MAT0147 - Cálculo Diferencial e Integral I (FEA-noturno)

GABARITO P11 (2.0 pt) - 19/04/2023

P11 baseada em lista 1 (seção 0 e 1) e guias Resumidos 0 e 1.

- Questão 1: compare com Problema 0.7, 0.8 Lista 1, e Guia resumido zero (ponto de equilíbrio, descolamento gráficos).
- Questão 2: compare com Problemas 1.4 e 1.5 Lista 1, e Guia Resumido 1 (técnicas limites).
- Questão 3: compare com Problemas 1.2 (4,5) 1.6, 1.7(3) Lista 1 e Guia Resumido 1 (técnicas limites)

Questão 1 (0,5 pt)**.** Considere a função oferta $p = f(q) = 2(q + \frac{1}{8})^2 + 1$ e a função demanda $p = g(q) = -(q + \frac{1}{8}) + 2$ (ambas com domínio em $[0, \infty)$)

(a)0,3 pt Determine o ponto de equilíbrio (q_0, p_0) (i.e., a interseção dos gráficos da função oferta e da demanda, com $q_0 > 0$).

(b) 0,2 pt Esboce os gráficos de $\tilde{f}(q) = 2(q + \frac{1}{8})^2 + 1$, $\tilde{g}(q) = -(q + \frac{1}{8}) + 2$ (ambas funções com domínio em $\mathbb{R}$).

Respostas:

(a) Para determinar (q_0, p_0) façamos $p = f(q) = g(q)$ ou seja $2(q + \frac{1}{8})^2 + 1 = -(q + \frac{1}{8}) + 2$. Esta equação é equivalente a resolver a equação $2q^2 + \frac{12}{8}q - \frac{54}{8^2} = 0$ que tem como raiz positiva $q_0 = \frac{3}{8}$. Avaliando temos que $p_0 = f(q_0) = \frac{12}{8}$. Assim a **solução é:** $(q_0, p_0) = (\frac{3}{8}, \frac{3}{2})$

(b) a parabola é **deslocada para esquerda e para cima** e a reta tem inclinação negativa. Observe que as funções $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ são extensões das funções oferta f e demanda g, e que estas extensões tem domínio em $\mathbb{R}$ assim o gráfico leva isto em consideração, vide Figura 1

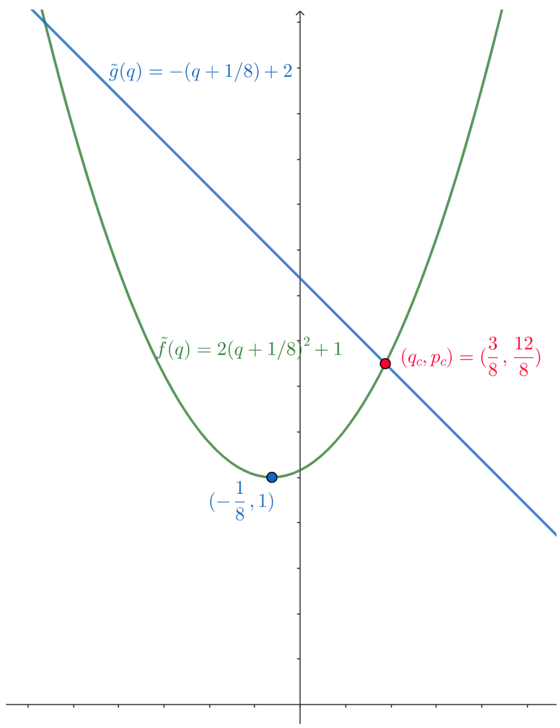

Figura 1: Gráficos das extensões $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$, vide Questão 1

Questão 2 (0,5 pt)**.** Considere a função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se}\, 0 \leq x \leq 1 \\ 2x + c_1 & \text{se}\, 1 < x < 2 \\ 5x + c_2 & \text{se}\, 2 \leq x < \infty \end{cases}$$

(a) 0,4 pt Determine as constantes c_1 e c_2 para que a função f seja contínua

(b) 0,1 pt Esboce o gráfico de f (com os c_1 e c_2 para que a função f seja contínua).

Respostas:

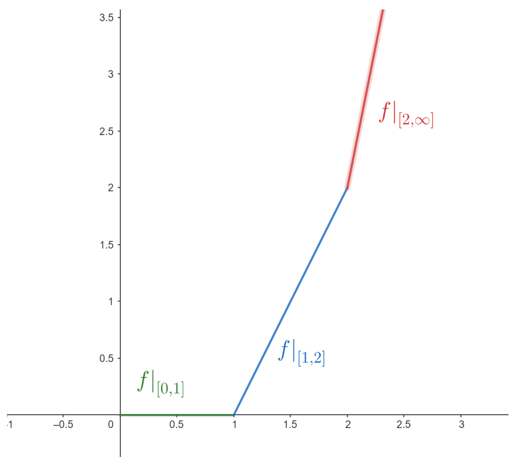

Figura 2: Gráfico da Questão 2

(a) f é continua em $x = 1$ se e somente se $0 = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(2x + c_1)$ Logo $c_1 = -2$. f é continua em $x = 2$ se e somente se $lim_{x\to 2^-}(2x + c_1) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(5x + c_2)$ Assim $c_2 = -8$. Logo a **solução é** $c_1 = -2, c_2 = -8$

(b) Vide Figura 2

Questão 3 (1,0 pt)**.** Calcule os limites das funções abaixo (as quais tem domínios maximais).

(a) (0,2 pt) $\lim_{x\to 2^+} \Big((x-2)^2 \text{sen}(\frac{1}{x^2-4x+4}) + (x-1)^2\Big)$;

(b) (0,2 pt) $\lim_{x\to \frac{\sqrt{3}}{4}} \text{arcsen}(\frac{x^2-\frac{3}{16}}{x-\frac{\sqrt{3}}{4}})$

(c) (0,2 pt) $\lim_{x\to +\infty} \frac{7x^3+2x}{8x^3+5x^2}$

(d) (0,2 pt) $\lim_{x\to +\infty} \frac{7x^2+2x}{8x^3+5x^2}$

(e) (0,2 pt) $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{2x^6+1}}{x^3}$

Respostas:

(a) Pelo teorema do confronto temos $\lim_{x\to 2^+}\left((x-2)^2\text{sen}(\frac{1}{x^2-4x+4})\right)=0$.
Como $f(x)=(x-1)^2$ é continua concluimos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^+}\left((x-2)^2\text{sen}(\frac{1}{x^2-4x+4})+(x-1)^2\right) &= \lim_{x\to 2^+}\left((x-2)^2\text{sen}(\frac{1}{x^2-4x+4})\right)\\ &+\lim_{x\to 2^+}\left((x-1)^2\right)\\ &=0+1=1\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\sqrt{3}}{4}}\text{arcsen}(\frac{x^2-\frac{3}{16}}{x-\frac{\sqrt{3}}{4}}) &= \text{arcsen}(\lim_{x\to\frac{\sqrt{3}}{4}}\frac{x^2-\frac{3}{16}}{x-\frac{\sqrt{3}}{4}})\\ &=\text{arcsen}(\lim_{x\to\frac{\sqrt{3}}{4}}x+\frac{\sqrt{3}}{4})\\ &=\text{arcsen}(\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

(c)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^3+2x}{8x^3+5x^2}=lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^3}(7+\cancelto{0}{\frac{2x}{x^3}})}{\cancel{x^3}(8+\cancelto{0}{\frac{5x^2}{x^3}})}=\frac{7}{8}$$

(d)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^2+2x}{8x^3+5x^2}=lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}(7+\cancelto{0}{\frac{2x}{x^2}})}{\cancel{x^2}(\cancelto{+\infty}{8x}+5)}=0$$

(e)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^6+1}}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|^3\sqrt{2+\cancelto{0}{\frac{1}{x^6}}}}{x^3}=-\sqrt{2}$$