgn } \xi_2(t) = \text{sgn } (-c_1 t + c_0)$  e assim  $h_{\tilde{u}}(\lambda(t)) = \xi_1(t) q_2(t) + |\xi_2(t)|$ , o que implica que a suavidade de  $h_{\tilde{u}}$  (e das equações

## Continuação.

Hamiltonianos) depende  $\tilde{u}(t) = \text{sgn } \xi_2(t)$

$$\dot{q}_1(t) = \frac{\partial h_u}{\partial \xi_1} = q_2(t)$$

$$\dot{q}_2(t) = \frac{\partial h_u}{\partial \xi_2} = \tilde{u}(t)$$

Nós concluímos que  $q_1(t) = \pm \frac{t^2}{2} + q_2(0)t + q_1(0)$  e  $q_2(t) = \pm t + q_2(0)$ .

Assim  $q_1(t) = \pm \frac{q_2^2(t)}{2} + c_3$  Isto sugere **vários casos possíveis**:

**Caso 1: sem troca** Nosso problema  $q_2(0) = 0$  e  $q_1(t_1) = 0$  com  $q_2(t_1) = 0$  não está neste caso.

**Caso 2: com troca**  $t_s$

**Caso 2.1:**  $q_2(0) < q_2(t_s)$

$$q_1(t) = \begin{cases} \frac{q_2^2(t)}{2} - \frac{q_2^2(t_s)}{2} + q_1(t_s) & t \leq t_s \\ -\frac{q_2^2(t)}{2} & t_s \geq t \end{cases}$$

**Caso 2.2:**  $q_2(0) > q_2(t_s)$  Nosso problema não está neste caso.

**Caso 2.1** otimiza o tempo (isto segue do PMP junto com teorema de Filippov)



# Uma introdução a Geometria Riemanniana

Neste capítulo apresentamos alguns resultados clássicos de um curso de graduação/mestrado em Geometria Diferencial, utilizando algumas das ferramentas apresentadas nos capítulos anteriores.

## 5.1. Métricas e variedades Riemannianas

Vimos anteriormente que uma variedade  $M^m$  em um espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^{m+k}$  admite uma métrica induzida  $g_0$ , vindo do produto Euclidiano em  $\mathbb{R}^{m+k}$ . Apesar de sua utilidade, como veremos em breve, por vezes poderemos estar interessados em outras maneiras de ter um produto interno  $g_x$  associado a cada espaço tangente  $T_x M$ . Chamaremos de **métrica** em  $M$  uma aplicação que a cada ponto  $x \in M$  associa um produto interno  $g_x$  de  $T_x M$ . Em Geometria Diferencial estaremos pedindo também que tal métrica  $x \rightarrow g_x$  seja **suave**. Uma forma sofisticada de dizer que tal aplicação é suave, seria dizer que *é uma seção suave do fibrado de 2-tensores simétricos positivos definidos em  $TM$* . Uma forma mais pedestre de explicar isto, pode ser via parametrizações.

Lembremos que dado um ponto  $p_0 \in M$ , temos uma parametrização  $\varphi : V \rightarrow U \subset M$  para  $p_0$  contido em  $U$ . Seja  $\frac{\partial}{\partial x_i} = (\varphi)_* e_i$  campos (coordenados) em  $U$ . Com isto em mente dizemos que uma aplicação  $x \rightarrow g_x$  é uma **métrica suave** se as funções  $x \rightarrow g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$  são suaves em  $U$ , para todo  $U$ .

Uma variedade  $M$  com uma métrica suave  $g$  é chamado **variedade Riemanniana**  $(M, g)$ .

O conceito de métrica nos permite introduzir de forma natural conceitos como comprimento de curva e distância. Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow (M, g)$  uma curva  $C^1$  por partes. O **comprimento da curva** de  $\alpha$  é definido como

$$l(\alpha) := \sum_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{g(\alpha'(t), \alpha'(t))} dt$$

A **distância entre 2 pontos**  $p$  e  $q$  de  $M$  é definida como

$$d(p, q) = \inf_{\alpha \in \Omega_{p,q}} l(\alpha)$$

onde  $\Omega_{p,q}$  é o conjunto das curvas  $C^1$  por partes  $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$  com  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha(1) = q$ . É possível mostrar que  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e de fato uma função distância. Temos assim que  $(M, d)$  é um espaço métrico.

Uma vez que temos o conceito de função distância, podemos dizer que uma curva  $\alpha : I \rightarrow M$  **minimiza distância** se para todo  $t_0 \in I$  existe um  $\epsilon$  tal que  $d(\alpha(t_0), \alpha(t_0 + \epsilon)) = l(\alpha|_{[t_0, t_0 + \epsilon]})$ . Veremos em breve que tais curvas são justamente as assim chamadas geodésicas, curvas de "aceleração intrínseca nula" (i.e., derivada covariante nula).

Podemos agora ilustrar alguns conceitos aqui apresentados.

### Exemplo 5.1.

Sejam  $M$  uma superfície mergulhada em  $\mathbb{R}^3$  e  $U$  função definida em vizinhança contendo  $M$  tal que  $U < c$  para uma certa constante positiva. Podemos então definir  $g = (c - U)g_0$ , a qual chamamos **métrica de Jacobi**.

Tal métrica é relevante para compreender partículas presas em  $M$  sob efeito de um campo conservativo  $-\nabla U$ . Mais precisamente seja  $\alpha : I \rightarrow M$  uma curva atendendo a **equação de Newton (intrínseca)**  $(\alpha''(t))^\perp = -\text{grad}U$ . Verificaremos em outro capítulo que uma reparametrização de  $\alpha$  será uma geodésica com respeito a  $g$  ou seja  $\beta$  minimizará localmente distância dada por  $g$ . Em outras palavras, uma partícula presa em uma superfície sob efeito de um campo conservativo  $-\nabla U$  percorre um caminho que localmente é o menor caminho possível, mas não com respeito a distância induzida por  $g_0$  e sim com uma distância que também leva em consideração o potencial  $U$ .

**Definição 5.2.**

Um difeomorfismo  $F : (M^m, g^M) \rightarrow (N^n, g^N)$  entre variedades Riemannianas é chamado **isometria** se  $dF : (T_x M, g_x^M) \rightarrow (T_{F(x)} N, g_{F(x)}^N)$  é isometria para todo  $x \in M$ .

Em outras palavras uma isometria entre variedades preserva métrica e assim objetos definidos com métrica.

**Exercício 5.3.**

Seja  $F : (M, g) \rightarrow (M, g)$  uma isometria de uma variedade Riemanniana  $(M, g)$ . Prove que  $F$  preserva distância, ou seja  $d(F(x), F(y)) = d(x, y)$  para todo  $x, y \in M$ .

Afim de ilustrar o conceito de isometria, apresentemos a seguir o plano hiperbólico, espaço introduzindo por vários matemáticos, dentre eles Lobashevsky. O plano hiperbólico é um análogo do espaço Euclidiano, onde postulado euclidiano sobre paralelas (quinto postulado) deixa de valer. Ou seja podemos encontrar uma linha (curva que minimiza caminho)  $\gamma$  um ponto  $p$  não contido em  $\gamma$  tal por  $p$  passa mais do que uma "linha" não paralela a  $\gamma$  ou seja que não encontra  $\gamma$ . Planos hiperbólicos e mais geralmente espaços hiperbólicos são prototipos dos espaços de curvatura negativa.

**Exemplo 5.4.**

Definamos  $\mathbb{H}^2 = \{z = x + yi \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$  com métrica  $g = \frac{1}{y^2} (dx^2 + dy^2)$  como sendo **modelo hiperbólico do semi-plano superior**. Para  $ad - bc = 1$  e  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  definamos:

$$F : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$$

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

Afirmamos que  $F$  é uma isometria. Apresentemos a seguir os passos da demonstração desta afirmação (deixando para o(a) leitor(a) preencher os detalhes).

Passo 1: Usando  $ad - bc = 1$  prova-se que  $\text{Im}(F(z)) = \frac{\text{Im}(z)}{|cz + d|^2}$ .

Passo 2:  $\frac{d}{dt} (F \circ \alpha) = \frac{dF}{dz} (\alpha(t)) \alpha'(t)$  para  $t \rightarrow \alpha(t) = x(t) + iy(t)$  por variável complexa.

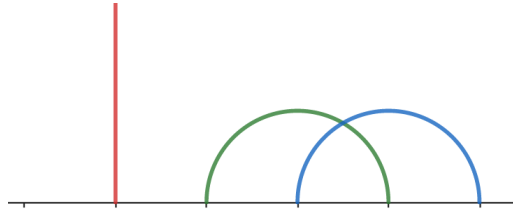


Figura 5.1: três geodésicas do plano hiperbólico, ilustrando Exemplo 5.4

#### Continuação.

Passo 3: Usando  $ad - bc = 1$  e variável complexa temos  $\frac{dF}{dz} = \frac{1}{(cz+d)^2}$ .

Passo 4: Utilizando os passos anteriores concluímos:

$$\begin{aligned} \|DF\alpha'(t)\| &= \frac{|\frac{d}{dt}F(\alpha(t))|}{\text{Im}(F(\alpha(t)))} \\ &= \frac{|\alpha'(t)|}{|c\alpha(t) + d|^2} \frac{|c\alpha(t) + d|^2}{\text{Im}(\alpha(t))} \\ &= \|\alpha'(t)\|. \end{aligned}$$

Tais isometrias  $F$  são de fato as isometrias que preservam orientação em  $\mathbb{H}^2$ .

Por outro lado é possível verificar (vide Proposição 5.55) que o segmento de reta  $\{yi \in \mathbb{C}, y > 0\}$  é geodésica.

Combinando nosso conhecimento de  $F$  e que o segmento vertical é geodésica, é possível gerar todas as geodésicas de  $\mathbb{H}^2$ : elas são os círculos com centro em  $\partial\mathbb{H}^2$  e retas verticais, em particular verificando que o quinto postulado Euclidiano não é mais válido, vide Figura 5.1

Terminamos esta seção, apresentando, apenas a título de curiosidade, a métrica de um sistema mecânico interligado, em particular a métrica de um braço robótico. Nesta métrica, geodésica descreve o movimento de um braço de robô, após dar velocidades angulares iniciais no cotovelo e ombro do braço do robô.

#### Exemplo 5.5. Energia cinética de um sólido

Considere uma região  $B$  com uma medida  $\mu$  nessa região. Considere a variedade  $\text{SO}(3) \times \mathbb{R}^3$ . Desejamos a seguir dar uma métrica a esta variedade



Continuação.

(que será definida utilizando a região  $B$  e a medida  $\mu$ ). Dado um vetor  $v \in T_p(\mathbb{SO}(3) \times \mathbb{R}^3)$ , existe uma curva  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{SO}(3) \times \mathbb{R}^3$  tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = v$ . Observe que  $\alpha$  é da forma  $\alpha(t) = (Q(t), R(t))$ , onde  $Q(t) \in \mathbb{SO}(3)$  e  $R(t) \in \mathbb{R}^3$ . Definimos uma norma ao quadrado (não negativa definida) no espaço tangente  $T_{\alpha(0)}\mathbb{SO}(3) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\|v\|^2 = \|\alpha'(0)\|^2 = \frac{1}{2} \int_B \|\dot{Q}(0)x + \dot{R}(0)\|^2 \mu,$$

o que nos dá, pela identidade de polarização, uma aplicação bilinear simétrica  $g$ , que no nosso caso particular é não negativa definida.

Vamos dar agora uma interpretação do que significa essa métrica. Dado um sólido  $B$  em  $\mathbb{R}^3$  com uma medida  $\mu$  (que mede sua densidade), dada uma curva  $\alpha(t) = (Q(t), R(t))$  na variedade  $\mathbb{SO}(3) \times \mathbb{R}^3$ , ela descreve um (possível) movimento deste sólido. A função  $t \rightarrow R(t)$  descreve a translação do centro de massa com respeito a um referencial fixo (o referencial canônico na origem); e a função  $t \rightarrow Q(t)$  mede a rotação do sólido em torno do seu centro de massa. Podemos então associar a este movimento do sólido (a curva  $\alpha$ ) uma **energia cinética** definida como

$$E_\alpha(t) = \frac{1}{2} \int_B \|\dot{Q}(t)x + \dot{R}(t)\|^2 \mu.$$

Assim sendo,  $E_\alpha(0) = g(\alpha'(0), \alpha'(0))$ .

De forma análoga, dados vários sólidos  $(B_1, \mu_1) \cdots (B_n, \mu_n)$ , temos para cada  $(B_i, \mu_i)$  uma forma não negativa  $g_i$ . Vamos supor que  $g = \sum_i g_i$  é não degenerado (o que ocorre em vários casos estudados). Dado um sistema mecânico interligado  $M$  mergulhado no sistema mecânico livre  $(\mathbb{SO}(3) \times \mathbb{R}^3) \times \cdots \times (\mathbb{SO}(3) \times \mathbb{R}^3)$  a métrica em  $M$  é a métrica induzida.

Em particular no caso do braço robótico, vide Exemplo 1.2 e Observação 1.4 temos para a parametrização

$$\begin{aligned} \varphi : U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow M \subset (\mathbb{SO}(3) \times \mathbb{R}^3) \times (\mathbb{SO}(3) \times \mathbb{R}^3) \\ (\theta_1, \theta_2) &\mapsto ((Q(e^{i\theta_1}), R(e^{i\theta_1})), (Q(e^{i\theta_2}), R(e^{i\theta_2}))) \end{aligned}$$

que:

$$\varphi^*g = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \frac{1}{4}(m_1 + 4m_2)l_1^2 & \frac{m_2}{2}l_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{m_2}{2}l_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & \lambda_2 + \frac{1}{4}m_2l_2^2 \end{bmatrix}$$

## Continuação.

onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são as chamadas *inércias principais* (auto-valores do tensor de inércia, os quais sempre são não negativos). Para maiores discussões vide **livro F. Bullo, A. Lewis??**<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Contas explícitas na Observação 5.5 podem ser feitas por exemplo usando o fato que  $KE(t) = KE_{trans}(t) + KE_{rot}(t)$  onde *energia cinética de translação* é definida como  $KE_{trans}(t) = \frac{1}{2}\mu(B)\|\dot{R}(t)\|^2$  e *energia cinética de rotação* é definida como  $KE_{rot}(t) = \frac{1}{2}\langle I_c Z(t), Z(t) \rangle$  para  $I_c(v) = -\int_B \mathcal{A}_{x-c} \mathcal{A}_{x-c}(v) \mu$  tensor de inércia (simétrico não negativo definido) referente ao centro de massa  $c(t) = R(t)$ . Aqui dado  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  temos

$$\mathcal{A}_\xi = \begin{bmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } Z(t) \text{ é tal que } \mathcal{A}_{Z(t)} = Q^t \dot{Q}(t)$$

## 5.2. Conexão Riemanniana e o Transporte Paralelo

**Definição 5.6.**

Seja  $(M, g)$  variedade Riemanniana. Uma **conexão Riemanniana** (ou conexão de Levi-Civita) associada a métrica  $g$  é uma aplicação  $\mathbb{R}$ -bilinear

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

que atende para qualquer  $X, Y, Z, \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f \in C^\infty(M)$  :

- (a)  $\nabla_f X Y = f \nabla_X Y$
- (b)  $\nabla_X f Y = f \nabla_X Y + (X \bullet f) Y$
- (c)  $X \bullet g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$  (compatível com a métrica).
- (d)  $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$  (simétrica ou livre de torção)

**Proposição 5.7.**

Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana. Então existe uma única conexão Riemanniana

**Continuação.**

niana em  $TM$ . Tal conexão é dada pela **fórmula de Koszul** abaixo:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_Y X, Z) &= X \bullet g(Y, Z) - Z \bullet g(X, Y) + Y \bullet g(Z, X) \\ &\quad - g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X) \end{aligned}$$

*Demonstração.* Suponha que a conexão Riemanniana existe. Então temos pela compatibilidade com a métrica que:

$$X \bullet g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

$$Z \bullet g(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$$

$$Y \bullet g(Z, X) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X)$$

As equações acima e o fato da conexão ser livre de torsão implicam que:

$$\begin{aligned} X \bullet g(Y, Z) - Z \bullet g(X, Y) + Y \bullet g(Z, X) &= 2g(\nabla_Y X, Z) + g([X, Y], Z) \\ &\quad + g([X, Z], Y) + g([Y, Z], X) \end{aligned}$$

a qual por sua vez implica a fórmula de Koszul. Por fim, pode-se verificar que a fórmula de Koszul define uma conexão Riemanniana.  $\square$

**Exemplo 5.8.**

Dado um campo  $\vec{V} = \sum_{i=1}^m v_i \vec{e}_i$  (vide equação 1.3.1), vamos definir a **derivada Euclidiana do campo**  $\vec{V}$  na direção de um vetor  $W$  (com pé em  $p$ ), como

$$D_W \vec{V}_p = \sum_{i=1}^m dv_i(W) \vec{e}_i.$$

**Proposição 5.9.**

Seja  $M^m$  variedade mergulhada em  $\mathbb{R}^{m+k}$ . Dado  $p \in M$  defina  $\pi_p : T_p \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow T_p M$  como projeção ortogonal no espaço tangente  $T_p M$  de um vetor com pé em  $p \in M$  (não necessariamente tangente a variedade  $M$ ). Defina o operador conexão tangente como  $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  onde

$$(\nabla_X Y)_p = \pi_p((D_X Y)_p).$$

## Continuação.

Este operador é de fato a conexão Riemanniana associada a métrica induzida

*Demonstração.* É fácil verificar que é  $\mathbb{R}$ -bilinear. Então basta verificar os itens da Definição 5.6. Como ela é única, então será a conexão da métrica induzida.

(a)

$$\begin{aligned} (\nabla_{fX}Y)_p &= \pi_p((D_{fX}Y)_p) \\ &= \pi_p(f(p)(D_XY)_p) \\ &= f(p)\pi_p((D_XY)_p) \\ &= f(p)(\nabla_XY)_p. \end{aligned}$$

(b) Como  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\pi(p)(Y) = Y$ , logo

$$\begin{aligned} (\nabla_X fY)_p &= \pi(p)(D_X fY)_p \\ &= \pi(p)(fD_XY + X(f)Y)_p \\ &= f(p)\pi(p)(D_XY)_p + X(f)_p\pi(p)(Y) \\ &= f(p)(\nabla_XY)_p + (X \bullet f)Y_p. \end{aligned}$$

(c) Seja  $p \in M$  e  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  uma curva em  $M$  tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = X$ . Sejam  $\tilde{Y}$  e  $\tilde{Z}$  extensões de  $Y$  e  $Z$  a  $\mathbb{R}^{m+k}$ . Temos

$$\begin{aligned} X \bullet g(Y, Z) &= \frac{d}{dt} g(Y_\alpha(t), Z_\alpha(t)) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \langle \tilde{Y}_\alpha(t), \tilde{Z}_\alpha(t) \rangle \Big|_{t=0} \\ &= \langle D_{\alpha'(t)} \tilde{Y}_\alpha(t), \tilde{Z}_\alpha(t) \rangle \Big|_{t=0} + \langle \tilde{Y}_\alpha(t), D_{\alpha'(t)} \tilde{Z}_\alpha(t) \rangle \Big|_{t=0} \\ &= \langle \nabla_{\alpha'(t)} Y_\alpha(t), Z_\alpha(t) \rangle \Big|_{t=0} + \langle Y_\alpha(t), \nabla_{\alpha'(t)} Z_\alpha(t) \rangle \Big|_{t=0} \\ &= g(\nabla_{\alpha'(t)} Y_\alpha(t), Z_\alpha(t)) \Big|_{t=0} + g(Y_\alpha(t), \nabla_{\alpha'(t)} Z_\alpha(t)) \Big|_{t=0} \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z). \end{aligned}$$

(d) Para resolver o item (d) iremos assumir o seguinte fato:

$$D_X Y - D_Y X =: [X, Y] \in \mathfrak{X}(M), \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Assim sendo, temos:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y - \nabla_Y X &= \pi_p((D_X Y)_p) - \pi_p((D_Y X)_p) \\ &= \pi_p((D_X Y)_p - (D_Y X)_p) \\ &= \pi_p([X, Y]) \\ &= [X, Y], \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do fato suposto. □

**Exercício 5.10.**

Sejam  $(M_1, g_1)$  e  $(N, \tilde{h})$  variedades Riemannianas e  $\nabla$  e  $\tilde{\nabla}$  suas conexões Riemannianas. Seja  $F : M \rightarrow \tilde{M}$  isometria. Utilizando a fórmula de Koszul Mostre que  $dF_p \nabla_{X_1} X_2 = (\tilde{\nabla}_{\tilde{X}_1} \tilde{X}_2)_{F(p)}$ , onde  $\tilde{X}_i \circ F = dF X_i$  para  $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ .

*Sugestão:* Utilize o fato que  $[\tilde{X}_1, \tilde{X}_2] \circ F = dF[\tilde{X}_1, \tilde{X}_2]$  e a equação de Koszul.

Vamos agora descrever nossa conexão Riemanniana utilizando coordenadas:

Seja  $U$  uma vizinhança coordenada de  $p \in M$  e  $\{\xi_i\}$  referenciais de  $TM|_U$ , e.g.  $\xi_j(p) = \frac{\partial}{\partial x_j} := d\psi^{-1}(e_j)$  onde  $\psi : (U) \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$  é um sistema de coordenadas.

Suponha  $W = \sum_i w_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  e  $V = \sum_j v_j \xi_j$  Temos então que

$$\begin{aligned} \nabla_W V &= \nabla_W \sum_j v_j \xi_j \\ &= \sum_j (W \bullet v_j) \xi_j + \sum_j v_j \nabla_W \xi_j \\ &= \sum_k (W \bullet v_k) \xi_k + \sum_{i,j} v_j w_i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \xi_j. \end{aligned}$$

A equação acima então implica que

$$\nabla_W V = \sum_k \{(W \bullet v_k) + \sum_{i,j} w_i v_j \Gamma_{i,j}^k\} \xi_k \tag{5.2.1}$$

onde a função  $\Gamma_{i,j}^k$  é chamada **símbolo de Cristoffel** e é definida como

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \xi_j = \sum_k \Gamma_{i,j}^k \xi_k \tag{5.2.2}$$

**Observação 5.11.**

É importante observar que a fórmula acima garante que  $(\nabla_W V)_p$  depende apenas do vetor  $W(p)$  e não do campo  $W$ .

**Exercício 5.12.**

Sejam  $M$  superfície mergulhada em  $\mathbb{R}^3$ ,  $\nabla$  a conexão Riemanniana associada a métrica induzida  $g$  e  $\Gamma_{ij}$  os símbolos de Cristofell associados a uma parametrização  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset M$ . Verifique as igualdades a seguir (as quais garantem que  $\Gamma_{ij}$  podem ser obtidas diretamente da métrica  $g$ , ou seja que  $\nabla$  pode ser definido em termos de  $g$ ).

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 g_{11} + \Gamma_{11}^2 g_{12} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u_1} g_{11} \\ \Gamma_{11}^1 g_{12} + \Gamma_{11}^2 g_{22} &= \frac{\partial}{\partial u_1} g_{12} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u_2} g_{11} \\ \Gamma_{12}^1 g_{11} + \Gamma_{12}^2 g_{12} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} g_{11} \\ \Gamma_{12}^1 g_{12} + \Gamma_{12}^2 g_{22} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} g_{22} \\ \Gamma_{22}^1 g_{11} + \Gamma_{22}^2 g_{12} &= \frac{\partial}{\partial u_2} g_{12} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} g_{22} \\ \Gamma_{22}^1 g_{12} + \Gamma_{22}^2 g_{22} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u_2} g_{22}\end{aligned}$$

**Exercício 5.13.**

Seja  $\varphi(t, \theta) = (r(t) \cos(\theta), r(t) \sin(\theta), h(t))$  parametrização de superfície de revolução  $M^2$  em  $\mathbb{R}^3$ . Suponha que  $(h'(t))^2 + (r'(t))^2 = 1$ . Verifique que os símbolos de Cristofell associada a  $\varphi$  são:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= 0 & , & & \Gamma_{11}^2 &= -r(t)r'(t) \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{r'(t)}{r(t)} & , & & \Gamma_{12}^2 &= 0 \\ \Gamma_{22}^1 &= 0 & , & & \Gamma_{22}^2 &= 0\end{aligned}$$

**Observação 5.14.**

Utilizando a fórmula de Koszul é possível concluir:

$$\Gamma_{i,j}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left( \frac{\partial g_{j,k}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{k,i}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{i,j}}{\partial x_k} \right) g^{k,m}$$

onde  $(g^{ij})$  é a matriz inversa de  $(g_{i,j})$  e  $\Gamma_{i,j}^k$  são os símbolos de Cristoffel.

A equação (5.2.1) admite uma **formulação matricial**.

$$\nabla_W V = D_W V + A(W)V \tag{5.2.3}$$

onde  $D_W V$  é a derivada de campos em  $\mathbb{R}^n$  e  $A(\cdot)$  é a matriz de 1-formas definida como

$$a_{k,j}(\cdot) := \sum_i \Gamma_{i,j}^k dx_i, \tag{5.2.4}$$

onde  $dx_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{ij}$  i.e., fixo  $p$  temos que os funcionais lineares  $dx_i : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  são os duais dos vetores  $(\frac{\partial}{\partial x_j}(p))$

**Observação 5.15.**

A equação (5.2.3) implica que o espaço de conexões é um **espaço afim**. De fato dado duas conexões  $D + A$  e  $D + \tilde{A}$  podemos definir a soma destes vetores com pé como  $D + A + \tilde{A}$  e a multiplicação por  $\lambda \in \mathbb{R}$  como  $D + \lambda A$ . Por este motivo, um operador que atende (a) e (b) da Definição 5.6 é chamado **conexão afim**.

Conexão nos permite derivar campos tangentes a uma variedade. Mas se tivermos um campo  $t \rightarrow V(t)$  que está apenas definido ao longo de uma curva  $t \rightarrow \alpha(t)$ , como derivar? Lembrando que se a curva não for mergulhada não necessariamente um campo ao longo de uma curva se estende para um campo em  $M$  ou seja  $V(t)$  não precisa ser  $\tilde{V} \circ \alpha(t)$  para  $\tilde{V} \in \mathfrak{X}(M)$ . Assim a resposta a esta pergunta **não é** simplesmente dizer restrinja a conexão ao longo da curva. Felizmente como veremos na proposição a seguir, de fato a questão não é complicada.

**Proposição 5.16.**

Sejam  $\nabla$  a conexão Riemanniana de  $(M, g)$  e  $\alpha : I \rightarrow M$  uma curva suave por partes. Denote  $\Gamma(\alpha^* TM)$  o espaço dos campos vetoriais ao longo da curva  $\alpha$ . Então existe um único operador  $\frac{\nabla}{dt} : \Gamma(\alpha^* TM) \rightarrow \Gamma(\alpha^* TM)$  tal que

## Continuação.

$$(a) \frac{\nabla}{dt}(V + W) = \frac{\nabla}{dt}V + \frac{\nabla}{dt}W$$

$$(b) \frac{\nabla}{dt}(fV) = f'V + f\frac{\nabla}{dt}V \text{ para } f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ suave.}$$

$$(c) \text{ Se } \tilde{V} \in \Gamma(E) \text{ e } V(t) := \tilde{V}(\alpha(t)) \text{ então } \frac{\nabla}{dt}V = \nabla_{\alpha'}\tilde{V}$$

*Demonstração.* Se  $\frac{\nabla}{dt}$  atende a propriedade (c) então ela deve se descreita em coordenadas como:

$$\left(\frac{\nabla}{dt}V\right)(t) = \sum_k \{v'_k(t) + \sum_{i,j} x'_i(t) v_j(t) \Gamma_{i,j}^k \circ \alpha(t)\} \xi_k \circ \alpha(t)$$

Onde  $V(t) = \sum_k v_k(t)\xi_k \circ \alpha(t)$  e  $\alpha'(t) = \sum_i x'_i(t)\frac{\partial}{\partial x_i} \circ \alpha(t)$ . Em outras palavras

$$\frac{\nabla V}{dt} = \frac{DV}{dt} + A(\alpha'(t))V(t).$$

Também é claro que a equação acima atende (a) e (b) e assim temos a existência local. A unicidade local e existência local garantem então a existência e unicidade global.  $\square$

Munidos com o conceito de derivada covariante podemos introduzir o conceito de paralelismo. Um campo  $t \rightarrow V(t) \in T_{\alpha(t)}M$  ao longo de uma curva  $\alpha$  é chamado **paralelo** se  $\frac{\nabla}{dt}V(t) = 0$  para todo  $t$ .

**Proposição 5.17.**

Sejam  $\nabla$  a conexão Riemanniana de  $(M, g)$  e  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  uma curva suave por partes. Seja  $V \in T_{\alpha(a)}$ . Então existe um único campo  $V \in \Gamma(\alpha^*TM)$  paralelo tal que  $V(a) = V$ .

*Demonstração.* Considere uma partição  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  tal que a curva restrita  $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$  está contida em uma vizinhança coordenada. Vamos provar primeiro o resultado para cada uma destas curvas. Como vimos na demonstração da Proposição 5.16, em uma vizinhança coordenada,  $\frac{\nabla}{dt}V = 0$  equivale a

$$0 = \sum_k \{v'_k(t) + \sum_{i,j} x'_i(t) v_j(t) \Gamma_{i,j}^k \circ \alpha(t)\} \quad (5.2.5)$$

Tal E.D.O tem uma única solução  $\sum_j v_j(t)\xi_j \circ \alpha(t)$  em  $[t_i, t_{i+1}]$  que coincide em  $t_i$  com um certo vetor dado  $V \in E_{\alpha(t_i)}$  e isto demonstra o resultado para  $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$ .



Pela unicidade das soluções, as soluções coincide nas interseções das vizinhanças coordenadas e isto permite estender a solução para todo  $[a, b]$ .  $\square$

Com as hipóteses da proposição acima o vetor  $V(b) \in T_{\alpha(b)}M$  é chamado **transporte paralelo** do vetor  $V \in T_{\alpha(a)}M$  e denotado por

$$\mathcal{P}_\alpha V := V(b).$$

### Observação 5.18.

Com um transporte paralelo podemos **conectar** as fibras  $TM_{\alpha(a)}$  com  $TM_{\alpha(b)}$ , daí o nome conexão. É importante observar que em geral o transporte paralelo depende do caminho, vide Exercício 5.20.

### Exercício 5.19.

Seja  $(M, g)$  variedade Riemanniana com conexão Riemanniana  $\nabla$ . Seja  $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$  curva suave por partes. Demonstre que o transporte paralelo ao longo de  $\alpha$  induz isometria entre  $T_{\alpha(0)}M$  e  $T_{\alpha(1)}M$ .

### Exercício 5.20.

Sejam  $M$  superfície mergulhada em  $\mathbb{R}^3$  e  $\nabla$  conexão Riemanniana associada a métrica induzida. Seja  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  uma geodésica com velocidade 1 ou seja  $\frac{\nabla}{dt}\gamma'(t) = 0$  (ou seja pedaço de grande círculo). Dado  $e_2 \in T_{\gamma(0)}M$  unitário com  $g(e_2(0), \gamma'(0)) = c$ .

- Defina  $t \rightarrow e_2(t)$  campo paralelo ao longo de  $\gamma$  com  $e_2(0) = e_2$ . Verifique que  $g(e_2(t), \gamma'(t)) = c$  para todo  $t$ ,
- Seja  $\mathbb{S}^2$  esfera com métrica canônica (i.e, induzida de  $\mathbb{R}^3$ ) Verifique que, dado  $X \in T_p\mathbb{S}^2$  e  $Y \in T_p\mathbb{S}^2$ , existe caminho (suave por partes) com  $Y = \mathcal{P}_\alpha X$ , vide Figura 5.2.

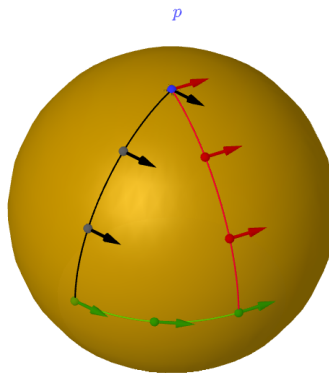


Figura 5.2: ilustrando Exercício 5.20

### Observação 5.21. Conexão em fibrado vetorial

Aqui é o momento adequado para destacarmos ao leitor, que muito do que discutimos até agora poderia ser feito *mutatis mutandis* (com exceção do item (d) da definição da conexão Riemanniana e da unicidade da conexão) para um fibrado vetorial  $\mathbb{R}^k \rightarrow E \rightarrow B$  que admita uma métrica nas fibras (frequentemente chamamos isto de fibrado euclidiano). Por exemplo poderíamos considerar uma variedade mergulhada  $M^m$  em um espaço euclidiano, mas no lugar de considerar a conexão tangente (derivar no ambiente e projetar no espaço tangente) poderíamos considerar a conexão normal (derivar no ambiente e projetar no espaços normais) do fibrado normal  $E = \nu(M) = \cup_x \nu_x M$  (onde  $\nu_x M$  denota os vetores normais a  $T_x M$ ). Mais precisamente poderíamos definir  $\nabla^\nu : \xi(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$  como  $\nabla_X^\nu \xi = (D_X \xi)^\nu$ . A métrica fibras do fibrado normal são simplesmente a restrição da métrica aos vetores normais de sua variedade mergulhada. Assim conexão, derivada covariante, transporte paralelo que preserva métrica nas fibras, podem ser feitos. De fato uma das razões para denotarmos  $\xi_i$  no lugar de nossos vetores coordenados (quando consideramos a conexão Riemanniana) é já deixar a notação correta para esta generalização direta. Até o presente o que não conseguimos generalizar neste contexto mais geral seria a unicidade da conexão (adaptada a métrica), justamente por não podermos falar mais no conceito livre de torção (que deixa de fazer sentido). O leitor que se sente mais confiante com a linguagem de fibrado vetorial pode tentar rever as provas levando em consideração esta observação.

**Observação 5.22. Conexão pull-back**

A derivada covariante ao longo de uma curva é na verdade a conexão pull-back no fibrado pullback  $\alpha^*(E)$ , conceito que discutimos rapidamente na observação a seguir. Seja  $(E^{m+k}, M^m, \pi)$  uma fibrado vetorial com conexão afim  $\nabla$ . Seja  $\varphi : B \rightarrow M$  uma aplicação suave entre uma variedade  $B$  e a variedade  $M$ . O espaço total do fibrado pull-back é definido como

$$\varphi^*E := \{(p, V) \in M \times E \mid \varphi(p) = \pi(V)\}$$

$(E, B, \pi_1)$  se torna então um fibrado vetorial, onde a projeção  $\pi_1 : \varphi^*E \rightarrow B$  é definida como  $\pi_1(p, V) = p$ . Observe também que  $\varphi \circ \pi_1 = \pi \circ \tilde{\varphi}$  onde  $\tilde{\varphi} : \varphi^*E \rightarrow E$  é definido como  $\tilde{\varphi}(p, V) = V$ .

De forma análoga a prova da Proposição 5.16 é possível mostrar que existe uma única conexão  $\varphi^*\nabla$  em  $\varphi^*E$  tal que

$$(\varphi^*\nabla)_W V \circ \varphi = \nabla_{dF(W)} V$$

onde  $V \in \Gamma(E)$  e  $W \in \mathfrak{X}(M)$ .

**Observação 5.23. Grupo de Holonomia**

Dado um ponto  $p$  de uma variedade  $M$  (base de um fibrado  $E^{m+k}$  com conexão  $\nabla$ ) e uma curva fechada  $\alpha : [0, 1] \rightarrow M^m$  (i.e  $\alpha(0) = \alpha(1)$ ) o transporte paralelo  $\parallel_\alpha : E_p \rightarrow E_p$  induz um isomorfismo entre as fibras de  $E_p$ . O grupo gerado por tais isomorfismo é chamado **grupo de Holonomia** de  $p$  e denotado por  $Hol_p$ .

- O **teorema de Ambrose-Singer** garante que o grupo de Holonomia  $Hol_p$  de uma conexão  $\nabla$  em um fibrado  $(E, M, \pi)$  é de fato um grupo de Lie.
- Quando consideramos a conexão Riemanniana em uma variedade simplesmente conexa, compacta (mais geralmente completa) a decomposição da representação da componente conexa  $Hol(p)^0 \times (T_p M = V_0 \oplus \dots \oplus V_k) \rightarrow (T_p M = V_0 \oplus \dots \oplus V_k)$  implica a decomposição do próprio  $M$  ou seja  $M = M_0 \times \dots \times M_k$ .
- No caso em que a conexão é Riemanniana, o grupo de Holonomia passa a desempenhar um papel importante na classificação de variedades. O celebrado teorema de Berger garante que se o grupo de holonomia de uma variedade Riemanniana (irredutível) não agir de forma transitiva em

## Continuação.

$T_p^1 M = \{v \in T_p M, \|v\| = 1\}$  então  $M$  será um espaço localmente simétrico.

*Aqui vale apenas ressaltar que um espaço  $M$  é chamado localmente simétrico se para qualquer  $p \in M$  existe uma isometria  $\sigma_p : B_\epsilon(p) \rightarrow B_\epsilon(p)$  que reverte toda geodésica  $\gamma$  saindo de  $p$  i.e.,  $\gamma(0) = p$  ou seja  $\sigma_p \circ \gamma(t) = \gamma(-t)$ . Por outro lado os espaços simétricos (que recobrem os espaços localmente simétricos) são classificados. Assim sendo o conhecimento da ação do grupo de  $Hol_p$  pode determinar completamente uma variedade  $M$  se  $M$  for simplesmente conexa irredutível e o grupo não agir transitivamente na esfera unitária  $T_p M^1$ .*

5.3. \* Métrica de Sasaki em  $TM$ 

Nesta seção veremos como conexão Riemanniana  $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  induzirá uma distribuição  $\mathcal{H}$  em  $TM$  e construiremos uma métrica  $g_0$  (a assim chamada métrica de Sasaki) tal que  $\pi : (TM, g_0) \rightarrow (M, \mathbf{g})$  tornar-se-a uma submersão Riemanniana, sendo  $\mathcal{H}$  sua distribuição horizontal.

**Observação 5.24.**

Levando em consideração a Observação 5.21 a mesma construção vale para fibrado Euclidiano  $(E, (M, \mathbf{g}), \pi)$  com métrica  $\mathbf{h}$  nas fibras e conexão

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$$

compatível com a métrica  $\mathbf{h}$ .

Ao longo desta seção, vamos denotar  $E = TM$  e  $\mathbf{h}$  a métrica  $\mathbf{g}$  restrita as fibras de  $E$ . Tal escolha leva não só em consideração a observação acima, mas evita também sobrecarga de notações.

Dado um vetor  $v_p$  de  $E$  e uma curva  $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$  podemos fazer seu transporte paralelo ao longo de  $\alpha$  e assim induzir um levantamento de  $\alpha$  passando por  $v_p$ . Mais precisamente podemos definir  $t \rightarrow \hat{\alpha}(t) = \parallel_{\alpha_t} v_p$  onde  $\alpha_t = \alpha|_{[0,t]}$ . Se considerarmos todos os vetores velocidades  $\hat{\alpha}'(0)$  ou seja os vetores velocidades de todos os transportes paralelos de  $v_p$  ao longo de todas curvas  $\alpha$  saindo de  $p$

teremos então um conjunto  $\mathcal{H}_{v_p} \subset T_{v_p}E$ . Utilizando Eq. (5.2.5) é possível provar o exercício a seguir.

### Exercício 5.25.

Verifique que  $\mathcal{H}_{v_p} \subset T_{v_p}E$  construído acima é de fato um subespaço com  $\dim \mathcal{H}_{v_p} = \dim TM_p$ , e que a arbitrariedade da escolha de  $v_p$  induz uma distribuição suave  $\mathcal{H}$  em  $E$ . Em outras palavras a conexão  $\nabla$  induz uma distribuição  $\mathcal{H}$  em  $E$ .

Como pode ser verificado pelo(a) leitor(a) (sugerimos que o faça) tal distribuição é invariante por homotetia, ou seja definindo a homotética  $h_\lambda(v) : E \rightarrow E$  como  $h_\lambda(v) = \lambda v$  temos que  $H_{h_\lambda(v)} = dh_\lambda H_v$ .<sup>1</sup>

Podemos agora dotar  $E$  de uma métrica  $g_0$  a ser construída utilizando o fato de  $T_{v_p}E = \mathcal{H}_{v_p} \oplus T_{v_p}E_p$

### Definição 5.26. Métrica de Sasaki

- Visto que  $d\pi : \mathcal{H} \rightarrow TM$  é um isomorfismo, definimos uma métrica em  $\mathcal{H}$  via o pullback, i.e.,  $g_0|_{\mathcal{H}} = (d\pi|_{\mathcal{H}})^{-1}g$ .
- A métrica em  $T_{v_p}E_p$  é definida como métrica  $h$ .
- Decretamos  $\mathcal{H}_{v_p}$  e  $T_{v_p}E_p$  como sendo ortogonais.

Utilizando a propriedade que a distribuição  $\mathcal{H}$  é homotética, o(a) leitor(a) pode resolver o exercício a seguir.

### Exercício 5.27.

Verifique que  $\pi : (E, g_0) \rightarrow (M, g)$  é uma submersão Riemanniana.

### Observação 5.28.

A projeção  $C_{v_p} : T_{v_p}(E) \rightarrow T_{v_p}E_p$  dada pela decomposição

$$T_{v_p}E = \mathcal{H}_{v_p} \oplus T_{v_p}E_p$$

<sup>1</sup>De fato é possível mostrar que o reverso também é verdade, que uma distribuição invariante por homotetia sempre induz uma conexão afim no fibrado  $E$ .

## Continuação.

pode ser vista em termos da conexão  $\nabla$ . Em outras palavras:

$$C_p(\hat{\alpha}'(0)) = \frac{\nabla}{dt} Z(0)$$

onde  $t \rightarrow \hat{\alpha}(t)$  é o campo  $t \rightarrow Z(t)$  ao longo de uma curva  $t \rightarrow \alpha(t)$ .

Por fim, vamos discutir rapidamente a existência de uma folheação (singular)  $\hat{\mathcal{F}}$  em  $E$  que descreve a holonomia.

**Definição 5.29. Folheação de holonomia**

Consideremos todos campos  $X_u$  em  $M$  e seus levantamentos  $\hat{X}_u$  em  $E$ , ou seja  $d\pi\hat{X}_u = X_u \circ \pi$ . As orbitas dos campos  $\hat{X}_u$  determina uma folheação singular  $\hat{\mathcal{F}} = \{\hat{L}\}$  chamada folheação de holonomia. Cada folha  $\hat{L}_{v_p}$  passando por  $v_p$  corresponde a todos os levantamentos  $\hat{\alpha}$  de transportes paralelos de  $v_p$  ao longo de caminhos  $\alpha$  saindo de  $p$ .

Segue da definição que:  $\mathcal{H} \subset T\hat{L}$ ,  $E_p \cap \hat{L}_{v_p} = \text{Hol}_p(v_p)$  Assim:

$$T_{v_p}\hat{L}_{v_p} = \mathcal{H}_{v_p} \oplus \text{Hol}_p^0(v_p). \quad (5.3.1)$$

Em particular se  $\text{Hol}_p^0$  (a componente da identidade de  $\text{Hol}_p$ ) só contiver a identidade, então as folhas da folheação são regulares e  $T\hat{L} = \mathcal{H}$ , em particular  $\mathcal{H}$  será integrável.

**5.4. \*Alguns objetos de análise**

Como comentamos na Parte 1 do livro, conexões permitiram definir intrinsecamente gradiente e Hessiano em variedades mergulhadas. Revisemos aqui tais conceitos no caso geral de conexão Riemanniana em variedades abstratas e infiramos algumas propriedades úteis. Antes porém apresentemos um lema técnico útil para as contas.

**Lema 5.30.**

Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana. Dado um ponto  $p \in M$ , existe uma vizinhança  $U$  tal que toda base ortonormal  $\xi_p = \{(\xi_i)_p\}$  de  $T_pM$  admite uma

**Continuação.**

extensão para um referencial suave  $\xi = \{\xi_i\}$  em  $U$  que é paralelo no ponto  $p$ , i.e.,  $(\nabla_{(\cdot)}\xi_i)_p = 0$

*Demonstração.* Fixo um ponto  $p \in M$  considere um sistema de coordenadas  $\psi : U \subset M \rightarrow B_\epsilon(0) \subset \mathbb{R}^m$ . Dado  $x \in U$  então existe um único  $v = \psi(x)$ . Podemos então definir o vetor  $\xi_i(x)$  como o transporte paralelo de  $(\xi_i)_p \in T_pM$  ao longo da curva  $\alpha : [0, 1] \rightarrow U$  definida como  $\alpha(t) = \psi^{-1}(tv)$ . Visto que o transporte paralelo preserva ortogonalidade o referencial assim definido é ortonormal. A suavidade do referencial seguirá então das condições iniciais do transporte paralelo.  $\square$

**5.4.1. Gradiente e Hessiano**

Tal como vimos na Parte 1 dado uma variedade Riemanniana  $(M, g)$  é natural, inspirado no caso Euclidiano definir *vetor gradiente*  $\nabla f$  de um função suave  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  como:

$$df(\cdot) = g(\nabla f, \cdot) \tag{5.4.1}$$

A equação acima indica que o gradiente indica o sentido de maior crescimento da função. Alternativamente podemos defini-lo utilizando a linguagem de mecânica. Seja  $L(v) = \frac{1}{2}g(v, v)$  o Lagrangiano  $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$  energia cinética, temos que a transformada de Legendre  $\mathcal{L} : TM \rightarrow T^*M$  é definida como

$$\mathcal{L}(v_p)(w_p) = \frac{d}{ds}\mathcal{L}(v_p + sw_p)|_{s=0} = g(v_p, w_p).$$

Assim segue da definição na equação Eq.(5.4.1) que  $\nabla f = \mathcal{L}^{-1}(df)$ . Tal formula já sugere que o conceito de gradiente poderia existir em outras geometrias, e.g, como em geometria de Finsler.

**Exercício 5.31.**

Considere um referencial ortonormal  $\xi = \{\xi_i\}$  em uma vizinhança de  $p \in M$ . Verifique:

1.  $\nabla f = \sum_i(\xi_i \cdot f)\xi_i$
2.  $df = \sum_i(\xi_i \cdot f)\theta_i$  onde  $\theta_i(\cdot) = g(\xi_i, \cdot)$

Também tal como vimos na Parte 1 dado uma variedade Riemanniana  $(M, g)$  podemos definir o Hess  $f$  de uma função suave  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  como:

$$\text{Hess } f(X, Y) = g(\nabla_X \nabla f, Y) \tag{5.4.2}$$

Utilizando por exemplo o Lemma 5.30 o(a) leitor(a) poderá resolver o exercício a seguir:

### Exercício 5.32.

Verifique que  $\text{Hess } f_p$  é aplicação bilinear simétrica.

Terminamos esta subseção relacionando a derivada segunda de uma função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  com o conceito de Hessiano. Observe que  $df^*TM \rightarrow \mathbb{R}$ . Definindo  $F = df$  temos a derivada segunda  $dF_{v_p} : T_{v_p}(TM) \rightarrow \mathbb{R}$ . Sejam  $w_p \in T_pM$  e  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  curva suave com  $\alpha'(0) = w_p$ . Considere  $t \rightarrow \hat{\alpha}(t)$  o transporte paralelo ao longo de  $\alpha_t = \alpha|_{[0,t]}$ , i.e.,  $\hat{\alpha}(t) = \parallel_{\alpha_t} v_p$ . Temos então que  $\hat{w}_{v_p} = \hat{\alpha}'(0) \in H_{v_p}$  é vetor tal que  $d\pi_{v_p} \hat{w}_{v_p} = w_p$ . Visto que  $\frac{\nabla}{dt} \hat{\alpha} = 0$ , temos:

$$\begin{aligned} dF_{v_p}(\hat{w}) &= \frac{d}{dt} F \circ \hat{\alpha}(t)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} df \hat{\alpha} \\ &= \frac{d}{dt} g(\nabla f \circ \alpha(t), \hat{\alpha})|_{t=0} \\ &= g(\nabla_w \nabla f(p), v_p) + g(\nabla f(p), \frac{\nabla}{dt} \hat{\alpha}) \\ &= \text{Hess } f(p)(w_p, v_p) \end{aligned}$$

### 5.4.2. Divergente e Laplaciano

Definamos agora o operador divergente  $\text{div} : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  como operador que leva  $X \in \mathfrak{X}(M)$  ao traço de  $\nabla X$  ou seja:

$$\text{div } X_p = \sum_i g(\nabla_{e_i} X, e_i) \quad (5.4.3)$$

onde  $\{e_i\}$  é base ortonormal de  $T_pM$ . O divergente de um campo mede a grosso modo, como ilustra o Exercício 5.35, a variação do volume de  $M$  ao longo do fluxo do campo  $X$ . Antes porém precisamos de algumas ferramentas, uma delas vista já na [Parte 1](#).

### Exercício 5.33.

Considere um referencial ortonormal  $\xi = \{\xi_i\}$  em uma vizinhança de  $p \in M$



**Continuação.**

atendendo propriedade do Lema 5.30. Seja  $X = \sum_i a_i \xi_i$ . Verifique:

$$\operatorname{div} X(p) = \sum_i \xi_i \cdot a_i(p)$$

**Lema 5.34.**

Sejam  $M^m$  variedade Riemanniana ( $\dim M = m$ ) orientável,  $\nu$  forma volume e  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Então:

$$d(i_X \nu) = \operatorname{div} X \nu \tag{5.4.4}$$

*Demonstração.* Considere um referencial ortonormal  $\xi = \{\xi_i\}$  em uma vizinhança de  $p \in M$  atendendo propriedade do Lema 5.30. Sejam  $\theta_i$  base dual de  $\xi_j$ , ou seja  $\theta_i(\cdot) = g(\xi_i, \cdot)$ . Então  $\nu = \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_m$ . Seja  $X = \sum_i a_i \xi_i$ . Assim

$$i_X \nu = \sum_i a_i i_{\xi_i} \nu = \sum_i (-1)^{i+1} a_i \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_{i-1} \wedge \theta_{i+1} \wedge \cdots \wedge \theta_m \tag{5.4.5}$$

Visto que  $\nabla_{\xi_i} \xi_j(p) = 0$  temos  $[\xi_j, \xi_k](p) = \nabla_{\xi_j} \xi_k(p) - \nabla_{\xi_k} \xi_j(p) = 0$  e assim

$$d\theta_i(\xi_j, \xi_k) = \xi_j \cdot \theta_i(\xi_k) - \xi_k \cdot \theta_i(\xi_j) - \theta_i([\xi_j, \xi_k]) = 0 \tag{5.4.6}$$

Temos então pela Eq.(5.4.5) que:

$$\begin{aligned} d(i_X \nu)(p) &= \sum_i (\xi_i \cdot a_i) \nu(p) \\ &+ \sum_i (-1)^{i+1} a_i d(\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_{i-1} \wedge \theta_{i+1} \wedge \cdots \wedge \theta_m)(p) \\ &\stackrel{(5.4.6)}{=} \sum_i (\xi_i \cdot a_i) \nu(p) \\ &= \operatorname{div} X \nu(p) \end{aligned}$$

□

**Exercício 5.35.**

Sejam  $(M, g)$  variedade Riemanniana, um campo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  com  $X(p) \neq 0$ . Seja  $(t, x_1, \dots, x_{m-1})$  um sistema de coordenada com  $\frac{\partial}{\partial t} = X$  e forma volume  $\nu = |g| dt \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge x_{m-1}$ . Verifique:

## Continuação.

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial}{\partial t} \ln(|g|) = \frac{1}{|g|} \frac{d}{dt} |g|$$

Por fim podemos definir um dos operadores mais naturais em geometria. Dado  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  definimos o Laplaciano  $\Delta : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  como

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f \quad (5.4.7)$$

Segue então que  $\Delta f$  mede a grosso modo, a variação do volume de  $M$  ao longo do fluxo do gradiente (o qual por sua vez indica o sentido de maior crescimento da função). Existe uma ampla literatura apenas voltada para o papel do Laplaciano em modelagens e equações diferenciais parciais, bem como o significado e propriedades do seu espectro. Não faremos isto aqui pois foge um pouco dos objetivos deste livro. Mas pelo menos utilizemos nossas definições e lemas para ver o clássico Teorema 5.37. Antes porém precisaremos de um exercício (que inclui a fórmula de Green).

**Exercício 5.36.**

Considere um referencial ortonormal  $\xi = \{\xi_i\}$  em uma vizinhança de  $p \in M$  atendendo propriedade do Lema 5.30. Verifique:

1.  $\Delta f(p) = \sum_i (\xi_i \cdot \xi_i \cdot f)(p)$
2.  $\Delta(fg) = g \Delta f + f \Delta g + 2g(\nabla f, \nabla g)$

**Teorema 5.37.**

Seja  $(M, g)$  variedade compacta orientável com forma volume  $\nu$ . Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  suave tal que  $\Delta f \geq 0$ . Então  $f$  é constante, em particular funções harmônicas ( $\nabla f = 0$ ) em variedade compacta é constante.

*Demonstração.* Observe que se  $\Delta f \geq 0$  então  $\Delta f = 0$ . De fato note que

$$\int_M \Delta f \nu = \int_M \operatorname{div} \nabla f \nu = \int_M d(i_{\nabla f} \nu) = \int_{\partial M} i_{\nabla f} \nu = 0$$

visto que  $\Delta f \geq 0$ , concluímos que  $\Delta f = 0$ . Utilizando novamente teorema de Stokes (vide (\*\*)) e o Exercício 5.36 (vide (\*)) temos

$$\int_M 2g(\nabla f, \nabla f) \stackrel{(*)}{=} \int_M \Delta f^2 \nu \stackrel{(**)}{=} 0$$

Concluimos que  $g(\nabla f, \nabla f) = 0$ , i.e.,  $\nabla f = 0$ . Como  $M$  é conexo, fixo  $p \in M$  e dado  $x \in M$ , existe uma curva suave  $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$  com  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha(1) = x$ . Então  $\frac{d}{dt}f \circ \alpha(t) = g(\nabla f(\alpha(t)), \alpha'(t)) = 0$  ou seja  $f \circ \alpha$  é constante, em particular  $f(p) = f(x)$ .  $\square$

## 5.5. Geodésicas

No espaço Euclidiano as curvas de aceleração zero são justamente as curvas que minimizam distâncias. Assim um candidato natural para curvas que minimizam *localmente distâncias* em uma variedade Riemanniana  $(M, g)$  serão as curvas de aceleração nula.

### Definição 5.38.

Uma curva suave  $\gamma : (-a, a) \rightarrow (M, g)$  é chamada **geodésica** se

$$\frac{\nabla}{dt}\gamma'(t) = 0, \forall t \in (-a, a)$$

Aceitando alguns resultados, nesta seção teremos nosso primeiro contato com este fundamental conceito, o qual será mais cuidadosamente discutido em outras disciplinas, como por exemplo Geometria Riemanniana.

### Observação 5.39.

Observe que se  $\gamma : I \rightarrow (M, g)$  é geodésica, então  $\|\gamma'(t)\|$  é constante. De fato  $\frac{d}{dt}(g(\gamma'(t), \gamma'(t))) = 2g(\frac{\nabla}{dt}\gamma'(t), \gamma'(t)) = 0$ . Segue então que se  $\gamma$  é geodésica,  $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = c(b - a)$  onde  $c = \|\gamma'(t)\|$ .

### Exercício 5.40.

Seja  $M^m$  subvariedade mergulhada em  $\mathbb{R}^{m+k}$ . Dado uma curva  $\gamma : I \rightarrow M$  verifique que  $\gamma$  é geodésica se e somente se  $\gamma''$  é perpendicular a  $M$ . Conclua que segmentos dos grandes círculos da esfera  $\mathbb{S}^m$  são geodésicas.

**Exercício 5.41.**

Seja  $M$  uma superfície mergulhada de revolução em  $\mathbb{R}^3$ , onde  $g$  é métrica induzida. Demonstre que sua curva geratriz é geodésica de  $M$ .

**Observação 5.42.**

Segmentos de grandes círculos na esfera não necessariamente minimizam distâncias. Por exemplo, se  $\alpha : [0, \frac{3\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{S}^m$  é uma geodésica com velocidade unitária, então ela não minimiza distância entre  $\alpha(0)$  e  $\alpha(\frac{3\pi}{2})$ . De fato,  $L(\alpha) = \frac{3\pi}{2}$ .

Por outro lado, se consideramos um outro segmento do mesmo grande círculo,  $\beta : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{S}^m$  com  $\alpha(0) = \beta(0)$  e  $\alpha(\frac{3\pi}{2}) = \beta(\pi/2)$  temos que  $L(\beta) = \frac{\pi}{2} < L(\alpha)$ .

Ou seja, geodésicas não minimizam (grandes) distâncias, mas como veremos em breve sempre minimizam distâncias localmente.

Em coordenadas  $\nabla_{\dot{\gamma}} \gamma'(t) = 0$  equivale, a seguinte EDO de segunda ordem.

$$0 = x''_k(t) + \sum_{ij} x'_i(t)x'_j(t)\Gamma_{ij}^k(x(t)), \quad \forall k \quad (5.5.1)$$

Temos então que, pelo menos localmente, dado as duas condições iniciais posição  $p \in M$  (pé do vetor) e e velocidade  $v_p \in T_p M$ , deveria existir uma única geodésica  $\gamma_{v_p} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  com  $\gamma_{v_p}(0) = p$  e  $\gamma'_{v_p}(0) = v_p$ . Transformando a E.D.O de segunda ordem (5.5.1) em uma E.D.O de primeira ordem em  $TM = \cup_{x \in M} T_x M$  e aplicando resultado de E.D.O sobre suavidade das condições iniciais é possível provar o resultado a seguir.

**Proposição 5.43.**

Dado  $p \in M$  existe uma vizinhança  $U$  de  $p$  em  $M$ , números  $\delta, \epsilon > 0$  e uma aplicação  $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times \mathcal{U} \rightarrow M$  com  $\mathcal{U} := \{V_q \in TM, q \in U, \|V_q\| < \delta\}$  tal que  $\gamma_{v_p}(\cdot) = \varphi(\cdot, V_q)$  é a única geodésica com  $\gamma'_{v_p}(0) = \frac{d}{dt}\varphi(t, V_q)|_{t=0} = V_q$  e  $\varphi(0, V_q) = q$ .

Em geral reparametrizar uma solução  $\gamma$  de uma E.D.O de segunda ordem (mesmo que seja por constantes i.e  $\beta(t) = \gamma(ct)$  não dará uma nova solução da E.D.O. Porém a equação (5.5.1) tem um formato muito especial (dizemos em Geometria Riemanniana que ela atende propriedades de um spray) e assim temos o resultado a seguir.

**Proposição 5.44.**

Seja  $\gamma_{v_q}(\cdot) = \varphi(\cdot, V_q)$  geodésica definida em  $(-\epsilon, \epsilon)$ . Seja  $a > 0$  então:

- (a) A geodésica  $t \rightarrow \gamma_{av_q}(t) = \varphi(t, aV_q)$  está definida em  $(-\frac{\epsilon}{a}, \frac{\epsilon}{a})$   
 (b)  $\gamma_{av_q}(t) = \varphi(t, aV_q) = \varphi(at, V_q) = \gamma_{v_q}(at)$ .

*Demonstração.* Note que o item (b) implica o item (a). Visto que  $\frac{d}{dt}\varphi(at, V_q)|_{t=0} = aV_q$  basta mostrar que  $t \rightarrow \varphi(at, V_q)$  é geodésica. Isto segue do fato que em coordenadas  $y(t) = x(at)$  atende a equação (5.5.1).  $\square$

As duas proposições acima então implicam que:

**Proposição 5.45.**

Dado  $p \in M$  existe uma vizinhança  $U$  de  $p$  em  $M$ , um número  $\delta > 0$  e uma aplicação  $\varphi : (-2, 2) \times \mathcal{U} \rightarrow M$  com  $\mathcal{U} := \{V_q \in TM, q \in U, \|V_q\| < \delta\}$  tal que  $\varphi(\cdot, V_q)$  é a única geodésica com  $\frac{d}{dt}\varphi(t, V_q)|_{t=0} = V_q$  e  $\varphi(0, V_q) = q$ .

**Definição 5.46.**

Podemos definir agora a **aplicação exponencial** como

$$\begin{aligned} \exp_q : B_\delta(0) \subset T_q M &\rightarrow M \\ V_q &\rightarrow \varphi(1, V_q) \end{aligned}$$

**Observação 5.47.**

Visto que  $\varphi(1, V_q) = \varphi(\|V_q\|, \frac{V_q}{\|V_q\|})$  temos que  $\exp_q(V)$  é o ponto em  $M$  obtido percorrendo um comprimento  $\|V_q\|$  ao longo da imagem da geodésica que sai de  $q$  com velocidade  $\frac{V_q}{\|V_q\|}$ .

**Proposição 5.48.**

Seja  $q \in M$ . Então  $d(\exp_q)_0 = Id$  e assim sendo existe um  $\epsilon > 0$  tal que  $\exp_q : B_\epsilon(0) \rightarrow M$  é um difeomorfismo sobre um aberto em  $M$ .

Demonstração.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \exp_q(tV)|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \varphi(1, tV_q)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \varphi(t, V_q)|_{t=0} \\ &= V_q \end{aligned}$$

e assim  $d(\exp_q)_0$  é a identidade. O resto da proposição segue do teorema da função inversa.  $\square$

Tal vizinhança  $B_\epsilon$  será chamada de **vizinhança normal**.

#### Observação 5.49.

Veremos na última seção deste capítulo que se  $M$  é um grupo de Lie matricial compacto (e.g.,  $SO(n)$ ), com métrica bi-invariante (e.g.,  $\langle gX, gY \rangle_g = \text{tr}(XY^t)$ ) a exponencial Riemanniana em  $e$  coincidirá com a exponencial de matrizes.

No que se segue, demonstraremos o conhecido lema de Gauss o qual garante que geodésicas radiais são ortogonais as esferas normais. Antes porém faz-se necessário apresentar o lema abaixo, o qual será útil em diversos momentos.

#### Lema 5.50.

Seja  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow M$  aplicação suave. Então

$$\frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}$$

#### Teorema 5.51. Lema de Gauss

Seja  $B_{\tilde{\delta}}(0)$  uma bola em  $T_qM$  tal que a restrição da exponencial  $\exp_q : B_{\tilde{\delta}}(0) \rightarrow M$  está bem definida. Sejam  $\mathbb{S}_{\tilde{\delta}}^{n-1}$  a esfera contida em  $B_{\tilde{\delta}}(0)$  com  $\tilde{\delta} < \tilde{\delta}$  e  $v : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{S}_{\tilde{\delta}}^{n-1}$  curva suave. Defina  $f(s, t) = \exp_q(tv(s))$ . Então

$$g\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) = 0$$

Demonstração. Observe primeiro que

$$g\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)_{f(s,t)} = g(d(\exp_q)_{tv(s)}tv'(s), d(\exp_q)_{tv(s)}v(s))$$

Podemos então concluir que:

$$g\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)_{f(s,0)} = 0.$$

Assim para demonstrar o lema de Gauss é suficiente verificar que a derivada em relação a  $t$  da função  $g\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)_{f(s,t)}$  é zero para todo  $t$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( g\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) \right) &= g\left(\frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) + g\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t}\right) \\ &= g\left(\frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) \\ &= g\left(\frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} g\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \|v(s)\|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade deve-se ao fato de  $f(s, \cdot)$  ser geodésica, a terceira igualdade deve-se ao Lema 5.50 e a última igualdade deve-se ao fato de  $v(\cdot)$  ser uma curva contida em uma esfera.  $\square$

O lema de Gauss nos permite demonstrar que geodésicas minimizam localmente caminhos. Mais precisamente temos a seguinte proposição.

### Proposição 5.52.

Seja  $B_\delta(q)$  uma bola normal. Defina  $\alpha : [0, 1] \rightarrow B_\delta(0)$  como  $\alpha(t) = \exp_q(tv)$  com  $\|v\| < \delta$ . Seja  $\beta : [0, 1] \rightarrow M$  curva suave por partes tal que  $\alpha(0) = \beta(0)$  e  $\alpha(1) = \beta(1)$ . Então

$$l(\alpha) \leq l(\beta)$$

Se a igualdade vale, então as imagens de  $\alpha$  e  $\beta$  coincidem.

*Demonstração.* Vamos primeiro considerar o caso em que  $\beta([0, 1]) \subset B_\delta(q)$ .

Podemos supor sem perda de generalidade que  $\beta(t) \neq q$  para  $t > 0$ .

Seja  $\tilde{\beta} := (\exp_q|_{B_\delta(0)})^{-1} \circ \beta$ . Defina as seguintes funções suaves por partes:

$$\begin{aligned}
 f : [0, \delta) \times \mathbb{S}_1^{n-1} \ni (R, V) &\rightarrow \exp_q(RV) \in B_\delta(q) \\
 r : [0, 1] \ni t &\rightarrow \|\tilde{\beta}(t)\| \in [0, \delta) \\
 v : (0, 1] \ni t &\rightarrow \frac{\tilde{\beta}(t)}{\|\tilde{\beta}(t)\|} \in \mathbb{S}_1^{n-1}
 \end{aligned}$$

Observe que  $\beta(t) = f(r(t), v(t))$ . Temos então pelo lema de Gauss que:

$$\begin{aligned}
 \int_\epsilon^1 \|\beta'(t)\| dt &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\beta'(t)\| dt \\
 &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{(r'(t))^2 + g\left(\frac{\partial f}{\partial V} v'(t), \frac{\partial f}{\partial V} v'(t)\right)} dt \\
 &\geq \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} |r'(t)| dt \\
 &\geq \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} r'(t) dt \\
 &= r(1) - r(\epsilon)
 \end{aligned}$$

Logo  $\mathbf{l}(\beta) \geq r(1) = \mathbf{l}(\alpha)$ . Note que se as igualdades são satisfeitas então as imagens de  $\alpha$  e  $\beta$  coincidem.

Por fim vamos considerar o caso em que  $\beta([0, 1])$  não está completamente contido em  $B_\delta(q)$ . Seja  $t_1$  o primeiro tempo tal que  $\beta(t_1)$  está na fronteira da bola. Então temos pela discussão anterior:

$$\mathbf{l}(\beta) > \mathbf{l}(\beta|_{[0, t_1]}) \geq \delta > \mathbf{l}(\alpha).$$

□

A Proposição 5.52 pode ser melhorada como comentamos no teorema a seguir.

### **Teorema 5.53. Vizinhaça convexa**

Seja  $(M, g)$  variedade Riemanniana. Então para cada  $q \in M$  existem números  $\delta > 0$ ,  $\epsilon > 0$  tal que as seguintes afirmações são válidas.

- Para qualquer  $p \in B_\epsilon(q)$  temos  $\exp_p|_{B_\delta(0)}$  é um difeomorfismo e que  $B_\epsilon(q) \subset \exp_p(B_\delta(0))$ .
- Para cada 2 pontos  $p_1$  e  $p_2$  em  $B_\epsilon(q)$  existe um único segmento minimizante



**Continuação.**

de geodésica ligando  $p_1$  a  $p_2$ .

(c) O segmento (do item (b)) fica contido em  $B_\epsilon(q)$  e depende suavemente dos pontos inicial e final.

**Exercício 5.54.**

Utilizando a Proposição 5.52, demonstre que o item (a) implica o item (b) no teorema da vizinhança convexa, enunciado acima.

Embora não demonstremos o teorema da vizinhança convexa, vamos apresentar uma boa aplicação.

**Proposição 5.55.**

Seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow (M, g)$  curva suave por partes tal que  $d(\gamma(0), \gamma(1)) = \mathbf{1}(\alpha)$ . Então  $\gamma$  é imagem de uma geodésica.

*Demonstração.* Observe primeiro que para cada  $t \in [0, 1]$  existe um intervalo  $I_t$  tal que  $\gamma(I_t)$  está contida em uma bola normal convexa.

Afirmamos que  $\gamma(I_t)$  é imagem de um segmento de geodésica. De fato seja  $I_t = [a, b]$  então como  $\gamma(I_t)$  está contida em uma bola normal convexa então existe um único segmento de geodésica  $\alpha$  ligando  $\gamma(a)$  a  $\gamma(b)$  tal que  $\mathbf{1}(\alpha) = d(\gamma(a), \gamma(b))$ . Suponha por absurdo que  $\gamma(I_t)$  seja diferente de  $\alpha$ . Então defina a concatenação  $\beta = \gamma_{[a,b]} * \alpha * \gamma_{[0,a]}$  Note que  $\beta(0) = \gamma(0)$ ,  $\beta(1) = \gamma(1)$  e  $L(\beta) < L(\alpha)$  o que contraria a definição de  $\gamma$ .

Seja  $I_{t_i}^0$  uma cobertura finita do intervalo compacto  $[0, 1]$  tais que  $\gamma(I_{t_i})$  está em uma bola normal convexa. Se  $s \in I_{t_i}^0 \cap I_{t_{i+1}}^0$  então considere um intervalo  $I_s^0$  tal que  $I_s^0 \subset I_{t_i}^0 \cap I_{t_{i+1}}^0$  e tal que  $\gamma(I_s)$  esta contida em uma bola normal convexa. Como vimos acima  $\gamma(I_s)$  é um segmento de geodesica contido nos segmentos de geodésicas  $\gamma(I_{t_i})$  e  $\gamma(I_{t_{i+1}})$ . Logo por EDO os segmentos de geodésicas  $\gamma(I_{t_i})$   $\gamma(I_{t_{i+1}})$  ficam contidos em um segmento de geodésica maior e isto termina a prova.  $\square$

Vamos terminar esta seção com mais uma interessante aplicação do teorema de bola normal (convexa). No teorema abaixo damos uma ideia da demonstração do teorema de Hopf-Rinow para o caso compacto usando apenas o conceito de bola normal e um argumento chamado *encurtamento* o qual é útil no estudo de geodésicas em particular das geodésicas fechadas.

**Teorema 5.56.**

Suponha que  $M$  é variedade Riemanniana compacta. Então:

- (a) para todo  $q \in M$  a aplicação exponencial  $\exp_q : T_q M \rightarrow M$  está bem definida (i.e.,  $M$  é geodesicamente completo).
- (b) dados  $q$  e  $p$  em  $M$ , existe um segmento de geodésica  $\gamma : [0, R] \rightarrow M$  (parametrizado por comprimento de arco) ligando  $q$  a  $p$  (i.e.,  $\gamma(0) = q$  e  $\gamma(R) = p$ ) que realiza distância, i.e.  $\mathbf{l}(\gamma) = R = d(q, p)$ . que realiza distância (i.e.,

*Demonstração.* Afim de ter uma ideia da demonstração do item (a), aceitemos que a Equação 5.5.1 garante a existência de um campo (chamado campo geodésico)  $\vec{G} \in \mathfrak{X}(TM)$  sendo que a projeção de sua linha integral coincide a geodésicas em  $M$ . Agora podemos restringir  $\vec{G}$  ao fibrado tangente unitario  $T^1(M) := \{V_x \in T_x M, \|V_x\| = 1\}_{x \in M}$ . Ao aplicar o resultado que afirma que *todo campo suave definido em variedade compacta gera um grupo a 1 parametro de difeomorfismos* podemos concluir que o fluxo de  $\vec{G}$  restrito  $T^1(M)$  é completo (i.e, está definido para todo tempo) e assim projetando em  $M$  concluímos que  $M$  é geodesicamente completo.

Vamos agora dar ideia da prova do item (b). Como  $M$  é compacta podemos considerar uma cobertura finita de bolas  $B_{\delta_i}$  que são vizinhanças normais convexas (vide Teorema 5.53). A esta cobertura considere  $\delta$  o número de Lebesgue associado a ela, ou seja se  $d(x, y) < \delta$  então  $x, y \in B_{\delta_i}$  para algum  $i$ . Sejam  $R = d(q, p)$  e  $0 < t_1 < t_2 \cdots t_{m-1} = R$  uma partição tal que  $\Delta t_i := (t_i - t_{i-1}) < \frac{\delta}{4}$

Considere uma sequencia de curvas  $\tilde{\gamma}_n : [0, b_n] \rightarrow M$  parametrizadas por comprimento de arco tal que  $L(\tilde{\gamma}_n)$  converge a  $R$  com  $\tilde{\gamma}_n(0) = q$  e  $\tilde{\gamma}_n(b_n) = p$ . Considere  $N > N_0$  tal que  $R \leq L(\tilde{\gamma}_n) < R + \epsilon_0$  onde  $\epsilon_0 < \frac{\delta}{8}$ . Em particular observe que  $b_n < R + \epsilon_0$  Defina  $t_m^n := b_n$  (sendo que  $t_{m-1} \leq t_m$ ).

Finalmente defina  $\gamma_n$  como a curva composta por união de segmentos de geodésicas ligando  $x_n^{i-1} := \tilde{\gamma}_n(t_{i-1})$  com  $x_n^i := \tilde{\gamma}_n(t_i)$ . De fato a escolha de  $\Delta t_i$  garante que existe uma única geodésica ligando tais pontos. Chamaremos  $\gamma_n$  o *encurtamento* de  $\tilde{\gamma}_n$ . Visto que  $M$  é compacta, passando por uma subsequencia (que continuaremos a denotar por  $\{x_n^i\}_n$ ) podemos garantir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^i = x^i$ . Novamente a escolha de  $\Delta t_i$  e propriedade do número de Lebesgue  $\delta$  garante que existe um único segmento de geodésica ligando  $x^{i-1}$  e  $x^i$ . Vamos denotar por  $\gamma$  a curva que é a união destes segmentos de geodésicas. Note que  $\gamma_n|_{[t_{i-1}, t_i]}$  converge para  $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ . Visto que  $\mathbf{l}(\gamma_n)$  converge para  $R$  concluímos que  $\mathbf{l}(\gamma) = R$ . Logo pela Proposição 5.55 concluímos que  $\gamma$  é a geodésica minimizante ligando  $q$  a  $p$ .  $\square$

**Exercício 5.57. \***

Seja  $M$  variedade Riemanniana compacta não simplesmente conexa. Demonstre que por cada  $q$  existe um loop geodésico (i.e uma geodésica  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  tal que  $\gamma(0) = \gamma(1)$ , porém  $\gamma'(0)$  não precisa ser igual a  $\gamma'(1)$ ).

Dado as técnicas apresentadas acima é conveniente dizer algumas palavras sobre um dos primeiros resultados sobre *existência de geodésicas fechadas em variedades compactas* (assunto muito estudado na Geometria Riemanniana). Seja  $\beta : [0, 1] \rightarrow M$  uma curva fechada (i.e,  $\beta(0) = \beta(1)$ ) em uma variedade compacta  $M$ . Considere 2 partições  $\tau_i$  e  $t_i$  definidas da seguinte forma,  $\tau_0 = \tau_k - 1 < t_0 = 0 < \tau_1 < t_1 < \tau_2 < t_2 \cdots \tau_k < t_k = 1$  com  $\Delta t_i$  e  $\Delta \tau_i$  pequenos o suficiente (onde a estimativa é feita adequadamente usando cobertura de bolas convexas e o número de Lebesgue). Aplicando o processo de encurtamento a curva fechada  $\beta$  (referente a partição  $t_i$ ) discutido na demonstração acima, obtemos uma curva fechada  $\gamma_1$  união de segmentos de geodésicas. Agora usando o encurtamento (referente a partição  $\tau_i$ ) a curva  $\gamma_1$  obtemos uma nova curva fechada união de segmentos de geodésicas. Vamos denota-la por  $\gamma$ . Criamos então um processo que chamaremos **duplo-encurtamento**  $\mathcal{P}(\beta) = \gamma$ .

É possível demonstrar que as curvas fechadas união de segmentos de geodésicas  $\mathcal{P}^n(\beta)$  converge para uma geodésica fechada  $\gamma$ , i.e,  $\gamma'(0) = \gamma'(1)$ , que em princípio poderia ser um ponto. Então surge a questão de como garantir que  $\gamma$  não é trivial. Podemos então pensar em 2 casos. O primeiro mais simples onde  $\pi_1(M)$  é não trivial. Neste caso poderíamos ter começado com uma curva fechada  $\beta$  que não é homotópica a um ponto e aplicarmos o processo duplo a esta curva. Temos assim neste caso que  $\gamma$  é uma geodésica fechada não trivial, pois  $\gamma$  e  $\beta$  estão na mesma classe de homotopia que não fixa extremos e  $\beta$  não pode ser deformada a um ponto. Finalmente considere o caso em que  $M$  é simplesmente conexo. Sabe-se por topologia algébrica que pelo menos um dos grupos de homotopia  $\pi_k(M)$  é não trivial. Considere uma aplicação  $\psi : \mathbb{S}^k \rightarrow M$  não homotópica a um ponto. Aplicando duplo encurtamento a cada um dos paralelos concluímos que deve existir uma geodésica fechada, pois caso contrário a esfera seria homotópica a um disco, que por sua vez é homotópico a um ponto.

O leitor poderá encontrar em literatura mais especializada outros resultados sobre geodésicas fechadas em variedades (e.g se existem mais de uma, como elas crescem etc).<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Alguns resultados sobre geodésicas fechadas em espaços singulares tais como orbifolds, podem ser encontrados em Alexandrino Javaloyes-on closed geodesics in the leaf space of singular Riemannian foliations.

## 5.6. (\*) Fluxo geodésico e forma simplética

Nesta seção estudaremos as relações entre o fluxo geodésico e as estrutura simplética e de contato induzidas pela métrica de Sasaki.

Seja  $g_0$  métrica de Sasaki em  $TM$ , vide Definição 5.26. Lembremos em particular que a conexão Riemanniana induz uma distribuição  $\mathcal{H}$  na variedade  $TM$  e assim temos a decomposição  $T_{v_p}TM = \mathcal{H}_{v_p} \oplus T_{v_p}TM_p$ . Ao longo desta seção, a dupla  $(X, Y)_{v_p}$  significará que  $X \in \mathcal{H}_{v_p}$  e  $Y \in T_{v_p}TM_p$ . Lembremos também que pela Observação 5.28 a projeção  $C_{v_p} : T_{v_p}(TM) \rightarrow T_{v_p}TM_p$  é descrita como  $C_p \widehat{\alpha}'(0) = \frac{\nabla}{dt} Z(0)$  onde  $t \rightarrow \widehat{\alpha}$  é um campo  $t \rightarrow Z(t)$  ao longo de uma curva  $t \rightarrow \alpha(t)$ . Por fim considere **estrutura quase complexa**  $J_{v_p} : T_{v_p}TM \rightarrow T_{v_p}TM$  definida como  $J_{v_p}(\xi_h, \xi_v) = (-\xi_v, \xi_h)$ . Podemos agora introduzir nossa forma simplética em  $TM$ .

### Definição 5.58.

Sejam  $J$  e  $C$  aplicações definidas acima e  $\pi : TM \rightarrow M$  a projeção canônica. A **forma simplética** em  $TM$  é definida como:

$$\Omega_{v_p}(\xi, \eta) = g_0(J_{v_p}\xi, \eta) = g(d\pi_{v_p}(\xi), C_{v_p}(\eta)) - g(C_{v_p}(\xi), d\pi_{v_p}(\eta))$$

É possível verificar que  $\Omega$  é de fato não degenerada (vide Exercício 5.61) Definamos a seguir a 1-forma  $\alpha$  em  $TM$  cuja diferenciação será  $-\Omega$ . Isto em particular implicará que  $\Omega$  é uma 2 forma fechada.

### Definição 5.59.

Seja  $G \in \mathfrak{X}(TM)$  o campo geodésico. Então:

$$\alpha(\xi_{v_p}) = g_0(G(v_p), \xi_{v_p}) = g(d_{v_p}\pi(\xi), v_p)$$

é nossa 1-forma em  $TM$ .

### Proposição 5.60.

Continuação.

Sejam  $\Omega$  e  $\alpha$  definidas acima. Então:

$$\Omega = -d\alpha.$$

*Demonstração.* Seja  $\tilde{\nabla}$  conexão Riemanniana da métrica de Sasaki  $\mathfrak{g}_0$ . Afirmamos primeiro que:

$$\widehat{\nabla}_\eta G \in \mathcal{V}_{v_p} := T_{v_p}TM_p \tag{5.6.1}$$

para todo  $\eta \in \mathcal{H}_{v_p}$ . Afim de verificar tal equação, considere  $\{E_1, \dots, E_n\}$  um referencial totalmente geodésico em vizinhança de  $p$ . Seja  $X_i$  levantamento horizontal de  $E_i$ . Para demonstrar Eq (5.6.1) basta verificar que  $\widehat{\nabla}_{X_j} G \in \mathcal{V}_{v_p}$  o que será feito a seguir:

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla}_{X_j} G(v_x) &= \sum_i \widehat{\nabla}_{X_j} (\mathfrak{g}(E_i(x), v) X_i) \\ &= \sum_i X_j \bullet (\mathfrak{g}(E_i(x), v)) X_i \\ &\quad + \sum_i \mathfrak{g}(E_i(x), v_x) \widehat{\nabla}_{X_j} X_i \\ \widehat{\nabla}_{X_j} G(v_p) &\stackrel{(*)}{=} \sum_i X_j \bullet (\mathfrak{g}(E_i(x), v))_p X_i \\ &\quad + \sum_i \mathfrak{g}(E_i(p), v_p) (\widehat{\nabla}_{X_j} X_i)^\nu \end{aligned}$$

onde a igualdade (\*) segue da formula de O'Neill das submersões e do fato que  $\nabla_{X_j} X_i(p) = 0$ . Temos então que:

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla}_{X_j} G(v_p) &= \sum_i \frac{d}{dt} (\mathfrak{g}(E_i \circ \gamma_j(t), Z_j(t)))|_{t=0} X_i \\ &\quad + \sum_i \mathfrak{g}(E_i(p), v_p) (\widehat{\nabla}_{X_j} X_i)^\nu \\ &\stackrel{(**)}{=} \sum_i \mathfrak{g}(E_i(p), v_p) (\widehat{\nabla}_{X_j} X_i)^\nu \end{aligned}$$

qual termina a prova da Eq. (5.6.1). Aqui a curva  $t \rightarrow Z_j(t)$  na igualdade (\*\*) é o transporte paralelo de  $v_p$  ao longo da geodésica  $\gamma_j$  partindo de  $p$  com  $\gamma'_j(0) = E_j(p)$ .

Por outro lado temos:

$$\begin{aligned} d\alpha(\xi_1, \xi_2) &= \xi_1 \bullet \alpha(\xi_2) - \xi_2 \bullet \alpha(\xi_1) - \alpha([\xi_1, \xi_2]) \\ &= \xi_1 \bullet \mathfrak{g}_0(\xi_2, G) - \xi_2 \bullet \mathfrak{g}_0(\xi_1, G) \\ &\quad - \mathfrak{g}_0([\xi_1, \xi_2], G) \end{aligned}$$

Assim sendo:

$$d\alpha(\xi_1, \xi_2) = \mathfrak{g}_0(\xi_2, \widehat{\nabla}_{\xi_1} G) - \mathfrak{g}_0(\xi_1, \widehat{\nabla}_{\xi_2} G) \quad (5.6.2)$$

Das equações Eq.(5.6.1) e Eq (5.6.2) concluímos que:

$$d\alpha|_{\mathcal{H}_{v_p} \times \mathcal{H}_{v_p}} = 0.$$

Seja  $Y_i(v_p) = J_{v_p}(X_i(v_p))$  Assim  $\{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n\}$  é um referencial ortonormal adaptado de  $T_{v_p}TM$ . Visto que  $[Y_i, Y_j]$  é vertical (uma vez que os 2 são tangentes a uma fibra) concluímos que

$$d\alpha|_{\mathcal{V}_{v_p} \times \mathcal{V}_{v_p}} = 0$$

Assim para terminar a demonstração devemos provar que:

$$d\alpha_{v_p}(X_i, Y_j) = -\Omega_{v_p}(X_i, Y_j) \quad (5.6.3)$$

De um lado utilizando o fato que  $[X_i, Y_j](v_p) \in \mathcal{V}_{v_p}$  e  $\alpha(Y_j) = 0$  temos:

$$\begin{aligned} d\alpha_{v_p}(X_i, Y_j) &= -Y_j \bullet \alpha(X_i)_{v_p} \\ &= -Y_j \bullet \mathfrak{g}_0(X_i, G)_{v_p} \\ &= -\frac{d}{dt} \mathfrak{g}(E_i(p), tE_j(p) + v_p) \\ &= -\delta_{ij}. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\Omega_{v_p}(X_i, Y_j) = \mathfrak{g}_0(J_{v_p}X_i, Y_j) = \mathfrak{g}_0(Y_i, Y_j) = \delta_{ij}.$$

As duas equações acima implicam então Eq. (5.6.3) terminando a demonstração.  $\square$

**Exercício 5.61.**

Descrevendo  $\Omega$  em termos dos duais dos campos  $\{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n\}$  definidos na demonstração da Proposição 5.60, verifique que

$$\frac{1}{n!} \Omega^n = \frac{1}{n!} \underbrace{\Omega \wedge \dots \wedge \Omega}_n$$

é forma volume Riemanniana de  $TM$  associada a métrica de Sasaki  $\mathfrak{g}_0$ .

Vamos agora verificar que o spray geodésico é um campo Hamiltoniano.

**Proposição 5.62.**

Seja  $H : TM \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $H(v_p) = \frac{1}{2} \mathfrak{g}(v, v)$ . Então o spray geodésico  $G \in \mathfrak{X}(TM)$  coincide com o campo Hamiltoniano associado a  $H$  ou seja

$$dH = i_G \Omega.$$

*Demonstração.* Dado  $\xi \in T_{v_p} TM$ , considere uma curva  $\hat{\alpha} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow TM$  com  $\hat{\alpha}'(0) = \xi$ . Então  $\hat{\alpha}(t) = Z(t)_{\alpha(t)}$ . Assim

$$\begin{aligned} dH_{v_p}(\xi) &= \frac{\partial}{\partial t} H(\hat{\alpha}(t))|_{t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \mathfrak{g}(Z(t), Z(t))|_{t=0} \\ &= \mathfrak{g}(\nabla_{\alpha'(0)} Z(0), Z(0)) \\ &= \mathfrak{g}(C_{v_p} \xi, v) \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} \Omega_{v_p}(G(v_p), \xi) &= \mathfrak{g}(d\pi_{v_p}(G(v_p)), C_{v_p}(\xi)) \\ &= \mathfrak{g}(v, C_{v_p}(\xi)) \end{aligned}$$

Concluimos então que  $dH_{v_p}(\xi) = \Omega_{v_p}(G(v_p), \xi)$  como desejado. □

Visto que o fluxo de qualquer campo Hamiltoniano é um symplectomorfo, ou seja preserva  $\Omega$ , segue do Exercício 5.61 e Proposição 5.62 que:

**Corolário 5.63.**

O fluxo geodésico preserva a forma volume associada a métrica de Sasaki.

Vamos agora restringir o spray geodésico  $G$  ao fibrado unitário e compreender melhor sua relação com a estrutura de contato lá existente.

**Definição 5.64.**

Uma 1-forma  $\eta$  em uma variedade  $N$  orientável de dimensão  $(2n - 1)$  é chamada *forma de contato* se a  $(2n - 1)$ -forma  $\eta \wedge (d\eta)^{n-1}$  é uma forma volume, i.e., nunca se anula.  $(N, \eta)$  é chamada variedade de contato. Dado  $\eta$  existe um único campo vetorial  $X$  (chamado *campo de Reeb*) tal que

$$i_X \eta = 1, \quad i_X d\eta = 0.$$

**Observação 5.65.**

A fórmula mágica de Cartan ( $L_X \omega = i_X d\omega + di_X \omega$ ) garante então que  $L_X \eta = 0$  e  $L_X d\eta = 0$  o que implica que campo de Reeb preserva o volume  $\eta \wedge (d\eta)^{n-1}$ .

Proposição 5.60 e Definição 5.59 implicam então que

**Corolário 5.66.**

$\alpha$  restrita ao fibrado unitário  $T^1 M = H^{-1}(2)$  é uma forma de contato e o spray geodésico  $G$  é o campo de Reeb desta estrutura de contato.

Utilizando mesma ideia por tras do Exercício 5.61 e Observação 5.65 é possível demonstrar que:

**Exercício 5.67.**

$c \cdot \alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}$  é forma volume da métrica de Sasaki restrita a  $T^1 M = H^{-1}(2)$  e tal volume é preservado pelo spray geodésico  $G$ . Aqui  $c$  é  $-1$  ou  $1$  de acordo com a dimensão de  $M$ .

Vamos agora aplicar tais propriedades estudadas para um resultado básico de dinâmica.



**Definição 5.68.**

Seja  $G$  um campo completo em uma variedade  $N$  (e.,g quando  $N$  é compacto). Dizemos que  $G$  é *Poisson estável* se para todo  $p \in N$  existe uma vizinhança  $B$  de  $p$  tal que para todo  $t_0$  existe um  $s > t_0$  e um ponto  $x \in B$  tal que  $e^{sG}(x) \in B$ . Em outras palavras  $e^{sG}(B) \cap B \neq \emptyset$ .

**Teorema 5.69.**

Seja  $N$  uma variedade orientável compacta,  $\omega$  uma  $n$ -forma volume e  $G$  um campo em  $N$ . Suponha que fluxo  $x \rightarrow e^{tG}(x)$  preserva o volume. Então  $G$  é *Poisson estável*.

*Demonstração.* Suponha por absurdo que dado um  $p \in N$  exista uma bola aberta  $B = B_r(p)$  tal que: existe um  $t_0$  tal que para todo  $t > t_0$  tenhamos

$$e^{tG}(B) \cap B = \emptyset \quad (5.6.4)$$

Existe então um número natural  $N > t_0$  e definindo uma sequencia  $t_m := N + m$  concluímos da Eq. (5.6.4) que:

$$e^{(t_m+n)G}(B) \cap e^{nG}(B) = \emptyset \quad (5.6.5)$$

Assim temos que

- $\{e^{t_m G}(B)\}$  coleção de abertos disjuntos;
- $\text{vol}(B) = \text{vol}(e^{t_m G}(B))$  onde  $\text{vol}(V) = \int_V \omega$ .

Porém isto contraria o fato do volume de  $N$  ser finito, visto que  $N$  é compacto.  $\square$

O Exercício 5.67 e o Teorema 5.69 implicam:

**Corolário 5.70.**

Seja  $G$  o spray geodésico restrito ao fibrado unitário  $N = T^1M$  de uma variedade compacta  $M$ . Então  $G$  é *Poisson estável*.

Terminamos esta seção relacionando a 1-forma  $\alpha$  com a forma tautológica  $\theta$  no fibrado cotangente  $TM^*$  definida como  $\theta(\xi_\eta) = \eta(d\pi\xi_\eta)$  onde  $\pi : TM^* \rightarrow M$  a projeção canônica (lembre Parte 1).

**Proposição 5.71.**

Seja  $\mathcal{L} : TM \rightarrow TM^*$  a transformada de Legendre associada a  $H = \frac{1}{2}g$ , ou seja  $\mathcal{L}(v_p) = g(v_p, \cdot)$ . Então  $\alpha = \mathcal{L}^*\theta$

*Demonstração.* Seja  $t \rightarrow \widehat{\beta}(t)$  uma curva suave em  $TM$  com  $\widehat{\beta}(0) = v_p$  e  $\beta$  sua projeção em  $M$ . Temos então que  $\delta(t) := \mathcal{L}(\widehat{\beta}(t)) = g(\widehat{\beta}(t), \cdot)$ . Note que a projeção de  $\delta$  também é a curva  $\beta$ , i.e.,  $\beta = \pi(\delta)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^*\theta(\widehat{\beta}'(0)) &= \theta(d\mathcal{L}\widehat{\beta}'(0)) \\ &= \theta\left(\frac{d}{dt}\mathcal{L} \circ \widehat{\beta}(t)\Big|_{t=0}\right) \\ &= \delta(0)\left(d\pi\frac{d}{dt}\delta(t)\Big|_{t=0}\right) \\ &= g(v_p, \left(\frac{d}{dt}\pi\delta(t)\Big|_{t=0}\right)) \\ &= g(v_p, \beta'(0)) \\ &= g_0(G(v_p), \widehat{\beta}'(0)) \\ &= \alpha(\widehat{\beta}'(0)) \end{aligned}$$

A arbitrariedade na escolha de  $\widehat{\beta}$  termina a prova. □

## 5.7. Curvatura, campos de Jacobi e Equação de Gauss

Vamos aqui considerar uma variedade Riemanniana  $(M^m, g)$ . Na Subseção 5.7.3 precisaremos supor também que  $M^m$  está mergulhada em uma variedade Riemanniana  $(\widetilde{M}^{m+k}, \widetilde{g})$  sendo  $g$  a métrica induzida por  $\widetilde{g}$ . O leitor que se sentir mais confortável poderá supor sempre que  $\widetilde{M}^{m+k} = \mathbb{R}^{m+k}$ , supor que  $\widetilde{g}$  é a métrica Euclidiana, e que  $g$  é a métrica induzida na variedade mergulhada  $M^m$ . Mesmo com tal simplificação, o leitor poderá aproveitar boa parte dos resultados aqui discutidos.

O principal resultado desta seção será o Teorema 5.96 que em particular implicará o teorema egregium de Gauss o qual afirma que *a curvatura de Gauss (objeto extrinsecamente calculado) de uma superfície no espaço Euclidiano, coincide com a curvatura seccional(objeto intrinsicamente definido, vide Subseção 5.7.1)*. Para compreender uma das várias interpretações das curvaturas seccionais(que diferem da curvatura

de Gauss nos caso em que  $\widetilde{M}$  não é o espaço Euclidiano) apresentamos o conceito de campos de Jacobi, vide Subseção 5.7.2. Campos de Jacobi são os vetores velocidades de variações por geodésicas. Aproveitamos o conceito de campo de Jacobi para provar a Proposição 5.85 a qual em particular implica que *variedades Riemannianas com mesma curvatura seccional constante são localmente isométricas*.

Embora campos de Jacobi sejam ferramentas fundamentais na Geometria Diferencial, o leitor que esteja somente interessado no Teorema 5.96, poderá se quiser, ler apenas a Definição 5.7.1 e Proposição 5.76 e seguir para Subseção 5.7.3.

### 5.7.1. Tensor curvatura e curvatura seccional

Iniciemos definindo um operador em campos tangente a  $M$

$$\begin{aligned} R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y, \xi) &\rightarrow R(X, Y)\xi \end{aligned}$$

onde

$$R(X, Y)\xi := \nabla_{[X, Y]}\xi - \nabla_X \nabla_Y \xi + \nabla_Y \nabla_X \xi.$$

Por meio de cálculos diretos, é possível verificar o resultado a seguir.

#### Proposição 5.72.

Sejam  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ , e  $f, g, h \in C^\infty(M)$  Então:

- (a)  $R$  é  $\mathbb{R}$ -trilinear,
- (b)  $R(X, Y) = -R(Y, X)$ ,
- (c)  $R(fX, gY)hZ = fghR(X, Y)Z$ .
- (d)  $g(R(X, Y)Z, T) + g(R(Y, Z)X, T) + g(R(Z, X)Y, T) = 0$ ,
- (e)  $g(R(X, Y)Z, T) = -g(R(X, Y)T, Z)$
- (f)  $g(R(X, Y)Z, T) = g(R(Z, T)X, Y)$

Os itens (a), (b), (c) acima garantem então que  $R_p$  depende apenas dos vetores  $X(p)$ ,  $Y(p)$  e  $Z(p)$  e não dos campos  $X, Y, Z$ . Assim  $R$  é um  $(1, 3)$  tensor, i.e.,  $R_p : T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$  é 3-linear.  $R$  será chamado **tensor curvatura**.

Item (f) garante que o **operador de Jacobi**  $R_{v_p} : T_p M \rightarrow T_p M$  definido como  $R_{v_p}(\cdot) := R(v_p, \cdot)v_p$  é uma transformação linear simétrica. Em particular,  $R_{v_p}$  admite uma base de auto-vetores, ortonormais a  $v_p$ .

**Observação 5.73. interpretações**

- Segue direto da definição que se o tensor curvatura é nulo então  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}$  comuta com  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}$ .
- Como veremos na Subseção 5.7.2, o operador de Jacobi  $R_{\gamma'_0(t)}$  também ajuda a medir quão rápido geodésicas  $t \rightarrow \gamma_s(t)$  saindo do mesmo ponto  $p_0 = \gamma_s(0)$  se afastam.
- Tensor curvatura mede quanto o transporte paralelo depende de caminhos curtos, em particular, se  $R = 0$  então o transporte paralelo não depende de caminhos curtos.
- Veremos no Capítulo 4, como consequência de uma versão local do teorema de Gauss Bonnet, uma relação entre curvatura seccional (a ser definida abaixo) e triângulos geodésicos em superfícies, ideia que pode ser generalizada para geometria em espaços métricos.

Seja  $\sigma \subset T_p M$  um subespaço bi-dimensional e  $X, Y \in \sigma$  vetores linearmente independente. Então definimos a **curvatura seccional** em  $\sigma$  como:

$$K(X, Y) := \frac{g(R(X, Y)X, Y)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}$$

De fato é possível mostrar que  $K(X, Y)$  é o mesmo para qualquer outra base de  $\sigma$ . Também é possível mostrar que tendo todas as curvaturas seccionais de todos os subespaços bi-dimensionais de  $T_p M$  então pode-se reconstruir o tensor  $R_p$ .

A próxima proposição é um resultado útil sobre tensor curvatura de espaço de curvatura constante .

**Proposição 5.74.**

$(M, g)$  tem curvaturas seccionais constantes iguais a  $K_0$  se e somente se

$$g(R(X, Y)Z, T) = K_0(g(X, Z)g(Y, T) - g(X, T)g(Y, Z))$$

Também será útil considerar a curvatura de uma conexão pullback via uma aplicação suave, ou seja:

**Proposição 5.75.**

Seja  $\varphi : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow M$  uma aplicação suave e  $V \in \Gamma(\varphi^*TM)$  então:

$$\frac{\nabla}{\partial t} \frac{\nabla}{\partial s} V - \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\nabla}{\partial t} V = R\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)V$$

**5.7.2. Campos de Jacobi e variações por geodésicas**

Seja  $\gamma : I \rightarrow (M, g)$  geodésica em uma variedade Riemanniana  $M$  com dimensão  $n$ . Um campo suave  $J$  ao longo de  $\gamma$  é chamado **campo de Jacobi** se ele atende a **equação de Jacobi**:

$$\frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} J + R_{\gamma'(t)} J(t) = 0. \quad (5.7.1)$$

onde  $R_{\gamma'(t)}(\cdot) = R(\gamma', \cdot)\gamma'$  é o operador de Jacobi. Como vemos a seguir todo vetor velocidade de uma variação por geodésica é um campo de Jacobi.

**Proposição 5.76.**

Seja  $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \rightarrow M$  uma aplicação suave tal que  $t \rightarrow \gamma_s(t) = f(s, t)$  é geodésica para todo  $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Então  $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$  é campo de Jacobi ao longo da geodésica  $t \rightarrow \gamma(t) = \gamma_0 = f(0, t)$ .

*Demonstração.* A prova é um cálculo direto, aceitando que o tensor curvatura restrito a variação (o que formalmente é chamado **pullback da curvatura** via  $f$ ) não terá o termo de colchete, vide Proposição 5.75.

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} J &= \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial s} \\ &= \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \frac{\nabla}{ds} \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} - R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right) \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= -R(\gamma', J)\gamma' \end{aligned}$$

□

Veremos na Proposição 5.78 que o resultado recíproco também será verdadeiro ou seja todo campo de Jacobi pode ser obtido por variações por geodésicas. Antes porém vamos descrever um campo de Jacobi em termos de um referencial paralelo

e observar que ele de fato atende uma EDO e extrair algumas conclusões simples de tal equação diferencial.

Sejam  $J$  um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica  $\gamma$  e  $t \rightarrow \{e_i(t)\}_{i=0\dots n-1}$  um referencial ortonormal paralelo ao longo de  $\gamma$  onde  $e_0 := \gamma'/\|\gamma'\|$ . Neste caso para

$$J(t) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(t)e_i(t)$$

temos

$$\frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} J = \sum_{i=0}^{n-1} f_i''(t)e_i(t).$$

Concluimos então que a equação de Jacobi pode ser escrita como

$$f_j''(t) + \sum_i f_i g(R(\gamma', e_i)\gamma', e_j) = 0 \quad \forall j \quad (5.7.2)$$

Em termos matricias temos

$$J'' + CJ = 0 \quad (5.7.3)$$

onde  $C = (c_{ij})$  e  $c_{ij} = g(R(\gamma', e_i)\gamma', e_j)$ . Em outras palavras  $C$  é a representação matricial de  $R_{\gamma'}$  na base  $\{e_i\}$ . Note que  $c_{ij} = c_{ji}$  e  $c_{0j} = 0$ .

As equações acima nos permite inferir algumas conclusões imediatas sobre campos de Jacobi as quais resumimos na proposição a seguir.

**Proposição 5.77.** (a) Se  $V, W \in T_{\gamma(0)}M$  então existe um único campo de Jacobi  $J$  ao longo da geodésica  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  tal que  $J(0) = V$  e  $\frac{\nabla}{dt} J(0) = W$ .

- (b) Existem  $2n$  campos de Jacobi linearmente independentes.
- (c)  $\gamma'$  e  $t\gamma'$  são campos de Jacobi, os quais são soluções de  $f_0'' = 0$
- (d) Existem  $2(n-1)$  campos de Jacobi perpendicular à  $\gamma$  (não necessariamente ortogonais entre si).
- (e)  $g(J, \gamma') = t g(J'(0), \gamma') + g(J(0), \gamma'(0))$

*Demonstração.* Os itens (a),(b),(c) são imediatos. O item (d) segue da equação (5.7.3)

levando em conta que  $c_{0j} = 0$ . Para verificar o item (e) basta observar que

$$\begin{aligned} g(J, \gamma') &= \|\gamma'\| f_0 \\ &= \|\gamma'\| (t f'_0(0) + f_0(0)) \\ &= \|\gamma'\| \left( t g(J'(0), \frac{\gamma'(0)}{\|\gamma'(0)\|}) + g(J(0), \frac{\gamma'(0)}{\|\gamma'(0)\|}) \right). \end{aligned}$$

□

Podemos agora mostrar que todo campo de Jacobi é vetor velocidade de uma variação por geodésicas.

**Proposição 5.78.**

Seja  $J$  um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ . Considere uma curva  $\beta : (-1, 1) \rightarrow W$  com  $\beta'(0) = J(0)$ , um campo  $s \rightarrow V(s)$  ao longo de  $\beta$  com  $V(0) = \gamma'(0)$  e  $\frac{\nabla}{ds} V(0) = \frac{\nabla}{dt} J(0)$ . Suponha que a variação  $f(s, t) := \exp_{\beta(s)}(tV(s))$  está bem definida. Então  $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$ .

*Demonstração.* Observe que  $\frac{\partial f}{\partial s}(0, 0) = J(0)$ . Devemos verificar que  $\frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial s}(0, 0) = \frac{\nabla}{dt} J(0)$  e o resultado seguirá pela Proposição 5.76 e pela unicidade de EDO. Para tanto basta observar que

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial s}(0, 0) &= \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial f}{\partial t}(0, 0) \\ &= \frac{\nabla}{ds} (d(\exp_{\beta(s)})_0 V(s))|_{s=0} \\ &= \frac{\nabla}{ds} (V(s))|_{s=0} \\ &= \frac{\nabla}{dt} J(0). \end{aligned}$$

□

**Observação 5.79.**

É fácil achar uma curva  $\beta$  tal que  $\beta'(0) = J(0)$ . Sejam  $s \rightarrow X(s)$  e  $s \rightarrow Y(s)$  os campos paralelos ao longo de  $\beta$  com  $X(0) = \gamma'(0)$  e  $Y(0) = \frac{\nabla}{dt} J(0)$ . O campo  $s \rightarrow V(s)$  pode então ser definido como  $V(s) := X(s) + sY(s)$ . Se a aplicação  $\exp$  está sempre bem definida, e.g.,  $M$  compacta então  $f$  está bem definida. Caso contrário, pode-se proceder da seguinte forma. Primeiro verifica-se que  $f$  está certamente bem definida para intervalos pequenos de  $s$  e  $t$ . Depois, grudando variações

Continuação.

$f_i$  ao longo de  $\gamma$  podemos construir a desejada variação  $f$ .

É conveniente considerar o caso particular de campos de Jacobi com  $J(0) = 0$ .

**Corolário 5.80.**

Suponha que  $\exp_p : B_\delta(0) \rightarrow M$  está bem definida e seja  $B := \exp_p(B_\delta(0))$ . Seja  $J$  um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica  $\gamma \subset B$  com condições iniciais  $J(0) = 0$  e  $\frac{\nabla}{dt}J(0) = W$ . Então

$$J(t) = d(\exp_p)_{t\gamma'(0)}tW$$

*Demonstração.* Basta considerar na demonstração anterior a curva  $\beta(s) = p$  e um campo  $V(s) = \sum_i a_i(s)e_i(p)$  com  $V(0) = \gamma'(0)$  e  $V'(0) = W$ . Observe que

$$\frac{\nabla}{ds}V(0) = V'(0) = \sum_i a'_i(0)e_i(p).$$

O resultado segue observando que

$$\frac{\partial f}{\partial s}(0, t) = d(\exp_p)_{tV(0)}tV'(0).$$

□

**Observação 5.81.**

Por vezes é conveniente reescrever o corolário acima em termos de variações. Mais precisamente se  $J$  é um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica  $\gamma$  com  $J(0) = 0$  e  $W = \frac{\nabla}{dt}J(0)$  então  $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$  onde  $f(s, t) = \exp_p(tV(s))$  e  $V : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow T_pM$  é curva com  $V'(0) = W$  e  $V(0) = \gamma'(0)$ .

Consideraremos agora campos de Jacobi em espaços de curvatura constante.

**Proposição 5.82.**

Sejam  $(M, g)$  variedade Riemanniana com curvaturas seccionais constantes  $K$  e  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  geodésica com vetor velocidade 1. Então o campo de Jacobi  $J$  ao longo de  $\gamma$  com condições iniciais  $J(0) = 0$  e  $\frac{\nabla}{dt}J(0) = w$  para  $w$  perpendicular a  $\gamma'(0)$  é  $J(t) = c_K(t)w(t)$  onde  $w(\cdot)$  é o transporte paralelo de  $w$  ao longo de  $\gamma$  e  $c_K$  é a função definida como  $c_K(t) := \frac{\sin(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}}$  se  $K > 0$ ,  $c_K(t) := t$  se  $K = 0$  e



**Continuação.**

$$c_K(t) := \frac{\sinh(t\sqrt{-K})}{\sqrt{-K}} \text{ se } K < 0.$$

*Demonstração.* Considere o campo  $\tilde{J}(t) := c_K(t)w(t)$ . Sabemos pela Proposição 5.74 que

$$g(R(\gamma', \tilde{J})\gamma', e_i) = Kg(\tilde{J}, e_i)$$

Assim

$$R(\gamma', \tilde{J})\gamma' = K\tilde{J}$$

Logo o campo  $\tilde{J}$  atende a equação de Jacobi, ou seja

$$\frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} \tilde{J} + K\tilde{J} = 0.$$

O resultado segue da unicidade das soluções da equação de Jacobi, dado condições iniciais. □

Temos então o seguinte corolário.

**Corolário 5.83.**

Seja  $M$  variedade Riemanniana com curvatura constante  $K$ . Suponha que  $\exp_p : B_\delta(0) \rightarrow M$  está bem definida. Seja  $f(s, t) = \exp_p(tv(s))$  onde  $v : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{S}_1^{n-1} \subset T_pM$  é curva com  $\|V'(0)\| = 1$  e  $|t| < \delta$ . Então  $\|J(t)\| = |c_K|$  onde  $c_K$  foi definido na proposição anterior e  $J(t) := \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$ .

**Observação 5.84. Fórmula de Taylor**

Caso  $M$  não possuía curvaturas seccionais constante, ainda sim podemos ter uma estimativa de  $\|J\|$ . De fato sejam  $f$  e  $J$  definidos como no corolário anterior. Então:

$$\|J(t)\|^2 = t^2 - \frac{1}{3}K(p, \sigma)t^4 + O(t^4)$$

$$\|J(t)\| = t - \frac{1}{6}K(p, \sigma)t^3 + O(t^3)$$

onde  $\sigma$  é o espaço bi-dimensional gerado por  $V(0)$  e  $V'(0)$ .

A seguir iremos utilizar nosso conhecimento sobre campos de Jacobi em espaços de curvatura constante para descrever a métrica  $g$  em termos de coordenadas geodésicas polares.

**Proposição 5.85.**

Sejam  $(M^n, g)$  variedade Riemanniana com curvaturas seccionais constantes  $K$  e  $\psi : (0, \delta) \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow B_\delta(p)$  parametrização geodésica polar, i.e.,  $\psi(r, v) := \exp_p(rAv)$  onde  $A : (\mathbb{R}^n, g_0) \rightarrow (T_pM, g)$  é isometria linear. Então a métrica  $g$  em coordenadas geodésicas polares (i.e.,  $\psi^*g$ ) é  $dr^2 + (c_k(r))^2 ds^2$  onde  $ds^2$  é a métrica canônica da esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$  e a função  $c_K$  foi definida na Proposição 5.82.

*Demonstração.* Seja  $\{e_i\} \subset T_v\mathbb{S}^{n-1}$  referencial ortonormal. Pelo Corolário 5.80

$$\begin{aligned} J_i(r) &:= d(\exp_p)_{rAv} rAe_i \\ &= d\psi_{(r,v)}(0, e_i), \end{aligned}$$

é campo de Jacobi ao longo da geodésica  $r \rightarrow \exp_p(rAv)$ . Utilizando Proposição 5.82 podemos verificar que

$$g(J_i, J_j) = \delta_{i,j} c_K^2. \quad (5.7.4)$$

Por fim defina

$$\begin{aligned} J_0(r) &:= d(\exp_p)_{rAv} Av \\ &= d\psi_{(r,v)}(1, 0) \end{aligned}$$

e utilizando o Lema de Gauss concluímos que

$$g(J_0, J_i) = 0. \quad (5.7.5)$$

O resultado então seguirá das equações (5.7.4) e (5.7.5).  $\square$

**Observação 5.86.**

A descrição acima implica em particular que: duas variedades Riemannianas com mesma dimensão e mesmas curvaturas seccionais constantes iguais a constante  $c$  são localmente isométricas.

**Observação 5.87.**

Como comentamos acima, uma isometria  $F : M^m \rightarrow N^m$  leva geodésica em geodésica, assim para todo  $p$  existe uma vizinhança  $U$  de  $p$  e  $V$  de  $q = F(p)$  tal que  $F : U \rightarrow V$  é descrito como

$$\exp_q \circ A \circ \exp_p^{-1}, \text{ para isometria } A : T_pM \rightarrow T_qN, \quad (5.7.6)$$

**Continuação.**

De fato  $A = DF(p)$ . Uma pergunta natural é sobre que condições a recíproca é verdadeira. O teorema de Cartan (cuja demonstração usa campos de Jacobi) apresenta condições técnicas (descrita em termos do tensor curvatura e transportes paralelo ao longo de geodésicas radiais) para que a Equação (5.7.6) determine uma isometria. O teorema de Cartan de fato pode ser utilizado para demonstrar uma versão melhor da observação acima, ou seja se 2 variedades são simplesmente conexas e tem curvatura constante  $c$  elas são isométricas (e não apenas localmente isométricas). Quando consideramos dimensão 2, o teorema de Cartan ganha um formato bem elegante: Seja  $A : T_p M^2 \rightarrow T_q N^2$  isometria, então  $F = \exp_q \circ A \circ \exp_p^{-1} : U \subset M^2 \rightarrow V \subset N^2$  é isometria, caso  $K(F(x)) = K(x)$  para cada  $x \in M^2$ .

**5.7.3. Equação de Gauss e o teorema Egregium de Gauss**

Como comentamos no início da seção, agora vamos supor que que  $M^m$  está mergulhada em uma variedade Riemanniana  $(\tilde{M}^{m+k}, \tilde{g})$  sendo  $g$  a métrica induzida por  $\tilde{g}$ . Para evitar sobrecarga de notação iremos denotar as 2 métricas simplesmente por  $g$ .

Vamos rever algumas ideias apresentadas na Seção 1.7 agora neste contexto um pouco mais geral.

A relação entre a conexão do ambiente  $\tilde{\nabla}$  e a conexão tangente  $\nabla$  é descrita pelo tensor  $B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  definido a seguir

**Definição 5.88. Tensor Segunda Forma**

$$B(X, Y) = \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} - \nabla_X Y$$

onde  $\tilde{X}$  e  $\tilde{Y}$  são extensões de  $X$  e  $Y$ .

**Proposição 5.89.**

- (a)  $B$  é bem definido (não depende das extensões)
- (b)  $B$  é  $(1, 2)$  tensor simétrico.

*Demonstração.* O item (a) e o fato de  $B$  ser um  $(1, 2)$  tensor pode ser demonstrado utilizando referencial adaptado e o fato de

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} = D_X \tilde{Y} + \tilde{A}(X) \tilde{Y}.$$

Para demonstrar que  $B$  é simétrico note

$$\begin{aligned} B(X, Y) &= \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} - \nabla_X Y \\ &= \tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{X} + [\tilde{X}, \tilde{Y}] \\ &\quad - (\nabla_Y X + [X, Y]) \\ &= B(Y, X). \end{aligned}$$

□

Por vezes também será conveniente tratar o  $(1, 2)$  tensor  $B$  acima, como o  $(0, 3)$  tensor abaixo.

#### Definição 5.90. Segunda forma

$$\Pi_\eta(X, Y) = g(B(X, Y), \eta)$$

onde  $X, Y$  são tangentes a  $M$  e  $\eta$  é um vetor normal.

Visto que  $B$  é simétrico, podemos então definir um operador simétrico (em relação ao produto  $g$ )  $\mathcal{S}_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$  via o tensor segunda forma:

#### Definição 5.91. Operador forma

$$g(\mathcal{S}_\eta X, Y) = \Pi_\eta(X, Y)$$

O significado geométrico do operador forma pode ser compreendido mais claramente na proposição a seguir. Em particular para hipersuperfícies no espaço Euclidiano pode ser interpretado como *uma forma de medir quão rápido o vetor normal unitário varia, ou seja quão rápido uma hipersuperfície "curva"*. Em particular se o operador forma for sempre zero a hipersuperfície será um hiperespaço.

#### Proposição 5.92.

Seja  $\eta \in \nu_p(M)$  e  $\tilde{\eta}$  uma extensão de  $\eta$  em uma vizinhança de  $p$  em  $\tilde{M}$ . Então

$$\mathcal{S}_\eta(X) = -\pi(\tilde{\nabla}_X \tilde{\eta})$$

onde  $\pi : T_p \tilde{M} \rightarrow T_p M$  é a projeção ortogonal e  $X \in T_p M$

*Demonstração.* Seja  $Y \in T_pM$  um vetor qualquer fixo e  $\tilde{Y}$  uma extensão deste vetor. Observe primeiro que como  $g(\eta, Y) = 0$  temos, após derivar por  $X$  que  $g(\tilde{\nabla}_X \tilde{Y}, \tilde{\eta}) = -g(\tilde{Y}, \tilde{\nabla}_X \tilde{\eta})$  e assim

$$\begin{aligned} g(\mathcal{S}_\eta X, Y) &= g(\tilde{\nabla}_X \tilde{Y} - \nabla_X Y, \tilde{\eta}) \\ &= g(\tilde{\nabla}_X \tilde{Y}, \tilde{\eta}) \\ &= g(Y, -\tilde{\nabla}_X \tilde{\eta}) \end{aligned}$$

A equação acima e a arbitrariedade da escolha do vetor  $Y$  conclue a prova da proposição.  $\square$

**Observação 5.93.**

Natural nos perguntarmos o que significa  $B$  e  $\mathcal{S}_\eta$  serem zero. Dizemos que  $M$  é totalmente geodésica em  $p$  se  $B_p = 0$ . Mais geralmente  $M$  é **totalmente geodésica** se  $B_p = 0$  para todo  $p \in M$ . Exemplos de subvariedades totalmente geodésicas:

- $M$  é subespaço vetorial de  $\tilde{M} = \mathbb{R}^{m+k}$ ;
- $V$  um subespaço de  $\mathbb{R}^{m+1}$ , defina  $M := V \cap \mathbb{S}^m$  e  $\tilde{M} = \mathbb{S}^m$ ;
- $M$  sendo subgrupo fechado de  $\tilde{M} = SO(n)$  com métrica  $\langle X, Y \rangle = \text{tr}XY^t$ .

Uma vez estabelecidos alguns exemplos onde  $\mathcal{S}_\eta$  são nulas, é natural considerarmos casos onde tais operadores simétricos não são nulos e assim somos levados a considerar seus auto-valores e tentarmos entender o significado destes.

**Definição 5.94.**

Seja  $\eta$  vetor normal unitário de  $M$ . Os autovalores  $\lambda_i$  do operador forma  $\mathcal{S}_\eta : T_pM \rightarrow T_pM$  são chamados **curvaturas principais**. Frequentemente os auto-vetores são chamados direções principais e os auto-espaço  $E_\lambda$  associados a uma curvatura principal  $\lambda$  de auto-espaço principal.

Uma interpretação geométrica das curvaturas principais já foi apresentada na Seção 1.7. Em particular, observamos que toda superfície é aproximada ou por um parabolóide elíptico ou por um parabolóide hiperbólico se  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$  ou se  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ . O produto  $\lambda_1 \cdot \lambda_2$  em  $p$  era então chamado de **Curvatura de Gauss** e como ficará claro abaixo (teorema Egregium de Gauss), tal curvatura coincide de fato com a curvatura seccional  $K(p)$ .

O próximo exercício fornece mais uma interessante interpretação sobre as curvaturas principais, agora destacando o significado de  $\frac{1}{\lambda_i}$ , as assim chamadas **distâncias focais** que a grosso modo medem lugares onde superfícies “focalizam”.

### Exercício 5.95.

Seja  $M$  uma superfície mergulhada em  $\widetilde{M} = \mathbb{R}^3$  e  $\xi$  vetor normal unitário a  $M$ . Defina  $\eta_{r\xi} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  como  $\eta_{r\xi}(x) = x + r\xi$

- Sejam  $e_1$  e  $e_2$  direções principais em  $T_p M$  com curvaturas principais  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Verifique que  $d\eta_{r\xi}e_i = (1 - r\lambda_i)e_i$
- Conclua que se  $r \neq \frac{1}{\lambda_i}$  em vizinhança  $\widetilde{U}$  de  $p$ , então existe vizinhança  $U \subset \widetilde{U}$  de  $p$  tal que  $\eta_{r\xi}(U)$  é superfície mergulhada.

Chegamos agora ao resultado principal desta seção que relaciona curvatura intrínseca, curvatura do ambiente e segunda forma.

### Teorema 5.96. eq. de Gauss

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)X, Y) - g(\widetilde{R}(X, Y)X, Y) &= g(B(X, X), B(Y, Y)) \\ &\quad - g(B(X, Y), B(Y, X)) \end{aligned}$$

onde  $X, Y$  são tangentes a  $M$ .

*Demonstração.* Seja  $\{e_\beta\}$  referencial ortonormal a  $M$  definido em uma vizinhança de  $p \in M$ . Ou seja para todo  $x \in M$  próximo a  $p$ , temos que  $\{e_\beta(x)\}$  é base de  $\nu_x(M) := TM_x^\perp$ . Temos então que  $B(X, Y) = \sum_\beta g(\widetilde{\nabla}_X Y, e_\beta)e_\beta$ . Estamos aqui usando a notação  $\widetilde{\nabla}_X Y$  para denotar  $\widetilde{\nabla}_X \widetilde{Y}$  onde  $\widetilde{Y}$  é extensão de  $Y$  próximo a  $p$ . Logo

$$\widetilde{\nabla}_Y X = \nabla_Y X + \sum_\beta g(\widetilde{\nabla}_Y X, e_\beta)e_\beta$$

Uma vez que  $g(e_\beta, Y) = 0$  temos que:

$$\begin{aligned} g(\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y X, Y) &= g(\tilde{\nabla}_X \nabla_Y X, Y) \\ &+ \sum_{\beta} g(\tilde{\nabla}_Y X, e_\beta) g(\tilde{\nabla}_X e_\beta, Y) \\ &= g(\nabla_X \nabla_Y X, Y) \\ &- \sum_{\beta} g(\nabla_Y X, e_\beta) g(e_\beta, \tilde{\nabla}_X Y) \end{aligned}$$

e assim concluímos:

$$g(\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y X, Y) = g(\nabla_X \nabla_Y X, Y) - g(B(X, Y), B(Y, X)). \quad (5.7.7)$$

De forma análoga obtemos

$$g(\tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X X, Y) = g(\nabla_Y \nabla_X X, Y) - g(B(X, X), B(Y, Y)). \quad (5.7.8)$$

Por fim note que:

$$g(\tilde{\nabla}_{[X, Y]} X, Y) = g(\nabla_{[X, Y]} X, Y). \quad (5.7.9)$$

As eq. (5.7.7), (5.7.8) e (5.7.9) implicam a Equação de Gauss.  $\square$

A equação de Gauss nos permite algumas conclusões diretas. Em particular no item (b) do exercício abaixo vemos o celebrado **teorema Egregium de Gauss**, que observa que a curvatura seccional de uma superfície em  $\mathbb{R}^3$  (que é definido intrinsecamente) pode ser calculada como o produto das curvaturas principais (que é calculado extrinsecamente).

### Exercício 5.97. Teorema Egregium

Seja  $M$  hipersuperfície de  $(\tilde{M}, \tilde{g})$ .

- Verifique que  $K(e_1, e_2) - \tilde{K}(e_1, e_2) = \lambda_1 \lambda_2$  onde  $e_1, e_2$  são direções principais de  $T_p M$  associadas as curvaturas principais  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ .
- Conclua que se  $\tilde{M} = \mathbb{R}^3$  com métrica Euclidiana, então a curvatura seccional da superfície  $M$  é  $K(p) = \lambda_1 \lambda_2$ .

## 5.8. \*Curvatura média e superfícies mínimas

Nesta seção vamos estudar conceitos que estão diretamente relacionados à média das curvaturas principais (vide item (c) da Proposição 1.94). Para isso, vamos introduzir formalmente este conceito.

### Definição 5.98.

Seja uma superfície  $S$  em  $\mathbb{R}^3$  e  $p \in S$ . A média das curvaturas principais

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2},$$

é chamada de *curvatura média* de  $S$  no ponto  $p$ , e o vetor  $\mathbf{H} = HN$  é chamado de *vetor curvatura média*.

### Observação 5.99.

Assim como no caso da curvatura de Gauss (Observação 1.90), o sentido do vetor curvatura média não depende do sentido do vetor normal, pois se mudamos o sentido deste, também muda o sinal da curvatura média e, portanto, o sentido de  $\mathbf{H}$  permanece invariante.

### 5.8.1. Superfícies mínimas

A palavra mínima neste contexto está relacionada com o problema de encontrar a superfície com a menor área dentre todas as superfícies que tem a mesma fronteira.

De fato, se consideremos uma superfície  $S$  em  $\mathbb{R}^3$  e consideramos variações normais de tal superfície, ou seja, para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$ , consideramos a aplicação

$$\begin{aligned} \psi_\lambda : \quad U &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2) &\longmapsto \psi(x_1, x_2) + \lambda h(x_1, x_2)N(x_1, x_2) \end{aligned} \quad ,$$

onde  $N$  é o normal à superfície e  $h(x_1, x_2)$  uma função arbitrária e diferenciável em  $U$ , então a primeira variação da área é dada por:

$$A'(0) = -2 \iint_D hH \sqrt{\det(g)} dx_1 dx_2. \quad (5.8.1)$$

Então podemos estabelecer a seguinte proposição.



**Proposição 5.100.**

Seja  $S$  uma superfície mergulhada  $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Então ela é um ponto crítico do funcional da área para uma dada condição de contorno se, e somente se, a sua curvatura média é identicamente nula.

*Demonstração.* Se  $H \equiv 0$  é claro que a condição é satisfeita pois vale (5.8.1). Reciprocamente, suponhamos que  $A'(0) = 0$  e que existe  $q \in D$  tal que  $H(q) \neq 0$ , então existe uma vizinhança  $V$  na qual  $H$  não se anula. Escolhamos  $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável tal que  $h(q) = H(q)$ ,  $hH > 0$  em  $V$  e  $h$  tem suporte compacto em  $V$ . Assim  $A'(0) < 0$  para a variação determinada por essa função  $h$ , o que é uma contradição.  $\square$

**Definição 5.101.**

Uma superfície mergulhada  $S$  é chamada de *superfície mínima* se a curvatura média é zero em cada ponto da superfície.

**Observação 5.102.**

A seguinte questão é, então, natural: se  $S$  é uma superfície mínima que tem como bordo a curva  $\Gamma$ , ela minimiza globalmente a área? A resposta a esta pergunta é negativa e isto foi observado por H. A. Schwarz (ver obras completas publicadas em 1890) mostrando que, quando a fórmula da segunda variação do funcional área para a superfície mínima que tem como bordo  $\Gamma$  é estritamente menor que zero, ela não minimiza globalmente a área. Porém, as mesmas minimizam localmente a área e a prova pode ser encontrada em [?].

**Lema 5.103.**

Uma superfície mínima está caracterizada em termos da primeira e segunda forma fundamental pela equação

$$g_{11}b_{22} + g_{22}b_{11} - 2g_{12}b_{12} = 0. \quad (5.8.2)$$

*Demonstração.* Segue diretamente do item (c) da Proposição 1.94.  $\square$

**Exemplo 5.104. O catenoide**

O catenoide é a superfície gerada pela rotação da catenária  $x_2 = a \cosh\left(\frac{x_3}{a}\right)$ ,  $a > 0$  em torno do eixo  $x_3$  (veja figura 5.3).

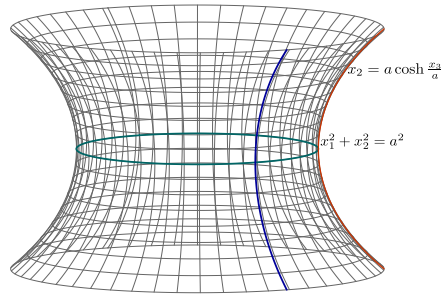


Figura 5.3: O catenoide obtido pela rotação da catenária ao redor do eixo  $x_3$ .

Logo, ele é a imagem da aplicação

$$\psi(s, t) = (a \cosh(t) \cos(s), a \cosh(t) \sin(s), at).$$

Fazendo uso da fórmula para  $H$  obtida no Exemplo 1.95 – observando que, neste caso,  $r(t) = a \cosh(t)$  e  $h(t) = at$  – obtêm-se  $H = 0$  (deixamos o cálculo explícito ao cargo do leitor). Logo tal superfície é mínima.

Um fato interessante do catenoide é que pode ser caracterizado como a única superfície mínima de revolução (não plana).

**Exercício 5.105.**

Se  $S$  é uma superfície mínima de revolução em  $\mathbb{R}^3$  (não plana), então  $S$  é um catenoide ou um pedaço dele.

*Sugestão:* Fazendo  $H = 0$  na fórmula do Exemplo 1.95, mostre que as únicas possibilidades para  $r$  e  $h$  são as do exemplo precedente.

**5.8.2. EDP das superfícies mínimas**

Vamos considerar o caso em que a superfície mínima seja o gráfico de uma função diferenciável  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Sabemos que uma parametrização é dada por:

$$\psi(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_3 - f(x_1, x_2)).$$

Assim,

$$d\psi_p(e_1) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x_1}\right) \quad \text{e} \quad d\psi_p(e_2) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right).$$

Logo, da Definição 1.33 segue que os coeficientes da métrica induzida estão dados por

$$g_{11} = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2, \quad g_{12} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right), \quad \text{e} \quad g_{22} = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2.$$

O vetor normal unitário é, portanto,

$$N = \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}, -\frac{\partial f}{\partial x_2}, 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + 1}},$$

e, como

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} = \left(0, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right),$$

segue que os coeficientes da segunda forma são

$$b_{ij} = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + 1}}.$$

Com isto obtemos uma equação equivalente à equação (5.8.2), que é uma equação diferencial parcial quasilinear e elíptica dada por:

$$\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right) - 2 \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right) = 0. \quad (5.8.3)$$

Sendo que toda superfície mergulhada é localmente um gráfico, a equação (5.8.3) nos permite encontrar exemplos específicos de superfícies mínimas. Tal equação é chamada de *EDP das superfícies mínimas*.

**Exemplo 5.106.**

Vamos usar a equação (5.8.3) para mostrar que o helicóide é uma superfície mínima. O helicóide de passo um está dado pela imersão

$$\psi(x_1, x_2) = (x_2 \cos x_1, x_2 \sin x_1, x_1).$$

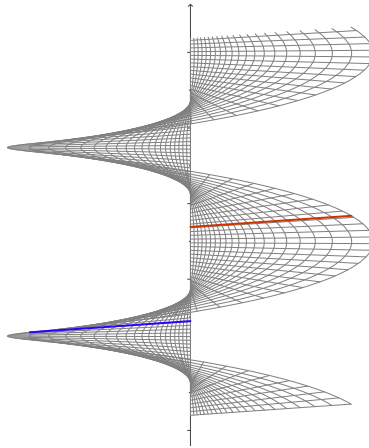


Figura 5.4: O helicóide como uma superfície regrada.

Supondo que  $x_1 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  e  $x_2 \neq 0$ , temos que

$$\frac{x_2(x_1, x_2)}{x_1(x_1, x_2)} = \tan x_1,$$

logo,

$$x_3 = \arctan \frac{x_2}{x_1}.$$

Portanto, o helicóide é, localmente, o gráfico da função

$$f(x_1, x_2) = \arctan \frac{x_2}{x_1},$$

## Continuação.

onde  $x_1 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  e  $x_2 \neq 0$ . Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2} \cdot \frac{-x_2}{x_1^2} = \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2} \cdot \frac{1}{x_1} = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{x_2 \cdot 2x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{-2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{-(x_1^2 + x_2^2) + x_2 \cdot 2x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}.$$

Donde,

$$\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{(x_1^2 + x_2^2)^2 + x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \cdot \frac{2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \quad (5.8.4)$$

$$\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{(x_1^2 + x_2^2)^2 + x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \cdot \frac{-2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}. \quad (5.8.5)$$

## Continuação.

Somando (5.8.4) e (5.8.5) obtemos,

$$\begin{aligned} & \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \\ &= \frac{2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \left( \frac{(x_1^2 + x_2^2)^2 + x_1^2 - (x_1^2 + x_2^2)^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \right) \\ &= \frac{2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \cdot \frac{-(x_2^2 - x_1^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\ &= 2 \cdot \frac{-x_2}{(x_1^2 + x_2^2)} \cdot \frac{x_1}{(x_1^2 + x_2^2)} \cdot \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\ &= 2 \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}. \end{aligned}$$

O helicóide pode ser caracterizado como a única superfície mínima regrada.

**Exercício 5.107. \***

Toda superfície mínima regrada ou é parte de um plano ou é parte de um helicóide.

*Sugestão:* Use o fato de que uma superfície regrada<sup>3</sup> é a imagem da parametrização

$$\psi(x_1, x_2) = \gamma(x_1) + x_2 w(x_1), \quad x_1 \in I \subset \mathbb{R}, \quad x_2 \in \mathbb{R},$$

onde  $\{\gamma(t), w(t)\}$  é a família a 1-parâmetro geradora da superfície. Obtenha a fórmula para a curvatura média de uma superfície com tal parametrização, e mostre a seguir que se a mesma for 0 então as expressões de  $\gamma$  e  $w$  são as do helicóide.

**5.9. \* Campo de curvatura média**

Vimos anteriormente o conceito de curvatura média de superfícies. Nesta seção desejamos aqui explorar rapidamente o conceito de campo de curvatura média, sua relação com funcional volume e tecer comentários sobre fluxos de curvatura média na presença de simetrias (o que facilita bastante a compreensão deste objeto).

<sup>3</sup>As superfícies regradas são aquelas que tem a propriedade de que por cada um dos seus pontos passa uma reta que está inteiramente contida na superfície.

**Proposição 5.108.**

Seja  $\Psi : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U \subset M$  parametrização com  $\bar{U}$  compacto. Considere  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\varphi|_{M-U} = 0$  e  $0 < \varphi|_U \leq 1$ . Para  $U^1$  compacto com  $\bar{U} \subset U^1$  defina  $F : (-\delta, \delta) \times U^1 \rightarrow \tilde{M}$  como  $F(t, x) := \exp_x(t\xi)$  e  $\hat{\Psi} : (-\delta, \delta) \times V \rightarrow \tilde{M}$  como  $\hat{\Psi}(t, x) := F(t\varphi(x), \Psi(x))$ . Escolha  $\delta$  para  $F$  ser imersão injetora. Defina  $g_{i,j}^t := g(d\Psi^t e_i, d\Psi^t e_j)$  onde  $\Psi^t(x) = \hat{\Psi}(t, x)$ . Então:

$$(a) \quad -mg(H, \varphi \xi) = \frac{\frac{d}{dt} \sqrt{|g_{i,j}^t|}|_{t=0}}{\sqrt{|g_{i,j}^0|}}$$

$$(b) \quad \frac{d}{dt} \text{Vol}(\Psi^t(V))|_{t=0} = -m \int_U g(H, \varphi \xi) \omega$$

onde  $H$  é o vetor curvatura média e  $\omega$  é a forma volume (com orientação induzida por  $\Psi$ .)

*Demonstração.* Considere a subvariedade  $\widehat{M} := F((-\epsilon, \epsilon), U^1)$  com a métrica induzida  $g$ . A subvariedade  $U$  então se torna uma hipersuperfície em  $\widehat{M}$ . Ao longo desta prova o ambiente de  $U$  será sempre  $\widehat{M}$ , e o sistema de coordenadas que iremos considerar será  $\hat{\psi}^{-1}$ . Neste sistema de coordenadas a forma volume  $\hat{\omega}$  (com respeito a  $g$ ) se escreve como

$$\hat{\omega} = \sqrt{|g_{i,j}|} dt \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$$

e assim temos:

$$i_{\frac{\partial}{\partial t}} \hat{\omega} = \sqrt{|g_{i,j}|} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m.$$

Por outro lado, é possível provar que

$$d(i_{\frac{\partial}{\partial t}} \hat{\omega}) = \text{div}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \hat{\omega}$$

As equações acima nos permite concluir que:

$$\text{div}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{\frac{d}{dt} \sqrt{|g_{i,j}|}}{\sqrt{|g_{i,j}|}} \tag{5.9.1}$$

Também é possível verificar que

$$\frac{\frac{d}{dt} \sqrt{|g_{i,j}|}}{\sqrt{|g_{i,j}|}}(0, x) = \frac{\frac{d}{dt} \sqrt{|g_{i,j}^t|}|_{t=0}}{\sqrt{|g_{i,j}^0|}}. \tag{5.9.2}$$

De fato a equação acima pode ser obtida usando o calculo de determinantes via co-fatores e as observações abaixo:

1.  $g_{0,i}(0, x) = 0$  onde  $g_{0,i} = g(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_i})$ ,
2.  $g_{i,j}(t, x) = g_{i,j}^t$  para  $i, j \geq 1$ ,
3.  $g_{0,0} = \|\frac{\partial}{\partial t}\|^2$  e  $\frac{\partial}{\partial t}g_{0,0} = 0$

Finalmente utilizando o fato que  $t \rightarrow \psi(t, x)$  são geodésicas de tamanho  $\|\varphi(x)\|$  temos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(0, x) &= \sum_{i=1}^m g(\nabla_{e_i} \frac{\partial}{\partial t}, e_i) \\ &+ g(\nabla_{\xi} \frac{\partial}{\partial t}, \xi) \\ &= -\varphi \operatorname{tr} \mathcal{S}_{\xi} \\ &= -m \varphi g(H, \xi) \end{aligned}$$

e assim inferimos:

$$\operatorname{div}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(0, x) = -m g(H, \varphi \xi) \quad (5.9.3)$$

Equações (5.9.1), (5.9.2) e (5.9.3) implicam o item (a).

Por fim o item(b) pode ser provado usando o item (a) como vemos a seguir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \operatorname{Vol}(\Psi^t(V))|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \left( \int_V \sqrt{|g_{i,j}^t|} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m \right)|_{t=0} \\ &= \int_V \frac{d}{dt} (\sqrt{|g_{i,j}^t|})|_{t=0} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m \\ &= -m \int_U g(H, \varphi \xi) \omega \end{aligned}$$

□

A teoria das subvariedades mínimas e hipersuperfícies de curvatura média constante são tópicos de grande relevancia em geometria, talvez pela naturalidade e beleza dos problemas ou talvez pelo uso das várias tecnicas envolvidas (de variáveis complexa a EDP) e ainda um tópico ativo de pesquisa. Em particular elas aparecem em algumas aplicações, tais como teoria dos fluidos e relatividade. Não é nossa intenção explorar um tópico tão amplo e sugerimos ao leitor a procura de textos mais



especializados para entrar neste universo a parte. Porém gostaríamos de dizer algumas palavras sobre o assim chamado fluxo de curvatura média associado a orbita de uma ação isométrica, com o objetivo de dar um pouco mais de intuição do que seja o vetor curvatura média e também sendo coerente com os fios condutores deste texto, ou seja destacar, quando possível, as relações entre geometria e simetrias (i.e, grupos de Lie e folheações).

Seja  $G$  um grupo compacto de isometrias de uma variedade Riemanniana compacta  $\widetilde{M}$ . Considere  $M = G(p)$  uma orbita principal, ou seja que tem máxima dimensão e que tem o fibrado normal trivial. Um fato bem conhecido é que o vetor curvatura média de  $M$  é básico ou seja se projeta no quociente  $\widetilde{M}/G$  e que a norma de  $H$  ao longo de  $M$  é constante.

Uma família de imersões  $\varphi_t : M \rightarrow \widetilde{M}$  com  $\varphi_0 = id$  e  $t \in [0, T)$  é chamado *fluxo de curvatura média* se

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_t = H(t)$$

onde  $H(t)$  é o vetor curvatura média de  $M(t) = \varphi_t(M)$ . É possível mostrar que que  $M(t)$  são orbitas da ação.

Vamos agora apresentar (sem demonstração) alguns resultados contidos em Alexandrino and Radeschi, *Mean curvature flow of singular Riemannian foliations*, The Journal of Geometric Analysis, v. 26, (2015) p. 2204-2220.

### Proposição 5.109.

Seja  $M$ ,  $M(t)$  e  $\widetilde{M}$  definidos acima. Se  $G(q)$  é uma orbita singular, existe uma vizinhança  $U$  tal que se  $M \subset U$  então

1.  $M(t) \subset U$ ,
2. o tempo  $T$  é finito,
3.  $M(t)$  converge para uma orbita  $G(\tilde{q})$  em  $U$ .

Mas o que acontece se  $M$  não está tão próximo de uma orbita singular?  $M(t)$  pode convergir? E se converge como se comporta o vetor curvatura média perto da orbita para o qual converge? O resultado a seguir responde tais perguntas.

### Teorema 5.110.

Seja  $M$ ,  $M(t)$  e  $\widetilde{M}$  definidos acima. se o tempo  $T$  é finito, então  $M(t)$  converge

## Continuação.

para alguma órbita singular. Além disso

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \sup \|B_t\|_\infty^2 (T - t) < \infty$$

De fato o resultado acima admite melhoras. Ele pode ser aplicado se  $M$  é uma órbita singular. Assim se soubermos que o tempo  $T$  é sempre finito podemos iterar o processo várias vezes, até encontrar uma órbita mínima (que eventualmente pode ser um ponto). Isto nos leva a procurar por condições suficientes para  $T$  ser finito.

**Teorema 5.111.**

Se a ação é polar, i.e a distribuição normal das órbitas regulares é integrável, e a curvatura de  $\tilde{M}$  é não negativa, então  $T$  sempre é finito se  $M = M(0)$  é uma órbita regular (não mínima).

# Índice Remissivo

- $k$ -forma diferencial, 158
- aplicação
  - suave, 73
    - em um ponto, 73
- aplicações de Cálculo Avançado
  - em Computação, 48–51, 53
  - em Economia, 27, 28, 30
  - em Mecânica, 2–4
- campo
  - gradiente, 23
  - gradiente Riemanniano, 24
  - suave, 20
  - tensorial suave, 157
- conexão
  - Riemanniana, 214
- Critério
  - da segunda derivada, 34
- curva
  - integral, 84
- curvatura
  - de Gauss, 57
  - média, 258
  - vetor, 258
- curvatura seccional, 246
- diferencial
  - $k$ -forma, 158
- distribuição
  - integrável, 97
- EDP das superfícies mínimas, 261
- espaço
  - tangente, 74
- espaço tangente, 13
- forma
  - volume, 169
- forma fundamental
  - segunda, 58
- função
  - característica, 115
  - integrável, 114
- grupo de Lie, 17
  - $\text{SO}(m)$ , 19
- Hessiano de  $f$  em  $p$ , 32
- imersão, 10
- máximo
  - local, 35
- média, curvatura, 258

- métrica induzida, 19
- mínima
  - superfície, 259
- mínimas, EDP das superfícies, 261
- mínimo local, 35
- matriz
  - ortogonal, 17
  - unitária, 19
  - hessiana, 33
- mergulho, 79
- polinômio de Taylor, 38
- ponto
  - crítico, 36
- posto, 79
- primeira forma, 19
- segunda forma fundamental, 58
- suave
  - campo tensorial, 157
- submersão, 6
- subvariedade
  - imersa, 79
- superfície
  - mínima, 259
- superfícies mínimas, EDP das, 261
- tensor curvatura de espaço de
  - curvatura constante, 246
- teorema
  - da função implícita, 9
  - da imersão, 10
  - da submersão, 6
  - do valor regular, 8
  - espectral, 22
  - de Sard, 8
- valor
  - singular, 8
  - regular, 8
- variedade
  - mergulhada, 79
  - orientável, 169
- variedade mergulhada em  $\mathbb{R}^{m+k}$ , 4
- vetor
  - curvatura
    - média, 258
- vetor com pé, 13

## Todo list



## Referências Bibliográficas

- [AB15] , M. M. Alexandrino, R. Bettiol, *Lie Groups and Geometric Aspects of Isometric Actions* Springer Verlag 2015.
- [Apo69] T. M. Apostol, *Calculus* Vol II. Wiley International Edition.
- [Bou23] N. Boumal, *An introduction to optimization on smooth manifolds*, Cambridge University Press, 2023.
- [BL04] F. Bullo, A. D. Lewis *Geometric Control of Mechanical Systems (modeling, Analysis and Design for Simple Mechanical Control Systems )*, V. 49, Texts in Applied Mathematics, Springer Verlag 2004.
- [Mil65] J. W. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, Princeton Landmarks in Mathematics, 1997.
- [KP02] S. G. Krantz and H. R. Parks, *A Primer of Real Analytic Functions*, Birkhäuser Advanced Texts, Second Edition, 2002.
- [WBK20] J. Watt, R. Borhani, A. K. Katsaggelos, *Machine Learning refined (foundations, algorithms, and applications)* , Cambridge University Press, Second Edition 2020.