

MAT0146: Cálculo Diferencial e Integral I para Economia

B 2 : Derivada: Regras de derivação e Exponencial

Prof. M Alexandrino (IME-USP)

2023

Alerta: Este é apenas um guia resumido de parte das transparências das aulas. Ele não substitui as aulas (onde existem discussões, resoluções de exercícios, figuras, ideias de demonstrações, etc) e não substitui a leitura da bibliografia recomendada. O GeoGebra <http://www.geogebra.org> (aqui utilizado) é uma ótima ferramenta, porém o aluno deve também tentar fazer as figuras a mão para compreendê-las melhor.

Objetivo:

- (▶ 1) Motivação: taxa de variação média
- (▶ 2) Definição de derivada
- (▶ 3) Reta tangente
- (▶ 4) Derivada das funções básicas
- (▶ 5) Regras básicas de derivações
- (▶ 6) Regra da cadeia
- (▶ 7) Função exponencial e logarítma

Motivação: taxa de variação média

Dado uma função $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma taxa de variação média em x_0 é definida como $m(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

Ex: Se $f = -x^2 + 4$, observamos que a taxa $\frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = 2 > 0$ e olhando o gráfico vemos que de fato a função é crescente. Este exemplo **sugere** que quanto menor Δx mais informação a taxa pode conter sobre o comportamento de f próximo a x_0 , em particular sobre seu crescimento ou decrescimento próximo a x_0 . Isto nos **motiva** a considerar o limite das taxas de variação média quando $\Delta x \rightarrow 0$ e assim introduzir o conceito da derivada de f , a qual será utilizada nas aulas não só para determinar crescimento e decrescimento da função mas também para detectar candidatos a máximos e mínimos locais.

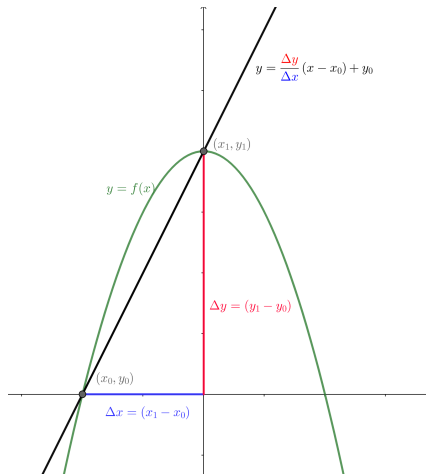


Figura: $y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0) + y_0$

Definição de derivada

Definição 1

Dado uma $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. O limite abaixo (quando existir) é chamado **derivada** no ponto $x_0 \in I$.

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Obs:

$$\begin{aligned} f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \end{aligned}$$

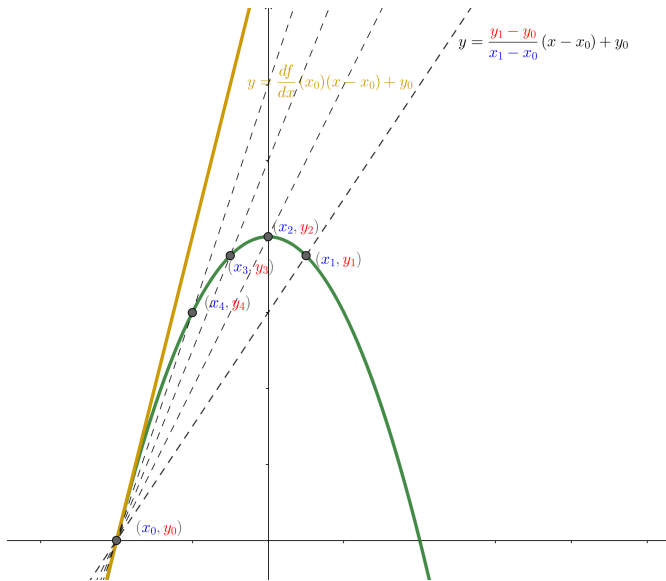


Figura: a medida que $x_i \rightarrow x_0$ as inclinações $m_n = \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0}$ convergem para $\frac{df}{dx}(x_0)$

Reta tangente

Proposição 2

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ função diferenciável em x_0 . Então

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0) + R(x - x_0)$$

onde $R : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x-x_0)}{x-x_0} = 0$

Definição 3

Dado $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ função diferenciável em x_0 a reta

$$y = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0)$$

é chamada **reta tangente**.

Obs Toda função $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável é contínua, mas nem toda função contínua é diferenciável.

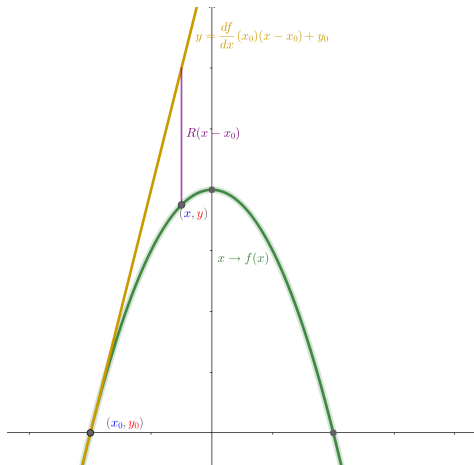


Figura: Reta tangente $y = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0)$ aproxima o gráfico de f perto do ponto x_0

Prob: Sejam $f(x) = x^2$.

1. Calcule $f'(x)$.
2. Calcule $f'(3)$ e $f'(-3)$
3. Qual a inclinação da reta tangente do gráfico de f no ponto $(3, 9)$.
4. Qual a inclinação da reta tangente do gráfico de f no ponto $(-3, 9)$.
5. Próximo a $x_0 = 3$ a função f está crescendo ou decrescendo?
6. Próximo a $x_0 = -3$ a função f está crescendo ou decrescendo?
7. Quanto vale $f'(0)$?
8. $x_0 = 0$ é um ponto de máximo ou mínimo local de f ?

Derivada das funções básicas

Proposição 4

1. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ para $n \in \mathbb{Q}$.
2. $\frac{d}{dx}(\sin(x)) = \cos(x)$
3. $\frac{d}{dx}(\cos(x)) = -\sin(x)$
4. $\frac{d}{dx}c = 0$.

Prob: Seja $h(x) = x^3$.

1. Calcule $h'(x)$
2. Calcule $h'(2)$
3. Quanto é a inclinação da reta tangente ao gráfico de h no ponto $(2, 8)$?
4. Calcule $h'(0)$
5. $x_0 = 0$ é ponto de máximo, mínimo ou nenhum dos dois?

Regras básicas de derivações

Proposição 5

Sejam $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis e $k \in \mathbb{R}$. Então:

1. $\frac{d}{dx}(f + g)(x) = \frac{df}{dx}(x) + \frac{dg}{dx}(x)$
2. $\frac{d}{dx}(f - g)(x) = \frac{df}{dx}(x) - \frac{dg}{dx}(x)$
3. $\frac{d}{dx}(f \cdot g)(x) = \frac{df}{dx}(x)g(x) + f(x)\frac{dg}{dx}(x)$
4. $\frac{d}{dx}(kf(x)) = k\frac{df}{dx}(x)$.

Ex:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(3\sqrt{x} + x^2 \cos(x)) &= \frac{d}{dx}(3\sqrt{x}) + \frac{d}{dx}(x^2 \cos(x)) \\ &= 3\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{d}{dx}(x^2) \cos(x) + x^2 \frac{d}{dx}(\cos(x)) \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}} + 2x \cos(x) - x^2 \sin(x)\end{aligned}$$

Regra da cadeia

Teorema 6 (Regra da cadeia)

Sejam $g : A \rightarrow B$ e $h : B \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis. Então $f = h \circ g$ é diferenciável. Além disto:

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \frac{dh}{dy}(g(x_0)) \frac{dg}{dx}(x_0)$$

Ex: Seja $f(x) = \sin(x^2)$. Então $h(y) = \sin(y)$, $g(x) = x^2$, $\frac{dh}{dy}(y) = \cos(y)$, $\frac{dg}{dx}(x) = 2x$. Assim pelo teorema:

$$\frac{d}{dx} \sin(x^2) = \cos(x^2) (2x)$$

Mais exemplos:

Visto que: $\frac{df}{dx}(x_0) = \frac{dh}{dy}(g(x_0)) \frac{dg}{dx}(x_0)$ para $f = h \circ g$ temos:

$$\frac{d}{dx} \cos(x^3 - \sin(x)) = -\sin(x^3 - \sin(x))(3x^2 - \cos(x))$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \cos(\sin(x^2)) &= -\sin(\sin(x^2)) \frac{d}{dx} \sin(x^2) \\ &= -\sin(\sin(x^2)) \frac{d}{dx} \sin(x^2) \\ &= -\sin(\sin(x^2)) \cos(x^2) (2x) \end{aligned}$$

Dado uma função g diferenciável, com $g(x) \neq 0$, podemos usar a regra da cadeia para calcular (em termos de g') a derivada do quociente, ou seja: $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{g(x)} \right) = \frac{d}{dx} (g(x))^{-1} = \frac{-1}{g(x)^2} \frac{dg}{dx}(x)$. Este resultado junto com a regra do produto, nos permite calcular a derivada do quociente das funções.

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{\frac{df}{dx} g - f \frac{dg}{dx}}{g^2}$$

Se $f : A \rightarrow B$ admite uma **inversa** $f^{-1} : B \rightarrow A$ e ambas são diferenciáveis, quanto vale (em termos de $\frac{df}{dx}(x_0)$) a derivada $\frac{df^{-1}}{dy}(y_0)$ para $y_0 = f(x_0)$?

Uma vez que $f^{-1}(f(x)) = x$ temos, derivando ambos os lados, que:

$$\frac{df^{-1}}{dy}(y_0) \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{dx}{dx} = 1$$

assim concluímos:

$$\frac{df^{-1}}{dy}(y_0) = \frac{1}{\frac{df}{dx}(x_0)} \quad (1)$$

$$\text{Ex: } \frac{d \arcsin}{dy}(y_0) = \frac{1}{\frac{d \sin}{dx}(x_0)} = \frac{1}{\cos(x_0)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(x_0)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y_0^2}}$$

Resumo: Para f, g, h (e f^{-1} no último item) funções diferenciáveis temos:

1. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ para $n \in \mathbb{Q}$.
2. $\frac{d}{dx}(\sin(x)) = \cos(x)$
3. $\frac{d}{dx}(\cos(x)) = -\sin(x)$
4. $\frac{d}{dx}c = 0$.
5. $\frac{d}{dx}(f \pm g)(x) = \frac{df}{dx}(x) \pm \frac{dg}{dx}(x)$
6. $\frac{d}{dx}(f \cdot g)(x) = \frac{df}{dx}(x)g(x) + f(x)\frac{dg}{dx}(x)$
7. $\frac{d}{dx}(kf(x)) = k\frac{df}{dx}(x)$
8. $\frac{df}{dx}(x_0) = \frac{dh}{dy}(g(x_0))\frac{dg}{dx}(x_0)$ para $f = h \circ g$
9. $\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\frac{df}{dx}g - f\frac{dg}{dx}}{g^2}$, com $g(x) \neq 0$,
10. $\frac{df^{-1}}{dy}(y_0) = \frac{1}{\frac{df}{dx}(x_0)}$ onde $f^{-1} \circ f(x) = x$ e $f \circ f^{-1}(y) = y$

Função exponencial e logaritmo

Motivação:

Qual função atende a **E.D.O** (2) (i.e., equação diferencial ordinária) com condição inicial (3) abaixo ?

$$\frac{d}{dx}(f) = f \quad (2)$$

$$f(0) = 1 \quad (3)$$

Primeiro tentemos algo menos ambicioso. Tentemos encontrar um polinômio P_n tal que $P_n(0) = 1$ e $\frac{d}{dx}P_n(x) \approx P_n(x)$ (estejam **próximos**) pelo menos para x pequeno.

Por exemplo para $P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ temos que ter $P_3(0) = a_0 = 1$. Como desejamos:

$$\frac{d}{dx}P_3(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 \approx P_3(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

Devemos igualar as potências (da menor para a maior). Concluimos que: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$ e $a_3 = \frac{1}{6} = \frac{1}{3!}$.

Podemos continuar a calibrar polinômios de grau $n > 3$, e quanto maior o n melhor a aproximação. E se o polinômio for um polinômio infinito? Tal discussão **motiva** a definição a seguir:

Definição: Considere o polinômio

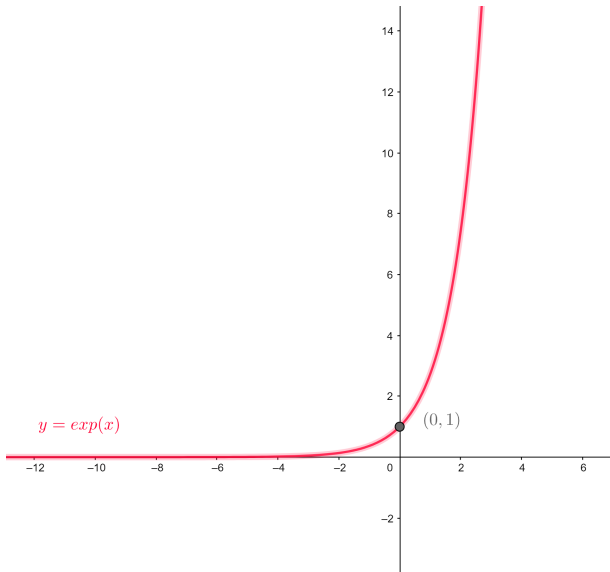
$$\begin{aligned}P_n(x) &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!}\end{aligned}$$

A função **exponencial** é definida como

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$$

É possível demonstrar não só que $f(x) = \exp(x)$ está bem definida, mas também que ela é a **única função** que atende a E.D.O

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx}(x) &= f(x) \\ f(0) &= 1\end{aligned}$$



Teorema 7

Dado uma função $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ classe C^1 e um ponto $y_0 \in I$. Então existe uma única função $f : (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx}(x) &= g(f(x)) \\ f(0) &= y_0\end{aligned}$$

Do teorema acima podemos concluir o resultado:

Proposição 8

$$\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$$

$e := \exp(1)$ (número de Euler)

$e^x = \exp(x)$ (notação) Assim $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$

Proposição 9

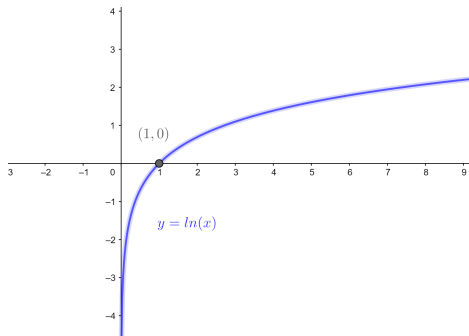
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$$

Definição 10

Dado a função $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ definimos a função **logaritmo (natural)** $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ como a função inversa da exponencial ou seja:

$$\ln \circ \exp(x) = x$$

$$\exp \circ \ln(y) = y$$



Aplicando a derivada de função inversa (vide Eq. (1))

Proposição 11

$$\frac{d}{dy} \ln(y) = \frac{1}{y}$$

Da definição de \ln e da Proposição 8 temos:

Proposição 12

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$$

Da proposição acima concluímos:

Proposição 13

$$\ln(a^n) = n \ln(a) \text{ onde } n \in \mathbb{Q}$$

Definição 14

Dado $a > 0$ definimos $a^x = \exp(x \ln(a))$

Pela regra da cadeia (Teorema 6) concluímos:

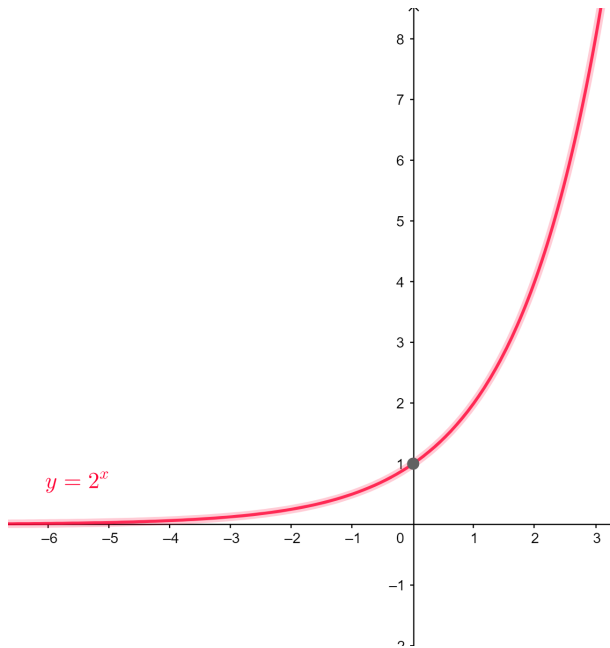
Proposição 15

Para $a > 0$ temos $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln(a)$

Ex: $\frac{d}{dx} 2^x = 2^x \ln(2)$

Obs $\sqrt[x]{x} = x^{1/x} := \exp\left(\frac{1}{x} \ln(x)\right)$ ou mais geralmente $(f(x))^{g(x)}$ para $f(x) > 0$ podemos **definir**

$$(f(x))^{g(x)} := \exp(g(x) \ln(f(x)))$$



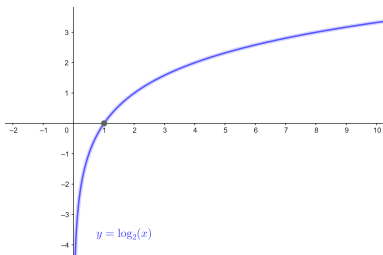
Definição 16

Seja $a > 0$, definimos a função $\log_a : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ como a função inversa de a^x

$$\begin{aligned}\log_a(a^x) &= x \\ a^{\log_a(y)} &= y\end{aligned}$$

Aplicando a derivada da função inversa (vide Eq. 1)

$$\frac{d}{dy} \log_a(y) = \frac{1}{y \ln(a)}$$

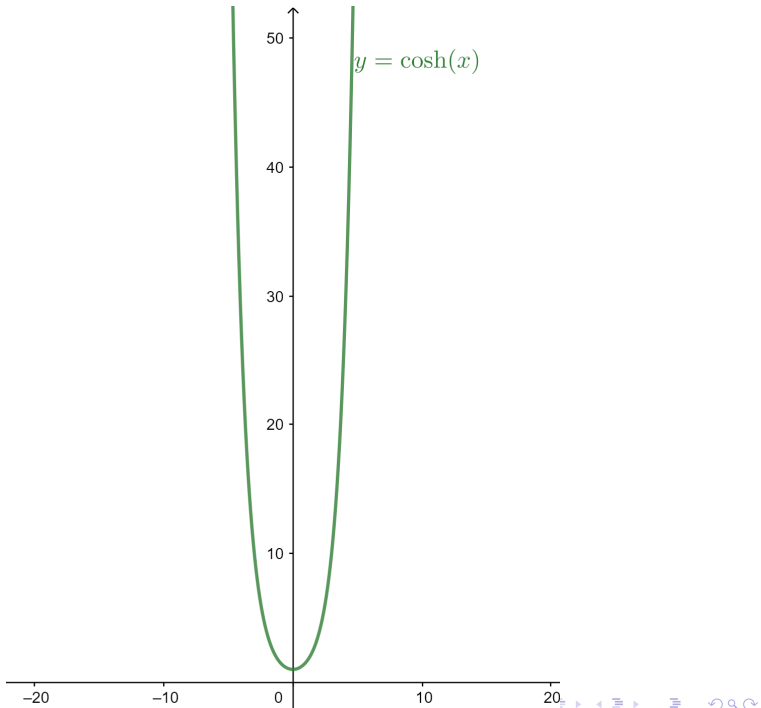


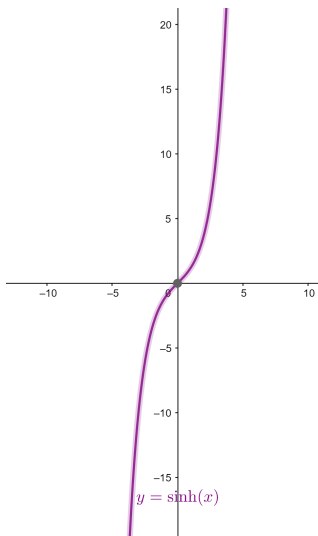
Definimos:

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Obs: $\cosh(0) = 1$ $\sinh(0) = 0$

Obs: $\frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x)$ $\frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh(x)$





Defina as funções:

$$\alpha_1(t) = x(t) = \cosh(t); \quad \alpha_2(t) = y(t) = \sinh(t)$$

Observe que $x(t)^2 - y(t)^2 = 1$. Assim a imagem da curva parametrizada $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $\alpha(t) = (\cosh(t), \sinh(t))$ está contida no ramo da **hiperbole**

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1, x > 0\}$$

ou seja α é uma parametrização da curva C .

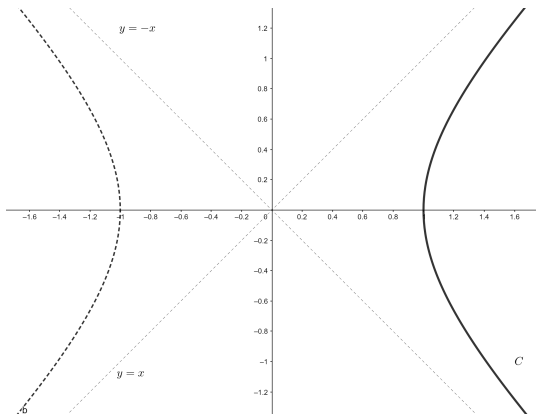


Figura: $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1, x > 0\}$

Prob: Verifique que $f(x) = a_0 \cos(x) + a_1 \sin(x)$ é solução da E.D.O de segunda ordem com condições iniciais

$$\begin{aligned}\frac{d^2 f}{d^2 x}(x) + f(x) &= 0 \\ \frac{df}{dx}(0) &= a_1 \\ f(0) &= a_0\end{aligned}$$

Comentário: $f(x) = a_0 \cos(x) + a_1 \sin(x)$ é de fato **única** solução da E.D.O.

Prob: Verifique que $f(x) = a_0 \cosh(x) + a_1 \sinh(x)$ é solução da E.D.O de segunda ordem com condições iniciais

$$\begin{aligned}\frac{d^2 f}{d^2 x}(x) - f(x) &= 0 \\ \frac{df}{dx}(0) &= a_1 \\ f(0) &= a_0\end{aligned}$$

Comentário: $f(x) = a_0 \cosh(x) + a_1 \sinh(x)$ é de fato **única** solução da E.D.O.