

Cálculo Avançado

Notas de aula do
Prof. Marcos M. Alexandrino (IME-USP)
(com co autoria de Dra. Yunelsy N. Alvarez)

Sumário

Prefácio		iii
Agradecimentos		v
1	Variedades mergulhadas em espaços Euclidianos	1
1.1	Submersões e imersões	1
1.2	Espaços tangentes e métrica induzida	11
1.3	Campos de vetores e o campo gradiente	18
1.3.1	Campos de vetores	18
1.3.2	Campo gradiente	19
1.3.3	Colchete de campos, um primeiro contato	21
1.4	Multiplicadores de Lagrange	22
1.5	Hessiano e extremos	28
1.5.1	Extremos locais	31
1.5.2	Critérios de classificação de pontos críticos	36
1.5.3	Fórmula de Taylor de ordem maior	41
1.5.4	Máximos e mínimos absolutos	43
1.6	*Curvatura de Gauss de superfícies	44
1.7	*Hessiana orlada	52
1.7.1	Motivação e o Teorema do Hessiano Orlado	53
1.7.2	**Ideia da Prova	55
	Índice Remissivo	59

Prefácio

Estas são notas de aulas da disciplina ministrada pelo Prof. Marcos Alexandrino que estão sendo completamente revisadas e ampliadas pela co-autora Dra. Yunelsy Nápoles Alvarez (durante seu pos-doc no IME-USP). Esta previsto que tais notas sejam a primeira parte (primeiro volume) de um projeto mais elaborado (Cálculo Avançado e Geometria Riemanniana), sendo que nos próximos volumes contaremos com co-autorias dos Profs. Francisco C. Caramello Jr e Leonardo F. Cavenaghi.

Os objetivos deste volume de Cálculo Avançado são:

Primeiro partindo sempre de motivações de Cálculo II e Cálculo III introduzir os vários conceitos da disciplina, dentre eles: variedade mergulhada, teorema de submersão, imersão, posto, campos de vetores, teorema de Frobenius, integração em \mathbb{R}^n incluindo teorema de Fubini e mudança de variáveis, e uma introdução a formas diferenciáveis em variedades com uma versão do teorema de Stokes com suas aplicações a Cálculo III.

Segundo, ao longo do texto, sempre que for oportuno, colocar tópicos adicionais destacando ao leitor(a) as conexões da disciplinas com tópicos mais avançados (vários deles com um alerta (*) para informar o leitor(a) que o tópico pode ser pulado de acordo com sua conveniência). Dentre tais tópicos podemos destacar: conceitos de Geometria Diferencial (curvatura de Gauss, conexão, geodésica), Hessianos orlados, conceitos da Teoria Geométrica de Controle e o Teorema de Stefan-Sussmann (incluindo sua demonstração), formulação da mecânica Hamiltoniana e Lagrangiana, e uma ideia do enunciado e da prova do princípio do máximo de Pontryagin.

São Paulo, 2022

Marcos M. Alexandrino

Agradecimentos

Estas são notas em preparação. Agradecemos muito envio de correções e sugestões para o email malex@ime.usp.br

Variedades mergulhadas em espaços Euclidianos

Neste capítulo vamos apresentar alguns resultados sobre teoria das variedades mergulhadas e fixar algumas notações. Por meio de alguns resultados e exercícios esperamos destacar ao leitor ou leitora que muitos dos conceitos e resultados sobre variedades que iremos utilizar são generalizações naturais de resultados que foram apresentados em disciplinas anteriores de Cálculo II ou Cálculo III.

1.1. Submersões e imersões

Já nos primeiros semestres da graduação, engenheiros, matemáticos e físicos encontravam **os espaços de configurações** M (possíveis posições de um certo sistema) como sendo “bons” subconjuntos em espaços Euclidianos \mathbb{R}^{m+k} . Em geral tais conjuntos eram descritos via pre-imagens de k -vínculos $g_i : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}$, i.e., $M = G^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^{m+k}, G(x) = c\}$ onde $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ para $G(x) = (g_1(x), \dots, g_k(x))$ e $c = (c_1, \dots, c_k) \in \mathbb{R}^k$. Sob boas condições conseguimos estabelecer os m graus de liberdade do M (a dimensão de M) como sendo dimensão do espaço menos o número de vínculos. Tais conjuntos eram na verdade o que chamaremos aqui de variedades mergulhadas. As boas condições sobre os vínculos serão revista no teorema de submersão. Antes de estabelecer as definições formais, apresentemos alguns exemplos que ilustram estas ideias. Nestes exemplos, sugerimos que o(a) leitor(a) se concentre mais na intuição e ideias, não se preocupando em demonstrar as afirmações.

Exemplo 1.1.

Dados 2 partículas $p, q \in \mathbb{R}^3$ a uma distância fixa de 1 unidade, o espaço de configuração deste sistema, pode ser descrito como

$$g^{-1}(1) = \{(p, q) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, g(p, q) = 1\}$$

onde a função $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(p, q) = \|p - q\|^2 = \sum_{i=1}^3 |p_i - q_i|^2$$

é nosso *vinculo*.

Exemplo 1.2.

Consideremos o espaço de configuração de um "braço robótico" em um plano com braço em si e antebraço de comprimentos l_1 e l_2 , i.e., conjunto de todos os possíveis 2 segmentos de reta no plano $\overline{0p}$ e \overline{pq} com $\|p\| = l_1$ e $\|p - q\| = l_2$. A configuração do braço é determinada pelo ângulo θ_1 entre eixo x_1 e $\overline{0p}$ e θ_2 ângulo entre eixo x_1 e \overline{pq} . Dado $z_i = e^{i\theta_i}$ temos então que o espaço de configuração é $M = S^1 \times S^1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} | G(z_1, z_2) = (1, 1)\}$ onde $G : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ como $G(z_1, z_2) = (|z_1|^2, |z_2|^2)$

Exemplo 1.3.

Consideremos agora o espaço de configuração de um sólido em \mathbb{R}^3 com centro de massa em 0 , i.e., o conjunto de todas as bases ortonormais $\{q_i\}_{i=1 \dots 3}$ com a mesma orientação da base canônica. Ao colocar as bases nas colunas de matrizes, tal conjunto pode então ser descrito como as matrizes ortogonais com determinante 1, ou seja primeiro consideramos as **matrizes ortogonais**

$$\mathbb{O}(3) := G^{-1}(Id) = \{Q \in \mathbb{GL}^{3 \times 3}(\mathbb{R}) | G(Q) = Id\}$$

onde $G : \mathbb{GL}^{3 \times 3}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}$ é $G(A) = A^t A$, sendo que $\mathbb{GL}^{3 \times 3}(\mathbb{R})$ denota as matrizes com determinante diferente de zero e \mathcal{S} as matrizes simétricas. Possível verificar que \mathcal{S} é um espaço vetorial isomorfo a \mathbb{R}^6 e $\mathbb{GL}^{3 \times 3}(\mathbb{R})$ pode ser identificado com um aberto de \mathbb{R}^9 . Nosso grupo $\mathbb{O}(3)$ terá 3 graus de liber-

Continuação.

dade, i.e., dimensão 3. O espaço de configuração desejado então é a componente conexa de $\mathbb{O}(3)$ das matrizes com determinante 1 denotado por $\mathbb{SO}(3)$ (que tem os mesmos graus de liberdade ou seja com dimensão 3). De fato é possível mostrar que as matrizes de determinante 1 podem ser conectadas continuamente a matriz identidade Id , enquanto as de determinante -1 podem ser conectadas com a matriz $-Id$

Observação 1.4.

Mais geralmente **um sistema mecânico interligado** estará mergulhado em um **sistema mecânico livre** que é descrito como produto de m cópias de $\mathbb{SO}(3) \times \mathbb{R}^3$ (cada cópia descrevendo um corpo rígido e seu centro de massa) com n cópias de \mathbb{R}^3 (cada cópia descrevendo uma partícula). Em particular, no Exemplo 1.2

$$\begin{aligned} \varphi : S^1 \times S^1 &\rightarrow (\mathbb{SO}(3) \times \mathbb{R}^3) \times (\mathbb{SO}(3) \times \mathbb{R}^3) \\ (z_1, z_2) &\mapsto \left((Q(z_1), R(z_1)), (Q(z_2), R(z_1, z_2)) \right) \end{aligned}$$

onde $Q(z_i) : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ é rotação definida como $Q(z_i)(z, t) = (z_i z, t)$ e as aplicações centro de massa são: $R_1(z_1) = r_1 Q(z_1) e_1$, $R_2(z_1, z_2) = l_1 Q(z_1) e_1 + r_2 Q(z_2) e_1$. Aqui r_1 é a distância do centro de massa de $\bar{0}p$ a 0 e r_2 é a distância do centro de massa de $\bar{p}q$ ao link p .

Observação 1.5. Oscilador harmônico

Nossos conjuntos, que serão exemplos naturais de variedades, podem aparecer não só como espaço de configuração de um sistema, mas também como um subconjunto do espaço de fases (posição velocidade) de algum sistema dinâmico. Considere, por exemplo, uma partícula com massa m localizada em uma reta presa a uma mola perfeita. O movimento de tal partícula é descrita pela E.D.O (equação diferencial ordinária) $m\alpha''(t) = -k\alpha(t) = -U'(\alpha(t))$ onde $U(q) = \frac{k}{2}q^2$ é a função potencial. Defina $E : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como a energia total, i.e., $E(q, \dot{q}) = \frac{m}{2}(\dot{q})^2 + U(q)$. Visto que $\frac{d}{dt}E(\alpha(t), \alpha'(t)) = 0$, (o que pode ser facilmente verificado pela regra da cadeia) concluímos que $E(\alpha(t), \alpha'(t)) = c$. Em outras palavras, posição e velocidade da partícula ficam restritas à elipse $E^{-1}(c) = \{(q, \dot{q}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, E(q, \dot{q}) = c\}$.

Após alguns exemplos e motivações estamos prontos para a definição formal de variedade mergulhada. Tal definição implicará, a grosso modo, que uma variedade M de dimensão m será união de conjuntos homeomorfos a abertos de \mathbb{R}^m .

Definição 1.6. Variedade mergulhada

Um conjunto $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$ é uma **m -variedade mergulhada** no espaço Euclidiano \mathbb{R}^{m+k} (ou subvariedade do \mathbb{R}^{m+k}) se para cada $p \in M$ existe uma vizinhança¹ $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^{m+k}$ de p , vizinhança $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^{m+k}$ de q e um difeomorfismo $\tilde{\psi} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ tal que $\tilde{\psi}(p) = q$ e $\tilde{\psi}(U) = V$, onde $U = \tilde{U} \cap M$ e $V = \tilde{V} \cap \{\mathbb{R}^m \times \{0\}\}$. Chamamos a aplicação $\psi = \tilde{\psi}|_U$ de **sistema de coordenada**, e $\varphi := \psi^{-1}$ é chamada de **parametrização**.

Exemplo 1.7. Gráficos

Seja $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave. Considere o gráfico de h em \mathbb{R}^3 , ou seja, o conjunto

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 = h(x_1, x_2)\}.$$

Então M é uma variedade mergulhada em \mathbb{R}^3 pois a aplicação $\tilde{\psi} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\tilde{\psi}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3 - h(x_1, x_2))$$

satisfaz as propriedades da Definição 1.6. De fato, como

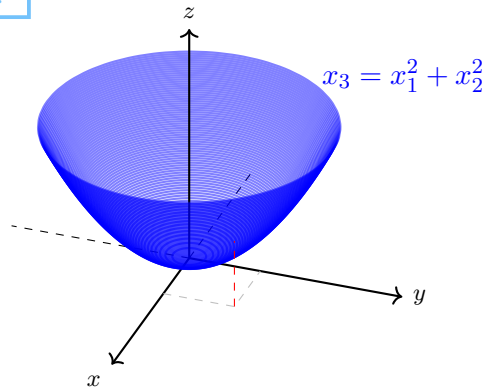
$$D\tilde{\psi}(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\partial h}{\partial x_1} & -\frac{\partial h}{\partial x_2} & 1 \end{bmatrix}$$

para todo $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, então, pelo Teorema da Função Inversa, $\tilde{\psi}$ é um difeomorfismo local de \mathbb{R}^3 . Além disso, $\psi(M) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

Como caso particular observamos que o parabolóide é uma superfície mergulhada pois é o gráfico sobre \mathbb{R}^2 da função $h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

¹Lembre que uma **vizinhança** de um ponto $p \in \mathbb{R}^{m+k}$ é um conjunto aberto e conexo que contém p em seu interior. Lembre também que um **difeomorfismo** é uma aplicação suave com inversa suave.

Continuação.

Figura 1.1: O Parabolóide de equação $x_3 = x_1^2 + x_2^2$

Subvariedades mergulhadas do espaço Euclidiano aparecem naturalmente descrita por “bons vínculos”, ou seja via submersões.

Definição 1.8.

Uma aplicação suave $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ é chamada **submersão** se $DG(x)$ é sobrejetora para todo $x \in U$.

Teorema 1.9. Teorema da Submersão

Seja $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma submersão suave. Então para todo $p_0 \in U$ existe uma vizinhança $U_0 \subset U$ de p_0 tal que a partição $\mathcal{F} = \{G^{-1}(c), c \in \mathbb{R}^k\} \cap U_0$ é difeomorfa à **folheação canônica** $\mathcal{F}_0 = \{\pi^{-1}(c), c \in \mathbb{R}\}$, onde $\pi : \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ é definida como $\pi(x, y) = y$. Mais precisamente existe um difeomorfismo $\tilde{\varphi} : V_0 \rightarrow U_0$ tal que $G \circ \tilde{\varphi}(x, y) = \pi(x, y) = y$.

Exemplo 1.10.

Para ilustrar o Teorema 1.9, consideremos novamente o Exemplo 1.7. Se definirmos a função $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_3 - h(x_1, x_2),$$

vemos que $\mathcal{F} = \{g^{-1}(c), c \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto das translações verticais do gráfico da função h (as quais são movimentos rígidos). O difeomorfismo $\tilde{\varphi} :$

Continuação.

$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$\tilde{\varphi}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3 + h(x_1, x_2))$$

satisfaz

$$g \circ \tilde{\varphi}(x_1, x_2, x_3) = x_3 = \pi(x_1, x_2, x_3).$$

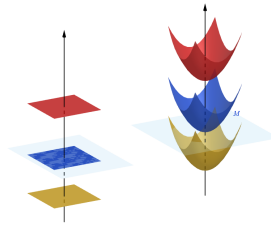


Figura 1.2: As folheações \mathcal{F}_0 e \mathcal{F} no caso em que $h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

Prova do Teorema 1.9. Seja $A : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ um movimento rígido (isometria no espaço Euclidiano) tal que a matriz $D_y \tilde{G}(p_0)$ é invertível onde $\tilde{G} = G \circ A$. Defina $\tilde{\psi}(x, y) = (x, \tilde{G}(x, y))$ e observe que

$$D\tilde{\psi}(p_0) = \begin{bmatrix} Id & 0 \\ D_x \tilde{G}(p_0) & D_y \tilde{G}(p_0) \end{bmatrix}$$

é um isomorfismo. Logo pelo teorema da função inversa $\tilde{\psi} : U_0 \rightarrow V_0$ é um difeomorfismo. Seja $L = \{(x, c) \in (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k) \cap V_0\}$.

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}^{-1}(L) &= \{(x, y) \in U_0, \psi(x, y) = (x, c)\} \\ &= \{(x, y) \in U_0, \tilde{G}(x, y) = c\} \end{aligned}$$

Assim $G \circ A \circ \tilde{\psi}^{-1}(x, c) = c$. A demonstração termina definindo $\tilde{\varphi} = A \circ \tilde{\psi}^{-1}$. \square

²O Teorema da Função Inversa garante que se $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tem $DF(p)$ invertível, então existem vizinhanças U_0 e V_0 de p e $F(p)$ respectivamente, tal que $F|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$ se torna um difeomorfismo.

Definição 1.11.

Dado uma aplicação $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ suave. Suponha que para $c \in G(U)$ temos que $DG(x)$ é sobrejetor $\forall x \in G^{-1}(c)$. Neste caso dizemos que c é **valor regular**.

Observe que dado um valor regular c e um ponto $x \in G^{-1}(c)$ então, como DG_x é sobrejetor, DG_p é sobrejetor para todos os pontos p próximos a x ou seja G se torna uma submersão na vizinhança de $x \in G^{-1}(c)$. Podemos então inferir o seguinte corolário.

Teorema 1.12. Teorema do valor regular

Seja $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma aplicação suave e c um valor regular. Então $M = G^{-1}(c)$ é variedade mergulhada no \mathbb{R}^{m+k} com dimensão m .

Exercício 1.13. Gráficos

Seja $H : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ aplicação suave. Defina o gráfico

$$M = \{(x, y) \in V \times \mathbb{R}^k, y = H(x)\}$$

e a função $G : V \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ como

$$G(x, y) = \sum_{i=1}^k (h_i(x) - y_i)e_{m+i},$$

Verifique que:

- $M = G^{-1}(0)$,
- G é submersão.

Segue também da demonstração do Teorema 1.9 o resultado a seguir.

Teorema 1.14. Teorema da Função Implícita

Seja $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma submersão suave. Então $M = G^{-1}(c)$ é um gráfico local. Mais precisamente suponha que a matriz $D_y G(p_1, p_2)$ é um isomorfismo onde (p_1, p_2) é tal que $c = G(p_1, p_2)$. Então existe uma vizinhança B de (p_1, p_2) , uma vizinhança $W \subset \mathbb{R}^m$ de p_1 uma aplicação suave $H : W \rightarrow \mathbb{R}^k$

Continuação.

tal que: $(x, y) \in B \cap M$ se e somente se $y = H(x)$ com $x \in W$. Em particular $G(x, H(x)) = c$.

Demonstração. Na demonstração do Teorema 1.9 basta considerar $A = Id$. Com c fixado temos $\tilde{\psi}^{-1}(x, c) = (x, \tilde{H}(x, c))$. Então definimos $H(x) = \tilde{H}(x, c)$. \square

Exercício 1.15. Superfície de Revolução

Seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Suponha que c é valor regular da função $(r, x_3) \rightarrow g(r^2, x_3)$. Seja

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, g(x_1^2 + x_2^2, x_3) = c\}.$$

Verifique que M é **superfície de revolução**, i.e., variedade mergulhada de dimensão 2 invariante por rotações que fixam o eixo x_3 (vide o exemplo da Figura 1.3).

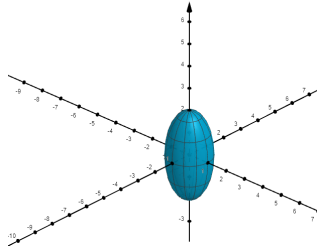


Figura 1.3: $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{4}x_3^2 = 1\}$ ilustra o Exercício 1.15

Observação 1.16.

No exercício anterior temos então uma variedade M que admite uma aplicação $\mu : G \times M \rightarrow M$ (onde $G = S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, $M = \mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$), definida como

$$\mu(g, (z, t)) = (gz, t).$$

Observe que tal aplicação μ atende as propriedades a seguir:

- $\mu(e, x) = x$;
- $\mu(g_2, \mu(g_1, x)) = \mu(g_2g_1, x)$.

Continuação.

Em geral, uma aplicação $\mu : G \times M \rightarrow M$ (G um grupo de Lie, por exemplo, um grupo fechado de matrizes, e M uma variedade) que satisfaz essas propriedades será denominada **ação**.

Uma outra forma em que encontrávamos variedades mergulhadas no espaço Euclidiano era via as imersões (as parametrizações).

Definição 1.17.

Uma aplicação suave $\varphi : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ é chamada **imersão** se $D\varphi(x)$ é injetora para todo $x \in V$.

Teorema 1.18. Teorema de imersão

Seja $\varphi : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ uma imersão. Então dado $p \in V$ existe uma vizinhança $V_0 \subset V$ de p tal que $\varphi(V_0)$ é variedade mergulhada. Mais precisamente, existe uma vizinhança \tilde{U} em \mathbb{R}^{m+k} de $\varphi(p)$, uma vizinhança \tilde{V}_0 de $(p, 0)$ em \mathbb{R}^{m+k} e um difeomorfismo $\tilde{\psi} : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \tilde{V}_0 \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ tal que $\tilde{\psi} \circ \varphi(x) = (x, 0)$.

Demonstração. Escolha um movimento rígido $A : \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ tal que a aplicação $\hat{\varphi} = A \circ \varphi$ tem a propriedade que a matriz $(\frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial x_j})(p)$ é invertível onde $1 \leq j \leq m$ e $1 \leq i \leq m$.

Vamos definir então

$$\begin{aligned} F(x, y) &= (\hat{\varphi}_1(x), \dots, \hat{\varphi}_m(x), \hat{\varphi}_{m+1}(x) + y_1, \dots, \hat{\varphi}_{m+k}(x) + y_k) \\ &= \hat{\varphi}(x) + (0, y) \end{aligned}$$

Observe que a matriz

$$DF(p) = \begin{bmatrix} \pi_1 \circ D\hat{\varphi}_p & 0 \\ \pi_2 \circ D\hat{\varphi}_p & Id \end{bmatrix}$$

é invertível, onde $\pi_1(x, y) = x$ e $\pi_2(x, y) = y$.

Concluimos, assim, pelo teorema da função inversa que $F : \tilde{V}_0 \rightarrow \tilde{U}$ é um difeomorfismo, para as vizinhanças apropriadas. A demonstração termina observando que a aplicação definida como $\tilde{\psi} = F^{-1} \circ A$ atende as propriedades necessárias. De fato,

$$(x, 0) = F^{-1} \circ F(x, 0) = F^{-1} \circ \hat{\varphi}(x) = F^{-1} \circ A \circ \varphi(x).$$

□

Exemplo 1.19.

Consideremos novamente o gráfico de uma função suave $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja, o conjunto

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 = h(x_1, x_2)\}.$$

Definamos a aplicação $\varphi : \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ por

$$\varphi(x_1, x_2) = (x_1, x_2, h(x_1, x_2)),$$

que é uma imersão pois

$$D\varphi(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ h_{x_1} & h_{x_2} \end{bmatrix}.$$

Considerando agora o difeomorfismo do Exemplo 1.7, temos

$$(\psi \circ \varphi)(x_1, x_2) = \psi(\varphi(x_1, x_2)) = \psi(x_1, x_2, h(x_1, x_2)) = (x_1, x_2, 0).$$

Exercício 1.20.

Seja M^2 superfície mergulhada em \mathbb{R}^3 invariante por rotação no eixo x_3 , ou seja, uma superfície de rotação. Verifique que a aplicação $\varphi : V \rightarrow M$ definida como

$$\varphi(t, \theta) = (r(t) \cos(\theta), r(t) \sin(\theta), h(t))$$

é uma parametrização de M^2 , onde $\beta(t) = (r(t), 0, h(t))$ é uma parametrização da curva geratriz com as propriedades que $\|\beta'\| \neq 0$ e $r(t) \neq 0$. Em outras palavras verifique que φ é uma imersão e sua imagem está contida em M^2 , vide Figura 1.4.

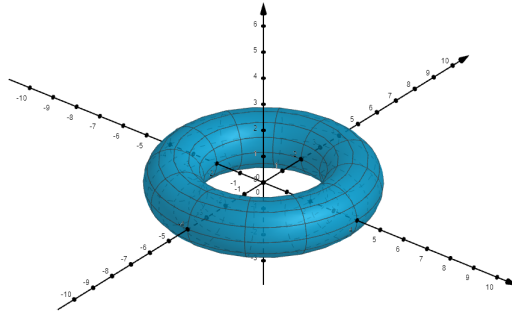


Figura 1.4: A aplicação $\varphi(t, \theta) = ((\cos(t) - 3) \cos(\theta), (\cos(t) - 3) \sin(\theta), \sin(t))$ é uma parametrização que ilustra o Exercício 1.20.

1.2. Espaços tangentes e métrica induzida

Antes de definir espaço tangente, precisamos fixar o conceito de vetores com pé e fibrado tangente do espaço Euclidiano. Dado um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, definimos:

- **fibrado tangente** de U como $TU = U \times \mathbb{R}^m$,
- **projecção pé** $\pi : TU \rightarrow U$ como $\pi(q, v) = q$,
- **espaço tangente** $T_qU = \mathbb{R}^m = \pi^{-1}(q)$

Um elemento $v_q \in T_qU$ será chamado **vetor com pé** e frequentemente pode modelar uma **velocidade** de uma partícula passando pela *posição* q . De fato, v_q é o vetor velocidade da curva $q + tv_q$ (onde t é suficientemente pequeno). Mais geralmente dado uma curva suave $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow U$, com $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t))$ temos o vetor velocidade $\alpha'(t) = (\alpha(t), \dot{\alpha}(t)) \in T_{\alpha(t)}U$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, onde $\dot{\alpha}(t) = (\frac{d}{dt}\alpha_1(t), \dots, \frac{d}{dt}\alpha_m(t))$.

Além disto dado uma aplicação suave $F : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ podemos criar uma aplicação linear entre espaços tangentes definindo $dF_q : T_qU \rightarrow T_{F(q)}\mathbb{R}^{m+k}$ como $dF_p(v_p) = (p, DF(p)V)$. Em particular definindo a curva $\beta(t) = F \circ \alpha(t)$, relemos a regra da cadeia como: $dF_{\alpha(0)}\alpha'(0) = \beta'(0)$

Definição 1.21.

Seja $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$ uma m -variedade mergulhada e $\varphi : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U \subset M$ uma parametrização. Então o subespaço $T_p M = d\varphi_q T_q V \subset T_p \mathbb{R}^{m+k}$ é chamado de **espaço tangente** no ponto $p = \varphi(q)$.

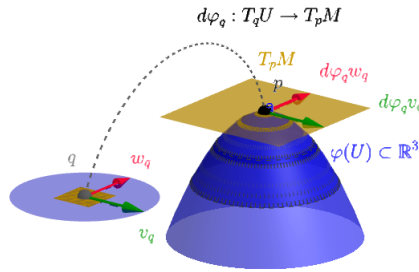


Figura 1.5: Dado uma imersão $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, uma base $\{v_q, w_q\}$ de $T_q U$ é levada em uma base $\{d\varphi_q v_q, d\varphi_q w_q\}$ de $T_q M$

Segue diretamente da definição anterior que $\dim T_p M = m$.

O exercício a seguir mostra que o espaço tangente não depende da parametrização escolhida, logo, está *bem definido*.

Exercício 1.22.

Considere duas parametrizações $\varphi_i : V_i \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$ de uma variedade mergulhada $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$ tal que $W := \varphi_1(V_1) \cap \varphi_2(V_2) \neq \emptyset$. Verifique que se $\varphi_1(0) = p = \varphi_2(0)$ então $(d\varphi_1)_0 T_0 \mathbb{R}^m = (d\varphi_2)_0 T_0 \mathbb{R}^m$.

Veremos a seguir diferentes interpretações do espaço tangente. Em particular, o plano tangente de uma superfície pode ser visto como o espaço dos vetores velocidades de curvas contidas na superfície (vide Figura 1.6). Além disso, se a superfície for uma superfície de nível $M^2 = g^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^3; g(x) = c\}$, então o espaço tangente em p será perpendicular à $\nabla g(p)$.

Proposição 1.23.

Seja $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$ uma variedade mergulhada e $p \in M$. Então todo vetor de

Continuação.

T_pM é a velocidade de uma curva contida em M e passando por p .

Demonstração. Seja $\varphi : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$ uma parametrização tal que $\varphi(0) = p$. Se $v \in T_pM$, então existe $w \in T_0V$ tal que $v = d\varphi_0(w)$ (veja Definição 1.21). Seja ε suficientemente pequeno de forma tal que o seguimento $r(t) = tw$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, esteja contido em U . Assim, a curva $\alpha(t) = \varphi \circ r(t)$ é uma curva em M satisfazendo $\alpha(0) = \varphi(r(0)) = \varphi(0) = p$ e $\alpha'(0) = d\varphi_{r(0)}(r'(0)) = d\varphi_0(w) = v$, como desejado. \square

Proposição 1.24.

Se $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$ é a pré imagem de um valor c de uma submersão $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$, então T_pM coincide com o núcleo de dG_p .

Demonstração. Seja $v \in T_pM$ o vetor velocidade de uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ passando por p (veja Proposição 1.23). Sendo $M = G^{-1}(c)$, temos que $G \circ \alpha(t) = c$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Logo,

$$dG_p(v) = dG_{\alpha(0)}(\alpha'(0)) = (G \circ \alpha)'(0) = 0,$$

mostrando que v pertence ao núcleo de dG_p . Como v é qualquer, segue que $T_pM \subset \text{Ker}(dG_p)$.

Por outro lado, como G é uma submersão, $\dim(\text{Im}(dG_p)) = k$. Além disso, de Álgebra Linear sabemos que

$$\dim(\mathbb{R}^{m+k}) = \dim \text{Ker}(dG_p) + \dim(\text{Im}(dG_p)),$$

logo,

$$\dim(\text{Ker}(dG_p)) = m = \dim(T_pM),$$

concluindo que esses espaços coincidem. \square

Observação 1.25.

A Proposição 1.24 implica que os gradientes das componentes de G são ortogonais a

Continuação.

$T_p M$. De fato, supondo que $G(x) = (g_1(x), \dots, g_k(x))$, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= DG_p(vs) \\ &= (G \circ \alpha)'(0) \\ &= ((g_1 \circ \alpha)'(0), \dots, (g_k \circ \alpha)'(0)) \\ &= (\langle \nabla g_1(\alpha(0)), \alpha'(0) \rangle, \dots, \langle \nabla g_k(\alpha(0)), \alpha'(0) \rangle) \\ &= (\langle \nabla g_1(p), v \rangle, \dots, \langle \nabla g_k(p), v \rangle). \end{aligned}$$

Observação 1.26.

Em Cálculo II, dado uma superfície $M = g^{-1}(c)$, (para c valor regular de uma função $g : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$) costumamos ter uma identificação entre o espaço tangente $T_p M \subset T_p \mathbb{R}^3$ com um plano cujo vetor normal é dado pelo $\nabla g(p)$, i.e.,

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^3; \sum_{i=1}^3 \frac{\partial g}{\partial x_i}(q)(x_i - p_i) = 0\}$$

Tal plano **também é chamado plano tangente**. A identificação entre $T_p M$ e \mathcal{P} é feita pela aplicação $\exp_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $\exp_p(v_p) = \gamma_{v_p}(1)$ onde $t \rightarrow \gamma_{v_p}(t) = p + tv$. Proposição 1.24 e a Observação 1.25 implicam que $\exp_p(T_p M) = \mathcal{P}$. Note que $\exp_x(T_x \mathcal{P}) = \mathcal{P} \forall x \in \mathcal{P}$ e tal propriedade só é realizada por uma superfície em \mathbb{R}^3 que seja um plano.

Exercício 1.27.

Determine o plano tangente ao toro $M = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 3)^2 + x_3^2 = 1\}$ passando pelo ponto $p = (\frac{7}{4}, \frac{7\sqrt{3}}{4}, \frac{2\sqrt{3}}{4})$.

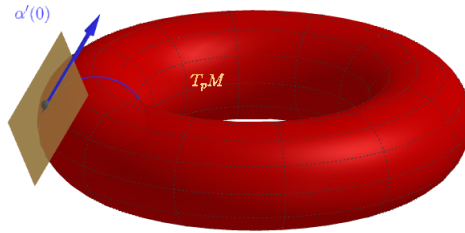


Figura 1.6: Plano tangente ao toro do Exercício 1.27

Exemplo 1.28.

Seja $F : \mathbb{GL}^{m \times m}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}^{m \times m}(\mathbb{R})$ a aplicação suave $F(A) = A^t A$, onde $\mathbb{GL}^{m \times m}(\mathbb{R})$ são as matrizes quadradas $m \times m$ invertíveis, $\mathcal{S}^{m \times m}(\mathbb{R})$ são as matrizes simétricas com entradas reais e A^t denotada a matriz transposta de A . Desejamos aqui:

- (a) verificar que Id é valor regular de F e assim concluir que

$$F^{-1}(Id) = \mathbb{O}(m) = \{Q \in \mathbb{GL}^{m \times m}(\mathbb{R}); Q^t Q = Id\}$$

é variedade mergulhada de $\mathbb{GL}^{m \times m}(\mathbb{R})$, a qual chamamos grupo de Lie das **matrizes ortogonais**;

- (b) verificar que o espaço tangente em $Q \in \mathbb{O}(m)$ é

$$T_Q \mathbb{O}(m) = \text{Ker } dF_Q = \{QX; X \in \mathfrak{o}(m)\}$$

onde $\mathfrak{o}(m) = \{X; X^t + X = 0\}$ é chamada **álgebra de Lie do grupo das matrizes ortogonais**.

Solução.

(a). Aqui dado $Q \in \mathbb{O}(m)$ desejamos verificar que $dF_Q : T_Q \mathbb{GL}^{m \times m}(\mathbb{R}) \rightarrow T_{Id} \mathcal{S}^{m \times m}$ é sobrejetora. ^a Para tanto dado $S \in \mathcal{S}^{m \times m}$ desejamos encontrar $W \in T_Q \mathbb{GL}^{m \times m}(\mathbb{R})$ tal que $dF_Q W = S$.

Para encontrar um *candidato natural* W vamos seguir um *raciocínio reverso*. Suponha que já tivéssemos demonstrado que dF_Q é sobrejetor. Então $T_Q \mathbb{GL}^{m \times m}(\mathbb{R}) = \text{Ker } dF_Q \oplus \mathcal{V}_Q$ sendo $dF_Q|_{\mathcal{V}_Q} : \mathcal{V}_Q \rightarrow \mathcal{S}^{m \times m}$ isomorfismo. Se já tivéssemos demonstrado que Id fosse valor regular, saberíamos

Continuação.

que $T_Q\mathbb{O}(m) = \text{Ker } dF_Q$ (vide Proposição 1.24) e, assim, \mathcal{V}_Q seria um espaço transversal da variedade $\mathbb{O}(m)$. Continuando nosso raciocínio reverso e aceitando o item (b) (o qual afirma que o espaço tangente $\mathbb{O}(m)$ são matrizes QX para X anti-simétrica) poderíamos concluir que \mathcal{V}_Q poderia ser escolhido como o espaço dos vetores $Q\tilde{S}$ para matrizes simétricas \tilde{S} , uma vez que toda matriz é soma de matrizes anti-simétricas e simétricas.

Tendo um candidato $W = Q\tilde{S}$ (para uma matriz simétrica \tilde{S} a ser devidamente calibrada) vamos considerar a curva $t \rightarrow \beta(t) = Q + tQ\tilde{S}$ para $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ onde ϵ é pequeno suficiente. Assim utilizando o fato que $\tilde{S}^t = S$ e $Q^tQ = Id$ concluímos

$$\begin{aligned} dF_QW &= dF_Q\beta'(0) \\ &= \frac{d}{dt}\{F \circ \beta\}|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\{(Q + tQ\tilde{S})^t(Q + tQ\tilde{S})\}|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\{Q^tQ + t\tilde{S}Q^tQ + tQ^tQ\tilde{S} + t^2\tilde{S}Q^tQ\tilde{S}\}|_{t=0} \\ &= 2\tilde{S}. \end{aligned}$$

Assim, dado S e escolhendo $W = \frac{1}{2}QS$, concluímos que $dF_Q(W) = S$. A arbitrariedade da escolha de S e Q implica que Id é valor regular e terminamos de verificar o item (a).

(b) Para verificar este item é suficiente verificar que

$$\{QX; X \in \mathfrak{o}(m)\} \subset \text{Ker } dF_Q = T_Q\mathbb{O}(m). \quad (1.2.1)$$

visto que os dois espaços vetoriais tem mesma a dimensão. Observe que

$$e^{tX} \in \mathbb{O}(m), \text{ para } X \in \mathfrak{o}(m) \quad (1.2.2)$$

onde $e^{tX} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n A^n$ (exponencial matricial). De fato:

$$\begin{aligned} (e^{tX})^t(e^{tX}) &= e^{tX^t}e^{tX} \\ &= e^{-tX}e^{tX} \\ &= Id. \end{aligned}$$

Continuação.

Como $\mathbb{O}(m)$ é um grupo, $\alpha(t) := Qe^{tX} \in \mathbb{O}(m)$. Logo $Id = F(\alpha(t))$ e assim:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \{F \circ \alpha(t)\}|_{t=0} \\ &= dF_{\alpha(0)} \alpha'(0) \\ &= dF_Q QX \end{aligned}$$

o que termina também a prova da Equação (1.2.1)

^aPodemos identificar $\mathbb{R}^{m^2} = T_Q \mathbb{GL}^{m \times m}(\mathbb{R})$ e $T_{Id} \mathbb{S}^{m \times m} = \mathbb{R}^{\frac{m^2+m}{2}}$. A dimensão das matrizes anti simétricas é calculada levando em consideração que a diagonal é zero e a matriz é determinada pelas entradas abaixo da diagonal. Logo dimensão das anti-simétricas é $\frac{m^2-m}{2}$. A dimensão das matrizes simétricas é a dimensão das anti-simétricas somada com m (que corresponde agora aos elementos da diagonal, visto que as simétricas podem ter entradas não nulas na diagonal). Ou seja $m + \frac{m^2-m}{2} = \frac{m^2+m}{2}$

Observação 1.29.

Como observado anteriormente $\mathbb{SO}(m)$ é a componente conexa da variedade $\mathbb{O}(m)$ contendo a identidade e assim também é variedade com a mesma dimensão. Os grupos $\mathbb{O}(m)$ e $\mathbb{SO}(m)$ são exemplos de grupos de Lie compactos, bem como o grupo $\mathbb{SU}(m)$. Bom notar também que $\mathbb{GL}^{m \times m}(\mathbb{R})$ (matrizes com determinante diferente de zero) e $\mathbb{SL}(m)$ (matrizes com determinante 1) são exemplos de grupos (de Lie) não compactos.

Sabendo que o espaço tangente a uma subvariedade mergulhada é um subespaço vetorial, é algo natural querer pensar em algumas estruturas usuais dos espaços vetoriais tais como produto interno e norma.

Definição 1.30.

Seja M variedade mergulhada em \mathbb{R}^{m+k} . Definimos a *métrica induzida* ou *primeira forma* como sendo o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ em $T_p \mathbb{R}^{m+k}$ restrito ao espaço tangente, isto é,

$$g_p(u, v) = \langle u, v \rangle_p, \quad \forall u, v \in T_p M, \quad \forall p \in M.$$

Além disso, dada uma parametrização $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$, os valores

Continuação.

$g_{ij} = \langle d\varphi_p(e_i), d\varphi_p(e_j) \rangle$, são os coeficientes da métrica induzida referentes a essa parametrização.

Exercício 1.31. Superfície de Revolução

Considere M uma superfície de revolução em \mathbb{R}^3 . Temos então a parametrização

$$\psi(t, s) = (r(t) \cos(s), r(t) \sin(s), h(t)),$$

onde $t \rightarrow \beta(t) = (r(t), 0, h(t))$ é a curva geratriz com $\|\beta'(t)\| \neq 0$. Então

$$\psi_t = \frac{\partial \psi}{\partial t} = (r'(t) \cos(s), r'(t) \sin(s), h'(t))$$

$$\psi_s = \frac{\partial \psi}{\partial s} = (-r(t) \sin(s), r(t) \cos(s), 0)$$

Verifique que a métrica em coordenadas é:

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} (r'(t))^2 + (h'(t))^2 & 0 \\ 0 & (r(t))^2 \end{bmatrix}$$

1.3. Campos de vetores e o campo gradiente

Vamos nesta seção recordar alguns conceitos e resultados vistos em Cálculo II. Mais resultados sobre campos de vetores serão discutidos no Capítulo ??.

1.3.1. Campos de vetores

Um **campo** \vec{F} **suave** em um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ é uma aplicação suave $\vec{F} : U \rightarrow U \times \mathbb{R}^m$ definida como $\vec{F}(x) = (x, F(x))$ onde $F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ é uma aplicação suave $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Ou seja uma aplicação do nosso *espaço de configurações* U para o nosso *espaço de fases* $U \times \mathbb{R}^m$ tal que $\pi \circ \vec{F}(x) = x$ onde $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é a projeção canônica $\pi(x, v) = x$. Visto que nosso espaço de fases é um produto trivial é possível escrever o campo \vec{F} em termos dos **campos canônicos** $\vec{e}_i(x) = (x, e_i)$ da forma

$$\vec{F} = \sum_i f_i \vec{e}_i, \quad (1.3.1)$$

vide Figura 1.3.2.

Teorema 1.32.

Dado um campo \vec{F} campo em $U \subset \mathbb{R}^m$ de classe C^k e $p \in U$. Então existe uma única curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ de classe C^k tal que

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= \vec{F}(\gamma(t)) \\ p &= \gamma(0)\end{aligned}$$

Exemplo 1.33.

Seja $F(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ i.e., $\vec{F}(x_1, x_2) = x_1\vec{e}_1 + \frac{3}{2}x_2\vec{e}_2$ e $p = (1, 2)$.

Então, por Cálculo I, $\gamma(t) = (\exp(t), 2\exp(\frac{3}{2}t))$

O exemplo acima ilustra o que chamamos **campo linear**, ou seja a aplicação $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é linear (i.e., $F(x) = Ax$).

1.3.2. Campo gradiente

Chamamos de **campo gradiente** de uma função f ao campo

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \vec{e}_i.$$

Note que a equação acima parece depender dos campos canônicos. O Teorema de Representação de Riezs nos permite retirar essa dependência como podemos ver na seguinte definição.

Definição 1.34.

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Definimos o *vetor gradiente* de f em $p \in U$, denotado por $\nabla f(p)$, como sendo o único vetor de \mathbb{R}^n satisfazendo

$$df(p)X = \langle \nabla f(p), X \rangle \quad \forall X \in \mathbb{R}^n.$$

Observe que,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = df(p)e_i = \langle \nabla f(p), e_i \rangle. \quad (1.3.2)$$

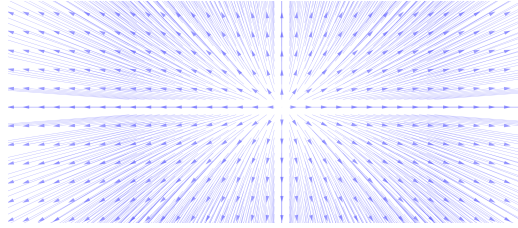


Figura 1.7: Campo $\vec{F} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{3}{2} x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$

Logo,

$$\nabla f(p) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla f(p), e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) e_i. \quad (1.3.3)$$

Como aprendemos em Cálculo, segue da regra da cadeia, que campo gradiente indica direção e sentido de maior crescimento da função f e, como vimos antes (vide Observação 1.25), ele é ortogonal as superfícies de níveis $f^{-1}(c)$.

Observação 1.35.

Nem todo campo vetorial é o gradiente de uma função diferenciável. Para ver isto considere, por exemplo, o campo $\vec{F}(x_1, x_2) = x_2 \vec{e}_1 - x_1 \vec{e}_2$. Vamos supor por absurdo que existisse uma função f tal que $\nabla f = \vec{F}$. Então teríamos $\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2$ e $\frac{\partial f}{\partial x_2} = -x_1$. Por outro lado, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$. Chegamos assim a um absurdo pois $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = -1$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 1$. Logo não existe a tal f .

Uma vez recordado o relevante conceito de campos, podemos definir **um campo suave \vec{F} de uma variedade mergulhada $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$** como sendo uma aplicação que a cada $p \in M$ associa $\vec{F}(p) \in T_p M$ e que admite uma extensão local de um campo suave em \mathbb{R}^{m+k} . Vamos denotar o conjunto de campos suaves de M como $\mathfrak{X}(M)$.

Campo gradiente Riemanniano

Vimos na Definição 1.34 que o gradiente de uma função $\tilde{f} : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}$ definida no espaço euclidiano, poderia ser intrinsecamente definido em termos do produto interno (ou seja, não depende de coordenadas). Além disto, o vetor $\nabla \tilde{f}(p)$ indicava a direção e sentido de crescimento de \tilde{f} no ponto p .

Desejamos agora considerar a mesma discussão porém para uma função f que esteja definida em uma variedade M^m . Em particular, queremos encontrar o campo tangente à variedade que indica o crescimento da função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Definição 1.36.

Considere uma função $\tilde{f} : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável e $M \subset U$ uma subvariedade mergulhada em \mathbb{R}^{m+k} . Defina $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ a restrição da função \tilde{f} a M , ou seja, $f = \tilde{f}|_M$. Definimos o campo **gradiente Riemanniano** $\text{grad } f(p)$ como o campo tangente a M que atende:

$$d\tilde{f}_p X = \langle \text{grad } f(p), X \rangle, \forall X \in T_p M. \quad (1.3.4)$$

Em particular, $\text{grad } f(p)$ é a parte tangente de $\nabla \tilde{f}(p)$.

Observação 1.37.

No caso em que na definição anterior M seja a pre-imagem de um valor regular c de uma função suave $g : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}$ (ou seja, $M = g^{-1}(c)$), segue diretamente da Observação 1.25 que

$$\text{grad } f(p) = \nabla \tilde{f}(p) - \left\langle \nabla \tilde{f}(p), \frac{\nabla g(p)}{\|\nabla g(p)\|} \right\rangle \frac{\nabla g(p)}{\|\nabla g(p)\|}$$

Segue diretamente de (1.3.4) que a maior taxa de variação de $f = \tilde{f}|_M$ ocorre na direção e sentido do vetor gradiente Riemanniano.

1.3.3. Colchete de campos, um primeiro contato

Nesta subseção apresentaremos rapidamente o operador colchete de campos e algumas de suas propriedades. No próximo capítulo discutiremos seu significado geométrico. A grosso modo veremos que o colchete de campos mede a não comutatividade dos fluxos dos campos. Porém, no momento estamos apenas interessados em sua definição no espaço Euclidiano e algumas de suas propriedades (a serem utilizadas ainda neste capítulo).

Sejam $\vec{V} = \sum_i v_i(x) \vec{e}_i$ e $\vec{W} = \sum_i w_i(x) \vec{e}_i$ dois campos de vetores no espaço Euclidiano \mathbb{R}^{m+k} . Definimos o **campo colchete** como sendo

$$[\vec{V}, \vec{W}] = D_V \vec{W} - D_W \vec{V}, \quad (1.3.5)$$

onde (vide Exemplo ??)

$$D_W \vec{V}_p = \sum_{i=1}^m dv_i(W) \vec{e}_i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial v_i}{\partial W_p}(p) \vec{e}_i.$$

Na verdade, $D_W \vec{V}_p$ é o campo cujas componentes em p são as derivadas direcionais das componentes de V com respeito a W_p .

Exercício 1.38.

Escreva $[\vec{V}, \vec{W}]$ em termos dos campos canônicos \vec{e}_i .

Proposição 1.39.

- Se \vec{V} e \vec{W} são tangentes a uma subvariedade mergulhada $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$, então $[\vec{V}, \vec{W}]$ é tangente a M
- $[\vec{V}, \vec{W}] = -[\vec{W}, \vec{V}]$
- $[\vec{V}, \vec{W} + \lambda \vec{Z}] = [\vec{V}, \vec{W}] + \lambda [\vec{V}, \vec{Z}]$
- $[[\vec{V}, \vec{W}], \vec{Z}] + [[\vec{Z}, \vec{V}], \vec{W}] + [[\vec{W}, \vec{Z}], \vec{V}] = 0$

1.4. Multiplicadores de Lagrange

Problemas de otimização estão presentes no dia a dia de engenheiros e economistas, usualmente tais problemas estão sujeitos a uma ou várias restrições. Tais restrições podem ser vistas como variedades mergulhadas em espaços Euclidianos, frequentemente dados por submersões. Nesta seção iremos aplicar alguns dos conceitos e resultados anteriores para provar o clássico resultado de multiplicadores de Lagrange.

Proposição 1.40.

Considere uma função suave $g : U \subset \mathbb{R}^2$ e sua curva de nível associada a um valor regular c ,

$$C = g^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^2, g(x) = c\}.$$

Continuação.

Seja $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ função suave. Suponha que $u|_C$ (ou seja u restrita a C) tenha um ponto de máximo ou mínimo em $p \in C$. Então, $\nabla u(p)$ é perpendicular a C , ou seja, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p).$$

Demonstração. Vamos dar uma prova para o caso em que p é máximo, o outro caso é análogo.

Como c é valor regular temos que existe uma parametrização $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow C$ com $\alpha'(t) \neq 0$ e $\alpha(0) = p$ (poderíamos, por exemplo, usar o teorema da função implícita e tomar $\alpha(t) = (t + x_0, h(t + x_0))$).

Lembrando da Observação 1.25, temos que $\nabla g(p)$ é ortogonal a $\alpha'(0)$. De fato, $c = g(\alpha(t))$ para $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ e derivando concluímos

$$0 = \left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} g(\alpha(t)) \right|_{t=0} = \langle \nabla g(p), \alpha'(0) \rangle.$$

Por outro lado, como u tem máximo em $p = \gamma(0)$ temos que $t \rightarrow u(\gamma(t))$ tem ponto crítico no interior e assim

$$0 = \left. \frac{d}{dt} u(\alpha(t)) \right|_{t=0} = \langle \nabla u(p), \alpha'(0) \rangle$$

As duas equações acima garantem que $\nabla g(p)$ e $\nabla u(p)$ são paralelos, ou seja, $\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. \square

Exemplo 1.41. Cobb-Douglas e orçamento de 2 produtos

Consideremos o seguinte problema clássico de micro-economia.

Seja $C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 - w = 0 \text{ e } x_1, x_2 \geq 0\}$ o segmento de reta que representa um vínculo orçamentário de dois produtos. Ou seja, o consumidor tem um orçamento w e pode comprar quantidades x_1 e x_2 de produtos que custam $R\$2$ e $R\$1$, respectivamente.

Nosso objetivo aqui é maximizar uma função utilidade dado a restrição orçamentária acima. Lembremos que uma função utilidade associa a cada cesta de produtos (x_1, x_2) um número $u(x_1, x_2)$ que representa a preferência do consumidor por aquela cesta. Consideraremos aqui como função utilidade a função de Cobb Douglas

$$u(x) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}.$$

Pela Proposição 1.40, se $s = (s_1, s_2)$ é um ponto de máximo, ele deve

Continuação.

atender

$$\left(\frac{1}{2} s_1^{-\frac{1}{2}} s_2^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2} s_2^{-\frac{1}{2}} s_1^{\frac{1}{2}} \right) = \nabla u(s) = \lambda \nabla g(s) = \lambda(2, 1)$$

$$w = 2s_1 + s_2$$

Resolvendo o sistema acima concluímos que $s(w) = (\frac{w}{4}, \frac{w}{2})$. Ou seja, as quantidades dos produtos 1 e 2 que maximizam a função utilidade são $\frac{w}{4}$ e $\frac{w}{2}$, respectivamente. A utilidade máxima é $u(s(w)) = \frac{w}{2\sqrt{2}}$.

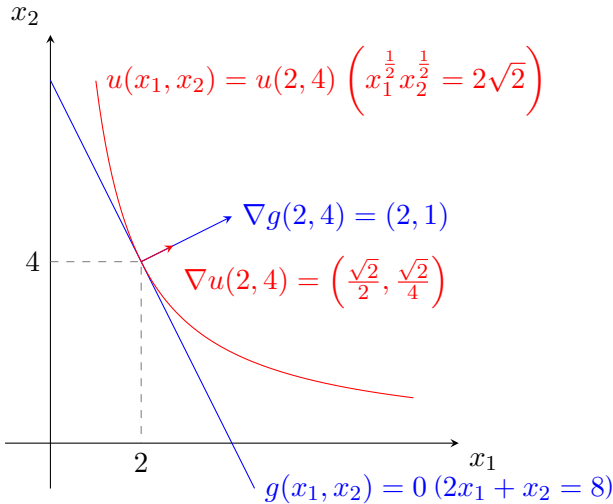


Figura 1.8: Representação do Exemplo 1.41: restrição orçamentária com $w = 8$, a utilidade máxima sujeita à restrição orçamentária⁴, e os gradientes de ambas funções no ponto de máximo $p = (2, 4)$

Observação 1.42. Shadow prices e família de vínculos

No caso bem particular de Cobb Douglas temos a existência de um único máximo $s(w)$ para cada vínculo $C_w = g^{-1}(w)$, o que nos dá uma curva diferenciável $w \rightarrow s(w) \in C_w$, vide Figura 1.9. Em particular $g \circ s(w) = w$ Por ser má-

⁴Comentamos que uma curva de nível da função utilidade costuma de ser chamada de **curva de indiferença**.

Continuação.

ximo temos: $\nabla u(s(w)) = \lambda(w)\nabla g(s(w))$ Assim, ao multiplicar ambos os lados por $s'(w)$ concluímos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dw}u \circ s(w) &= \langle \nabla u(s(w)), s'(w) \rangle \\ &= \lambda(w)\langle \nabla g(s(w)), s'(w) \rangle \\ &= \lambda(w)\frac{d}{dw}g \circ s(w) \\ &= \lambda(w) \end{aligned}$$

Vemos, assim, que neste caso a função $w \rightarrow \lambda(w)$ pode ser interpretada como a taxa de crescimento da função utilidade ao longo da curva de máximos (vide Figura 1.4).

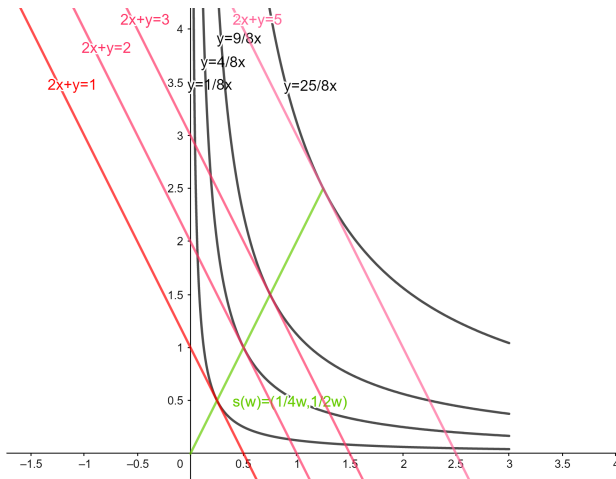


Figura 1.9: Curvas de máximos no caso particular de u sendo **Cobb Douglas** e vários vínculos dado por orçamentos, ilustrando a Observação 1.42. Lembre que em problemas gerais de multiplicadores de Lagrange não precisa existir uma curva bem definida $w \rightarrow s(w)$

A seguir generalizaremos os multiplicadores de Lagrange para curvas planas para subvariedades mergulhadas no espaço Euclidiano.

Teorema 1.43. Multiplicadores de Lagrange

Sejam $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma aplicação de classe C^1 definida por $G(x) = (g_1(x), \dots, g_k(x))$ e $M = \{x \in \mathbb{R}^{m+k} \mid G(x) = c\}$ uma subvariedade regular. Seja $u : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 , onde $M \subset \tilde{U}$. Suponha que existe $q \in M$ tal que $u|_M$ tem valor máximo ou mínimo local. Então, $\nabla u(q)$ é ortogonal a $T_q M$, ou seja, existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla u(q) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla g_i(q).$$

Demonstração. Da Proposição 1.23 temos que para cada $v_q \in T_q M$ existe uma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ com $\alpha'(0) = v_q$. Visto que $u|_M$ (função restrita a M) tem um máximo ou mínimo em $q \in M$, temos que a função $h(t) = u(\alpha(t))$ tem máximo ou mínimo interior em $t = 0$, logo, $h'(0) = 0$. Assim, pela regra da cadeia, $0 = h'(0) = \langle \nabla u(q), \alpha'(0) \rangle = \langle \nabla u(q), v_q \rangle$. Como isto pode ser feito para qualquer outro $v_q \in T_q M$ concluímos que $\nabla u(q)$ é ortogonal a $T_q M$.

Por outro lado, sabemos que para cada $1 \leq i \leq k$, $\nabla g_i(q)$ é também ortogonal a $T_q M$ (vide a Observação 1.25). Além disso, sendo $DG(x)$ sobrejetora $\forall x \in M$, o conjunto $\{\nabla g_i\}_{i=1}^k$ é uma base de $T_q M^\perp$ (complemento ortogonal⁵ de $T_q M$). Concluí-se que $\nabla u(p)$ é combinação linear de $\{\nabla g_i\}_{i=1}^k$ como desejado. \square

Do Teorema 1.43 podemos concluir uma condição *necessária* para que uma função $u : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tenha máximo ou mínimo sobre uma subvariedade regular $M = G^{-1}(c_1, \dots, c_k)$ é a atender o sistema

$$\begin{cases} \nabla u(q) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla g_i(q) \\ c_1 = g_1(q) \\ \vdots \\ c_k = g_k(q) \end{cases}$$

Exemplo 1.44. Cobb-Douglas e orçamento para três produtos

Seja $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 > 0\}$ a superfície que representa um vínculo orçamentário de três produtos. Vamos considerar a função utili-

⁵Lembre-se que o complemento ortogonal de um subespaço vetorial é o conjunto de vetores do espaço que são ortogonais a tal subespaço.

Continuação.

dade $u(x) = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$. Para determinar o ponto $q \in S$ onde $u|_S$ assume maior valor resolvemos o sistema dado pelo multiplicador de Lagrange. Temos

$$\left(\frac{1}{3} x_1^{-\frac{2}{3}} x_2^{\frac{1}{3}} x_3^{\frac{1}{3}}, \frac{1}{3} x_2^{-\frac{2}{3}} x_1^{\frac{1}{3}} x_3^{\frac{1}{3}}, \frac{1}{3} x_3^{-\frac{2}{3}} x_2^{\frac{1}{3}} x_1^{\frac{1}{3}} \right) = \lambda(6, 3, 2)$$

$$6 = 6x_1 + 3x_2 + 2x_3,$$

donde $q = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$ e $u(q) = \sqrt[3]{\frac{2}{9}}$. Visto que \bar{S} (fecho de S) é fechado e limitado, e que o máximo não acontece no bordo ∂S (onde u é zero) q tem que ser de fato o ponto de máximo.

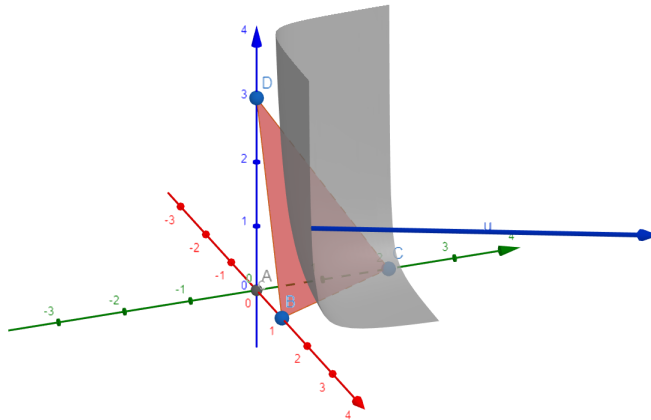


Figura 1.10: Superfície de nível $u^{-1}\left(\sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right)$ (associada à função utilidade u) tangente ao vínculo orçamentário S no ponto de máximo q , e o vetor $N = \nabla g(q)$.

Exercício 1.45.

Determine o volume do maior paralelepípedo de faces paralelas aos planos coordenados que pode ser inscrito em $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 9x_1^2 + 36x_2^2 + 4x_3^2 = 36\}$

Vamos agora rerepresentar o teorema dos multiplicadores de Lagrange em ter-

mos do gradiente Riemanniano (grad).

Proposição 1.46.

Seja M uma subvariedade mergulhada em \mathbb{R}^{m+k} e suponha que $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em M (i.e., que admite extensões locais para \mathbb{R}^{m+k}) e que f tem um ponto de máximo ou mínimo local em $p \in M$. Então $\text{grad } f(p) = 0$.

Demonstração. Seja p um ponto de máximo ou mínimo da função f . Sabemos que em uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^{m+k}$ de p , $M \cap U$ é a imagem inversa de um valor regular de uma aplicação diferenciável $G : U \rightarrow \mathbb{R}^k$.

Seja $\tilde{f} : V \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}$ uma extensão de f a uma vizinhança de \mathbb{R}^{m+k} de p , ($V \subset U$) ou seja, $\tilde{f} : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{f}|_{V \cap M} = f$. Pela Proposição 1.43, $\nabla \tilde{f}$ é ortogonal a M , logo sua projeção ortogonal em $T_p M$ é 0, mostrando que $\text{grad } f(p) = 0$. \square

1.5. Hessiano e extremos

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . Sabemos que $df(p) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação linear definida por $df(p) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_m}(p) \right]$

Deixando o p variar, temos uma aplicação $df : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ que é suave. Podemos então considerar a derivada da aplicação df .

Definição 1.47.

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . A segunda derivada de f no ponto $p \in U$, $\text{Hess } f(p) = D(df)(p)$, é chamada de *Hessiano de f em p* .

Assim, temos

$$\text{Hess } f(p) = \begin{bmatrix} d \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \\ \vdots \\ d \frac{\partial f}{\partial x_m}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(p) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_m}(p) \end{bmatrix} \quad (1.5.1)$$

Exercício 1.48.

Determine o $Hess f$ das funções $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

(a) $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2$

(b) $f(x_1, x_2) = -2x_1^2 - 2x_2^2$

(c) $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 2x_2^2$

(d) $f(x_1, x_2) = x_1x_2$

A matriz $m \times m$ na equação 1.5.1 é chamada de **matriz Hessiana de f** . Dado que f é de classe C^2 , temos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)$$

pelo teorema de Schwarz e, portanto, $Hess f(p)$ é uma matriz simétrica. Consequentemente, a segunda derivada de f , $D(df)(p) = Hess f(p)$ é uma aplicação linear simétrica.

Neste ponto convém lembrar um teorema muito útil de Álgebra Linear para matrizes simétricas

Teorema 1.49. Espectral

Seja A uma matriz simétrica $m \times m$. Então existe uma base ortonormal $\{q_i\}$ de \mathbb{R}^m (i.e., $\langle q_i, q_j \rangle = 0$ se $i \neq j$ e $\|q_i\| = 1$) tal que:

1. $Aq_i = \lambda_i q_i$, i.e., q_i é auto-vetor;
2. $Q^t A Q = \Lambda$, onde Q é a matriz com colunas q_i e Λ é a matriz diagonal de auto-valores λ_i .

Lembre que a equação $Av = \lambda v$ é equivalente à equação $(A - \lambda Id)v = 0$, e tal sistema tem solução não trivial se, e somente se, $(A - \lambda Id)$ não for invertível, ou seja, se, e somente se, $p(\lambda) = \det(A - \lambda Id) = 0$.

Lembre também que a transformação linear R associada a uma matriz ortogonal Q é um movimento rígido, ou seja, $\langle Rx, Ry \rangle = \langle x, y \rangle$ e assim $\|Qx\| = \|x\|$.

Exercício 1.50.

Continuação

1. Mostre que os autovalores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

são 1 e -1 e que uma base ortonormal de auto-vetores é

$$\left\{ q_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), q_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}.$$

2. Dadas a matriz

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

cujas colunas são q_1 e q_2 , a aplicação linear $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $Q(x) = [Q]x$ e a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^t A x = 2x_1 x_2$, determine

$$f \circ Q(y) = f(y_1 q_1 + y_2 q_2).$$

Observação 1.51.

No Exemplo 1.50 tem-se que o gráfico da função (não linear) f é uma rotação do gráfico de $f \circ Q$ (a qual é uma sela de cavalo) como mostra a figura a seguir:

Continuação.

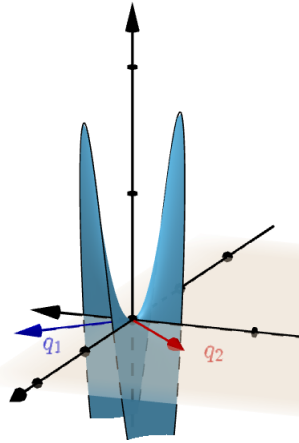


Figura 1.11: Gráfico de $f \circ Q(y) = f(y_1q_1 + y_2q_2) = y_1^2 - y_2^2$

1.5.1. Extremos locais

De Cálculo I sabemos que os extremos locais de uma função suave são pontos críticos da mesma. Isto é, se $f : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave e $p \in (-\epsilon, \epsilon)$, é um máximo ou mínimo local de f , então $f'(p) = 0$.

Porém a função $f(x) = x^3$ nos mostra que nem todo ponto crítico é um ponto de máximo ou mínimo local (de fato, $f'(0) = 0$ e $x = 0$ não é nem máximo nem mínimo).

Isto motivou a procura de critérios mais precisos como, por exemplo, o *Critério da segunda derivada*:

Seja $p \in (-\epsilon, \epsilon)$ é um ponto crítico de f (i.e., $f'(p) = 0$). Temos:

1. se $f''(p) > 0$ então p é mínimo local;
2. $f''(p) < 0$ então p é máximo local;

A prova se baseia no uso da fórmula de Taylor, i.e.,

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x - p) + \frac{1}{2}f''(p)(x - p)^2 + R(x - p)$$

onde x está suficientemente próximo de p e $\lim_{x \rightarrow p} \frac{R}{(x-p)^2} = 0$.

De fato, se $f'(p) = 0$ e $f''(p) > 0$, então, dividindo a Fórmula de Taylor por $(x - p)^2$ temos:

$$\frac{f(x) - f(p)}{(x - p)^2} = \frac{1}{2}f''(p) + \frac{R(x - p)}{(x - p)^2} > 0$$

e, assim, $f(x) > f(p)$ para x próximo a p (p é mínimo local).

Iremos aqui generalizar tais argumentos para funções sobre abertos de \mathbb{R}^n .

Exemplo 1.52.

A função $f(x) = 2x^2 - x^4$ tem um ponto crítico em $p = 0$ e a reta tangente ao gráfico de f em p é o eixo x . Para x próximo a p a função f é aproximada por $h(x) = \frac{1}{2}f''(p)(x - p)^2 = 2x^2$

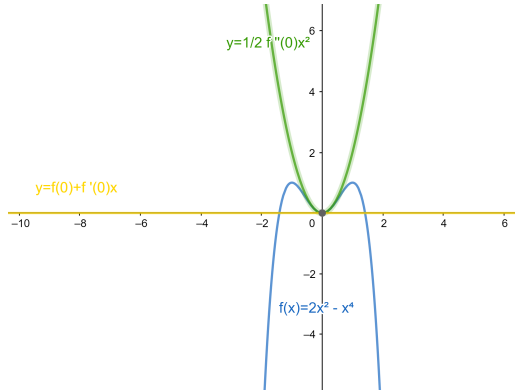


Figura 1.12: Gráfico de $f(x) = 2x^2 - x^4$, sua reta tangente em $p = 0$ e sua aproximação quadrática

Definição 1.53.

Sejam U um aberto de \mathbb{R}^m e $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ função diferenciável, dizemos que $p \in U$ é ponto de **mínimo local** (interior) se existe $\epsilon > 0$ tal que $\forall x \in B_\epsilon(p) \subset U$ tem-se $f(x) \geq f(p)$.

Analogamente, $q \in U$ é ponto de **máximo local** (interior) se existe $\epsilon > 0$ tal que $\forall x \in B_\epsilon(q) \subset U$ tem-se $f(x) \leq f(q)$.

Exemplo 1.54.

Dado $f(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - (x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4)$, é possível observar na figura a seguir que $p = (0, 0)$ é ponto de mínimo local de f .

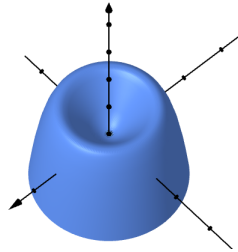


Figura 1.13:

Proposição 1.55.

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $p \in U$ um ponto de mínimo ou máximo local (interior). Então p é ponto crítico de f , i.e., $\nabla f(p) = 0$.

Demonstração. Dado $v_p \in T_p\mathbb{R}^m$, considere uma curva suave $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ tal que $\alpha'(0) = v_p$. Seja $h = f \circ \alpha$. Como p é máximo ou mínimo local, então $t = 0$ é máximo ou mínimo interior de $h = f \circ \alpha$, logo

$$0 = h'(0) = \langle \nabla f(p), \alpha'(0) \rangle.$$

Como isto vale para todo vetor tangente concluímos que $\nabla f(p) = 0$. \square

Exemplo 1.56.

Dado $f(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 2$, $p = (0, 0)$ é ponto de máximo interior e, portanto, ponto crítico. Note que o vetor normal do plano tangente é $N = \left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), -\frac{\partial f}{\partial x_2}(p), 1\right) = (0, 0, 1)$, logo, o plano tangente é paralelo ao plano de equação $\{x_3 = 0\}$.

Continuação.

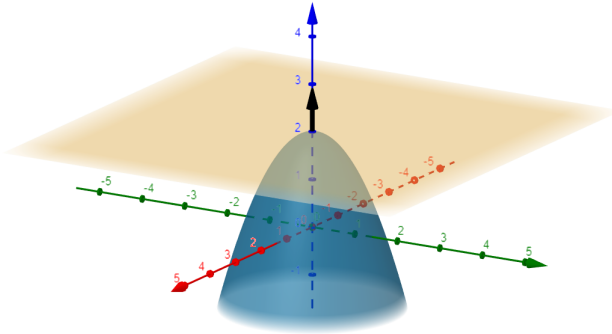


Figura 1.14:

Mas, se de um lado todo ponto de máximo ou mínimo interior é ponto crítico, nem todo ponto crítico é ponto de máximo ou mínimo local. Assim, tal como em Cálculo I, precisaremos de critérios mais finos para classificar pontos críticos, i.e., determinar se eles são de máximo, de mínimo ou sela.

Exemplo 1.57.

No gráfico de $f(x) = x_1^2 - x_2^2 + \frac{3}{2}$ se observa que $p = (0, 0)$ não é máximo nem mínimo local.

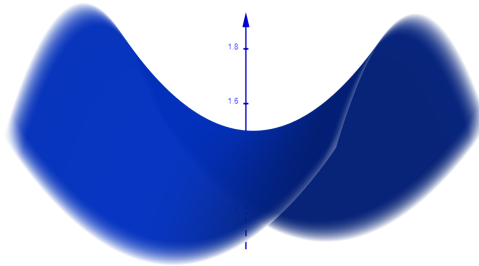


Figura 1.15:

Teorema 1.58. Fórmula de Taylor de ordem 2

Continuação.

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ função de classe C^3 . Então:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + df(p)(x-p) + \frac{1}{2}(x-p)^t \text{Hess } f(p)(x-p) + R(x-p) \\ &= f(p) + \langle \nabla f(p), (x-p) \rangle + \langle \text{Hess } f(p)(x-p), x-p \rangle + R(x-p) \end{aligned}$$

$$\text{onde } \lim_{x \rightarrow p} \frac{R(x-p)}{\|x-p\|^2} = 0.$$

Observação 1.59.

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Então

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(p) + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 - p_1 & x_2 - p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \end{bmatrix} \\ &= f(p) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)(x_1 - p_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)(x_2 - p_2) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p)(x_1 - p_1)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p)(x_1 - p_1)(x_2 - p_2) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(p)(x_2 - p_2)^2 \end{aligned}$$

O Teorema 1.58 garante que o polinômio

$$P_2(x) = f(p) + df(p)(x-p) + \frac{1}{2}(x-p)^t \text{Hess } f(p)(x-p),$$

chamado de **polinômio de Taylor de grau 2 em torno de p** , aproxima a função f numa vizinhança de p .

Além disso, se p for um ponto crítico de f , então a forma quadrática

$$h(x) = \frac{1}{2}(x-p)^t \text{Hess } f(p)(x-p)$$

aproxima a função. Isso sugere que, tal como em Cálculo I, classificar pontos críticos esteja relacionado com a compreensão da segunda derivada.

Note que no Problema 1.48, P_2 em torno de $p = (0, 0)$ coincide com a própria função de f .

Exemplo 1.60.

Seja $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - (x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4)$. Considerando $p = 0$ temos (pelo Problema 1.48) que $P_2(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2$.

Note que (pela figura) $p = (0, 0)$ é um ponto de mínimo e assim um ponto crítico, i.e., $\nabla f(p) = (0, 0)$. Logo, o plano tangente ao gráfico de f em p é $\{x_3 = f(p) = 0\}$.

A Fórmula de Taylor garante que, próximo a $p = (0, 0)$ o gráfico de f é aproximado por $h(x) = \frac{1}{2}(x - p)^t \text{Hess } f(p)(x - p) = P_2(x)$.

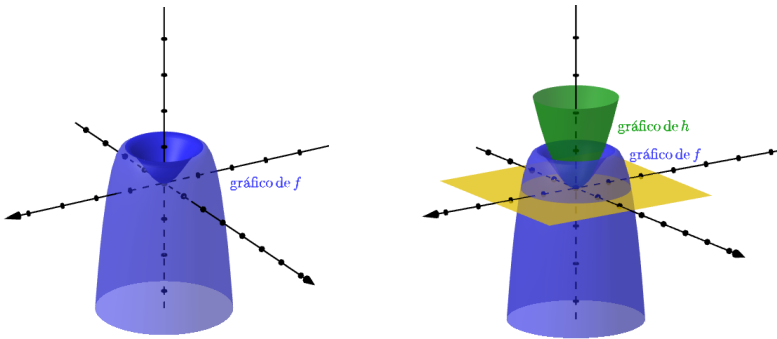


Figura 1.16: Gráfico de $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - (x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4)$, plano tangente e aproximação quadrática

1.5.2. Critérios de classificação de pontos críticos**Teorema 1.61.**

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3 . Suponha que $p \in U$ seja ponto crítico (i.e., $df(p) = 0$) e $\det \text{Hess } f(p) \neq 0$

- Se todos os auto-valores λ_i de $\text{Hess } f(p)$ são positivos (i.e., $\lambda_i > 0$), então p é mínimo.
- Se todos os auto-valores λ_i de $\text{Hess } f(p)$ são negativos (i.e., $\lambda_i < 0$), então p é máximo.
- Se parte dos auto-valores λ_i de $\text{Hess } f(p)$ são positivos, e a outra parte negativa, então p é sela.

Exemplo 1.62.

A função $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \frac{3}{2}$ tem um mínimo local em $(0, 0)$. Observe que $\text{Hess } f(0, 0)$ tem 2 como autovalor de multiplicidade 2.

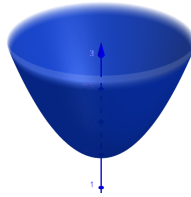


Figura 1.17:

A função $f(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 2$ tem um máximo local em $(0, 0)$. O Hessiano de f tem um único autovalor -2 de multiplicidade 2.

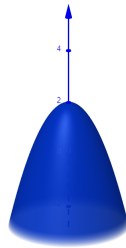


Figura 1.18:

Por outro lado, a função $f(x) = x_1^2 - x_2^2 + \frac{3}{2}$ não tem nem máximo nem mínimo no ponto $(0, 0)$. De fato, os autovalores de $\text{Hess } f(0, 0)$ são 2 e -2 .

Continuação.

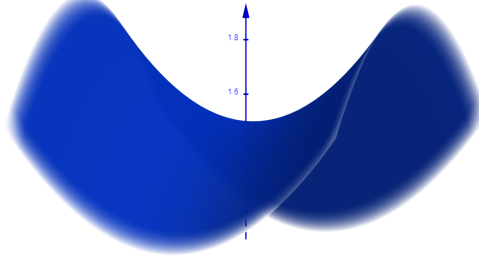


Figura 1.19:

Prova do Teorema 1.61. Vamos supor inicialmente que p está na origem, $f(p) = 0$ e $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m$ são os auto-valores de $\text{Hess } f(p)$.

Pela formula de Taylor temos:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x)^t \text{Hess } f(p)(x) + R$$

Pelo teorema Espectral

$$Q^t \text{Hess } f(p)(x) Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix} = \Lambda$$

onde $Q = [q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_m]$ é a matriz ortogonal cujas colunas são os autovetores (ortonormais) q_1, q_2, \dots, q_m de $\text{Hess } f(p)(x)$ associados a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$.

Sejam $y_i, 1 \leq i \leq m$, as coordenadas de x com respeito à base $\{q_1, q_2, \dots, q_m\}$, ou seja,

$$x = y_1 q_1 + y_2 q_2 + \cdots + y_m q_m = Qy, \quad (*)$$

onde $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$.

Substituindo nas duas equações acima temos:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{2}y^t Q^t \text{Hess } f(p) Q y + R \\
 &= \frac{1}{2}y^t (Q^t \text{Hess } f(p) Q) y + R \\
 &= \frac{1}{2}y^t \Lambda y + R \\
 &= \frac{1}{2}(\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_m y_m^2) + R \quad (**)
 \end{aligned}$$

Dividindo por $\|x\|^2 = \|y\|^2$ temos:

$$\frac{f(x)}{\|x\|^2} \geq \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{R}{\|x\|^2} > 0$$

para x próximo a p ou seja p é mínimo. \square

Entendido o fenômeno, podemos desenvolver um critério mais fácil de ser implementado (no qual não será necessário calcular os auto-valores explicitamente, mas apenas ter uma maneira de detectar seus sinais).

Iremos explorar o caso particular de dimensão dois.

Corolário 1.63.

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3 . Suponha que $p \in U$ seja ponto crítico (i.e, $df(p) = 0$) e $\det \text{Hess } f(p) \neq 0$

(a) Se $\det \text{Hess } f(p) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p) > 0$ então p é mínimo.

(b) Se $\det \text{Hess } f(p) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p) < 0$ então p é máximo.

(c) Se $\det \text{Hess } f(p) < 0$ então p é sela.

A demonstração da proposição segue como caso particular do teorema anterior e do teorema comentado a seguir.

⁵O leitor pode verificar a obtenção de (*) e (**) usando operações básicas de matrizes, começando por dimensões baixas.

Teorema 1.64. Critério positivo definido

Considere uma matriz simétrica A . Então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. Os auto-valores de A são todos positivos (i.e, $\lambda_i > 0$);
2. $x^t Ax > 0, \forall x \neq 0$ (A é positiva-definida);
3. $\det A_k > 0$ para todas as submatrizes A_k a esquerda, i.e as matrizes $k \times k$ definidas como $(a_k)_{ij} = a_{ij}$ para $0 \leq i \leq k$ e $0 \leq j \leq k$.

Por exemplo, se $m = 2$ e $A = \text{Hess } f(0)$, então $A_1 = [\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(0)]$ e $A_2 = \text{Hess } f(0)$, e assim re-obtemos as hipóteses do item (a) da proposição anterior.

Observação 1.65.

Podemos também dar uma prova alternativa do Corolário 1.63 seguindo um argumento geométrico. Suponha que hipótese (a) seja verificada. Como $\det \text{Hess } f(0) = \lambda_1 \lambda_2 > 0$ temos $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ ou $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$. Assim pela demonstração do teorema anterior, o gráfico S da função $h(x) = x^t \text{Hess } f(0)x$ é um parabolóide elíptico para cima (se $\lambda_i > 0$) ou para baixo se $(\lambda_i < 0)$. Para decidir qual das opções observe que o gráfico de $h(x_1, 0) = x_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0)$ descreve a parábola $C = S \cap \{x_2 = 0\}$. Como esta parábola é para cima (pois por hipótese $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0) > 0$), o gráfico de S é para cima. Logo $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ e pelo Teorema anterior, 0 é ponto de mínimo. Os outros itens se provam de forma similar.

Exercício 1.66.

Considere $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ função definida como $f(x_1, x_2) = 2(2x_1 - x_1^2)(2x_2 - x_2^2)$. Determine e classifique os pontos críticos.

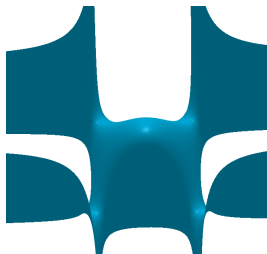


Figura 1.20: Gráfico da função do Problema 1.66, onde podemos observar que $(1, 1)$ é ponto de máximo local, e os pontos $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$ são pontos de sela

Observação 1.67. Curvatura de Gauss (Vide Seção 1.6)

Quando temos $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ função de classe C^3 onde $(0, 0) \in U$ é ponto crítico, temos que o plano tangente do gráfico em $(0, 0, f(0, 0))$ é paralelo a $\{x_3 = 0\}$. Neste caso, $K(q) = \det \text{Hess } f(0, 0) = \lambda_1 \lambda_2$ é chamada Curvatura de Gauss no ponto $q = (0, 0, f(0, 0))$. Assim se $K(q) > 0$ o gráfico de f é aproximado por uma parabolóide elíptico e se $K(q) < 0$ é aproximado por um parabolóide hiperbólico (sela de cavalo).

Mais geralmente, dado um gráfico S qualquer e $q \in S$ podemos, após movimento rígido, descrevê-lo (pelo menos localmente) como um novo gráfico de uma função h em relação ao plano plano tangente $T_q S$. Assim o conceito de curvatura de Gauss pode ser definido para qualquer ponto $q \in S$ bem como sua interpretação geométrica.

1.5.3. Fórmula de Taylor de ordem maior

Seja $v = (v_1, \dots, v_m)$ vetor em \mathbb{R}^m . Considerando o conjunto de todas as funções de classe C^k em $U \subset \mathbb{R}^m$ (denotada por $C^k(U)$) podemos criar uma aplicação linear $T : C^k(U) \rightarrow C^{k-1}(U)$ definida como

$$T(f) = \sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Em Cálculo II e Física costuma-se denotar $v \cdot \nabla = T$ e assim

$$v \cdot \nabla = \sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Com tal notação podemos verificar que

$$\frac{1}{2}v^t \text{Hess } f(p)v = \frac{1}{2}(v \cdot \nabla)^2 f(p). \quad (1.5.2)$$

A fim de verificar Equação 1.5.2, façamos a conta para o caso particular em que $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (v \cdot \nabla)(w \cdot \nabla)f(p) &= (v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2})(w_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + w_2 \frac{\partial}{\partial x_2})f \\ &= v_1 w_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p) + v_1 w_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p) \\ &\quad + v_2 w_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p) + v_2 w_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(p) \\ &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \\ &= v^t \text{Hess } f(p)w \end{aligned}$$

Teorema 1.68.

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ função de classe C^{k+1} , $p \in U$ e $v = (x - p)$. Então:

$$\begin{aligned} f(v + p) &= f(p) + (v \cdot \nabla)f(p) \\ &\quad + \frac{1}{2}(v \cdot \nabla)^2 f(p) \\ &\quad + \frac{1}{3!}(v \cdot \nabla)^3 f(p) \\ &\quad + \frac{1}{4!}(v \cdot \nabla)^4 f(p) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \frac{1}{k!}(v \cdot \nabla)^k f(p) \\ &\quad + R(v) \end{aligned}$$

Onde $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{R(v)}{\|v\|^k} = 0$

Observação 1.69.

A notação $v \cdot \nabla$ é muito sugestiva em espaços Eucidianos pois evoca a ideia do produto interno de v com ∇ e assim é fácil de ser lembrada. Porém no próximo capítulo iremos substituí-la em variedades M pela notação $v \bullet$ para destacar que tal operador não depende da métrica (e assim não deveria evocar notação do gradiente, objeto que necessita de métrica). Também como será discutido ao final do próximo capítulo, a notação $v \bullet$ será utilizada em Teoria Geométrica de Controle.

1.5.4. Máximos e mínimos absolutos

Em certos casos particulares é possível até determinar máximos e mínimos absolutos. Para isto usaremos o seguinte resultado:

Teorema 1.70.

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $K \subset U$ um conjunto fechado e limitado (ou seja fechado tal que $K \subset B_R(\mathbf{0})$). Então a função restrita $f|_K$ possui um valor máximo e um valor mínimo.

O Teorema 1.70 sugere o seguinte algoritmo:

Passo 1: Determinar pontos críticos no interior de K ;

Passo 2: determinar candidatos a máximo ou mínimos de $f|_{\partial K}$ (ex, via parametrizações ou multiplicadores de Langrange)

Passo 3: comparar os candidatos determinados nos passos anteriores.

Exemplo 1.71.

Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 2x_1^2 + x_1 + x_2^2 - 2$ e $K = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g(x) = x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$. Vamos determinar os valores de máximos e mínimos absolutos de $f|_K$ seguindo o algoritmo anterior.

Passo 1: A solução do problema $\nabla f(x) = (0, 0)$ para x no interior de K é $x = (-\frac{1}{4}, 0)$

Passo 2: Para determinar candidatos a máximo ou mínimos de $f|_{\partial K}$ usaremos

Continuação.

neste exemplo multiplicadores de Lagrange.

$$\begin{aligned} (4x_1 + 1, 2x_2) = \nabla f(x) &= \lambda \nabla g(x) = \lambda(2x_1, 2x_2) \\ 4 &= x_1^2 + x_2^2 \end{aligned}$$

Cujas soluções são: $(2, 0)$, $(-2, 0)$, $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2})$

Passo 3: Avaliando f nos pontos obtidos nos Passos 1 e Passo 2 concluímos: $-\frac{17}{8} = f(-\frac{1}{4}, 0)$ é valor mínimo absoluto, e $f(2, 0) = 8$ valor máximo absoluto.

Note que, como se mostra na figura a seguir, o ponto $(2, 0)$ é um ponto de máximo global de $f|_K$ que está no bordo de K e não é um ponto crítico de f .

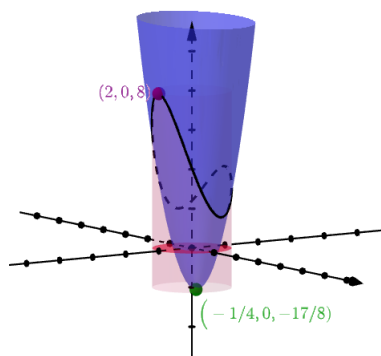


Figura 1.21:

1.6. *Curvatura de Gauss de superfícies

Por motivos didáticos estaremos considerando aqui sempre $M = g^{-1}(c)$ uma superfície regular onde c será um valor regular de uma função $g : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Após vermos o conceito de plano tangente de uma superfície de nível M seria natural nos perguntarmos por objetos que meçam quão diferente localmente a superfície possa ser de um plano. Uma possível abordagem seria olhar o vetor normal unitário $\eta = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}$ e nos perguntarmos quão rápido ele gira. Ou seja pensando nele intuitivamente como uma alavanca (ou um Joystick de videogame) gostaríamos de ver quão rápido ele muda de posição. Claramente se ele nunca mudar de posição ou seja se sua derivada for zero, então M é (ou pelo menos parece ser) um plano. Isto nos motiva a definir o seguinte operador

Definição 1.72.

Dado um superfície regular $M^2 = g^{-1}(c)$ em \mathbb{R}^3 e campo unitário $\eta = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}$ podemos definir a aplicação simétrica $\mathcal{S}_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ como

$$\mathcal{S}_p(X) := -D\eta_p X =: D_X \eta(p)$$

chamada **operador forma (shape operator) ou Weingarten operator**.

A definição acima claramente demanda várias explicações.

A primeira seria porque este operador de fato é *um operador linear de $T_p M$ para $T_p M$* . Para ver isto considere uma curva $t \rightarrow \alpha(t) \in M$ com $\alpha'(0) = X \in T_p M$. Podemos então definir a função $f(t) = \langle \eta \circ \alpha(t), \eta \circ \alpha(t) \rangle = 1$. Ao derivar f em $t = 0$ concluímos que:

$$0 = f'(0) = 2\langle -\mathcal{S}_\eta X, \eta(p) \rangle$$

A equação acima então implica que de fato $\mathcal{S}_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$

A segunda explicação que deveríamos dar é porque a aplicação $\mathcal{S}_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ é simétrica (e talvez porque este incômodo sinal de menos). Como isto exige um pouco mais de contas, coloquemos esta explicação em um pequeno lema.

Lema 1.73.

$\mathcal{S}_\eta(p) : T_p M \rightarrow T_p M$ é de fato simétrica.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{S}_\eta X, Y \rangle &= \langle -(D_X \eta)_p, Y \rangle \\
 &\stackrel{(*)}{=} \langle \eta_p, D_X Y \rangle \\
 &\stackrel{(**)}{=} \langle \eta_p, D_Y X \rangle \\
 &\stackrel{(*)}{=} \langle -(D_Y \eta)_p, X \rangle \\
 &= \langle \mathcal{S}_\eta Y, X \rangle
 \end{aligned}$$

Igualdade (*) segue definindo $f(t) = \langle \eta \circ \alpha(t), Y \circ \alpha(t) \rangle = 0$ e derivando em $t = 0$ (ou seja alterando levemente o truque acima discutindo). A igualdade (**) seguirá da expressão 1.3.5 para o campo colchete. \square

Uma vez definido o operador forma, podemos tentar medir quanto ele difere de zero, e assim tentar estabelecer uma medida de quanto M difere de um plano (pelo menos localmente). Por ser um operador simétrico nada mais natural do que olhar para seus autovalores.

Definição 1.74.

Os autovalores λ_1 e λ_2 de $\mathcal{S}_\eta(p) : T_p M \rightarrow T_p M$ são chamados **curvaturas principais**.

Antes interpretar o significado destes auto-valores, reformulemos o que vimos na demonstração do Teorema 1.61.

Proposição 1.75.

Seja $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ função de classe C^3 . Suponha que $p \in U$ seja ponto crítico (i.e, $dh(p) = 0$) e que os autovalores λ_i de $\text{Hess } h(p)$ sejam diferentes de zero, i.e, $\det \text{Hess } h(p) \neq 0$.

- (a) Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ o gráfico associado a h é aproximado (perto de p) por um parabolóide elíptico.
- (b) Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ o gráfico associado a h é aproximado (perto de p) por um parabolóide hiperbólico.

Proposição 1.76.

Seja M o gráfico em \mathbb{R}^3 de uma função $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suave tal que $(0, 0) \in U$, $h(0, 0) = 0$ e $\nabla h(0, 0) = (0, 0)$. Temos então:

- (a) $T_{(0,0,0)}M = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$,
- (b) se $\eta(0, 0, 0) = (0, 0, 1)$ então $S_\eta(v, 0) = (\text{Hess } h(0, 0)v, 0)$, onde S_η é o operador forma.
- (c) As curvaturas principais em p são auto-valores λ_1 e λ_2 do $\text{Hess}h(0, 0)$ e assim M pode ser aproximado por um parabolóide elíptico (respectivamente parabolóide hiperbolóide) se $\lambda_1\lambda_2 > 0$ (respectivamente se $\lambda_1\lambda_2 < 0$).

Demonstração. (a) Ao definir $g(x) = x_3 - h(x_1, x_2)$ temos que o vetor normal $\nabla g(x) = (-\frac{\partial h}{\partial x_1}, -\frac{\partial h}{\partial x_2}, 1)$. Assim $\eta(0, 0, 0) = \nabla g(0, 0, 0) = (0, 0, 1)$ e consequentemente o plano tangente em $(0, 0, 0)$ é $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

(b) Definamos a parametrização $\psi(x_1, x_2) = (x_1, x_2, h(x_1, x_2))$ e com ela vetor normal e sua representação em uma parametrização (ou seja $\eta \circ \psi = \tilde{\eta}$)

$$\tilde{\eta}(x_1, x_2) = \frac{(-h_{x_1}, -h_{x_2}, 1)}{\sqrt{h_{x_1}^2 + h_{x_2}^2 + 1}}$$

onde $h_{x_i} = -\frac{\partial h}{\partial x_i}$. Seja $\alpha = \psi(\tilde{\alpha})$. Temos então:

$$\begin{aligned} S_\eta \alpha'(0) &= -\frac{d}{dt} \tilde{\eta} \circ \tilde{\alpha}(t) \Big|_{t=0} \\ &= -\left(\frac{d}{dt} ((h_{x_1} \circ \tilde{\alpha}(t))^2 + (h_{x_2} \circ \tilde{\alpha}(t))^2 + 1)^{-1/2} \Big|_{t=0} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} -h_{x_1} \circ \tilde{\alpha}(t) \\ -h_{x_2} \circ \tilde{\alpha}(t) \\ 1 \end{bmatrix} \Big|_{t=0} \right) \\ &= 0 + \begin{bmatrix} h_{x_1 x_1}(0, 0) & h_{x_2 x_1}(0, 0) \\ h_{x_1 x_2}(0, 0) & h_{x_2 x_2}(0, 0) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}'_1(0) \\ \tilde{\alpha}'_2(0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

lembrando que $\alpha'(0) = (\tilde{\alpha}'_1(0), \tilde{\alpha}'_2(0), 0)$

(c) segue direto da Proposição 1.75. \square

Agora que temos uma interpretação do que são as curvaturas principais no caso particular descrito acima, podemos observar que toda superfície $M = g^{-1}(c)$ pode ser rodada e localmente na vizinhança do ponto p recaímos na situação descrita na Proposição 1.76. Assim a proposição acima motiva a definição de curvatura de Gauss a seguir e implica o corolário apresentado abaixo.

Definição 1.77.

Dado uma superfície regular $M = g^{-1}(c)$ e sejam λ_1, λ_2 curvaturas principais associadas a $\eta(p) = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}(p)$. A **curvatura de Gauss** em $p \in M$ é definida como $K(p) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$.

Corolário 1.78.

Seja $M = g^{-1}(c)$ superfície regular.

- (a) Se $K(p) > 0$ então M é aproximado (perto de p) por um parabolóide elíptico,
- (b) se $K(p) < 0$ então M é aproximado (perto de p) por um parabolóide hiperbólico.

Observação 1.79.

Note que embora os sinais das curvaturas principais possam depender da escolha do sentido do vetor normal unitário η (ou seja para $\hat{\eta} = -\eta$, $\hat{\lambda}_i = -\lambda_i$) a curvatura de Gauss não depende da escolha do sentido do vetor η .

Exercício 1.80.

Utilizando diretamente a definição de \mathcal{S}_η , determine as curvaturas principais e curvatura de Gauss de um plano em \mathbb{R}^3 e da esfera (canônica) $\mathbb{S}^2(r)$ de raio r e centro zero em \mathbb{R}^3 com vetor normal apontando para fora.

Para exemplos mais complicados, podemos calcular explicitamente curvaturas principais e curvatura de Gauss via parametrização, mas, antes de formalizar isto, precisamos do conceito de segunda forma, que não é mais que a aplicação bilinear associada ao operador de Weingarten (que, como vimos, é uma aplicação linear autoadjunta)

Definição 1.81.

Seja $M \subset \mathbb{R}^2$ uma subvariedade mergulhada. A forma quadrática $II_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$II_p(X) = \langle S_\eta(X), X \rangle, \quad (1.6.1)$$

é chamada de **segunda forma fundamental**.

Observação 1.82.

Se $\psi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ é uma parametrização de M , η vetor normal e $\tilde{\eta}$ definido como $\tilde{\eta} = \eta \circ \psi$. então os coeficientes da segunda forma fundamental estão dados por

$$b_{ij} = \langle -\tilde{\eta}_{x_i}, \psi_{x_j} \rangle = \langle \tilde{\eta}, \psi_{u_i, u_j} \rangle.$$

Proposição 1.83.

Sejam M superfície mergulhada em \mathbb{R}^3 e g_{ij} e b_{ij} os coeficientes da primeira e segunda forma, respectivamente. Então:

(a) a representação matricial do operador forma está dada por

$$[S_\eta] = \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix};$$

(b) a curvatura de Gauss é dada por

$$\tilde{K}(x_1, x_2) = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2};$$

(c) a média das curvaturas principais, $H = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$, é calculada em coordenadas como:

$$\tilde{H}(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{b_{11}g_{22} - 2b_{12}g_{12} + g_{11}b_{22}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \right);$$

(d) e as curvaturas principais por $\lambda_i = H \pm \sqrt{H^2 - \tilde{K}}$.

Demonstração. Sejam a_{ij} funções tais que:

$$\begin{aligned} -\tilde{\eta}_{x_1} &= a_{11}\psi_{x_1} + a_{21}\psi_{x_2} \\ -\tilde{\eta}_{x_2} &= a_{12}\psi_{x_1} + a_{22}\psi_{x_2} \end{aligned}$$

Multiplicando tais equações por ψ_{x_i} temos:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

a qual implica o item (a).

No caso dos itens (b) e (c) basta observar que $K = \det[\mathcal{S}_\eta]$ e $H = \text{tr}[\mathcal{S}_\eta]$ (deixamos o cálculo explícito aos leitores).

Para demonstrar (d) observe que o cálculo dos auto-valores de \mathcal{S}_η pode ser feito calculando o polinômio característico da matriz $[\mathcal{S}_\eta] = [a_{ij}]$. Assim,

$$0 = P(\lambda) = \det([\mathcal{S}_\eta] - \lambda Id) = \lambda^2 - \text{tr}[\mathcal{S}_\eta]\lambda + \det[\mathcal{S}_\eta] = \lambda^2 - 2H\lambda + K. \quad \square$$

Exemplo 1.84. Superfície de Revolução

Considere M uma superfície de revolução em \mathbb{R}^3 . Temos então a parametrização

$$\psi(t, s) = (r(t) \cos(s), r(t) \sin(s), h(t))$$

onde $t \rightarrow \beta(t) = (r(t), h(t))$ é a curva geratriz com $\|\beta'(t)\| \neq 0$.

$$\psi_t = \frac{\partial \psi}{\partial t} = (r'(t) \cos(s), r'(t) \sin(s), h'(t))$$

$$\psi_s = \frac{\partial \psi}{\partial s} = (-r(t) \sin(s), r(t) \cos(s), 0)$$

Logo a métrica em coordenadas é:

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} (r'(t))^2 + (h'(t))^2 & 0 \\ 0 & (r(t))^2 \end{bmatrix}$$

Para calcula b_{ij} primeiro calculemos o vetor normal.

$$\tilde{\eta}(t, s) = \frac{\psi_t \times \psi_s}{\|\psi_t \times \psi_s\|} = \frac{(-\cos(s)h'(t), -\sin(s)h'(t), r'(t))}{\sqrt{(h')^2 + (r')^2}}$$

Continuação.

Em seguida calculemos as derivadas segundas:

$$\psi_{tt} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (r''(t) \cos(s), r''(t) \sin(s), h''(t))$$

$$\psi_{ts} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial s} = (-r'(t) \sin(s), r'(t) \cos(s), 0)$$

$$\psi_{ss} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} = (-r(t) \cos(s), -r(t) \sin(s), 0)$$

$$[b_{ij}] = \frac{1}{\sqrt{(h'(t))^2 + (r'(t))^2}} \begin{bmatrix} -r''(t)h'(t) + h''(t)r'(t) & 0 \\ 0 & r(t)h'(t) \end{bmatrix}$$

Usando o item (b) da Proposição 1.83 podemos calcular a curvatura de Gauss.

$$\begin{aligned} K(p) &= \frac{1}{((r'(t))^2 + (h'(t))^2) r^2} \frac{(-r''(t)h'(t) + r'(t)h''(t)) r(t)h'(t)}{\sqrt{(r'(t))^2 + (h'(t))^2}} \\ &= \frac{-r''(t)(h'(t))^2 + r'(t)h'(t)h''(t)}{r(t) ((r'(t))^2 + (h'(t))^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Analogamente, pelo item (c) da Proposição 1.83 segue

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{1}{2r^2 ((r'(t))^2 + (h'(t))^2)} \\ &\quad \cdot \frac{(-r''(t)h'(t) + r'(t)h''(t)) (r(t))^2 + ((r'(t))^2 + (h'(t))^2) r(t)h'(t)}{\sqrt{(r'(t))^2 + (h'(t))^2}} \\ &= \frac{-r''(t)h'(t)(r'(t))^2 + (r(t))^2 r'(t)h''(t) + r(t)(r'(t))^2 h'(t) + r(t)(h'(t))^3}{2r^2 ((r'(t))^2 + (h'(t))^2)} \end{aligned}$$

Finalmente, se a curva β está parametrizada por comprimento de arco, ou

Continuação.

seja, $\|\beta'\| = 1$, segue

$$\begin{aligned} K(p) &= \frac{-r''(t)(1 - (r'(t))^2) + r'(t)(-r'(t)r''(t))}{r(t) ((r'(t))^2 + 1 - (r'(t))^2)^{3/2}} \\ &= \frac{-r''(t)(1 - (r'(t))^2) - r''(t)(r'(t))^2}{r(t)} \\ &= -\frac{r''(t)}{r(t)}. \end{aligned}$$

1.7. *Hessiana orlada

Recordamos no Teorema 1.43 o clássico teorema de multiplicadores de Lagrange, que garante uma condição necessária para que a restrição de uma função u em uma variedade regular $M = G^{-1}(c)$ tenha máximo ou mínimo em um ponto $p \in M$. Porém tal critério não garantiu que de fato a solução seja um ponto de máximo ou mínimo i.e., é um critério necessário porém não suficiente para existência de máximos e mínimos. Nos problemas clássicos de multiplicadores de Lagrange, as funções u , são particulares o suficiente para admitirem apenas números finitos de candidatos a máximos e mínimos, então comparando-se os valores e usando compacidade de M estabelece-se que o valor menor é de fato o mínimo absoluto e o valor maior o máximo absoluto.

Recordaremos aqui o critério de **Hessianos orlados (ou bordered hessian)** o qual garante se um ponto crítico $q \in M$ é máximo ou mínimo local da função restrita a variedade M .

Utilizaremos esta discussão para já introduzir o conceito de conexão Riemanniana associada a métrica induzida do ambiente. Por motivos puramente didáticos estaremos considerando aqui sempre $S = g^{-1}(c)$ uma superfície onde c será um valor regular de uma função $g : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Embora de fato seja possível em um ponto crítico falar de Hessiano intrínseco sem envolver a estrutura geométrica (métrica induzida), utilizando apenas os colchetes dos campos, achamos que esta seria uma boa oportunidade para introduzir o conceito de derivação intrínseca e ver como ele pode ser uma ferramenta útil.

1.7.1. Motivação e o Teorema do Hessiano Orlado

Sejam $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ função definida como $u(x) = \frac{1}{2}(\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2)$, a superfície $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g(x) = x_1 = c\}$, $p = (c, 0, 0)$ e $f = u|_S$. Desejamos saber se p é ponto de máximo ou mínimo local de f e ao mesmo tempo motivar a apresentação do critério da Hessiana orlada.

Fácil ver que

- $f(x_2, x_3) = \frac{1}{2}(\lambda_1 c^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2)$
- $\text{grad } f(0, 0) = (0, 0)$
- $\text{Hess } f(0, 0) = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$ Assim p é máximo local de f se $\lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$ e é mínimo se $\lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$

Fizemos uma conta intrínseca. Mas e se quisermos fazer uma conta extrínseca, i.e., usando u ? Primeiro notemos que

$$\nabla u(p) = (\lambda_1 c, 0, 0) = \lambda \nabla g(p) = \lambda(1, 0, 0)$$

Ou seja, por multiplicador de Lagrange, p é o candidato para ser máximo ou mínimo. Note também que $\text{Hess } u(p) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$ e assim contém informação a mais, i.e não precisamos saber sinal de λ_1 . Suponha que voce esteja ensinando um computador a se livrar da informação adicional (i.e., λ_1). Um bom truque é usar a seguinte matriz orlada (colocando $\nabla g(p) = (1, 0, 0)$ no bordo).

$$\overline{H}_3 = \overline{\text{Hess } u} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \text{ e } \overline{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Visto que $\det \overline{H}_2 = (-1)\lambda_2$ e $\det \overline{H}_3 = (-1)\lambda_2\lambda_3$ concluímos que:

- Se $\det \overline{H}_2 < 0$ e $\det \overline{H}_3 < 0$, então p é mínimo de f ($\lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$).
- Se $\det \overline{H}_2 > 0$ e $\det \overline{H}_3 < 0$, então p é máximo de f ($\lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$).

O truque da matriz orlada parece ser bom no caso em que a superfície S é um plano. Mas se S não for um plano? (vide Observação 1.6) Se S tiver curvatura diferente de zero? Para lidar com tal questão no lugar de usar $\text{Hess } u(p)$ precisaremos em geral usar uma outra matriz simétrica H , relacionada ao conceito Hessiano Riemanniano (o qual vamos discutir dentro em breve).

Definição 1.85. Matriz Hessiana orlada

Sejam $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g(x) = c\}$ superfície regular e $p \in S$ é tal que $\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p)$, onde u e g são suaves. Definimos:

$$H = \text{Hess } u(p) - \lambda \text{Hess } g(p)$$

Antes de discutir mais sobre H vamos apresentar o resultado desta seção que foi ilustrado pela nossa motivação.

Teorema 1.86.

Seja $p \in S$ com $\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p)$. Suponha que $\frac{\partial g}{\partial x_1}(p) \neq 0$.

- Se $\det \bar{H}_2 < 0$ e $\det \bar{H}_3 < 0$ então p é mínimo local de f .
- Se $\det \bar{H}_2 > 0$ e $\det \bar{H}_3 < 0$ então p é máximo local de f .

onde

$$\bar{H}_3 = \bar{H} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(p) & \frac{\partial g}{\partial x_3}(p) \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(p) & H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2}(p) & H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ \frac{\partial g}{\partial x_3}(p) & H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix}$$

$$\bar{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(p) \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(p) & H_{11} & H_{12} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2}(p) & H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$$

Observação 1.87.

As vezes H pode ser expresso com outra notação. De fato, seja $L : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ função, defina

$$L(\lambda, x) = u(x) - \lambda(g(x) - c).$$

Então

$$\nabla L(\lambda, x) = (g(x) - c, \nabla u(x) - \lambda \nabla g(x))$$

Se $\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p)$ então H coincide com a matriz 3×3 esquerda superior de

Continuação.

$\text{Hess } L(p, \lambda)$. Observamos também que como H não é positiva definida ou negativa definida, o Teorema 1.86 **não é corolário direto** do Teorema 1.64 e Corolário 1.63.

1.7.2. **Ideia da Prova

Derivada Intrínseca e o Hessiano Riemanniano

Inspirado na discussão do gradiente Riemanniano $\text{grad } f(p)$ podemos nos perguntar: Dados campos \vec{X} e \vec{Y} tangentes a superfície S como derivar \vec{X} na direção de \vec{Y} de forma que o resultado continue tangente a S ? Afinal mesmo que os 2 campos sejam tangente a S , $D_{\vec{Y}}\vec{X}$ pode não ser tangente a S . A solução será considerar a parte tangente de $D_{\vec{Y}}\vec{X}$.

Definição 1.88. Conexão Riemanniana

Dado campos $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ definimos o operador $\nabla : \mathfrak{X}(S) \times \mathfrak{X}(S) \rightarrow \mathfrak{X}(S)$ como

$$\nabla_Y \vec{X}(p) = D_{\vec{Y}}\vec{X}(p) - \left\langle D_{\vec{Y}}\vec{X}(p), \frac{\nabla g(p)}{\|\nabla g(p)\|} \right\rangle \frac{\nabla g(p)}{\|\nabla g(p)\|}$$

Tal operador será chamado **conexão Riemanniana associada a métrica induzida**.

Uma vez que sabemos derivar campos \vec{X} tangentes a S , podemos derivar o $\text{grad } f$, definindo o conceito do Hessiano intrínseco ou Riemanniano $\mathcal{H}(p)$.

Definição 1.89. Hessiano Riemanniano

$$\mathcal{H}(p)(X, Y) = \langle \nabla_X \text{grad } f, Y \rangle, \quad X, Y \in T_p S$$

Proposição 1.90.

Seja $p \in S$, com $\text{grad } f(p) = 0$.

- Se $\mathcal{H}(p)$ é positivo definido (i.e., tenha auto-valores positivo). então $p \in S$ é ponto de mínimo local.
- Se $\mathcal{H}(p)$ é negativo definido (i.e., tenha auto-valores negativos). então $p \in S$

Continuação.

é ponto de máximo local.

De volta a discussão extríntrica

A Proposição 1.90 já resolve, pelo menos em teoria, nossa questão de determinar se um ponto crítico é ou não um ponto de máximo ou mínimo local. Porém na prática aplica-la diretamente para fazer uma conta, pode ser uma má ideia. Primeiro trata-se de uma conta intríntrica. Teríamos que sempre parametrizar a superfície de nível? Segundo e de fato a questão mais séria (que já aparecia no problema análogo em \mathbb{R}^2) é que se só necessitamos saber os sinais dos autovalores, deveríamos ter um algoritmo onde esta informação fosse obtida sem gastar tanto tempo para calcular explicitamente algo que de fato não vamos utilizar. Cabe lembrar que nossa discussão para superfícies pode (e é) generalizada para dimensões maiores, e assim o tempo gasto para calcular auto-valores pode ser relevante. A álgebra linear nos dá um critério para resolver este tipo de questão. Então nosso objetivo será converter nossa conta intríntrica para uma conta extríntrica (vide Exercício 1.91 e Proposição 1.92) e adaptar um critério de álgebra linear (vide Proposição 1.93) para determinar os sinais dos auto-valores, provando assim o Teorema 1.86.

Usando a definição de \mathcal{H} é possível resolver o próximo exercício:

Exercício 1.91.

Para todo $X, Y \in T_p S$

$$\mathcal{H}(p)(X, Y) = \text{Hess } u(p)(X, Y) - \left\langle \frac{\nabla u}{\|\nabla g\|}(p), \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}(p) \right\rangle \text{Hess } g(X, Y)$$

No caso em que $\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p)$, notamos que $H|_{T_p S \times T_p S} = \mathcal{H}(p)$ Assim podemos reformular a Proposição 1.90 da seguinte maneira:

Proposição 1.92.

Seja $p \in S$ tal que $\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p)$ (i.e, $\text{grad } f(p) = 0$). Então:

- Se $H|_{T_p S \times T_p S}$ é positivo definido, então $p \in S$ é ponto de mínimo local.
- Se $H|_{T_p S \times T_p S}$ é negativo definido então $p \in S$ é ponto de máximo local.

A próxima proposição de Álgebra Linear pode ser demonstrada usando a matriz apresentada na motivação, o teorema espectral e a lei de inércia de Sylvester

Proposição 1.93.

Seja A matriz simétrica e suponha que existe um plano V tal que a aplicação bilinear associada a A restrita a $V \times V$ seja também simétrica. Ou seja existe aplicação simétrica $\mathcal{H} : V \rightarrow V$ tal que $Y^t A X = Y^t \mathcal{H} X$ para todo $X, Y \in V$. Vamos também supor que \mathcal{H} não seja degenerado. Seja w vetor normal a V . Suponha que $w_1 \neq 0$.

- (a) Se $\det \bar{A}_2 < 0$ e $\det \bar{A}_3 < 0$ então $y^t A x|_{V \times V}$ é positivo definido.
 (b) Se $\det \bar{A}_2 > 0$ e $\det \bar{A}_3 < 0$ então $y^t A x|_{V \times V}$ é negativo definido.

$$\bar{A}_3 = \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & w_1 & w_2 & w_3 \\ w_1 & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ w_2 & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ w_3 & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & w_1 & w_2 \\ w_1 & A_{11} & A_{12} \\ w_2 & A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Demonstração. Seja a base $\{q_1, q_2, q_3\}$ como $q_1 = \frac{w}{\|w\|}$, $\mathcal{H}q_2 = \lambda_2 q_2$ e $\mathcal{H}q_3 = \lambda_3 q_3$. Temos então que $Aq_2 = b_{12}q_1 + \lambda_2 q_2$ e $Aq_3 = b_{13}q_1 + \lambda_3 q_3$, onde $b_{12} = \langle A(q_1), q_2 \rangle$ e $b_{13} = \langle A(q_1), q_3 \rangle$. Definamos agora base para \mathbb{R}^4 $\bar{q}_0 = (1, 0, 0, 0)$, $\bar{q}_i = (0, q_i)$, para $i = 1 \cdots 3$. Definindo Q a matriz ortogonal com colunas \bar{q}_j não é difícil verificar que:

$$Q^t \bar{A} Q = B = \begin{bmatrix} 0 & \|w\| & 0 & 0 \\ \|w\| & c_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{12} & \lambda_2 & 0 \\ 0 & b_{13} & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Por escalonamento (análogo a decomposição LU), e utilizando o fato de λ_2 e λ_3 serem diferentes de zero temos que B é conjugado a:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \|w\| & 0 & 0 \\ \|w\| & \tilde{c}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Por outro lado ao escalonar diretamente A temos que A é conjugada a

$$D = \begin{bmatrix} 0 & w_1 & 0 & 0 \\ w_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que B e D são equivalentes, temos pela lei de inércia de Sylvester, que sinal de d_2 e d_3 são iguais a λ_2 e λ_3 , respectivamente. A hipótese do item (a) e argumento usual de decomposição LU implicam que d_2 e d_3 tem sinais positivos e assim λ_2 e λ_3 são positivos. De forma análoga a hipótese do item (b) implica que d_2 e d_3 tem sinais negativos e assim λ_2 e λ_3 são negativos.

□

Proposições 1.92 e 1.93 implicam o Teorema 1.86.

Índice Remissivo

- Critério
 - da segunda derivada, 31
- curvatura
 - de Gauss, 48
- forma fundamental
 - segunda, 49
- função
 - de Cobb-Douglas, 27
- Hessiano de f em p , 28
- imersão, 9
- máximo
 - local, 32
- mínimo local, 32
- matriz
 - hessiana, 29
- polinômio de Taylor
 - de grau 2 em torno de p , 35
- ponto
 - crítico, 33
- primeira forma, 17
- segunda forma fundamental, 49
- submersão, 5
- teorema
 - espectral, 29
- valor
 - regular, 7
- variedades
 - mergulhadas, 4
- vetor
 - gradiente, 19

Todo list