MAT0146: Cálculo Diferencial e Integral I para Economia

B0: Recordação

Prof. M Alexandrino (IME-USP)

2023

Alerta: Este é apenas um guia resumido de parte das transparências das aulas. Ele não substitui as aulas (onde existem discussões, resoluções de exercícios, figuras, etc) e não substitui a leitura da bibliografia recomendada. O GeoGebra http://www.geogebra.org (aqui utilizado) é uma ótima ferramenta, porém o aluno deve também tentar fazer as figuras a mão para compreende-las melhor.

Conceitos básicos

Sejam A, B conjuntos. Uma **função** $f : A \to B$ é uma correspondência que a cada elemento $x \in A$ associa um único elemento $f(x) \in B$.

A é chamado **domínio**, B é chamado contra domínio (ou conjunto chegada) e $f(A) = \{f(x)|\, x \in A\}$ é chamado **imagem**.

Uma função $f : A \to B$ é chamada **injetora** se
$f(x) = f(\tilde{x}) \Rightarrow x = \tilde{x}$

Uma função $f : A \to B$ é chamada **sobrejetora** se $\forall y \in B$ existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Uma função $f : A \to B$ é chamada **bijetora** se é sobrejetora e sobrejetora. Neste caso existe uma **função inversa** $f^{-1} : B \to A$ ou seja a **compostas** destas funções são identidade:

$$f^{-1}(f(x)) = x \ \ , f(f^{-1}(y)) = y$$

Estaremos interessandos no caso onde A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}$, em particular em **intervalos:**

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} |\, a \leq x \leq b\}$$
$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} |\, a \leq x < b\}$$
$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} |\, a < x \leq b\}$$
$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} |\, a < x < b\}$$

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função. Então o conjunto

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, y = f(x), x \in I\}$$

é chamado **gráfico**

Ex: Sejam $f : [0, 2] \to [0, 4]$ definida como $f(x) = x^2$ e $h : [0, 4] \to [0, 2]$ definida como $h(x) = \sqrt{x}$

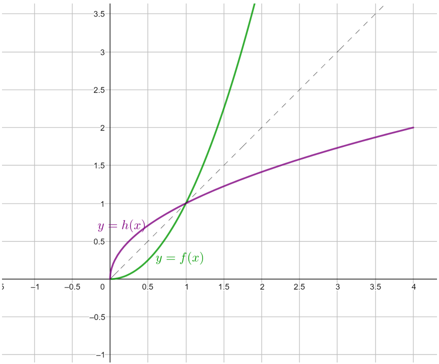
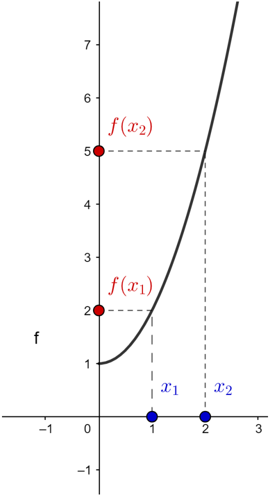


Figura: gráficos das funções f e h. Note que tais funções são inversas uma da outra, i.e., $h \circ f(x) = x$ e $f \circ h(y) = y$

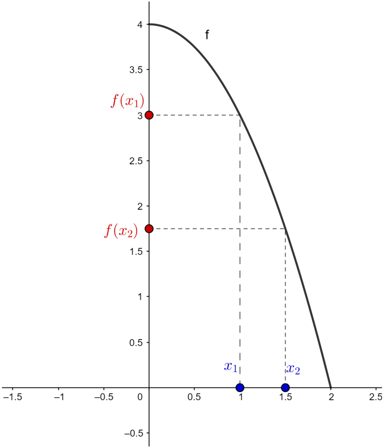
Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é **crescente** (resp. estritamente crescente) se $f(x_1) \leq f(x_2)$ (resp. $f(x_1) < f(x_2)$) para todo $x_1 < x_2$.

Ex: Função oferta clássica: $f : [0, b) \to \mathbb{R}$ (quantidade X preço)

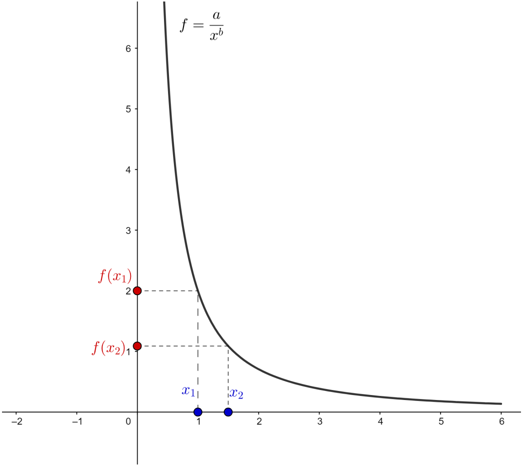


Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é **decrescente** (resp. estritamente decrescente) se $f(x_1) \geq f(x_2)$ (resp. $f(x_1) > f(x_2)$) para todo $x_1 < x_2$.

Ex:(Função demanda clássica) $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ (quantidade X preço)



Ex:(lei de Pareto da distribuição de renda) Seja $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ função definida como $f(x) = \frac{a}{x^b}$. O valor $f(x)$ mediria o número de indivídios de uma dada população de tamanho a com renda acima de x. A constante b (parâmetro da população) em geral é tomada próximo a 1.5



Equação da reta

$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, ax + by = c\}$ é chamada **reta** e $ax + by = c$ é chamada **equação da reta**. Uma reta $x = c$ é chamada **reta vertical** e uma reta $y = c$ é chamada **reta horizontal**.

Dado uma reta não vertical chamamos $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ **inclinação da reta**. Em particular $y = m(x - x_1) + y_1$.

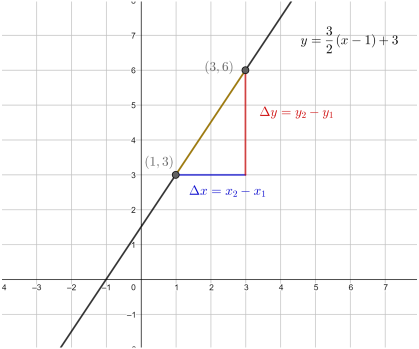


Figura: reta **única** ligando $(1, 3)$ a $(3, 6)$

Obs Por 2 pontos distintos em $\mathbb{R}^2$ passa uma única reta.

Prob: Quando o preço for de $R\$50,00$ o fabricante consegue ofertar 50 produtos, ao passo que quando o produto custar $R\$75,00$ ele consegue ofertar 100 produtos. Supondo que a função oferta é modelada por uma reta, determine a função oferta f.

Prob: Considere $f(q) = \frac{3}{2}q + 1$ a função função oferta e $h(q) = 10 - 2q$ a função demanda. Determine o **ponto de equilíbrio** (i.e, a interseção do gráfico da função oferta com a demanda).

Prob: Quando o preço for de $R\$50,00$ o fabricante consegue ofertar 50 produtos, ao passo que quando o produto custar $R\$75,00$ ele consegue ofertar 100 produtos. Supondo que a função oferta é modelada por uma reta, determine a função oferta f.

solução Sejam $(x_1, y_1) = (50, 50)$ e $(x_2, y_2) = (100, 75)$. Então: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{75-50}{100-50} = \frac{1}{2}$ Visto que $y = m(x - x_1) + y_1$ temos que $y = \frac{1}{2}(x - 50) + 50$

Prob: Considere $f(q) = \frac{3}{2}q + 1$ a função função oferta e $h(q) = 10 - 2q$ a função demanda. Determine o **ponto de equilíbrio** (i.e, a interseção do gráfico da função oferta com a demanda).

Solução: $\frac{3}{2}q_0 + 1 = p_0 = 10 - 2q_0$. Assim $q_0 = \frac{18}{7}$ e substituindo em (qualquer uma) das equações temos $p_0 = \frac{34}{7}$.

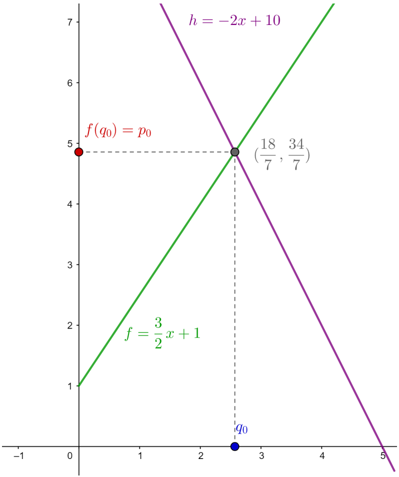


Figura: $f(q) = \frac{3}{2}q + 1$ a função oferta, $h(q) = 10 - 2q$ a função demanda e $(q_0, p_0) = (\frac{18}{7}, \frac{34}{7})$ ponto de equilibrio.

Polinômios, deslocamentos, reflexão e módulo

Dizemos que uma função f é um polinômio de grau n se

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Em particular para $f(x) = ax^2 + bx + c$ podemos determinar as raizes reais (quando estas existem) pela formula $x_0 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

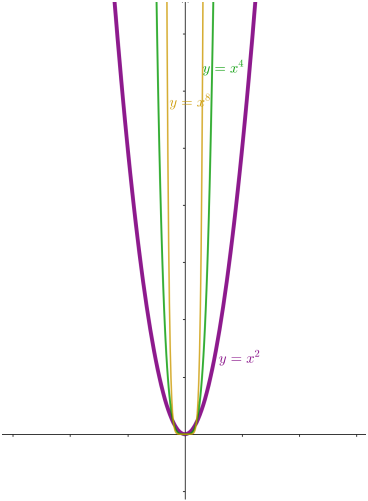


Figura: Gráfico das funções pares: $f = x^2$, $f = x^4$ $f = x^8$

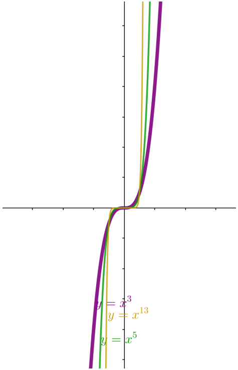
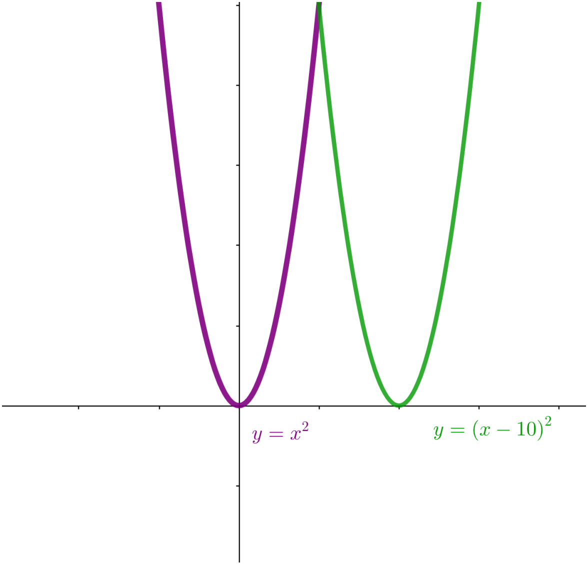
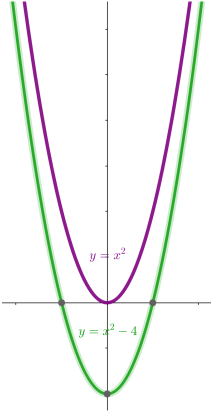


Figura: Gráfico das funções impares: $f = x^3$, $f = x^5$ $f = x^{13}$

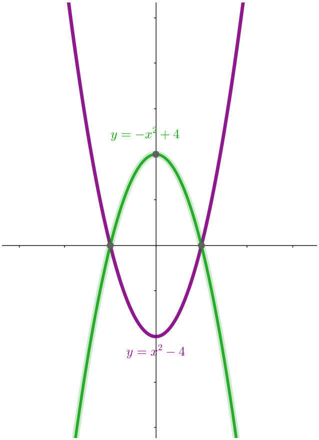
Dado $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ então o gráfico de $h(x) = f(x - a)$ é o grafico de f deslocado (horizontalmente) de a



Dado $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ então o gráfico de $h(x) = f(x) + a$ é o grafico de f deslocado (verticalmente) de a



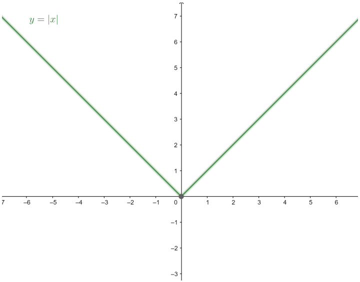
Dado $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ então o gráfico de $h(x) = -f(x)$ é o grafico de f refletido pelo eixo x.



A **função módulo** $|\cdot| : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ é definida como $|x| = \sqrt{x^2}$ ou de forma equivalente: $|x| = \begin{cases} x & \text{se}\, x \geq 0 \\ -x & \text{se}\, x < 0 \end{cases}$

Obs: $|a - b|$ mede a distância de a e b na reta.

Prop: $|a + b| \leq |a| + |b|$.



Prob: Resolva $|x - 3| + |x + 2| < 11$

solução

Primeiro deve-se compreender melhor as funções compostas:

$$f(x) = |x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{se}\, 3 \leq x \\ -x+3 & \text{se}\, x < 3 \end{cases}$$

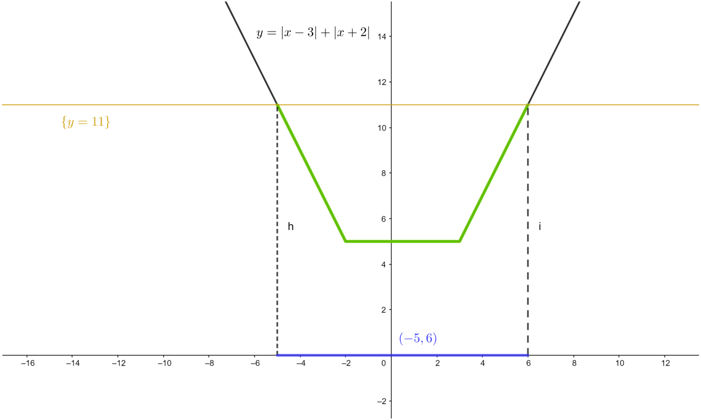
$$g(x) = |x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{se}\, -2 \leq x \\ -x-2 & \text{se}\, x < -2 \end{cases}$$

Assim a função $h = f + g$ é

$$h(x) = |x-3| + |x+2| = \begin{cases} 2x-1 & \text{se}\, 3 \leq x \\ 5 & \text{se}\, -2 \leq x < 3 \\ -2x+1 & \text{se}\, x < -2 \end{cases}$$

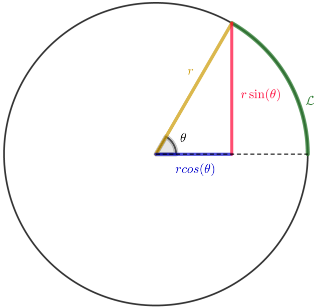
- quando $x \in (-\infty, -2)$ então $h(x) < 11$ é satisfeita para $x \in (-5, -2)$
- quando $x \in [-2, 3)$ então $h(x) < 11$ é satisfeita para $x \in [-2, 3)$.
- quando $x \in [3, +\infty)$ então $h(x) < 11$ é satisfeita para $x \in [3, 6)$.

Juntando os intervalos tempos que o resultado é $(-5, 6)$.



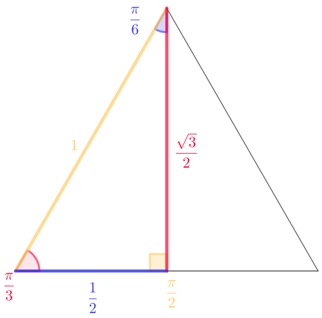
Funções trigonométricas

Dado um círculo de raio r o argulo θ em **radianos** é tal que o comprimento do setor circular $\mathcal{L}$ definido pelo angulo θ é $\mathcal{L} = \theta \times r$. Em particular o comprimento do círculo é $2\pi r$ As funções $\cos(\theta)$ e $\sin(\theta)$ são definidas (para $0 \leq \theta \leq \pi/2$) como o cateto adjacente ao angulo e o cateto oposto ao angulo de um triângulo retângulo com hipotenusa de tamanho 1, respectivamente; (sinal é dado pelo circulo trigonométrico). A **função tangente** é definida como $\tan(x) = \mathrm{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.



Utilizando triangulo equilátero a seguir concluimos:

$$\begin{aligned}
\sin(\pi/3) &= \frac{\sqrt{3}}{2}\\
\cos(\pi/3) &= \frac{1}{2}\\
\tan(\pi/3) &= \sqrt{3}\\
\sin(\pi/6) &= \frac{1}{2}\\
\cos(\pi/6) &= \frac{\sqrt{3}}{2}\\
\tan(\pi/6) &= \frac{\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

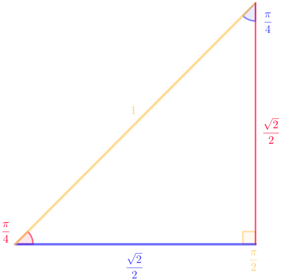


Utilizando triangulo retângulo isósceles a seguir concluimos:

$$\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(\pi/4) = 1$$



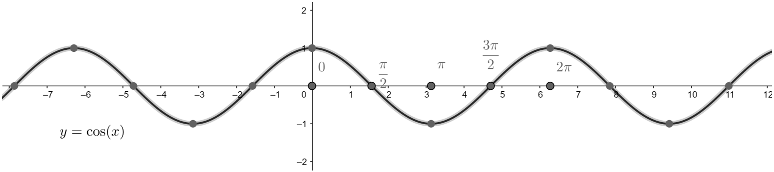


Figura: Gráfico da função $f(x) = cos(x)$

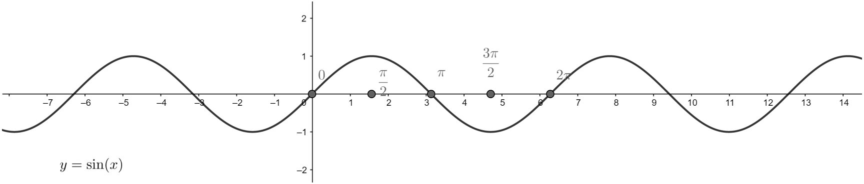


Figura: Gráfico da função $f(x) = \sin(x)$

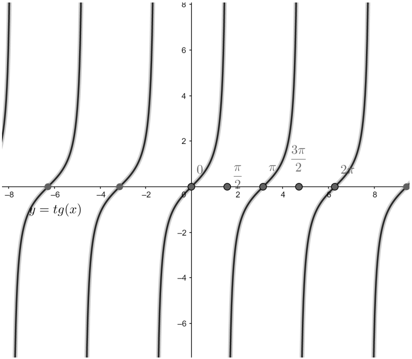
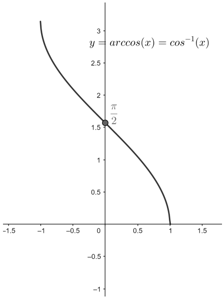
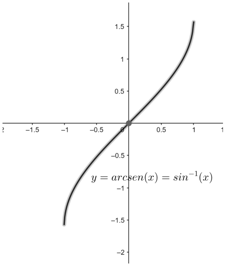
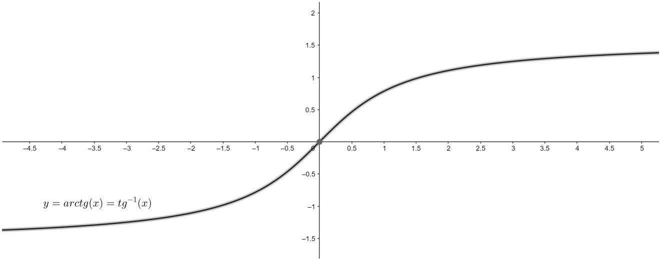


Figura: Gráfico da função $f(x) = \tan(x)$

Gráficos das funções inversas:







Algumas igualdades trigonométricas:

$$\begin{aligned} 1 &= \sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 \\ \cos(A+B) &= \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B) \\ \sin(A+B) &= \sin(A)\cos(B) + \sin(B)\cos(A) \end{aligned}$$

Prob

(1) Determine $\cos^2(\theta)$ em termos de $\cos(2\theta)$

(2) Determine $\sin^2(\theta)$ em termos de $\cos(2\theta)$

(3) Relacione $\sec^2(\theta) = (\frac{1}{\cos(\theta)})^2$ com $\tan^2(\theta)$

Soluções

$$\boxed{\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}}$$

$$\boxed{\sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}}$$

$$\boxed{\sec^2(\theta) = 1+\tan^2(\theta)}$$

Obs: As igualdades acima (deduzidas das básicas anteriores) serão importantes por exemplo no processo de integração.