MAT0147 - Cálculo Diferencial e Integral II (FEA-noturno)

GAB Prova P1 (6.0 pt) - 22/11/2023

Prova foi baseada nos Guias Resumidos 2, 3 de Cálculo II e Lista 1 de Cálculo II.

- Compare Questão 1 com: Lista 1 problemas 2.8,3.2, 3.4 ; Guia 2 seção 5; Guia 3 seção 2,3.
- Compare Questão 2 com: Lista 1 problema 2.3, 2.4, 2.7, 3.10; Guia 3, seção 5, 10,11; Guia 2 seção 2.

Todas as questões foram feitas em sala de aula. Assim o professor recomenda que quando o(a) aluno(a) faltar a aula, que este(a) procure colegas para saber quais os exercícios foram feitos, qual matéria foi dada. **O professor também recomenda que quando o(a) aluno(a) estiver em sala de aula anote os exercícios feitos em sala de aula.** Em geral sem entender nada fica de fato mais difícil anotar, então perguntar sempre é importante. **O professor destaca a relevância de estudar os Guias Resumidos, antes de fazer os exercícios e complementar os estudos consultando livros recomendados na bibliografia da disciplina**, principalmente quando dúvidas tenham ficado e não tenham sido sanadas nas aulas, nas monitorias ou nos guias.

Questão 1 (3,0 pt)**.** Dado o conjunto aberto $U = \{x \in \mathbb{R}^2 | 0 < \|x\| < 6\}$ considere a função $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x_1, x_2) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)$$

(a) Determine a (matriz) derivada $df(x)$ para $x \in U$.

(b) Seja $q = (1, \sqrt{3}, \frac{1}{2})$. Determine a equação do plano tangente ao gráfico f em q.

(c) Esboce o gráfico de f, destacando os eixos cartesianos.

Respostas:

(a) (1,5 pt) $df(x) = \left[\frac{-\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\pi x_1}{6\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \quad \frac{-\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\pi x_2}{6\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \right]$

(b) (1,0 pt) $\frac{\sqrt{3}\pi}{24}(x_1 - 1) + \frac{3\pi}{24}(x_2 - \sqrt{3}) + (x_3 - \frac{1}{2}) = 0$

(c) (0,5 pt) A superfície de revolução encontra-se na Figura1.

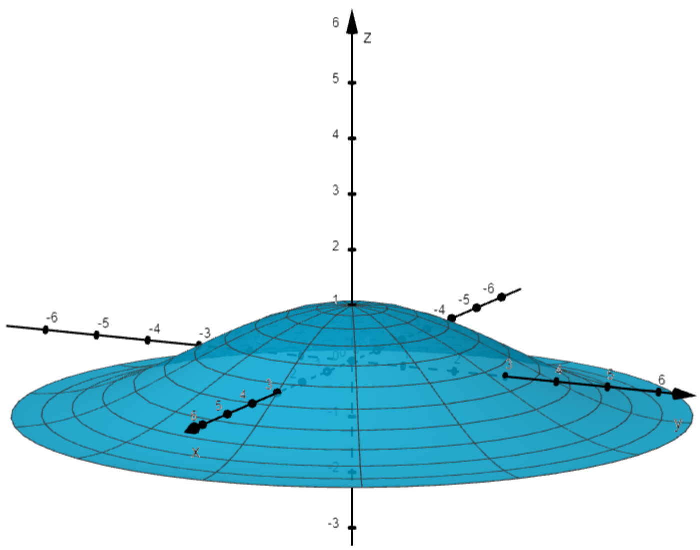

Figura 1: Questão 1 item (c)

Questão 2 (3,0 pt)**.** Considere as funções $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas como:

$$g(x) = \frac{x_1^2}{9} - \frac{2x_1}{3} + \frac{x_2^2}{16}$$
$$f(x) = \frac{x_1^2}{9} + \frac{x_2^2}{16}$$

(a.1) Esboce a curva de nível $g^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 | g(x) = 0\}$ destacando os eixos cartesianos.

(a.2) Dado $q = (\frac{9}{2}, \frac{4\sqrt{3}}{2})$ determine um vetor w tal que a derivada direcional $\frac{\partial g}{\partial v}(q)$ assume maior valor possível, onde $v = \frac{w}{\|w\|}$.

(b.1) Determine a curva $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$ tal que $\gamma'(t) = \nabla f \circ \gamma(t)$ e $\gamma(0) = (\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{2}})$

(b.2) Esboce a curva γ e as curvas de níveis $f^{-1}(1)$ e $f^{-1}(4)$ destacando os eixos cartesianos.

Respostas:

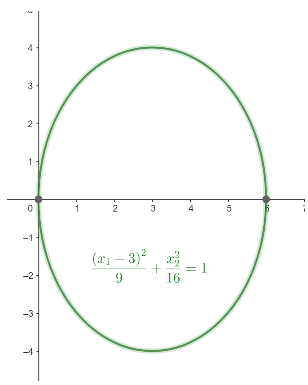

Figura 2: Questão 2 item (a.1)

(a.1) (0,5 pt) A curva $\frac{(x_1-3)^2}{9} + \frac{x_2^2}{16} = 1$ encontra-se na Figura 2

(a.2) (1,0 pt) w é qualquer vetor múltiplo de $\nabla g(q) = (\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{4})$

(b.1) (1,0 pt) $\gamma(t) = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\exp(\frac{2t}{9}), \frac{4}{\sqrt{2}}\exp(\frac{t}{8})\right)$. Para obter tal solução observe que $\nabla f = \frac{2x_1}{9}\vec{e}_1 + \frac{2x_2}{16}\vec{e}_2$. Denote $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$ e substituindo em $\gamma'(t) = \nabla f(\gamma(t))$ concluimos que: $\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9}x_1(t) \\ \frac{2}{16}x_2(t) \end{bmatrix}$. Sabemos assim por Cálculo I (e.g, Guia 2 Cálculo I, Seção 7, teorema 7) que $x_1(t) = c_1\exp(\frac{2t}{9})$ e $x_2(t) = c_2\exp(\frac{t}{8})$. Como $(x_1(0), x_2(0)) = (\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{2}})$, concluimos que $x_1(t) = \frac{3}{\sqrt{2}}\exp(\frac{2t}{9})$ e $x_2(t) = \frac{4}{\sqrt{2}}\exp(\frac{t}{8})$

(b.2) (0,5 pt). As curvas encontram-se na Figura 3. Note em particular que o esboço de γ segue facilmente do fato que $\gamma'(t) = \nabla f \circ \gamma$ ser ortogonal as curvas de nível de f passando por $\gamma(t)$, bem como $\lim_{t \to +\infty} \frac{x_2}{x_1} = 0$.

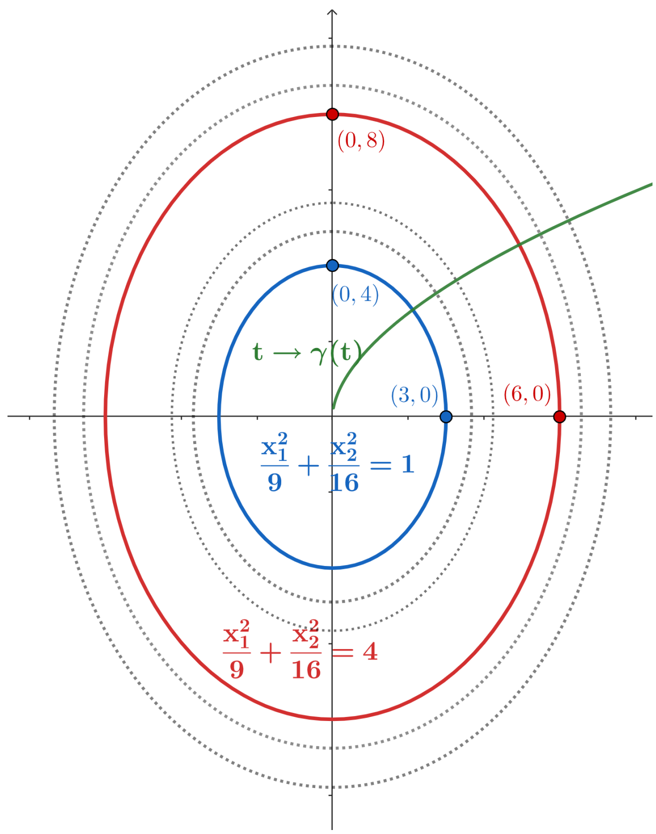

Figura 3: Questão 2 item (b.2)