MAT0147 - Cálculo Diferencial e Integral II (FEA-noturno)

GAB P3 (10.0 pt) - 13/12/2023

P3 foi baseada nos Guias e na Lista 2: Mais precisamente:

- Compare Questão 1 com Problema 2.5 da Lista 2 e Seção 5 Guia 4;
- compare Questão 2 com Problema 3.1 da Lista 2 e Seção 7 Guia 4;
- compare Questão 3 com Problema 4.3, 4.4, 5.1 da Lista 2 e Seção 7 Guia 5.

Questão 1 (3,0 pt)**.** Seja $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_1 + x_2^2 + 1)\exp(x_1 - \frac{1}{10})$

(a) (1,5 pt) Determine os pontos críticos de f.

(b) (1,5 pt) Classifique os pontos críticos de f (em sela, máximos e ou mínimos locais).

Respostas:

(a) *Os pontos críticos são:* $q = (0,0), p = (-1,0)$.

De fato, derivando temos:

$$\begin{aligned} 0 &= f_{x_1} = (2x_1 - 1)e^{x - \frac{1}{10}} + (x_1^2 - x_1 + x_2^2 + 1)e^{x - \frac{1}{10}} \\ 0 &= f_{x_2} = 2x_2 e^{x - \frac{1}{10}} \end{aligned}$$

A segunda equação implica $x_2 = 0$ e substituindo na primeira concluimos que x_1 pode ser ou -1 ou 0. Assim concluimos que os pontos críticos são: $q = (0,0), p = (-1,0)$

(b) $q = (0,0)$ *é mínimo local* e $p = (-1,0)$ *é ponto de sela.*

De fato, derivando novamente:

$$\begin{aligned} f_{x_1,x_1} &= e^{x_1 - \frac{1}{10}}\left(x_1^2 + 3x_1 + x_2^2 + 1\right) \\ f_{x_1,x_2} &= 2x_2 e^{x_1 - \frac{1}{10}} \\ f_{x_2,x_2} &= 2e^{x_1 - \frac{1}{10}} \end{aligned}$$

Lembre que

$$\operatorname{Hess} f = \begin{bmatrix} f_{x_1,x_1} & f_{x_1,x_2} \\ f_{x_2,x_1} & f_{x_2,x_2} \end{bmatrix}$$

Substituindo $q = (0,0)$ temos:

$$f_{x_1,x_1}(q) = e^{-\frac{1}{10}}$$
$$f_{x_1,x_2}(q) = 0$$
$$f_{x_2,x_2}(q) = 2e^{-\frac{1}{10}}$$

Visto que $\det \operatorname{Hess} f(q) > 0$ e $f_{x_1,x_1}(q) > 0$ então $q = (0,0)$ é mínimo local.

Substituindo $p = (-1,0)$ temos:

$$f_{x_1,x_1}(p) = (-1)e^{-\frac{11}{10}}$$
$$f_{x_1,x_2}(p) = 0$$
$$f_{x_2,x_2}(p) = 2e^{-\frac{11}{10}}$$

visto que $\det \operatorname{Hess} f(p) < 0$ então $p = (-1,0)$ é ponto de sela.

Questão 2 (3,0)**.** Dado $K = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 \leq 9\}$ considere a função $f : K \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x_1, x_2) = -(x_1)^2 + x_1 - (x_2)^2 + x_2 + 1$.

(a) (1,0 pt) Determine o(s) ponto(s) crítico(s) no interior de K.

(b) (1,0 pt) Determine no bordo de K os candidatos a máximos e mínimos de f restrito a bordo, i.e., os pontos $q^k \in \partial K$ que satisfazem $f(q^i) = \max_{x\in\partial K} f(x)$ e $f(q^j) = \min_{x\in\partial K} f(x)$.

(c) (1,0 pt) Determine o valor de máximo global e o valor de mínimo global de f em K e os pontos onde estes valores ocorrem.

Respostas:

(a) $x = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *é o ponto crítico no interior*

De fato esta é a solução do sistema $\nabla f(x) = (f_{x_1}, f_{x_2}) = (0,0)$ para $\|x\| < 3$.

(b) *para* $\|x\| = 3$ *temos que os candidatos são:*

$$(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}), (-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2})$$

De fato defina $g(x) = x_1^2 + x_2^2$. Os candidatos acima para máximo e mínimo no bordo $\partial K = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 = 9\}$ são soluções do problema de multiplicadores de Lagrange:

$$\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x)$$
$$9 = g(x)$$

(c)
- $f(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}) = -8 - 3\sqrt{2}$ *é valor mínimo absoluto, ocorrendo no ponto* $(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2})$
- $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$ *é valor máximo absoluto, ocorrendo no ponto* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

De fato para obter esta resposta compare os valores obtidos no item (a) e item (b) ou seja:

$$f(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}) = -9 + 3\sqrt{2} + 1$$
$$f(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}) = \mathbf{-9 - 3\sqrt{2} + 1}$$
$$f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \mathbf{\frac{1}{2} + 1}$$

Questão 3 (4,0 pt)**.** Seja $S = \{x \in \mathbb{R}^3 |, \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{4} + \frac{x_3^2}{9} = 1\}$

(a) (1,0 pt) Diga se S é superfície de revolução (sim ou não); invariante por translação (sim ou não) e ou gráfico (sim ou não) e esboce S.

(b) (1,0 pt) Determine a equação do plano tangente a S no ponto $q = (1, 1, \frac{3\sqrt{2}}{2})$

(c) (2,0 pt) Determine o volume do maior paralelogramo de faces paralelas aos planos coordenados que pode estar contido na região delimitada por S. Em outras palavras definindo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ como $f(x) = 8x_1x_2x_3$ e $S_+ = S \cap \{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$ obtenha $\max_{x \in S_+} f(x)$.

Respostas:

(a)
- *Superfície de revolução:* sim,
- *gráfico:* não,
- *superfície invariante por translação:* não.

Utilizando o fato da superfície ser de revolução podemos então esboçá-la, obtendo um elipsoide de revolução, vide Figura 1.

De fato é superfície de revolução (em relação ao eixo x_3) pois a equação que descreve S é $\frac{r^2}{4} + \frac{x_3^2}{9} = 1$ onde $r^2 = x_1^2 + x_2^2$. Não é gráfico (em relação a x_i) pois S não pode ser descrita pela equação $x_i = h(x_j, x_k)$ i.e, não podemos isolar uma variável em termos das outras duas. Não é invariante por translação pois a equação que descreve S tem todas as variáveis.

(b) $\frac{1}{2}(x_1 - 1) + \frac{1}{2}(x_2 - 1) + \frac{\sqrt{2}}{3}(x_3 - \frac{3\sqrt{2}}{2}) = 0$

De fato, definindo $g(x) = \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{4} + \frac{x_3^2}{9}$ a equação do plano segue da fórmula:

$$g_{x_1}(q)(x_1 - q_1) + g_{x_2}(q)(x_2 - q_2) + g_{x_3}(q)(x_3 - q_3) = 0.$$

(c) *O volume é* $\frac{32}{\sqrt{3}} = f(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{3})$

De fato, observamos que o ponto de máximo não pode acontecer na curva ∂S_+ ou seja não pode estar em S e ter uma das coordenadas $x_i = 0$. Assim, tal ponto de máximo deverá ocorrer no interior da superfície S_+ e ser solução do sistema:

$$\begin{aligned} \nabla f(x) &= \lambda \nabla g(x) \\ 1 &= g(x) \end{aligned}$$

o qual tem como solução $x = (\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{3})$.

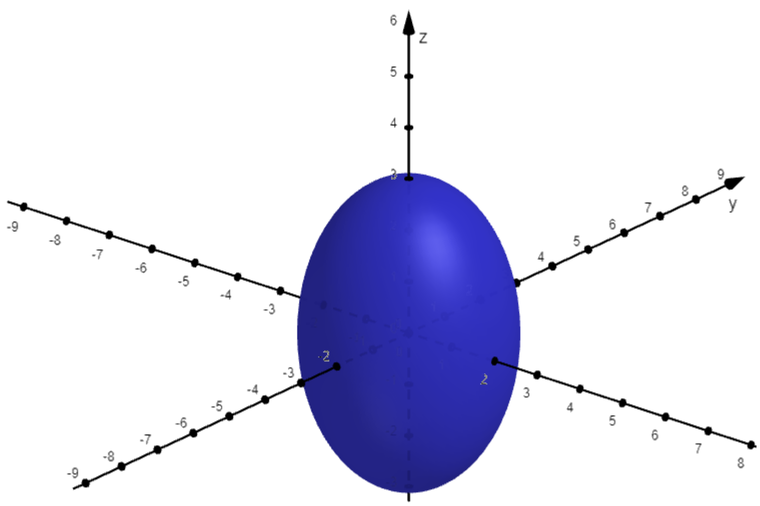

Figura 1: Questão 3