

Cálculo Avançado e Geometria Riemanniana

(uma abordagem panorâmica)

Prof. Marcos M. Alexandrino (IME-USP)
Profa Yunelsy N. Alvarez (FGV)

Sumário

I	Derivadas e campos	1
1	Variedades mergulhadas em espaços Euclidianos	3
1.1	Submersões e imersões	3
1.2	Espaços tangentes e métrica induzida	15
1.3	Campos de vetores e o campo gradiente	22
1.3.1	Campos de vetores	22
1.3.2	Campo gradiente	25
1.3.3	Colchete de campos, um primeiro contato	27
1.4	Multiplicadores de Lagrange	28
1.5	Hessiano e extremos	34
1.5.1	Extremos locais	36
1.5.2	CrITÉRIOS de classificação de pontos críticos	41
1.5.3	Fórmula de Taylor de ordem maior	46
1.5.4	Máximos e mínimos absolutos	48
1.6	(*) Gradiente descendente e Aprendizado de Máquinas	49
1.6.1	Gradiente descendente e sua convergência	50
1.6.2	Função penalidade associada a cross entropy	53
1.6.3	Classificação multiclasse linear	55
1.7	(*) Curvatura de Gauss de superfícies	57
1.8	(*) Curvatura média e superfícies mínimas	64
1.8.1	Superfícies mínimas	65
1.8.2	EDP das superfícies mínimas	67
1.9	(*) Hessiana orlada e o Hessiano Riemanniano	71
1.9.1	Motivação e o teorema do Hessiano orlado	72

1.9.2	(**) Ideia da Prova	74
2	Campos e fluxos em variedades	79
2.1	Variedades	79
2.2	Velocidades e derivações	84
2.3	Campos e fibrados vetoriais	92
2.4	Fluxos de campos	94
2.5	Colchete de campos	101
2.6	Teorema de Frobenius	108
2.6.1	Definições e resultado principal	108
2.6.2	Prova do Teorema 2.54	110
2.7	(*) Controle geométrico e o teorema de Stefan-Sussmann	113
II	Integral e formas diferenciais	125
3	Integração	127
3.1	Definições e propriedades básicas	127
3.2	Teorema de Fubini	130
3.3	Partição da unidade	134
3.4	Mudança de variáveis	136
3.4.1	Exemplo e exercícios	136
3.4.2	Demonstração do Teorema 3.22	138
3.5	Um pouco de integrais triplas	141
3.6	Teoremas clássicos de Gauss, Stokes e Green	148
3.6.1	Fluxo através de superfícies e teorema clássico de Gauss	149
3.6.2	Trabalho e os teoremas clássicos de Stokes e Green	155
3.6.3	(*) Aplicações as Equações de Maxwell	161
4	Formas diferenciáveis	167
4.1	Motivação	167
4.2	Produto wedge e formas	171
4.2.1	Produto wedge	171
4.2.2	Formas diferenciais	173
4.3	Derivada exterior	179
4.4	Integração e teorema de Stokes	184
4.4.1	Orientação e forma volume	185
4.4.2	Integração de formas	188
4.4.3	Variedade com bordo e o Teorema de Stokes	190

4.4.4	(*) Comentários sobre invariantes topológicos	195
4.5	(*) Geodésicas e uma introdução a mecânica	196
4.5.1	Estrutura simplética de TM^*	196
4.5.2	Relações entre Lagrangianos e Hamiltonianos	198
4.5.3	Geodésicas e equação de Newton	203
4.6	(*) Otimização e o princípio do máximo de Pontryagin	205
4.6.1	Uma versão geométrica do PMP	207
4.6.2	Formulação clássica do PMP (tempo fixo)	214
4.6.3	PMP e otimização do tempo	218
 III Geometria Riemanniana		223
5	Conexão e geodésicas	225
5.1	Métricas e variedades Riemannianas	225
5.1.1	Definições básicas	226
5.1.2	Métricas em grupos de Lie e espaços quocientes de ações isométricas	230
5.1.3	(*) Métrica de um sistema mecânico interligado	241
5.2	Conexão Riemanniana e o transporte paralelo	246
5.3	Conexão e métrica de Sasaki em TM	257
5.4	(*) Transporte paralelo e o teorema de Ambrose Singer	259
5.5	Conexão e alguns objetos de análise	262
5.5.1	Gradiente e Hessiano	263
5.5.2	Divergente e Laplaciano	265
5.6	Geodésicas	267
5.6.1	Propiedades básicas	267
5.6.2	Lemas de Gauss e propriedades minimizantes	272
5.6.3	Vizinhança normal convexa	275
5.6.4	Algumas aplicações do teorema de vizinhança convexa	277
5.7	Teorema de Hopf Rinow	280
5.8	(*) Fluxo geodésico e forma simplética	284
 6	 Curvatura	 293
6.1	Tensor curvatura e curvatura seccional	293
6.2	Equação de Gauss e o teorema Egregium de Gauss	298
6.2.1	Segunda forma	298
6.2.2	Equação de Gauss	301
6.2.3	(*) Segunda forma e o vetor curvatura média	302

6.3	Curvatura e Campos de Jacobi	306
6.3.1	Propriedades básicas	306
6.3.2	Isometrias locais e Teorema de Cartan	312
6.3.3	Pontos conjugados e teorema de Hadamard	315
6.3.4	Recobrimento isométrico e curvatura constante	318
6.4	Energia de curvas e Teorema de Bonnet Myers	320
6.4.1	Funcional Energia	320
6.4.2	Teorema do Índice e geodésica minimizante	324
6.4.3	Teorema de Bonnet Myers	325
6.5	Formas de conexão e curvatura	328
6.5.1	Conexão afim	328
6.5.2	Conexão Riemanniana	331
6.6	Versão local do Teorema de Gauss Bonnet	335
6.7	(*) Curvatura e fibrado de referenciais	337
6.7.1	Fibrado de referenciais, formas de conexão e curvatura	337
6.7.2	Integrabilidade e curvatura	340
6.7.3	Holonomia e curvatura	342
6.8	Teorema fundamental das imersões isométricas	344
6.8.1	Convenções e recordações	344
6.8.2	Equações de Gauss Codazzi e Ricci	346
6.8.3	Teorema fundamental das imersões isométricas	349

Prefácio

Este livro foi escrito com dois objetivos em mente.

Nosso primeiro objetivo é apresentar um curso de *Cálculo Avançado* (vide Capítulos 1,2,3 e 4) via uma abordagem geométrica e interdisciplinar, tentando sempre intercalar teoremas e resultados mais avançados da Matemática com exemplos e resultados vistos em disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral de várias variáveis. Além dos tópicos usuais de uma disciplina de Cálculo Avançado (*teoremas de imersão, submersão, do posto, de Frobenius, de mudança de variáveis, de Fubini e de Stokes para formas diferenciais*) apresentamos tópicos como *gradiente descendente* e suas aplicações em Aprendizagem de Máquina (vide Capítulo 1), *curvatura de Gauss* e suas relações com Hessiano (vide Capítulo 1), *Controle Geométrico* (teorema de Stefan-Sussmann no Capítulo 2 e princípio do máximo de Pontryagin no Capítulo 4) relevantes em Engenharia Mecânica e Economia, além da *linguagem Hamiltoniana, Lagrangiana e estrutura simplética* (vide Capítulo 4), a qual é relevante na Física.

Nosso segundo objetivo é apresentar um curso introdutório de *Geometria Riemanniana* (vide Capítulo 5 e 6) visto como um desdobramento natural dos resultados discutidos em Cálculo Avançado. Além de darmos ênfase aos temas centrais de uma disciplina introdutória, tais como *conexão, geodésica, curvatura seccional e campos de Jacobi* também apresentamos tópicos adicionais tais como *spray geodésico e estrutura simplética* (relacionando Capítulo 5 com Capítulo 4), *propriedades de grupos de holonomia* (conectando esta temática com a teoria de Controle Geométrico e assim relacionando Capítulo 5 com Capítulo 2) *formas de conexão e curvatura, equações de Maurer-Cartan* e o *teorema fundamental das imersões isométricas* (relacionando tais tópicos no Capítulo 6 com as formas diferenciais apresentadas no Capítulo 4). Nosso objetivo aqui não é escrever um tratado de Geometria Riemanniana, mas estimular o(a) leitor(a) fazer conexões de temas e estudar posteriormente os clássicos na área.

O livro foi escrito baseado nas experiências dos autores em ministrar discipli-

nas para públicos diversos, em particular, nas disciplinas de Geometria Diferencial, Geometria Riemanniana, Cálculo Avançado ministradas pelo primeiro autor no IME-USP e em disciplinas de Cálculo Diferencial ministradas pela segunda autora na FGV e pelo primeiro autor na FEA-USP. O público-alvo são aluno(a)s avançados da graduação e aluno(a)s de pós graduação, tanto da Matemática Pura quanto Matemática Aplicada.

O primeiro autor teve sua pesquisa parcialmente financiada pela Fapesp projeto temáticos Processo: 22/16097 – 2 e 16/23746 – 6 e a segunda autora teve sua pesquisa parcialmente financiada pela Capes, bolsa de Pos-Doc no IME-USP.

Destacamos que esta é uma versão preliminar que demanda ainda pequenas correções e melhorias. Esperamos com o tempo acrescentar alguns novos tópicos, comentários e novas referências. Agradecemos antecipadamente sugestões, as quais podem ser encaminhadas para o email malex@ime.usp.br

Parte I

Derivadas e campos

Variedades mergulhadas em espaços Euclidianos

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados sobre teoria das variedades mergulhadas em $\mathbb{R}^n$, tais como os teoremas de submersão e imersão, propriedades dos espaços tangentes, além de rudimentos de otimização em variedades. Ao longo deste capítulo, o leitor ou a leitora terá a oportunidade de observar que muitos dos conceitos e resultados sobre variedades que iremos apresentar são generalizações naturais de resultados que foram vistos em disciplinas anteriores tais como Cálculo II (onde se aprende e.g., derivada de funções de várias variáveis, vínculos, plano tangente, multiplicador de Lagrange, parametrizações), vide [Apo69].

1.1. Submersões e imersões

Já nos primeiros semestres da graduação, engenheiros, matemáticos e físicos encontravam **os espaços de configurações** M (possíveis posições de um certo sistema) como sendo “bons” subconjuntos em espaços Euclidianos $\mathbb{R}^{m+k}$. Em geral tais conjuntos eram descritos via pré-imagens de k -vínculos $g_i : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}$, i.e., $M = G^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^{m+k}, G(x) = c\}$ onde $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ para $G(x) = (g_1(x), \dots, g_k(x))$ e $c = (c_1, \dots, c_k) \in \mathbb{R}^k$. Sob boas condições conseguimos estabelecer os m graus de liberdade do M (a dimensão de M) como sendo dimensão do espaço menos o número de vínculos. Tais conjuntos eram na verdade o que chamaremos aqui de variedades mergulhadas (vide Definição 1.6). As boas condições sobre os vínculos serão revista no teorema de submersão (vide Teorema 1.10). Antes de estabelecer as definições formais, apresentemos alguns exemplos que

ilustram estas ideias. Nestes exemplos, sugerimos que o(a) leitor(a) se concentre mais na intuição e ideias, não se preocupando em demonstrar as afirmações.

Exemplo 1.1.

Dados 2 partículas $p, q \in \mathbb{R}^3$ a uma distância fixa de 1 unidade, o espaço de configuração deste sistema, pode ser descrito como

$$g^{-1}(1) = \{(p, q) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, g(p, q) = 1\}$$

onde a função $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(p, q) = \|p - q\|^2 = \sum_{i=1}^3 |p_i - q_i|^2$$

é nosso vínculo.

Exemplo 1.2.

Consideremos um modelo de um "braço robótico" (com braço e antebraço de comprimentos l_1 e l_2) em um plano, i.e., conjunto de todos os possíveis 2 segmentos de reta no plano $\overline{0p}$ e $\overline{pq}$ com $\|p\| = l_1$ e $\|p - q\| = l_2$. A fim de determinar suas possíveis posições, precisamos apenas determinar o ângulo θ_1 entre eixo x_1 e $\overline{0p}$ e θ_2 o ângulo entre eixo x_1 e $\overline{pq}$. Note porém que $\theta_i = 0$ e $\theta_i = 2\pi$ nos dariam a mesma posição. Assim somos levados a considerar números complexos (de módulo 1) $z_i = e^{i\theta_i}$ e concluir que o espaço de configuração é $M = S^1 \times S^1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid G(z_1, z_2) = (1, 1)\}$ onde $G : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ como $G(z_1, z_2) = (|z_1|^2, |z_2|^2)$, vide Figura 1.1.

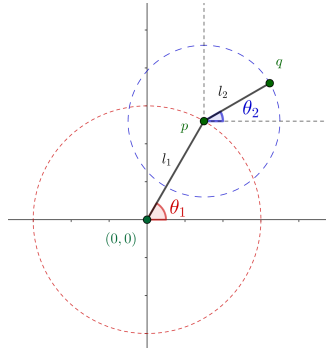


Figura 1.1: A variedade $S^1 \times S^1$ modela possíveis posições de um braço de robô.

Exemplo 1.3.

Consideremos agora o espaço de configuração de um sólido em $\mathbb{R}^3$ com centro de massa em 0 , i.e., o conjunto de todas bases ortonormais $\{q_i\}_{i=1,\dots,3}$ com a mesma orientação da base canônica. Ao colocar as bases nas colunas de matrizes, tal conjunto então será descrito como as matrizes ortogonais com determinante 1. Assim vamos primeiro considerar as **matrizes ortogonais**

$$\mathbb{O}(3) := G^{-1}(Id) = \{Q \in \mathbb{GL}^{3 \times 3}(\mathbb{R}) \mid G(Q) = Id\}$$

onde $G : \mathbb{GL}^{3 \times 3}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}$ é $G(A) = A^t A$, sendo que $\mathbb{GL}^{3 \times 3}(\mathbb{R})$ denota as matrizes com determinante diferente de zero e $\mathcal{S}$ as matrizes simétricas. Possível verificar que $\mathcal{S}$ é um espaço vetorial isomorfo a $\mathbb{R}^6$ e $\mathbb{GL}^{3 \times 3}(\mathbb{R})$ pode ser identificado com um aberto de $\mathbb{R}^9$. Nosso grupo $\mathbb{O}(3)$ terá 3 graus de liberdade, i.e., dimensão 3. O espaço de configuração desejado então é a componente conexa de $\mathbb{O}(3)$ das matrizes com determinante 1 denotado por $\mathbb{SO}(3)$ (que tem os mesmos graus de liberdade ou seja com dimensão 3). De fato é possível mostrar que as matrizes de determinante 1 podem ser conectadas continuamente a matriz identidade Id , enquanto as de determinante -1 podem ser conectadas com a matriz $-Id$.

Observação 1.4.

Mais geralmente um sistema mecânico interligado estará mergulhado em um sistema mecânico livre que é descrito como produto de m cópias de $\mathbb{SO}(3) \times \mathbb{R}^3$ (cada cópia descrevendo um corpo rígido e seu centro de massa) com n cópias de $\mathbb{R}^3$ (cada cópia

Continuação.

descrevendo uma partícula). Em particular, no Exemplo 1.2

$$\begin{aligned}\varphi : S^1 \times S^1 &\rightarrow (\mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R}^3) \times (\mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R}^3) \\ (z_1, z_2) &\mapsto ((Q(z_1), R(z_1)), (Q(z_2), R(z_1, z_2)))\end{aligned}$$

onde $Q(z_i) : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ é rotação definida como $Q(z_i)(z, t) = (z_iz, t)$ e as aplicações centro de massa são: $R_1(z_1) = r_1Q(z_1)e_1$, $R_2(z_1, z_2) = l_1Q(z_1)e_1 + r_2Q(z_2)e_1$. Aqui r_1 é a distância do centro de massa de $\overline{0p}$ a 0 e r_2 é a distância do centro de massa de $\overline{pq}$ ao link p . Para mais detalhes vide [BL04].

Observação 1.5. Oscilador harmônico

Nossos conjuntos, que serão exemplos naturais de variedades, podem aparecer não só como espaço de configuração de um sistema, mas também como um subconjunto do espaço de fases (posição velocidade) de algum sistema dinâmico. Considere, por exemplo, uma partícula com massa m localizada em uma reta presa a uma mola perfeita. O movimento de tal partícula é descrita pela E.D.O (equação diferencial ordinária) $m\ddot{\alpha}(t) = -k\alpha(t) = -\dot{u}(\alpha(t))$ onde $u(q) = \frac{k}{2}q^2$ é a função potencial. Defina $E : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como a energia total, i.e., $E(q, \dot{q}) = \frac{m}{2}(\dot{q})^2 + u(q)$. Visto que $\frac{d}{dt}E(\alpha(t), \dot{\alpha}(t)) = 0$, (o que pode ser facilmente verificado pela regra da cadeia) concluímos que $E(\alpha(t), \dot{\alpha}(t)) = c$. Em outras palavras, posição e velocidade da partícula ficam restritas à elipse $E^{-1}(c) = \{(q, \dot{q}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, E(q, \dot{q}) = c\}$.

Após alguns exemplos e motivações estamos prontos para a definição formal de variedade mergulhada. A grosso modo falando, uma variedade mergulhada M (de dimensão m) em $\mathbb{R}^{m+k}$ é um conjunto que é localmente difeomorfo a um aberto de $\mathbb{R}^m \times \{0\}$, i.e., que (localmente) pode ser "suavemente achatada (retificada)".

Definição 1.6. Variedade mergulhada

Um conjunto $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$ é uma **m -variedade mergulhada** no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{m+k}$ (ou subvariedade do $\mathbb{R}^{m+k}$) se para cada $p \in M$ existe uma vizinhança¹ $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^{m+k}$ de p , vizinhança $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^{m+k}$ de q e um difeomorfismo $\tilde{\psi} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ tal que $\tilde{\psi}(p) = q$ e $\tilde{\psi}(U) = V$, onde $U = \tilde{U} \cap M$ e $V = \tilde{V} \cap \{\mathbb{R}^m \times \{0\}\}$. Chamamos a aplicação $\psi = \tilde{\psi}|_U$ de **sistema de coordenada**, e $\varphi := \psi^{-1}$ é chamada de **parametrização**.

¹Lembre que uma **vizinhança** de um ponto $p \in \mathbb{R}^{m+k}$ é um conjunto aberto e conexo que contém p em seu interior. Lembre também que um **difeomorfismo** é uma aplicação suave com inversa suave.

Um resultado fundamental para melhor compreender a definição de variedades, bem como para demonstrar os teoremas de submersão e imersão é o clássico *teorema da função inversa* cuja demonstração pode ser encontrada em [Lan83].

Teorema 1.7. teorema de função inversa

Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tem $DF(p)$ invertível, então existem vizinhanças U_0 e V_0 de p e $F(p)$ respectivamente, tal que $F|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$ se torna um difeomorfismo.

Estamos agora em condições de discutir, com o devido cuidado, um exemplo de variedade mergulhada.

Exemplo 1.8. Gráficos

Seja $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave. Considere o gráfico de h em $\mathbb{R}^3$, ou seja, o conjunto

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 = h(x_1, x_2)\}.$$

Então M é uma variedade mergulhada em $\mathbb{R}^3$ pois a aplicação $\tilde{\psi} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\tilde{\psi}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3 - h(x_1, x_2))$$

satisfaz as propriedades da Definição 1.6. De fato, como

$$D\tilde{\psi}(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\partial h}{\partial x_1} & -\frac{\partial h}{\partial x_2} & 1 \end{bmatrix}$$

para todo $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, então, pelo Teorema da Função Inversa ψ é um difeomorfismo local de $\mathbb{R}^3$, e por ser uma aplicação bijetora, é um difeomorfismo. Além disso, $\psi(M) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

Como caso particular, observamos que o parabolóide é uma superfície mergulhada, pois é o gráfico sobre $\mathbb{R}^2$ da função $h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

Continuação.

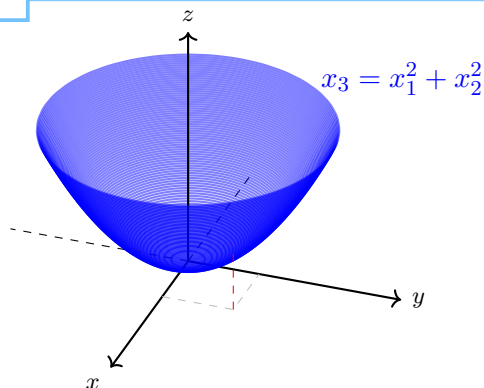


Figura 1.2: O Parabolóide de equação $x_3 = x_1^2 + x_2^2$

Subvariedades mergulhadas do espaço Euclidiano aparecem naturalmente na disciplina de Cálculo II descrita por “bons vínculos”, ou seja via submersões.

Definição 1.9.

Uma aplicação suave $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ é chamada **submersão** se $DG(x)$ é sobrejetora para todo $x \in U$.²

Um dos exemplos mais simples de uma submersão é considerar uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ de posto k . Note que neste exemplo sabemos que $\{T^{-1}(c), c \in \mathbb{R}^k\}$ é uma partição de $\mathbb{R}^{m+k}$ por subespaços afins (em particular variedades) de dimensão m . O resultado a seguir generaliza esta discussão.

Teorema 1.10. Teorema da Submersão

Seja $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma submersão suave. Então para todo $p_0 \in U$ existe uma vizinhança $U_0 \subset U$ de p_0 tal que a partição $\mathcal{F} = \{G^{-1}(c), c \in \mathbb{R}^k\} \cap U_0$ é difeomorfa à **folheação canônica** $\mathcal{F}_0 = \{\pi^{-1}(c), c \in \mathbb{R}\}$, onde $\pi : \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ é definida como $\pi(x, y) = y$. Mais precisamente existe um difeomorfismo $\tilde{\varphi} : V_0 \rightarrow U_0$ tal que $G \circ \tilde{\varphi}(x, y) = \pi(x, y) = y$.

² $DG(x)$ é sobrejetora se $\nabla g_i(x)$ são linearmente independente, ou equivalentemente, se existem k colunas linearmente independente.

Exemplo 1.11.

Para ilustrar o Teorema 1.10, consideremos novamente o Exemplo 1.8. Se definirmos a função $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_3 - h(x_1, x_2),$$

vemos que $\mathcal{F} = \{g^{-1}(c), c \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto das translações verticais do gráfico da função h (as quais são movimentos rígidos). O difeomorfismo $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$\tilde{\varphi}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3 + h(x_1, x_2))$$

satisfaz

$$g \circ \tilde{\varphi}(x_1, x_2, x_3) = x_3 = \pi(x_1, x_2, x_3).$$

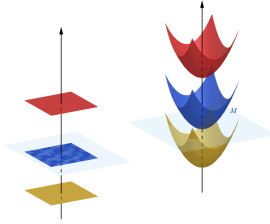


Figura 1.3: As folheações $\mathcal{F}_0$ e $\mathcal{F}$ no caso em que $h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

Prova do Teorema 1.10. Seja $A : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ um movimento rígido (isometria no espaço Euclidiano) tal que a matriz $D_y \tilde{G}(p_0)$ é invertível onde $\tilde{G} = G \circ A$. Defina $\tilde{\psi}(x, y) = (x, \tilde{G}(x, y))$ e observe que

$$D\tilde{\psi}(p_0) = \begin{bmatrix} Id & 0 \\ D_x \tilde{G}(p_0) & D_y \tilde{G}(p_0) \end{bmatrix}$$

é um isomorfismo. Logo pelo Teorema da Função Inversa $\tilde{\psi} : U_0 \rightarrow V_0$ é um difeomorfismo. Seja $L = \{(x, c) \in (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k)\} \cap V_0$.

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}^{-1}(L) &= \{(x, y) \in U_0, \psi(x, y) = (x, c)\} \\ &= \{(x, y) \in U_0, \tilde{G}(x, y) = c\} \end{aligned}$$

Assim $G \circ A \circ \tilde{\psi}^{-1}(x, c) = c$. A demonstração termina definindo $\tilde{\varphi} = A \circ \tilde{\psi}^{-1}$. $\square$

Exercício 1.12. Gráficos

Seja $H : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ aplicação suave. Defina o gráfico

$$M = \{(x, y) \in V \times \mathbb{R}^k, y = H(x)\}$$

e a função $G : V \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ como

$$G(x, y) = \sum_{i=1}^k (y_i - h_i(x))e_i,$$

Verifique que:

- (a) $M = G^{-1}(0)$,
- (b) G é submersão.

Note que o Teorema 1.10 implica em particular que cada conjunto de nível $G^{-1}(c)$ de uma submersão $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ é variedade mergulhada. Porém por vezes teremos que lidar com conjuntos de níveis de aplicações que não são necessariamente submersões. Mesmo assim como veremos a seguir, $G^{-1}(c)$ será variedade se c for o que chamamos *valor regular*.

Definição 1.13.

Dado uma aplicação $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ suave. Suponha que para $c \in G(U)$ temos que $DG(x)$ é sobrejetor $\forall x \in G^{-1}(c)$. Neste caso dizemos que c é **valor regular**.

Observação 1.14. Teorema de Sard

Dado uma aplicação suave $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$, o teorema de Sard garante que o conjunto C de valores críticos, ou seja $C = \{G(x); \text{posto } DG(x) < k\}$, tem **medida nula**. Em outras palavras dado $\epsilon > 0$ podemos cobrir C por um conjunto de cubos em $\mathbb{R}^k$ com volume total menor que ϵ , vide [Mil65].

Teorema 1.15. Teorema do valor regular

Seja $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma aplicação suave e c um valor regular. Então

Continuação.

$M = G^{-1}(c)$ é variedade mergulhada no $\mathbb{R}^{m+k}$ com dimensão m .

Demonstração. Observe que dado um valor regular c e um ponto $p \in G^{-1}(c)$ então, por definição de valor regular, $DG(p)$ é sobrejetor, i.e., existem k colunas de $DG(p)$ que são linearmente independentes. Assim por continuidade é possível provar que tais k colunas de $DG(x)$ continuam linearmente independentes para todo x contido em uma vizinhança U_0 de p . Logo $G|_{U_0} \rightarrow \mathbb{R}^k$ é uma submersão. Pelo teorema da submersão, $G^{-1}(c) \cap U_0$ é variedade mergulhada e assim $M = G^{-1}(c)$ é variedade mergulhada. $\square$

Observação 1.16. Valor singular

Um valor $c \in G(U)$ de uma aplicação $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ é chamado **valor singular** se existe $q \in G^{-1}(c)$ tal que posto $DG(q) < k$. Tal ponto q é chamado **ponto crítico**. Consideremos como exemplo a aplicação $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Note que todo $c \neq 0$ é valor regular, em particular as curvas $g^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^2; x_2 = \frac{c}{x_1}\}$ são variedades mergulhadas (de dimensão 1). Por outro lado observamos que $C = g^{-1}(0) = \{x_1 = 0\} \cup \{x_2 = 0\}$ não é variedade. Observe que embora para $x \in g^{-1}(0)$ com $x \neq (0, 0)$ tenhamos $dg(x)$ sobrejetor, para $q = (0, 0)$ temos $dg(q) = [0, 0]$. Ou seja a existência de um único ponto crítico q já pode implicar que o conjunto de nível deixe de ser uma variedade. Terminamos observando que pelo teorema de Lojasiewicz a pre imagem de um valor singular de uma aplicação analítica é uma estratificação. Para maiores detalhes, (e.g., definição de estratificação) vide [KP02].

Vimos pela Definição 1.6 e Exercício 1.12 que gráficos são variedades mergulhadas. O resultado a seguir implica o resultado recíproco, ou seja que toda variedade mergulhada é localmente um gráfico.

Teorema 1.17. Teorema da Função Implícita

Seja $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma submersão suave. Então $M = G^{-1}(c)$ é um gráfico local. Mais precisamente suponha que a matriz $D_y G(p_1, p_2)$ é um isomorfismo onde (p_1, p_2) é tal que $c = G(p_1, p_2)$. Então existe uma vizinhança B de (p_1, p_2) , uma vizinhança $W \subset \mathbb{R}^m$ de p_1 uma aplicação suave $H : W \rightarrow \mathbb{R}^k$ tal que: $(x, y) \in B \cap M$ se e somente se $y = H(x)$ com $x \in W$. Em particular $G(x, H(x)) = c$.

Demonstração. Na demonstração do Teorema 1.10 basta considerar $A = Id$. Com c fixado temos $\tilde{\psi}^{-1}(x, c) = (x, \tilde{H}(x, c))$. Então definimos $H(x) = \tilde{H}(x, c)$. $\square$

Exercício 1.18. Superfície de Revolução

Seja $g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Suponha que c é valor regular da função $(r, x_3) \rightarrow g(r^2, x_3)$. Seja

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, g(x_1^2 + x_2^2, x_3) = c\}.$$

Verifique que M é **superfície de revolução**, i.e., variedade mergulhada de dimensão 2 invariante por rotações que fixam o eixo x_3 (vide o exemplo da Figura 1.4).

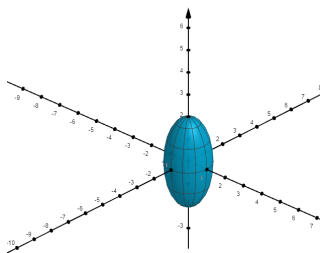


Figura 1.4: $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{4}x_3^2 = 1\}$ ilustra o Exercício 1.18

Observação 1.19.

No exercício anterior temos então uma variedade M que admite uma aplicação $\mu : G \times M \rightarrow M$ (onde $G = S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, $M = \mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$), definida como

$$\mu(g, (z, t)) = (gz, t).$$

Observe que tal aplicação μ atende as propriedades a seguir:

- $\mu(e, x) = x$;
- $\mu(g_2, \mu(g_1, x)) = \mu(g_2 g_1, x)$.

Em geral, uma aplicação $\mu : G \times M \rightarrow M$ (G um grupo de Lie, por exemplo,

Continuação.

um grupo fechado de matrizes, e M uma variedade) que satisfaz essas propriedades será denominada **ação**.

Uma outra forma em que encontrávamos variedades mergulhadas no espaço Euclidiano na disciplina de Cálculo II era via as imersões (as parametrizações).

Definição 1.20.

Uma aplicação suave $\varphi : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ é chamada **imersão** se $D\varphi(x)$ é injetora para todo $x \in V$.

Teorema 1.21. Teorema de imersão

Seja $\varphi : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ uma imersão. Então dado $p \in V$ existe uma vizinhança $V_0 \subset V$ de p tal que $\varphi(V_0)$ é variedade mergulhada. Mais precisamente, existe uma vizinhança $\tilde{U}$ em $\mathbb{R}^{m+k}$ de $\varphi(p)$, uma vizinhança $\tilde{V}_0$ de $(p, 0)$ em $\mathbb{R}^{m+k}$ e um difeomorfismo $\tilde{\psi} : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \tilde{V}_0 \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ tal que $\tilde{\psi} \circ \varphi(x) = (x, 0)$.

Demonstração. Escolha um movimento rígido $A : \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ tal que a aplicação $\hat{\varphi} = A \circ \varphi$ tem a propriedade que a matriz $(\frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial x_j})(p)$ é invertível onde $1 \leq j \leq m$ e $1 \leq i \leq m$.

Vamos definir então

$$\begin{aligned} F(x, y) &= (\hat{\varphi}_1(x), \dots, \hat{\varphi}_m(x), \hat{\varphi}_{m+1}(x) + y_1, \dots, \hat{\varphi}_{m+k}(x) + y_k) \\ &= \hat{\varphi}(x) + (0, y) \end{aligned}$$

Observe que a matriz

$$DF(p) = \begin{bmatrix} \pi_1 \circ D\hat{\varphi}_p & 0 \\ \pi_2 \circ D\hat{\varphi}_p & Id \end{bmatrix}$$

é invertível, onde $\pi_1(x, y) = x$ e $\pi_2(x, y) = y$.

Concluimos, assim, pelo teorema da função inversa que $F : \tilde{V}_0 \rightarrow \tilde{U}$ é um difeomorfismo, para as vizinhanças apropriadas. A demonstração termina observando que a aplicação definida como $\tilde{\psi} = F^{-1} \circ A$ atende as propriedades necessárias. De fato,

$$(x, 0) = F^{-1} \circ F(x, 0) = F^{-1} \circ \hat{\varphi}(x) = F^{-1} \circ A \circ \varphi(x).$$

□

Exemplo 1.22.

Consideremos novamente o gráfico de uma função suave $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja, o conjunto

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 = h(x_1, x_2)\}.$$

Definamos a aplicação $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$\varphi(x_1, x_2) = (x_1, x_2, h(x_1, x_2)),$$

que é uma imersão pois

$$D\varphi(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ h_{x_1} & h_{x_2} \end{bmatrix}.$$

Considerando agora o difeomorfismo $\tilde{\psi}$ do Exemplo 1.8, temos

$$(\tilde{\psi} \circ \varphi)(x_1, x_2) = \tilde{\psi}(\varphi(x_1, x_2)) = \tilde{\psi}(x_1, x_2, h(x_1, x_2)) = (x_1, x_2, 0).$$

Exercício 1.23.

Seja M^2 superfície mergulhada em $\mathbb{R}^3$ invariante por rotação no eixo x_3 , ou seja, uma superfície de rotação. Verifique que a aplicação $\varphi : V \rightarrow M$ definida como

$$\varphi(t, \theta) = (r(t) \cos(\theta), r(t) \sin(\theta), h(t))$$

é uma parametrização de M^2 , onde $\beta(t) = (r(t), 0, h(t))$ é uma parametrização da curva geratriz com as propriedades que $\|\beta'\| \neq 0$ e $r(t) \neq 0$. Em outras palavras verifique que φ é uma imersão e sua imagem está contida em M^2 , vide Figura 1.5.

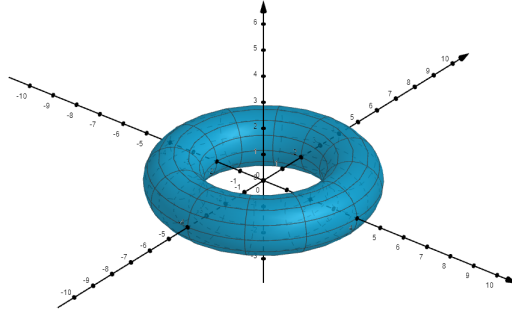


Figura 1.5: A aplicação $\varphi(t, \theta) = ((\cos(t) - 3) \cos(\theta), (\cos(t) - 3) \sin(\theta), \sin(t))$ é uma parametrização que ilustra o Exercício 1.23.

1.2. Espaços tangentes e métrica induzida

Antes de definir espaço tangente, precisamos fixar o conceito de vetores com pé e fibrado tangente do espaço Euclidano.

Definição 1.24.

Dado um aberto $V \subset \mathbb{R}^m$, definimos:

- **fibrado tangente** de V como $TV = V \times \mathbb{R}^m$,
- **projeção pé** $\pi : TV \rightarrow V$ como $\pi(q, v) = q$,
- **espaço tangente** em q como $T_q V = (\{q\} \times \mathbb{R}^m) = \pi^{-1}(q)$
- **vetor com pé** $q \in V$ como $v_q = (q, v) \in T_q V$.

Um vetor com pé $v_q = (q, v)$ frequentemente modela uma *velocidade* de uma partícula passando pela *posição* q . De fato, v_q é o vetor velocidade da curva que modela o movimento retilíneo uniforme $t \rightarrow q + tv$ para $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Mais geralmente dado uma curva suave $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow V$, com $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t))$ definimos o **vetor velocidade** como:

$$\alpha'(t) = (\alpha(t), \dot{\alpha}(t)) \in T_{\alpha(t)} V$$

para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, onde $\dot{\alpha}(t) = (\frac{d}{dt}\alpha_1(t), \dots, \frac{d}{dt}\alpha_m(t))$. Além disto, dado uma aplicação suave $F : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, podemos criar uma aplicação linear entre espaços tangentes definindo $dF_q : T_qV \rightarrow T_{F(q)}\mathbb{R}^n$ como

$$dF_q(v_q) = (F(q), DF(q)v).$$

Em particular definindo a curva $\beta(t) = F \circ \alpha(t)$, relemos a regra da cadeia como $dF_{\alpha(0)}\alpha'(0) = \beta'(0)$.

Definição 1.25. Espaço tangente

Seja $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$ uma m -variedade mergulhada e $\varphi : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U \subset M$ uma parametrização. Então o subespaço $T_pM = d\varphi_q T_qV \subset T_p\mathbb{R}^{m+k}$ é chamado de **espaço tangente** no ponto $p = \varphi(q)$.

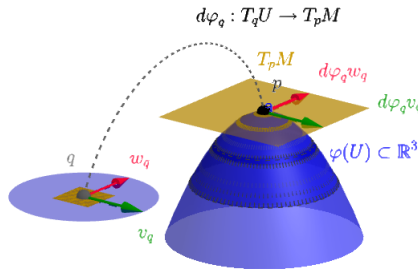


Figura 1.6: Dado uma imersão $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, uma base $\{v_q, w_q\}$ de T_qU é levada em uma base $\{d\varphi_q v_q, d\varphi_q w_q\}$ de T_pM

Segue diretamente da definição anterior que $\dim T_pM = m$.

O exercício a seguir mostra que o espaço tangente não depende da parametrização escolhida, logo, está *bem definido*.

Exercício 1.26.

Considere duas parametrizações $\varphi_i : V_i \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$ de uma variedade mergulhada $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$ tal que $W := \varphi_1(V_1) \cap \varphi_2(V_2) \neq \emptyset$. Verifique que se $\varphi_1(q_1) = p = \varphi_2(q_2)$ então $(d\varphi_1)_{q_1} T_{q_1}\mathbb{R}^m = (d\varphi_2)_{q_2} T_{q_2}\mathbb{R}^m$.

Veremos a seguir diferentes interpretações do espaço tangente. Em particular, o espaço tangente de uma superfície pode ser visto como o espaço dos vetores velocidades de curvas contidas na superfície (vide Figura 1.7). Além disso, se a superfície for uma superfície de nível $M^2 = g^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^3; g(x) = c\}$, então o espaço tangente em p será perpendicular a $\nabla g(p)$.

Proposição 1.27.

Seja $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$ uma variedade mergulhada e $p \in M$. Então todo vetor de $T_p M$ é a velocidade de uma curva contida em M e passando por p .

Demonstração. Seja $\varphi : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$ uma parametrização tal que $\varphi(q) = p$. Se $v_p \in T_p M$, então existe $w_q \in T_q V$ tal que $v_p = d\varphi_q(w_q)$ (veja Definição 1.25). Seja ε suficientemente pequeno de forma tal que o segmento de reta $r(t) = q + tw$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, esteja contido em V . Assim, a curva $\alpha(t) = \varphi \circ r(t)$ é uma curva em M satisfazendo $\alpha(0) = \varphi(r(0)) = \varphi(q) = p$ e $\alpha'(0) = d\varphi_{r(0)}(r'(0)) = d\varphi_q(w_q) = v_p$, como desejado. $\square$

Proposição 1.28.

Se $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$ é a pré imagem de um valor c de uma submersão $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$, então $T_p M$ coincide com o núcleo de dG_p .

Demonstração. Seja $v_p \in T_p M$ o vetor velocidade de uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ passando por p , vide Proposição 1.27. Sendo $M = G^{-1}(c)$, temos que $G \circ \alpha(t) = c$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Logo,

$$dG_p(v_p) = dG_{\alpha(0)}(\alpha'(0)) = (G \circ \alpha)'(0) = 0,$$

mostrando que v_p pertence ao núcleo de dG_p . Como v_p é qualquer, segue que $T_p M \subset \text{Ker}(dG_p)$.

Por outro lado, como G é uma submersão, $\dim(\text{Im}(dG_p)) = k$. Além disso, de Álgebra Linear sabemos que

$$\dim(\mathbb{R}^{m+k}) = \dim \text{Ker}(dG_p) + \dim(\text{Im}(dG_p)),$$

logo,

$$\dim(\text{Ker}(dG_p)) = m = \dim(T_p M),$$

concluindo que esses espaços coincidem. $\square$

Observação 1.29.

Dado uma submersão $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ definida como

$$G(x) = (g_1(x), \dots, g_k(x)),$$

a Proposição 1.28 implica que os gradientes $\nabla g_i(p) \in T_p \mathbb{R}^{m+k}$ são ortogonais a $T_p M$. De fato, supondo que $v_p = \alpha'(0)$

$$\begin{aligned} 0 &= DG_p(v_p) \\ &= (G \circ \alpha)'(0) \\ &= ((g_1 \circ \alpha)'(0), \dots, (g_k \circ \alpha)'(0)) \\ &= (\langle \nabla g_1(\alpha(0)), \alpha'(0) \rangle, \dots, \langle \nabla g_k(\alpha(0)), \alpha'(0) \rangle) \\ &= (\langle \nabla g_1(p), v \rangle, \dots, \langle \nabla g_k(p), v \rangle). \end{aligned}$$

Observação 1.30.

Em Cálculo II, dado uma superfície $M = g^{-1}(c)$, (para c valor regular de uma função $g : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$) costumamos ter uma identificação entre o espaço tangente $T_p M \subset T_p \mathbb{R}^3$ com um plano cujo vetor normal é dado pelo $\nabla g(p)$, i.e.,

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^3; \sum_{i=1}^3 \frac{\partial g}{\partial x_i}(q)(x_i - p_i) = 0\}$$

Tal plano **também é chamado plano tangente**. A identificação entre $T_p M$ e $\mathcal{P}$ é feita pela aplicação $\exp_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $\exp_p(v_p) = \gamma_{v_p}(1)$ onde $t \rightarrow \gamma_{v_p}(t) = p + tv$. Proposição 1.28 e a Observação 1.29 implicam que $\exp_p(T_p M) = \mathcal{P}$. Note que $\exp_x(T_x \mathcal{P}) = \mathcal{P} \forall x \in \mathcal{P}$ e tal propriedade só é realizada por uma superfície em $\mathbb{R}^3$ que seja um plano.

Exercício 1.31.

Determine o plano tangente ao toro

$$M = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 3)^2 + x_3^2 = 1\}$$

passando pelo ponto $p = (\frac{7}{4}, \frac{7\sqrt{3}}{4}, \frac{2\sqrt{3}}{4})$, vide Figura 1.7.

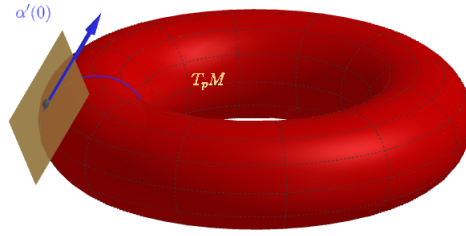


Figura 1.7: Plano tangente ao toro do Exercício 1.31

Exemplo 1.32.

Seja $F : \mathbb{GL}^{m \times m}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}^{m \times m}(\mathbb{R})$ a aplicação suave $F(A) = A^t A$, onde $\mathbb{GL}^{m \times m}(\mathbb{R})$ são as matrizes quadradas $m \times m$ invertíveis, $\mathcal{S}^{m \times m}(\mathbb{R})$ são as matrizes simétricas com entradas reais e A^t denotada a matriz transposta de A . Desejamos aqui:

- (a) verificar que Id é valor regular de F e assim concluir que

$$F^{-1}(Id) = \mathbb{O}(m) = \{Q \in \mathbb{GL}^{m \times m}(\mathbb{R}); Q^t Q = Id\}$$

é variedade mergulhada de $\mathbb{GL}^{m \times m}(\mathbb{R})$, a qual chamamos **grupo de Lie das matrizes ortogonais**;

- (b) verificar que o espaço tangente em $Q \in \mathbb{O}(m)$ é

$$T_Q \mathbb{O}(m) = \text{Ker } dF_Q = \{QX; X \in \mathfrak{o}(m)\}$$

onde $\mathfrak{o}(m) = \{X; X^t + X = 0\}$ é chamada **álgebra de Lie do grupo das matrizes ortogonais**.

Solução.

- (a). Aqui dado $Q \in \mathbb{O}(m)$ desejamos verificar que $dF_Q : T_Q \mathbb{GL}^{m \times m}(\mathbb{R}) \rightarrow T_{Id} \mathcal{S}^{m \times m}$ é sobrejetora. ^a Para tanto dado $S \in \mathcal{S}^{m \times m}$ desejamos encontrar $W \in T_Q \mathbb{GL}^{m \times m}(\mathbb{R})$ tal que $dF_Q W = S$.

Para encontrar um *candidato natural* W vamos seguir um *raciocínio reverso*. Suponha que já tivéssemos demonstrado que dF_Q é sobrejetor. Então $T_Q \mathbb{GL}^{m \times m}(\mathbb{R}) = \text{Ker } dF_Q \oplus \mathcal{V}_Q$ sendo $dF_Q|_{\mathcal{V}_Q} : \mathcal{V}_Q \rightarrow \mathcal{S}^{m \times m}$ isomorfismo. Se já tivéssemos demonstrado que Id fosse valor regular, saberíamos

Continuação.

que $T_Q\mathbb{O}(m) = \text{Ker } dF_Q$ (vide Proposição 1.28) e, assim, $\mathcal{V}_Q$ seria um espaço transversal da variedade $\mathbb{O}(m)$. Continuando nosso raciocínio reverso e aceitando o item (b) (o qual afirma que o espaço tangente $\mathbb{O}(m)$ são matrizes QX para X anti-simétrica) poderíamos concluir que $\mathcal{V}_Q$ poderia ser escolhido como o espaço dos vetores $Q\tilde{S}$ para matrizes simétricas $\tilde{S}$, uma vez que toda matriz é soma de matrizes anti-simétricas e simétricas.

Tendo um candidato $W = Q\tilde{S}$ vamos considerar a curva $t \rightarrow \beta(t) = Q + tQ\tilde{S}$ para $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ onde ϵ é pequeno suficiente. Utilizando o fato que $\tilde{S}^t = \tilde{S}$ e $Q^tQ = Id$ concluímos

$$\begin{aligned} dF_Q W &= dF_Q \beta'(0) \\ &= \frac{d}{dt} \{F \circ \beta\}|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \{(Q + tQ\tilde{S})^t(Q + tQ\tilde{S})\}|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \{Q^tQ + t\tilde{S}Q^tQ + tQ^tQ\tilde{S} + t^2\tilde{S}Q^tQ\tilde{S}\}|_{t=0} \\ &= 2\tilde{S}. \end{aligned}$$

Assim, dado S e escolhendo $W = \frac{1}{2}QS$, concluímos que $dF_Q(W) = S$. A arbitrariedade da escolha de S e Q implica que Id é valor regular e terminamos de verificar o item (a).

(b) Para verificar este item é suficiente verificar que

$$\{QX; X \in \mathfrak{o}(m)\} \subset \text{Ker } dF_Q = T_Q\mathbb{O}(m). \quad (1.2.1)$$

visto que os dois espaços vetoriais tem mesma a dimensão. Observe que

$$e^{tX} \in \mathbb{O}(m), \text{ para } X \in \mathfrak{o}(m) \quad (1.2.2)$$

onde $e^{tX} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n A^n$ (exponencial matricial). De fato:

$$\begin{aligned} (e^{tX})^t(e^{tX}) &= e^{tX^t} e^{tX} \\ &= e^{-tX} e^{tX} \\ &= Id. \end{aligned}$$

Continuação.

Como $\mathbb{O}(m)$ é um grupo, $\alpha(t) := Qe^{tX} \in \mathbb{O}(m)$. Logo $Id = F(\alpha(t))$ e assim:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \{F \circ \alpha(t)\}|_{t=0} \\ &= dF_{\alpha(0)} \alpha'(0) \\ &= dF_Q QX \end{aligned}$$

o que termina também a prova da Equação (1.2.1)

^aPodemos identificar $\mathbb{R}^{m^2} = T_Q \mathbb{GL}^{m \times m}(\mathbb{R})$ e $T_{Id} \mathbb{S}^{m \times m} = \mathbb{R}^{\frac{m^2+m}{2}}$. A dimensão das matrizes anti simétricas é calculada levando em consideração que a diagonal é zero e a matriz é determinada pelas entradas abaixo da diagonal. Logo dimensão das anti-simétricas é $\frac{m^2-m}{2}$. A dimensão das matrizes simétricas é a dimensão das anti-simétricas somada com m (que corresponde agora aos elementos da diagonal, visto que as simétricas podem ter entradas não nulas na diagonal). Ou seja $m + \frac{m^2-m}{2} = \frac{m^2+m}{2}$

Observação 1.33.

Como observado anteriormente, $\mathbb{SO}(m)$ é a componente conexa da variedade $\mathbb{O}(m)$ contendo a identidade e assim também é variedade com a mesma dimensão. Os grupos matriciais fechados $\mathbb{O}(m)$, $\mathbb{SO}(m)$, $\mathbb{U}(m) = \{U \in \mathbb{GL}^{m \times m}(\mathbb{C}), \bar{U}^t U = Id\}$ (matrizes unitárias) e $\mathbb{SU}(m) = \{U \in \mathbb{U}(m), \det U = 1\}$ são exemplos de grupos de Lie compactos, ou seja variedades G que são grupos e tal que as aplicações produto $m : G \times G \rightarrow G$ (definida como $m(g, h) = gh$) e inversa $i : G \rightarrow G$ (definida como $i(g) = g^{-1}$) são aplicações suaves (vide próximo capítulo). De fato, todos os subgrupos matriciais fechados de $\mathbb{GL}^{m \times m}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{GL}^{m \times m}(\mathbb{C})$ são grupos de Lie. Bom notar também que $\mathbb{GL}^{m \times m}(\mathbb{R})$ (matrizes com determinante diferente de zero) e $\mathbb{SL}(m)$ (matrizes com determinante 1) são exemplos de grupos (de Lie) não compactos. Para maiores detalhes vide [AB15].

Sabendo que o espaço tangente a uma subvariedade mergulhada é um subespaço vetorial, é algo natural querer pensar em algumas estruturas usuais dos espaços vetoriais tais como produto interno e norma.

Definição 1.34.

Seja M^m variedade mergulhada em $\mathbb{R}^{m+k}$. Definimos a **métrica induzida** ou **primeira forma** como sendo o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ em $T_p \mathbb{R}^{m+k}$ restrito ao

Continuação.

espaço tangente, isto é,

$$\mathbf{g}_p(u, v) = \langle u, v \rangle_p, \forall u, v \in T_p M, \forall p \in M.$$

Além disso, dada uma parametrização $\varphi : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$, os valores $g_{ij}(q) = \mathbf{g}_{\varphi(q)}(d\varphi_q(e_i)_q, d\varphi_q(e_j)_q)$, são os **coeficientes da métrica induzida** referentes a essa parametrização. Em particular $g_{i,j} : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g_{ij}(q)$ é uma função suave.

Exercício 1.35. Superfície de Revolução

Considere M uma superfície de revolução em $\mathbb{R}^3$. Temos então a parametrização

$$\psi(t, s) = (r(t) \cos(s), r(t) \sin(s), h(t)),$$

onde $t \rightarrow \beta(t) = (r(t), 0, h(t))$ é a curva geratriz com $\|\beta'(t)\| \neq 0$. Então

$$\psi_t = \frac{\partial \psi}{\partial t} = (r'(t) \cos(s), r'(t) \sin(s), h'(t))$$

$$\psi_s = \frac{\partial \psi}{\partial s} = (-r(t) \sin(s), r(t) \cos(s), 0)$$

Verifique que a métrica em coordenadas é:

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} (r'(t))^2 + (h'(t))^2 & 0 \\ 0 & (r(t))^2 \end{bmatrix}$$

1.3. Campos de vetores e o campo gradiente

Vamos nesta seção recordar alguns conceitos e resultados vistos em Cálculo II. Mais resultados sobre campos de vetores serão discutidos no Capítulo 5.

1.3.1. Campos de vetores**Definição 1.36.**

Um **campo $\vec{F}$ suave** em um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ é uma aplicação suave $\vec{F} : U \rightarrow$

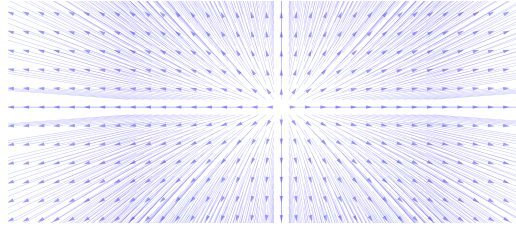


Figura 1.8: Campo $\vec{F} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{3}{2} x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$

Continuação.

$U \times \mathbb{R}^m$ definida como $\vec{F}(x) = (x, F(x))$ onde $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma aplicação suave.

Em resumo, um campo suave é uma aplicação do nosso *espaço de configurações* U para o nosso *espaço de fases* $U \times \mathbb{R}^m$ tal que $\pi \circ \vec{F}(x) = x$, onde $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é a projeção canônica $\pi(x, v) = x$. Visto que nosso espaço de fases é um produto trivial é possível escrever o campo $\vec{F}$ em termos dos **campos canônicos** $\vec{e}_i(x) = (x, e_i)$ da forma

$$\vec{F} = \sum_i^m f_i \vec{e}_i, \quad (1.3.1)$$

sendo f_i , $1 \leq i \leq m$, as componentes da aplicação F (vide Figura 1.3.1).

Teorema 1.37.

Dado um campo $\vec{F}$ em $U \subset \mathbb{R}^m$ de classe C^k e $p \in U$. Então existe uma única curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ de classe C^k tal que

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \vec{F}(\gamma(t)) \\ p &= \gamma(0) \end{aligned}$$

Exemplo 1.38.

Seja $F(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ i.e., $\vec{F}(x_1, x_2) = x_1 \vec{e}_1 + \frac{3}{2} x_2 \vec{e}_2$. Observe então a

Continuação.

solução de $\dot{\gamma}(t) = F(\gamma(t))$ com $\gamma(0) = (1, 2)$ é $\gamma(t) = (\exp(t), 2 \exp(\frac{3}{2}t))$, vide Figura 1.9.

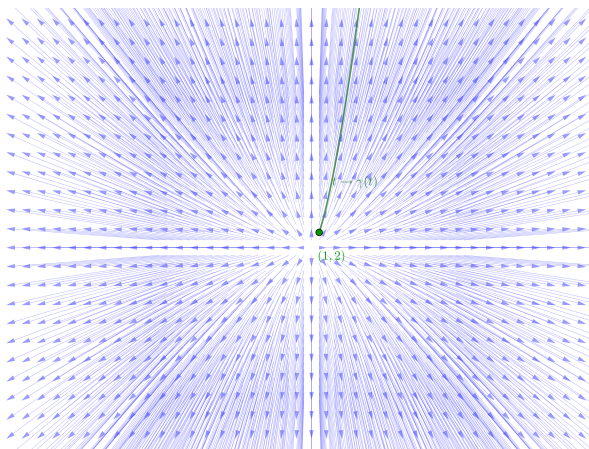


Figura 1.9: Campo $\vec{F} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{3}{2} x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ e curva integral $t \rightarrow \gamma(t)$

O exemplo acima ilustra o que chamamos **campo linear**, ou seja a aplicação $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é linear (i.e., $F(x) = Ax$). O Exemplo 1.38 também sugere como resolver E.D.Os de campos lineares associados a matrizes que podem ser diagonalizáveis.

Teorema 1.39. Espectral

Seja A uma matriz simétrica $m \times m$. Então existe uma base ortonormal $\{q_i\}$ de $\mathbb{R}^m$ (i.e., $\langle q_i, q_j \rangle = 0$ se $i \neq j$ e $\|q_i\| = 1$) tal que:

1. $Aq_i = \lambda_i q_i$, i.e., q_i é auto-vetor;
2. $Q^t A Q = \Lambda$, onde Q é a matriz com colunas q_i e Λ é a matriz diagonal de auto-valores λ_i .

Como aplicação direta do teorema espectral podemos resolver o exercício a seguir.

Exercício 1.40.

Seja A uma matriz simétrica $m \times m$ e $\{q_i\}$ uma base ortonormal de auto-vetores de A associado aos auto-valores λ_i . Defina o campo $\vec{F}$ como $F(x) = Ax$ e seja $p = \sum_i c_i q_i$. Verifique que a solução da E.D.O $\dot{\gamma}(t) = F(\gamma(t))$ com $\gamma(0) = p$ é:

$$\gamma(t) = \sum_i c_i e^{t\lambda_i} q_i$$

Lembre que a equação $Av = \lambda v$ é equivalente à equação $(A - \lambda Id)v = 0$, e tal sistema tem solução não trivial se, e somente se, $(A - \lambda Id)$ não for invertível, ou seja, se, e somente se, $p(\lambda) = \det(A - \lambda Id) = 0$.

1.3.2. Campo gradiente

Chamamos de **campo gradiente** de uma função f o campo

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \vec{e}_i.$$

Note que a equação acima parece depender dos campos canônicos. O Teorema de Representação de Riesz nos permite retirar essa dependência, como podemos ver na seguinte definição.

Definição 1.41.

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Definimos o **vetor gradiente** de f em $p \in U$, denotado por $\nabla f(p)$, como sendo o único vetor de $T_p \mathbb{R}^n$ satisfazendo

$$df(p)X = \langle \nabla f(p), X \rangle \quad \forall X \in T_p \mathbb{R}^n.$$

Observe que,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = df(p)e_i = \langle \nabla f(p), e_i \rangle. \quad (1.3.2)$$

Logo,

$$\nabla f(p) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla f(p), e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) e_i. \quad (1.3.3)$$

Como aprendemos em Cálculo II, segue da regra da cadeia, que *campo gradiente indica direção e sentido de maior crescimento da função f e, como vimos antes (vide Observação 1.29), ele é ortogonal as superfícies de níveis $f^{-1}(c)$.*

Observação 1.42.

Nem todo campo vetorial é o gradiente de uma função diferenciável. Para ver isto considere, por exemplo, o campo $\vec{F}(x_1, x_2) = x_2\vec{e}_1 - x_1\vec{e}_2$. Vamos supor por absurdo que existisse uma função f tal que $\nabla f = \vec{F}$. Então teríamos $\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2$ e $\frac{\partial f}{\partial x_2} = -x_1$. Por outro lado, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$. Chegamos assim a um absurdo pois $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = -1$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 1$. Logo não existe a tal f .

Uma vez recordado o relevante conceito de campos, podemos definir **um campo suave $\vec{F}$ de uma variedade mergulhada $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$** como sendo uma aplicação que a cada $p \in M$ associa $\vec{F}(p) \in T_p M$ e que admite uma extensão local de um campo suave em $\mathbb{R}^{m+k}$. Vamos denotar o conjunto de campos suaves de M como $\mathfrak{X}(M)$.

Campo gradiente Riemanniano

Vimos na Definição 1.41 que o gradiente de uma função $\tilde{f} : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}$ definida no espaço euclidiano, poderia ser intrinsecamente definido em termos do produto interno (ou seja, não depende de coordenadas). Além disto, o vetor $\nabla f(p)$ indicava a direção e sentido de crescimento de $\tilde{f}$ no ponto p .

Desejamos agora considerar a mesma discussão porém para uma função f que esteja definida em uma variedade M^m . Em particular, queremos encontrar o *campo tangente à variedade que indica o crescimento da função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ (restrição de $\tilde{f}$ a M)*.

Definição 1.43.

Considere uma função $\tilde{f} : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável e $M \subset U$ uma subvariedade mergulhada em $\mathbb{R}^{m+k}$. Defina $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ a restrição da função $\tilde{f}$ a M , ou seja, $f = \tilde{f}|_M$. Definimos o **campo gradiente Riemanniano** que associa a cada $p \in M$ vetor com pé $\text{grad } f(p) \in T_p M$ como o campo tangente a M que atende:

$$df_p X = \langle \text{grad } f(p), X \rangle, \forall X \in T_p M. \quad (1.3.4)$$

Em particular, $\text{grad } f(p)$ é a parte tangente de $\nabla \tilde{f}(p)$.

Observação 1.44.

No caso em que na definição anterior M seja a pre-imagem de um valor regular c de uma função suave $g : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}$ (ou seja, $M = g^{-1}(c)$), segue diretamente da Observação 1.29 que

$$\text{grad } f(p) = \nabla \tilde{f}(p) - \left\langle \nabla \tilde{f}(p), \frac{\nabla g(p)}{\|\nabla g(p)\|} \right\rangle \frac{\nabla g(p)}{\|\nabla g(p)\|}$$

Segue diretamente de (1.3.4) que a maior taxa de variação de $f = \tilde{f}|_M$ ocorre na direção e sentido do vetor gradiente Riemanniano.

1.3.3. Colchete de campos, um primeiro contato

Nesta subseção apresentaremos rapidamente o operador colchete de campos e algumas de suas propriedades. No próximo capítulo discutiremos seu significado geométrico. A grosso modo veremos que o colchete de campos mede a não comutatividade dos fluxos dos campos. Porém, no momento estamos apenas interessados em sua definição no espaço Euclidiano e algumas de suas propriedades (a serem utilizadas ainda neste capítulo).

Sejam $\vec{V} = \sum_i v_i(x) \vec{e}_i$ e $\vec{W} = \sum_i w_i(x) \vec{e}_i$ dois campos de vetores no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{m+k}$. Definimos o **campo colchete** como sendo

$$[\vec{V}, \vec{W}] = D_V \vec{W} - D_W \vec{V}, \quad (1.3.5)$$

onde (vide Exemplo 5.43)

$$D_W \vec{V}_p = \sum_{i=1}^m dv_i(W) \vec{e}_i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial v_i}{\partial W_p}(p) \vec{e}_i.$$

Na verdade, $D_W \vec{V}_p$ é o campo cujas componentes em p são as derivadas direcionais das componentes de V com respeito a W_p .

Exercício 1.45.

Escreva $[\vec{V}, \vec{W}]$ em termos dos campos canônicos $\vec{e}_i$.

Proposição 1.46.

- Se $\vec{V}$ e $\vec{W}$ são tangentes a uma subvariedade mergulhada $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$, então $[\vec{V}, \vec{W}]$ é tangente a M
- $[\vec{V}, \vec{W}] = -[\vec{W}, \vec{V}]$
- $[\vec{V}, \vec{W} + \lambda \vec{Z}] = [\vec{V}, \vec{W}] + \lambda[\vec{V}, \vec{Z}]$
- $[[\vec{V}, \vec{W}], \vec{Z}] + [[\vec{Z}, \vec{V}], \vec{W}] + [[\vec{W}, \vec{Z}], \vec{V}] = 0$

1.4. Multiplicadores de Lagrange

Problemas de otimização estão presentes no dia a dia de engenheiros e economistas, usualmente tais problemas estão sujeitos a uma ou várias restrições. Tais restrições podem ser vistas como variedades mergulhadas em espaços Euclidianos, frequentemente dados por submersões. Nesta seção iremos aplicar alguns dos conceitos e resultados anteriores para provar o clássico resultado de multiplicadores de Lagrange.

Proposição 1.47.

Considere uma função suave $g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e sua curva de nível associada a um valor regular c ,

$$C = g^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^2, g(x) = c\}.$$

Seja $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ função suave. Suponha que $u|_C$ (ou seja u restrita a C) tenha um ponto de máximo ou mínimo em $p \in C$. Então, $\nabla u(p)$ é perpendicular a C , ou seja, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p).$$

Demonstração. Vamos dar uma prova para o caso em que p é máximo, o outro caso é análogo.

Como c é valor regular temos que existe uma parametrização $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow C$ com $\alpha'(t) \neq 0$ e $\alpha(0) = p$ (poderíamos, por exemplo, usar o teorema da função implícita e tomar $\alpha(t) = (t + x_0, h(t + x_0))$).

Lembrando da Observação 1.29, temos que $\nabla g(p)$ é ortogonal a $\alpha'(0)$. De fato, $c = g(\alpha(t))$ para $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ e derivando concluímos

$$0 = \frac{dc}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} g(\alpha(t)) \Big|_{t=0} = \langle \nabla g(p), \alpha'(0) \rangle.$$

Por outro lado, como u tem máximo em $p = \gamma(0)$ temos que $t \rightarrow u(\gamma(t))$ tem ponto crítico no interior e assim

$$0 = \frac{d}{dt} u(\alpha(t)) \Big|_{t=0} = \langle \nabla u(p), \alpha'(0) \rangle$$

As duas equações acima garantem que $\nabla g(p)$ e $\nabla u(p)$ são paralelos, ou seja, $\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Exemplo 1.48. Cobb-Douglas e orçamento de 2 produtos

Consideremos o seguinte problema clássico de micro-economia.

Seja $C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 - w = 0 \text{ e } x_1, x_2 \geq 0\}$ o segmento de reta que representa um vínculo orçamentário de dois produtos. Ou seja, o consumidor tem um orçamento w e pode comprar quantidades x_1 e x_2 de produtos que custam $R\$2$ e $R\$1$, respectivamente.

Nosso objetivo aqui é maximizar uma função utilidade dado a restrição orçamentária acima. Lembremos que uma função utilidade associa a cada cesta de produtos (x_1, x_2) um número $u(x_1, x_2)$ que representa a preferência do consumidor por aquela cesta. Consideraremos aqui como função utilidade a função de Cobb Douglas

$$u(x) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}.$$

Pela Proposição 1.47, se $s = (s_1, s_2)$ é um ponto de máximo, ele deve atender

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} s_1^{-\frac{1}{2}} s_2^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2} s_2^{-\frac{1}{2}} s_1^{\frac{1}{2}} \right) &= \nabla u(s) = \lambda \nabla g(s) = \lambda(2, 1) \\ w &= 2s_1 + s_2 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema acima concluímos que $s(w) = (\frac{w}{4}, \frac{w}{2})$. Ou seja, as quantidades dos produtos 1 e 2 que maximizam a função utilidade são $\frac{w}{4}$ e $\frac{w}{2}$, respectivamente. A utilidade máxima é $u(s(w)) = \frac{w}{2\sqrt{2}}$.

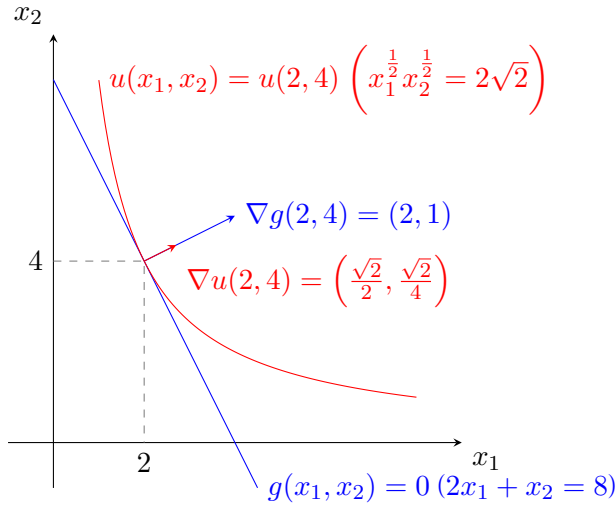


Figura 1.10: Representação do Exemplo 1.48: restrição orçamentária com $w = 8$, a utilidade máxima sujeita à restrição orçamentária⁴, e os gradientes de ambas funções no ponto de máximo $p = (2, 4)$

Observação 1.49. Shadow prices e família de vínculos

No caso bem particular de Cobb Douglas temos a existência de um único máximo $s(w)$ para cada vínculo $C_w = g^{-1}(w)$, o que nos dá uma curva diferenciável $w \rightarrow s(w) \in C_w$, vide Figura 1.11. Em particular $g \circ s(w) = w$. Por ser máximo temos: $\nabla u(s(w)) = \lambda(w) \nabla g(s(w))$. Assim, ao multiplicar ambos os lados por $s'(w)$ concluímos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dw} u \circ s(w) &= \langle \nabla u(s(w)), s'(w) \rangle \\ &= \lambda(w) \langle \nabla g(s(w)), s'(w) \rangle \\ &= \lambda(w) \frac{d}{dw} g \circ s(w) \\ &= \lambda(w) \end{aligned}$$

Vemos, assim, que neste caso a função $w \rightarrow \lambda(w)$ pode ser interpretada como a taxa de crescimento da função utilidade ao longo da curva de máximos (vide Figura 1.4).

⁴Uma curva de nível da função utilidade costuma de ser chamada de **curva de indiferença**.

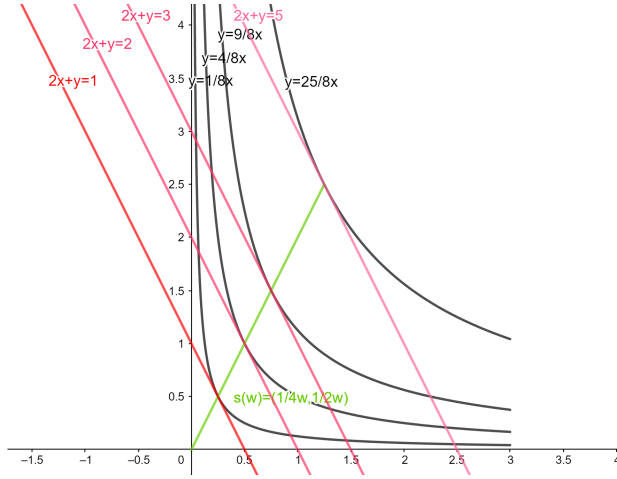


Figura 1.11: Curvas de máximos no caso particular de u sendo **Cobb Douglas** e vários vínculos dado por orçamentos, ilustrando a Observação 1.49. Lembre que em problemas gerais de multiplicadores de Lagrange não precisa existir uma curva bem definida $w \rightarrow s(w)$

A seguir generalizaremos os multiplicadores de Lagrange para curvas planas para subvariedades mergulhadas no espaço Euclidiano.

Teorema 1.50. Multiplicadores de Lagrange

Sejam $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma aplicação de classe C^1 definida por $G(x) = (g_1(x), \dots, g_k(x))$ e $M = \{x \in \mathbb{R}^{m+k} \mid G(x) = c\}$ uma subvariedade regular. Seja $u : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 , onde $M \subset \tilde{U}$. Suponha que existe $q \in M$ tal que $u|_M$ tem valor máximo ou mínimo local. Então, $\nabla u(q)$ é ortogonal a $T_q M$, ou seja, existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla u(q) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla g_i(q).$$

Demonstração. Da Proposição 1.27 temos que para cada $v_q \in T_q M$ existe uma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ com $\alpha'(0) = v_q$. Visto que $u|_M$ (função restrita a M) tem um máximo ou mínimo em $q \in M$, temos que a função $h(t) = u(\alpha(t))$ tem máximo ou mínimo interior em $t = 0$, logo, $h'(0) = 0$. Assim, pela regra da

cadeia, $0 = h'(0) = \langle \nabla u(q), \alpha'(0) \rangle = \langle \nabla u(q), v_q \rangle$. Como isto pode ser feito para qualquer outro $v_q \in T_q M$ concluímos que $\nabla u(q)$ é ortogonal a $T_q M$.

Por outro lado, sabemos que para cada $1 \leq i \leq k$, $\nabla g_i(q)$ é também ortogonal a $T_q M$ (vide a Observação 1.29). Além disso, sendo $DG(x)$ sobrejetora $\forall x \in M$, o conjunto $\{\nabla g_i\}_{i=1}^k$ é uma base de $T_q M^\perp$ (complemento ortogonal⁵ de $T_q M$). Conclui-se que $\nabla u(p)$ é combinação linear de $\{\nabla g_i\}_{i=1}^k$ como desejado. $\square$

Do Teorema 1.50 podemos concluir uma condição *necessária* para que uma função $u : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tenha máximo ou mínimo sobre uma subvariedade regular $M = G^{-1}(c_1, \dots, c_k)$ é a atender o sistema

$$\begin{cases} \nabla u(q) &= \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla g_i(q) \\ c_1 &= g_1(q) \\ &\vdots \\ c_k &= g_k(q) \end{cases}$$

Exemplo 1.51. Cobb-Douglas e orçamento para três produtos

Seja $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 > 0\}$ a superfície que representa um vínculo orçamentário de três produtos. Vamos considerar a função utilidade $u(x) = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$. Para determinar o ponto $q \in S$ onde $u|_S$ assume maior valor resolvemos o sistema dado pelo multiplicador de Langrange. Temos

$$\left(\frac{1}{3} x_1^{-\frac{2}{3}} x_2^{\frac{1}{3}} x_3^{\frac{1}{3}}, \frac{1}{3} x_2^{-\frac{2}{3}} x_1^{\frac{1}{3}} x_3^{\frac{1}{3}}, \frac{1}{3} x_3^{-\frac{2}{3}} x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{3}} \right) = \lambda(6, 3, 2)$$

$$6 = 6x_1 + 3x_2 + 2x_3,$$

onde $q = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$ e $u(q) = \sqrt[3]{\frac{2}{9}}$. Visto que $\bar{S}$ (fecho de S) é fechado e limitado, e que o máximo não acontece no bordo ∂S (onde u é zero) q tem que ser de fato o ponto de máximo.

⁵Lembre-se que o complemento ortogonal de um subespaço vetorial é o conjunto de vetores do espaço que são ortogonais a tal subespaço.

Continuação.

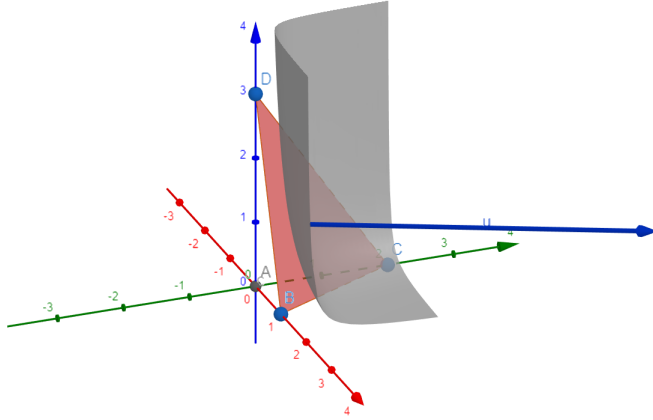


Figura 1.12: Superfície de nível $u^{-1}\left(\sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right)$ (associada à função utilidade u) tangente ao vínculo orçamentário S no ponto de máximo q , e o vetor $N = \nabla g(q)$.

Exercício 1.52.

Determine o volume do maior paralelepípedo de faces paralelas aos planos coordenados que pode ser inscrito em $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 9x_1^2 + 36x_2^2 + 4x_3^2 = 36\}$

Vamos agora rerepresentar o teorema dos multiplicadores de Lagrange em termos do gradiente Riemanniano.

Proposição 1.53.

Seja M uma subvariedade mergulhada em $\mathbb{R}^{m+k}$ e suponha que $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em M (i.e., que admite extensões locais para $\mathbb{R}^{m+k}$) e que f tem um ponto de máximo ou mínimo local em $p \in M$. Então $\text{grad } f(p) = 0$.

Demonstração. Seja p um ponto de máximo ou mínimo da função f . Sabemos que em uma vizinhança $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^{m+k}$ de p , $M \cap \tilde{U}$ é a imagem inversa de um valor regular de uma aplicação diferenciável $G : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^k$.

Seja $\tilde{f} : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}$ uma extensão de f a uma vizinhança de $\mathbb{R}^{m+k}$ de p , ($\tilde{U}_0 \subset \tilde{U}$) ou seja, $\tilde{f} : \tilde{U}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{f}|_{\tilde{U}_0 \cap M} = f$. Pela Proposição 1.50,

$\nabla \tilde{f}$ é ortogonal a M , logo sua projeção ortogonal em $T_p M$ é 0, mostrando que $\text{grad } f(p) = 0$. $\square$

1.5. Hessiano e extremos

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . Sabemos que $df(p) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação linear definida por $df(p) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_m}(p) \right]$

Deixando o p variar, temos uma aplicação $df : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ que é suave. Podemos então considerar a derivada da aplicação df .

Definição 1.54.

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . A segunda derivada de f no ponto $p \in U$, $\text{Hess } f(p) = D(df)(p)$, é chamada de *Hessiano de f em p* .

Assim, temos

$$\text{Hess } f(p) = \begin{bmatrix} d \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \\ \vdots \\ d \frac{\partial f}{\partial x_m}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_m}(p) \end{bmatrix} \quad (1.5.1)$$

Exercício 1.55.

Determine o $\text{Hess } f$ das funções $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

- (a) $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2$
- (b) $f(x_1, x_2) = -2x_1^2 - 2x_2^2$
- (c) $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 2x_2^2$
- (d) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$

Observação 1.56.

Vale destacar que a função $f(x) = 2x_1 x_2$ é de fato a sela de cavalo girada de $\pi/4$,

Continuação.

vide Figura 1.13. De fato considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e note que $f(x) = x^t Ax = 2x_1x_2$. Perceba também que 1 e -1 são autovalores dos autovetores $\left\{ q_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), q_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}$. Assim podemos concluir que:

$$f(y_1q_1 + y_2q_2) = y_1^2 - y_2^2.$$

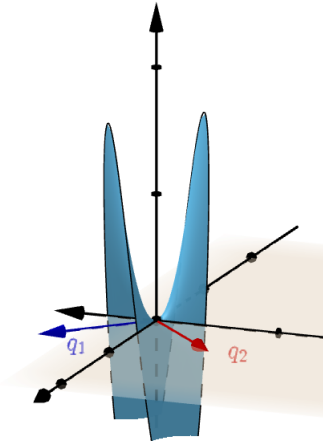


Figura 1.13: Gráfico de $f(y_1q_1 + y_2q_2) = y_1^2 - y_2^2$

A matriz $m \times m$ na equação 1.5.1 é chamada de **matriz Hessiana de f** . Dado que f é de classe C^2 , temos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)$$

pelo teorema de Schwarz e, portanto, $\text{Hess } f(p)$ é uma matriz simétrica. Consequentemente, a segunda derivada de f , $D(df)(p) = \text{Hess } f(p)$ é uma aplicação linear simétrica.

1.5.1. Extremos locais

De Cálculo I sabemos que os extremos locais de uma função suave são pontos críticos da mesma. Isto é, se $f : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave e $p \in (-\epsilon, \epsilon)$, é um máximo ou mínimo local de f , então $f'(p) = 0$. Porém a função $f(x) = x^3$ nos mostra que nem todo ponto crítico é um ponto de máximo ou mínimo local (de fato, $f'(0) = 0$ e $x = 0$ não é nem máximo nem mínimo). Isto motivou a procura de critérios mais precisos como, por exemplo, o *Critério da segunda derivada*:

Seja $p \in (-\epsilon, \epsilon)$ é um ponto crítico de f (i.e., $f'(p) = 0$). Temos:

1. se $f''(p) > 0$ então p é mínimo local;
2. $f''(p) < 0$ então p é máximo local;

A prova se baseou no uso da fórmula de Taylor, i.e.,

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x - p) + \frac{1}{2}f''(p)(x - p)^2 + R(x - p)$$

onde x está suficientemente próximo de p e $\lim_{x \rightarrow p} \frac{R}{(x - p)^2} = 0$.

De fato, se $f'(p) = 0$ e $f''(p) > 0$, então, dividindo a Formula de Taylor por $(x - p)^2$ temos:

$$\frac{f(x) - f(p)}{(x - p)^2} = \frac{1}{2}f''(p) + \frac{R(x - p)}{(x - p)^2} > 0$$

e, assim, $f(x) > f(p)$ para x próximo a p (p é mínimo local).

Exemplo 1.57.

A função $f(x) = 2x^2 - x^4$ tem um ponto crítico em $p = 0$ e a reta tangente ao gráfico de f em p é o eixo x . Para x próximo a p a função f é aproximada por $h(x) = \frac{1}{2}f''(p)(x - p)^2 = 2x^2$

Continuação.

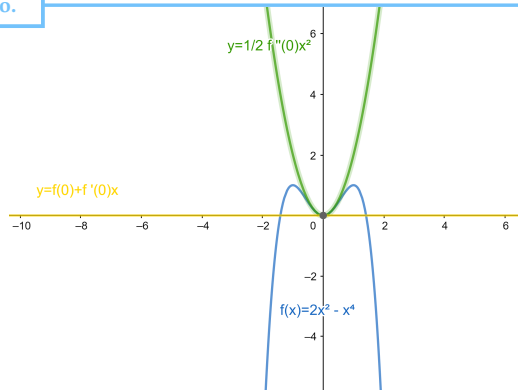


Figura 1.14: Gráfico de $f(x) = 2x^2 - x^4$, sua reta tangente em $p = 0$ e sua aproximação quadrática

Iremos aqui generalizar tais argumentos para funções sobre abertos de $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.58.

Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^m$ e $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ função diferenciável, dizemos que $p \in U$ é ponto de **mínimo local** (interior) se existe $\epsilon > 0$ tal que $\forall x \in B_\epsilon(p) \subset U$ tem-se $f(x) \geq f(p)$.

Analogamente, $q \in U$ é ponto de **máximo local** (interior) se existe $\epsilon > 0$ tal que $\forall x \in B_\epsilon(q) \subset U$ tem-se $f(x) \leq f(q)$.

Exemplo 1.59.

Dado $f(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - (x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4)$, é possível observar na figura a seguir que $p = (0, 0)$ é ponto de mínimo local de f .

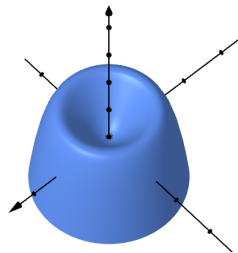


Figura 1.15:

Proposição 1.60.

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $p \in U$ um ponto de mínimo ou máximo local (interior). Então p é ponto crítico de f , i.e., $\nabla f(p) = 0$.

Demonstração. Dado $v_p \in T_p \mathbb{R}^m$, considere uma curva suave $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ tal que $\alpha'(0) = v_p$. Seja $h = f \circ \alpha$. Como p é máximo ou mínimo local, então $t = 0$ é máximo ou mínimo interior de $h = f \circ \alpha$, logo

$$0 = h'(0) = \langle \nabla f(p), \alpha'(0) \rangle.$$

Como isto vale para todo vetor tangente concluímos que $\nabla f(p) = 0$. $\square$

Exemplo 1.61.

Dado $f(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 2$, $p = (0, 0)$ é ponto de máximo interior e, portanto, ponto crítico. Note que o vetor normal do plano tangente é $N = \left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), -\frac{\partial f}{\partial x_2}(p), 1\right) = (0, 0, 1)$, logo, o plano tangente é paralelo ao plano de equação $\{x_3 = 0\}$.

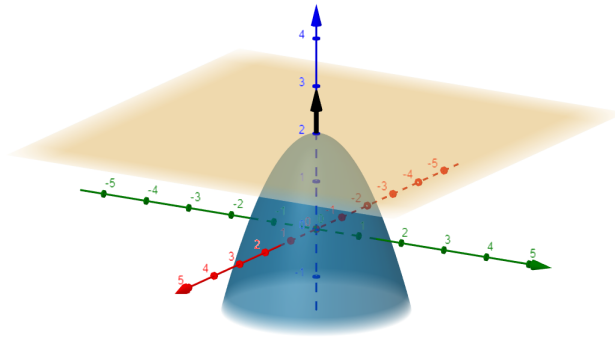


Figura 1.16:

Mas, se de um lado todo ponto de máximo ou mínimo interior é ponto crítico, nem todo ponto crítico é ponto de máximo ou mínimo local. Assim, tal como em Cálculo I, precisaremos de critérios mais finos para classificar pontos críticos, i.e., determinar se eles são de máximo, de mínimo ou sela.

Exemplo 1.62.

No gráfico de $f(x) = x_1^2 - x_2^2 + \frac{3}{2}$ se observa que $p = (0, 0)$ não é máximo nem mínimo local.

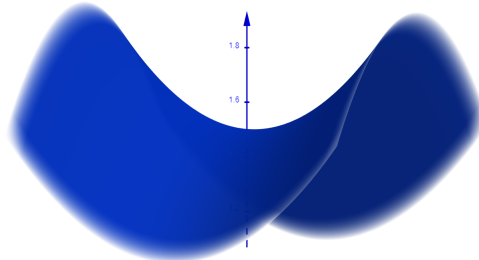


Figura 1.17:

Teorema 1.63. Fórmula de Taylor de ordem 2

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ função de classe C^3 . Então:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + df(p)(x-p) + \frac{1}{2}(x-p)^t \text{Hess } f(p)(x-p) + R(x-p) \\ &= f(p) + \langle \nabla f(p), (x-p) \rangle + \langle \text{Hess } f(p)(x-p), x-p \rangle + R(x-p) \end{aligned}$$

onde $\lim_{x \rightarrow p} \frac{R(x-p)}{\|x-p\|^2} = 0$.

Observação 1.64.

Continuação.

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Então

$$\begin{aligned}
 P_2(x) &= f(p) + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \end{bmatrix} \\
 &+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 - p_1 & x_2 - p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \end{bmatrix} \\
 &= f(p) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)(x_1 - p_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)(x_2 - p_2) \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p)(x_1 - p_1)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p)(x_1 - p_1)(x_2 - p_2) \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(p)(x_2 - p_2)^2
 \end{aligned}$$

O Teorema 1.63 garante que o polinômio

$$P_2(x) = f(p) + df(p)(x - p) + \frac{1}{2}(x - p)^t \text{Hess } f(p)(x - p),$$

chamado de **polinômio de Taylor de grau 2 em torno de p** , aproxima a função f numa vizinhança de p .

Além disso, se p for um ponto crítico de f , então a forma quadrática

$$h(x) = \frac{1}{2}(x - p)^t \text{Hess } f(p)(x - p)$$

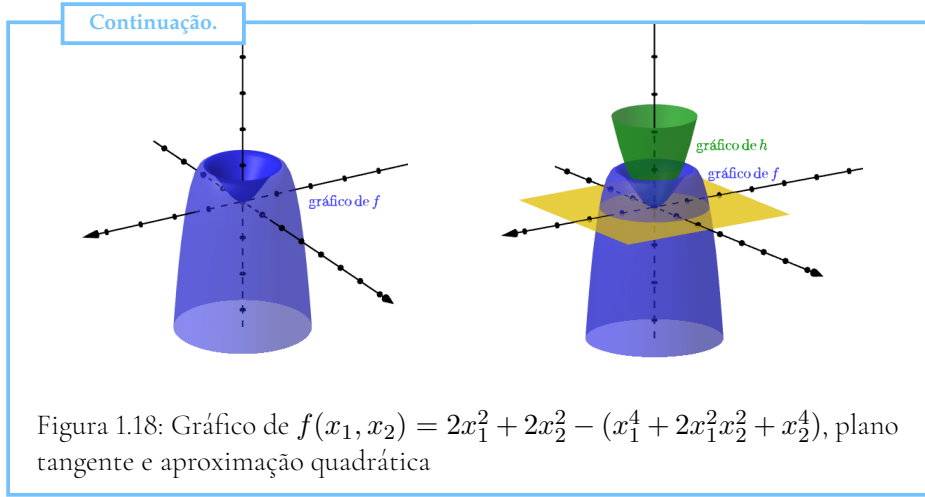
aproxima a função. Isso sugere que, tal como em Cálculo I, classificar pontos críticos esteja relacionado com a compreensão da segunda derivada.

Note que no Problema 1.55, P_2 em torno de $p = (0, 0)$ coincide com a própria função de f .

Exemplo 1.65.

Seja $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - (x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4)$. Considerando $p = 0$ temos (pelo Problema 1.55) que $P_2(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2$. Note na Figura 1.18 que $p = (0, 0)$ é um ponto de mínimo e assim um ponto crítico, i.e., $\nabla f(p) = (0, 0)$. Logo, o plano tangente ao gráfico de f em $p \in \{x_3 = f(p) = 0\}$. A Fórmula de Taylor garante que, próximo a $p = (0, 0)$ o gráfico de f é aproximado por

$$h(x) = \frac{1}{2}(x - p)^t \text{Hess } f(p)(x - p) = P_2(x).$$



1.5.2. Critérios de classificação de pontos críticos

Teorema 1.66.

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3 . Suponha que $p \in U$ seja ponto crítico (i.e., $df(p) = 0$) e $\det \text{Hess } f(p) \neq 0$

- (a) Se todos os auto-valores λ_i de $\text{Hess } f(p)$ são positivos (i.e., $\lambda_i > 0$), então p é mínimo.
- (b) Se todos os auto-valores λ_i de $\text{Hess } f(p)$ são negativos (i.e., $\lambda_i < 0$), então p é máximo.
- (c) Se parte dos auto-valores λ_i de $\text{Hess } f(p)$ são positivos, e a outra parte negativa, então p é sela.

Exemplo 1.67.

A função $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \frac{3}{2}$ tem um mínimo local em $(0, 0)$. Observe que $\text{Hess } f(0, 0)$ tem 2 como autovalor de multiplicidade 2.

Continuação.

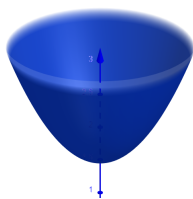


Figura 1.19:

A função $f(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 2$ tem um máximo local em $(0, 0)$. O Hessiano de f tem um único autovalor -2 de multiplicidade 2.

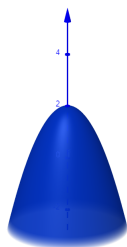


Figura 1.20:

Por outro lado, a função $f(x) = x_1^2 - x_2^2 + \frac{3}{2}$ não tem nem máximo nem mínimo no ponto $(0, 0)$. De fato, os autovalores de $\text{Hess } f(0, 0)$ são 2 2 -2 .

Continuação.

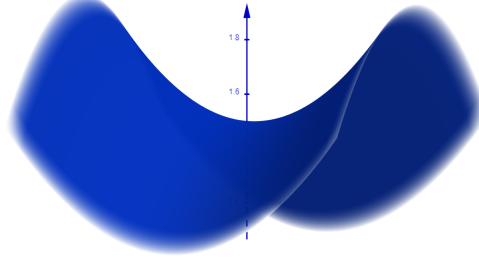


Figura 1.21:

Prova do Teorema 1.66. Vamos supor inicialmente que p está na origem, $f(p) = 0$ e $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m$ são os auto-valores de $\text{Hess } f(p)$.

Pela fórmula de Taylor temos:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x)^t \text{Hess } f(p)(x) + R$$

Pelo teorema Espectral

$$Q^t \text{Hess } f(p)(x) Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix} = \Lambda$$

onde $Q = [q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_m]$ é a matriz ortogonal cujas colunas são os autovetores (ortonormais) $q_1, q_2, \dots, q_m$ de $\text{Hess } f(p)(x)$ associados a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$.

Sejam $y_i, 1 \leq i \leq m$, as coordenadas de x com respeito à base $\{q_1, q_2, \dots, q_m\}$, ou seja,

$$x = y_1 q_1 + y_2 q_2 + \cdots + y_m q_m = Qy, \quad (*)$$

onde $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$.

Substituindo nas duas equações acima temos:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2} y^t Q^t \text{Hess } f(p) Q y + R \\
&= \frac{1}{2} y^t (Q^t \text{Hess } f(p) Q) y + R \\
&= \frac{1}{2} y^t \Lambda y + R \\
&= \frac{1}{2} (\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_m y_m^2) + R \quad (**)
\end{aligned}$$

Dividindo por $\|x\|^2 = \|y\|^2$ temos:

$$\frac{f(x)}{\|x\|^2} \geq \frac{1}{2} \lambda_1 + \frac{R}{\|x\|^2} > 0$$

para x próximo a p ou seja p é mínimo. $\square$

Entendido o fenômeno, podemos desenvolver um critério mais fácil de ser implementado (no qual não será necessário calcular os auto-valores explicitamente, mas apenas ter uma maneira de detectar seus sinais).

Iremos explorar o caso particular de dimensão dois.

Corolário 1.68.

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3 . Suponha que $p \in U$ seja ponto crítico (i.e, $df(p) = 0$) e $\det \text{Hess } f(p) \neq 0$

(a) Se $\det \text{Hess } f(p) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p) > 0$ então p é mínimo.

(b) Se $\det \text{Hess } f(p) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p) < 0$ então p é máximo.

(c) Se $\det \text{Hess } f(p) < 0$ então p é sela.

A demonstração da proposição segue como caso particular do teorema anterior e do teorema comentado a seguir.

⁵O leitor pode verificar a obtenção de (*) e (**) usando operações básicas de matrizes, começando por dimensões baixas.

Teorema 1.69. Critério positivo definido

Considere uma matriz simétrica A . Então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. Os auto-valores de A são todos positivos (i.e, $\lambda_i > 0$);
2. $x^t A x > 0$, $\forall x \neq 0$ (A é positiva-definida);
3. $\det A_k > 0$ para todas as submatrizes A_k a esquerda, i.e as matrizes $k \times k$ definidas como $(a_k)_{ij} = a_{ij}$ para $0 \leq i \leq k$ e $0 \leq j \leq k$.

Por exemplo, se $m = 2$ e $A = \text{Hess } f(0)$, então $A_1 = [\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(0)]$ e $A_2 = \text{Hess } f(0)$, e assim re-obtemos as hipóteses do item (a) da proposição anterior.

Observação 1.70.

Podemos também dar uma prova alternativa do Corolário 1.68 seguindo um argumento geométrico. Suponha que hipótese (a) seja verificada. Como $\det \text{Hess } f(0) = \lambda_1 \lambda_2 > 0$ temos $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ ou $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$. Assim pela demonstração do teorema anterior, o gráfico S da função $h(x) = x^t \text{Hess } f(0)x$ é um parabolóide elíptico para cima (se $\lambda_i > 0$) ou para baixo se $(\lambda_i < 0)$. Para decidir qual das opções observe que o gráfico de $h(x_1, 0) = x_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(0)$ descreve a parábola $C = S \cap \{x_2 = 0\}$. Como esta parábola é para cima (pois por hipótese $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(0) > 0$), o gráfico de S é para cima. Logo $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ e pelo Teorema anterior, 0 é ponto de mínimo. Os outros itens se provam de forma similar.

Exercício 1.71.

Considere $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ função definida como $f(x_1, x_2) = 2(2x_1 - x_1^2)(2x_2 - x_2^2)$. Determine e classifique os pontos críticos.

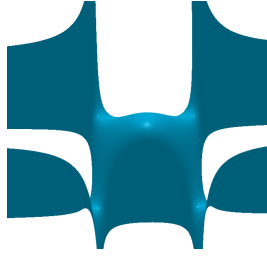


Figura 1.22: Gráfico da função do Exercício 1.71, onde podemos observar que $(1, 1)$ é ponto de máximo local, e os pontos $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$ são pontos de sela

Observação 1.72. Curvatura de Gauss (Vide Seção 1.7)

Quando temos $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ função de classe C^3 onde $(0, 0) \in U$ é ponto crítico, temos que o plano tangente do gráfico em $(0, 0, f(0, 0))$ é paralelo a $\{x_3 = 0\}$. Neste caso, $K(q) = \det \text{Hess } f(0, 0) = \lambda_1 \lambda_2$ é chamada Curvatura de Gauss no ponto $q = (0, 0, f(0, 0))$. Assim se $K(q) > 0$ o gráfico de f é aproximado por uma parabolóide elíptico e se $K(q) < 0$ é aproximado por um parabolóide hiperbolico (sela de cavalo).

Mais geralmente, dado um gráfico S qualquer e $q \in S$ podemos, após movimento rígido, descreve-lo (pelo menos localmente) como um novo gráfico de uma função h em relação ao plano plano tangente $T_q S$. Assim o conceito de curvatura de Gauss pode ser definido para qualquer ponto $q \in S$ bem como sua interpretação geométrica.

1.5.3. Fórmula de Taylor de ordem maior

Seja $v = (v_1, \dots, v_m)$ vetor em $\mathbb{R}^m$. Considerando o conjunto de todas as funções de classe C^k em $U \subset \mathbb{R}^m$ (denotada por $C^k(U)$) podemos criar uma aplicação linear $T : C^k(U) \rightarrow C^{k-1}(U)$ definida como

$$T(f) = \sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Em Cálculo II e Física costuma-se denotar $v \cdot \nabla = T$ e assim

$$v \cdot \nabla = \sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Com tal notação podemos verificar que

$$\frac{1}{2}v^t \text{Hess } f(p)v = \frac{1}{2}(v \cdot \nabla)^2 f(p). \quad (1.5.2)$$

Afim de verificar Equação 1.5.2, façamos a conta para o caso particular em que $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (v \cdot \nabla)(w \cdot \nabla)f(p) &= (v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2})(w_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + w_2 \frac{\partial}{\partial x_2})f \\ &= v_1 w_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p) + v_1 w_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p) \\ &\quad + v_2 w_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p) + v_2 w_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(p) \\ &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \\ &= v^t \text{Hess } f(p)w \end{aligned}$$

Teorema 1.73.

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ função de classe C^{k+1} , $p \in U$ e $v = (x - p)$. Então:

$$\begin{aligned} f(v + p) &= f(p) + (v \cdot \nabla)f(p) \\ &\quad + \frac{1}{2}(v \cdot \nabla)^2 f(p) \\ &\quad + \frac{1}{3!}(v \cdot \nabla)^3 f(p) \\ &\quad + \frac{1}{4!}(v \cdot \nabla)^4 f(p) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \frac{1}{k!}(v \cdot \nabla)^k f(p) \\ &\quad + R(v) \end{aligned}$$

Onde $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{R(v)}{\|v\|^k} = 0$

Observação 1.74.

A notação $v \cdot \nabla$ é muito sugestiva em espaços Euclidianos pois evoca a ideia do produto interno de v com ∇ e assim é fácil de ser lembrada. Porém no próximo capítulo iremos substituí-la em variedades M pela notação $v \bullet$ para destacar que tal operador não depende da métrica (e assim não deveria evocar notação do gradiente, objeto que necessita de métrica). Também como será discutido ao final do próximo capítulo, a notação $v \bullet$ será utilizada em Teoria Geométrica de Controle.

1.5.4. Máximos e mínimos absolutos

Em certos casos particulares é possível até determinar máximos e mínimos absolutos. Para isto usaremos o seguinte resultado:

Teorema 1.75.

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $K \subset U$ um conjunto fechado e limitado (ou seja fechado tal que $K \subset B_R(0)$). Então a função restrita $f|_K$ possui um valor máximo e um valor mínimo.

O Teorema 1.75 sugere o seguinte algoritmo:

Passo 1: Determinar pontos críticos no interior de K ;

Passo 2: determinar candidatos a máximo ou mínimos de $f|_{\partial K}$ (ex, via parametrizações ou multiplicadores de Lagrange)

Passo 3: comparar os candidatos determinados nos passos anteriores.

Exemplo 1.76.

Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 2x_1^2 + x_1 + x_2^2 - 2$ e $K = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g(x) = x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$. Vamos determinar os valores de máximos e mínimos absolutos de $f|_K$ seguindo o algoritmo anterior.

Passo 1: A solução do problema $\nabla f(x) = (0, 0)$ para x no interior de K é $x = (-\frac{1}{4}, 0)$

Passo 2: Para determinar candidatos a máximo ou mínimos de $f|_{\partial K}$ usaremos

Continuação.

neste exemplo multiplicadores de Langrange.

$$\begin{aligned}(4x_1 + 1, 2x_2) = \nabla f(x) &= \lambda \nabla g(x) = \lambda(2x_1, 2x_2) \\ 4 &= x_1^2 + x_2^2\end{aligned}$$

Cujas soluções são: $(2, 0)$, $(-2, 0)$, $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2})$

Passo 3: Avaliando f nos pontos obtidos nos Passos 1 e Passo 2 concluímos: $-\frac{17}{8} = f(-\frac{1}{4}, 0)$ é valor mínimo absoluto, e $f(2, 0) = 8$ valor máximo absoluto.

Note que, como se mostra na figura a seguir, o ponto $(2, 0)$ é um ponto de máximo global de $f|_K$ que está no bordo de K e não é um ponto crítico de f .

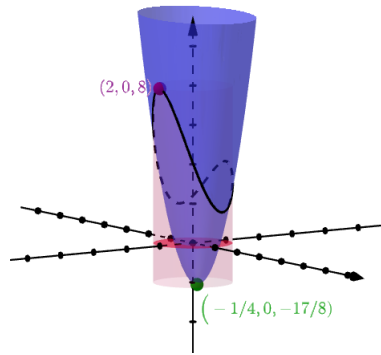


Figura 1.23:

1.6. (*) Gradiente descendente e Aprendizado de Máquinas

Nesta seção eletiva, iremos apresentar o conceito de gradiente descendente o qual é relevante na área *Aprendizado de Máquina*. Em particular provamos as condições

para sua convergência em termos do Hessiano e discutimos um exemplo de função penalidade em Aprendizado de Máquina onde tal técnica é utilizada. Para maiores detalhes vide [Bou23] e [WBK20] onde esta apresentação foi baseada.

1.6.1. Gradiente descendente e sua convergência

Definição 1.77.

Dado uma função suave $f : W \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ o algoritmo de gradiente descendente é definido como

$$w_{k+1} = w_k - \tau_k \nabla f(w_k)$$

gerando uma sequência $\{w_k\}$ sendo que o *passo* τ_k pode variar a cada interação.

O algoritmo já suscita duas questões:

(i) *Motivação*: Considere a solução da E.D.O com condição inicial w_0 :

$$\gamma'(t) = -\nabla f \circ \gamma(t)$$

$$\gamma(0) = w_0$$

Sabemos que $t \rightarrow f \circ \gamma(t)$ é uma função decrescente. Como os segmentos de retas $t \rightarrow \alpha_k(t) = w_k - t \nabla f(w_k)$ com $t \in [0, \tau_k]$ aproximam trechos de γ , caso $w_k \rightarrow w_e$, o ponto w_e seria um *candidato* para um ponto de mínimo local de f .

(ii) *Definição do step-size τ_k* : Existem várias opções de definição de τ_k . Podemos considerar uma *constante fixa* a ser determinada no problema ou um *passo adaptativo* τ_k , i.e., que varia a cada interação.

Observação 1.78.

Um exemplo de um algoritmo de passo iterativo é o assim chamado **backtracking line search**. Nele enquanto $f(w_k) - f(w_k - \tau \nabla f(w_k)) < a\tau \|\nabla f(w_k)\|^2$ substitui-se τ por $b\tau$, onde a frequentemente é escolhido como $a = 10^{-4}$ e $b = \frac{1}{2}$. A sequência construída na Definição 1.77 é chamada **suficientemente decrescente** se existe c tal que para todo k tenhamos:

$$f(w_k) - f(w_{k+1}) \geq c \|\nabla f(w_k)\|^2.$$

Possível demonstrar que, sob condições de regularidade, i.e., $f(w + d) \leq f(w) + \langle \nabla f(w), d \rangle + \frac{L^2}{2} \|d\|^2$, o backtracking line search produz um c para o qual $\{w_n\}$

Continuação.

se torna suficientemente decrescente. Por outro lado, se $\{w_n\}$ é suficientemente decrescente e converge para algum ponto w_e (que não necessariamente precisa ser um ponto de mínimo) então $\nabla f(w_e) = 0$ ou seja w_e é crítico, vide [Bou23].

Exemplo 1.79.

Considere $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função $h(w_1, w_2) = -2(2w_1 - w_1^2)(2w_2 - w_2^2)$. Tal como no Exercício 1.71 temos que $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$ são pontos de sela e $(1, 1)$ é ponto de mínimo local. Ao aplicar o algoritmo do gradiente descendente bem perto de $(1, 1)$ vemos que ele de fato gera uma sequência que irá convergir para este ponto de mínimo. Porém ao aplicarmos perto de um dos pontos de sela (que não seja o próprio ponto de sela) a sequência irá divergir. A seguir deixamos um programa simples em Python (com τ constante), para que o(a) leitor(a) possa fazer alguns experimentos, vide [WBK20].

```
import numpy as np
from autograd import grad
def SeqGD(g, alpha, max_its, w):
    gradiente = grad(g)
    sequencia = [w]
    for k in range(0, max_its):
        w = w - alpha * gradiente(w)
        sequencia.append(w.tolist())
    return sequencia

def h(w):
    return -1 * (2 * (2 * w[0] - w[0]**2) * (2 * w[1] - w[1]**2))

pt_X = float(input('Entre com a coordenada
de partida x:'))
pt_Y = float(input('Entre com a coordenada
de partida y:'))
pt = np.array([pt_X, pt_Y])
aprend = float(input('Entre com passo:'))
int = int(input('Entre com número de interação:'))

print(f'Sequencia é: {SeqGD(h, aprend, int, pt)}')
```

Vemos a seguir que na vizinhança de um ponto w_e que é mínimo local, a sequência $\{w_k\}$ converge para w_e . A prova é apresentada quando τ_k é constante, porém resultado é ainda válido para τ_k adaptativos.

Teorema 1.80.

Seja $f : W \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ função de classe C^2 . Suponha que exista $w_e \in U$ tal que:

- (i) $\nabla f(w_e) = 0$;
- (ii) os autovalores de $\text{Hess } f(w_e)$ são positivos, i.e., $0 < \lambda_{\min} \leq \dots \leq \lambda_{\max}$.

Então existe uma vizinhança $B_\epsilon(w_e)$ de w_e tal que para todo $w_0 \in B_\epsilon(w_e)$ temos que a sequência iterada $w_{k+1} = F(w_k)$ converge para w_e , onde

$$F(w) = w - \frac{1}{L} \nabla f(w) \text{ com } L > 2\lambda_{\max}.$$

Demonstração. Fácil verificar que: $DF(w) = Id - \frac{1}{L} \text{Hess } f(w)$. Logo os autovalores de DF são: $(1 - \frac{\lambda_1}{L}) \geq \dots \geq (1 - \frac{\lambda_{\max}}{L})$ e assim

$$\|DF(w)\| = \sup_{\|v\|=1} DF(w)v = \max \left\{ \left| 1 - \frac{\lambda_{\min}}{L} \right|, \left| 1 - \frac{\lambda_{\max}}{L} \right| \right\}$$

Por hipótese $\frac{L}{2} > \lambda_{\max}$ e assim $\frac{1}{2} > \frac{\lambda_{\max}}{L} \geq \frac{\lambda_{\min}}{L} > 0$. Logo $\|DF(w)\| < 1$. O resultado segue então do Lema 1.81 a seguir que é uma versão simplificada do Lema da contração. $\square$

Lema 1.81.

Seja $F : W \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ aplicação de classe C^1 tal que $w_e \in W$ é ponto fixo de F , ou seja $F(w_e) = w_e$. Suponha que $\|DF(w_e)\| < 1$. Então existe uma vizinhança $B_\epsilon(w_e)$ de w_e tal que:

- (a) $F(B_\epsilon(w_e)) \subset B_\epsilon(w_e)$;
- (b) para todo $w_0 \in B_\epsilon(w_e)$ temos que a sequência $w_{k+1} = F(w_k)$ ($k \geq 0$) converge para w_e .

Demonstração. Visto que F é de classe C^1 temos por hipótese que existe a vizinhança $B_\epsilon(w_e)$ tal que $\|DF(w)\| < c < 1$. Assim pelo teorema do valor médio

temos

$$\|F(x) - F(y)\| < c\|x - y\| \quad (1.6.1)$$

para qualquer $x, y \in B_\epsilon(w_e)$. Em particular, como w_e é ponto fixo,

$$\|F(w) - w_e\| = \|F(w) - F(w_e)\| \leq c\|w - w_e\| < c\epsilon < \epsilon$$

o que implica que $F(w) \in B_\epsilon(w_e)$ e assim provamos item (a).

Aplicando indução a Eq. (1.6.1) junto com o fato de $F(w_e) = w_e$ temos

$$\|F^k(w_0) - w_e\| \leq c^k\|w_0 - w_e\|$$

o que implica $w_k \rightarrow w_e$ e assim concluímos a prova do item (b). □

1.6.2. Função penalidade associada a cross entropy

Uma problema clássico em Aprendizado de Máquina, é desenvolver um algoritmo que, após ser treinado com *dados de aprendizagem*, consiga prever a probabilidade de novos dados pertencerem à certa classe. Mais precisamente utilizaremos um conjunto de pontos $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^P$ com $x_i \in \mathbb{R}^m$ e $y_i \in \{0, 1\}$ para construir uma função $\rho : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que a primeira coordenada $(\rho)_1(x)$ preveja a probabilidade do (novo) dado $x \in \mathbb{R}^m$ ter valor $y = 1$ e a segunda coordenada $(\rho)_2(x)$ a probabilidade do dado x ter valor $y = 0$, em particular teremos $(\rho)_1(x) + (\rho)_2(x) = 1$. Por exemplo o dado $x \in \mathbb{R}^m$ pode representar uma imagem (com m pixels) e o valor y pode representa se tal figura corresponde a um gato, ou um cachorro (supondo que vamos sempre alimentar o algoritmo com figuras que sejam de fato apenas de gatos e cachorros). Também fará parte do nosso modelo que os dados (em sua maioria) podem ser separados por algum hiperplano $\{x \in \mathbb{R}^m; g_w(x) = \langle \bar{w}, x \rangle + w_0 = 0\}$ onde $w = (w_0, \bar{w}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ não é conhecido no início.

Vamos explicar a estratégia da construção de ρ e porque tal assunto está relacionado ao gradiente decrescente. Primeiro vamos definir algumas aplicações:

- (i) $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde $\Omega = \{1, \dots, P\}$ e $Z(i) = (y(i), 1 - y(i))$;
- (ii) $\rho_w : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^2$ onde $\rho_w(x) = (\sigma(g_w(x)), \sigma(g_{-w}(x)))$ sendo que a **função sigmoide** σ será definida na Eq. (1.6.2);
- (iii) $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ onde $X(i) = x_i$;
- (iv) $Y_w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ onde $Y_w = \rho_w \circ X$;

- (v) $f : W \subset \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ a função **penalidade** $f(w) = \mathcal{E}(Z, Y_w)$ a qual medirá, a grosso modo falando, "quão distante" está a (densidade de probabilidade discreta) Y_w da (densidade de probabilidade discreta) Z , sendo que a definição da aplicação **cross entropy** $\mathcal{E}(\cdot, \cdot)$ será dada na Eq. (1.6.3);

O algoritmo do gradiente descendente então é aplicado a função $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ para obter um ponto $w_e \in W$ que realiza o mínimo de f . Finalmente a função procurada $\rho : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^2$ é definida como $\rho = \rho_{w_e}$.

Vamos agora dar alguns detalhes a mais sobre os itens (ii) e (v).

- (ii) A função sigmoide $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ é definida como:

$$\sigma(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}}. \quad (1.6.2)$$

Note que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma(t) = 1$ e $\lim_{t \rightarrow -\infty} \sigma(t) = 0$. Em particular perceba que quanto mais positivo $g_w(x)$ for (i.e., quanto mais afastado do lado positivo do hiperplano $g_w(x) = 0$) mais próximo a primeira componente de ρ_w definida no item (ii) estará do valor $y = 1$. De forma análoga quanto mais negativo for $g_w(x)$, mais próximo a segunda componente de ρ_w estará do valor $y = 1$.

(v) Começemos com algumas palavras para criar uma intuição sobre cross entropy que mede 'quão distante' esta Y_w de Z . Vamos supor que para k_0 fixo, nosso dado x_{k_0} tenha valor atribuído $y_{k_0} = 1$. Se o valor $\rho_w(x_{k_0})$ é próximo a $(1, 0)$ ou seja se ρ_w indica que o ponto tem alta probabilidade de ter valor 1 (o que é verdade pois $y_{k_0} = 1$) deveríamos ter uma penalidade pequena, pois ρ_w está funcionando bem, pelo menos no ponto x_{k_0} . Se por outro lado $\rho_w(x_{k_0})$ for próximo a $(0, 1)$, i.e., a função ρ_w indicar que o ponto tem baixa probabilidade de ter valor 1 (o que sabemos que não é verdade) deveríamos ter uma alta penalidade. Note que multiplicar y_{k_0} por $\sigma(\langle \bar{w}, x_{k_0} \rangle + w_0)$ não modela o que desejamos, pelo contrário penaliza um bom desempenho. Nossa solução para modelar penalização de mau desempenho, será utilizar a função $-\ln(t)$. Observe que para $t \in (0, 1]$ esta função é não negativa, que próximo a $t = 1$ ela se aproxima a zero e próximo a $t = 0$ ela fica muito grande. Então para modelar um mau desempenho é interessante multiplicar y_{k_0} por $-\ln(\sigma(\langle \bar{w}, x \rangle + w_0))$. Assim para qualquer outro ponto x_k (onde $y_k \in \{0, 1\}$) o custo ou penalidade é definido:

$$C_k = -\langle Z(k), \ln(Y_w(k)) \rangle = -\langle Z(k), \ln(\rho_w(x_k)) \rangle$$

onde $Z_k = (y_k, 1 - y_k)$ e $\ln$ é aplicado ao vetor $Y_w(k) = \rho_w(x_k)$ (i.e., aplicado a cada componente, tal como na linguagem Python). Temos assim que

$$\mathcal{E}(Z, Y_w) := \frac{1}{P} \sum_{k=1}^P C_k = -\frac{1}{P} \sum_{k=1}^P \langle Z(k), \ln(Y_w(k)) \rangle \quad (1.6.3)$$

Escrito explicitamente:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(Z, Y_w) &= -\frac{1}{P} \sum_{k=1}^P y_k \ln(\sigma(\langle \bar{w}, x_k \rangle + w_0)) \\ &\quad - \frac{1}{P} \sum_{k=1}^P (1 - y_k) \ln(\sigma(-\langle \bar{w}, x_k \rangle - w_0))\end{aligned}$$

Ou utilizando que $1 - \sigma(t) = \sigma(-t)$ temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(Z, Y_w) &= -\frac{1}{P} \sum_{k=1}^P y_k \ln(\sigma(\langle \bar{w}, x_k \rangle + w_0)) \\ &\quad - \frac{1}{P} \sum_{k=1}^P (1 - y_k) \ln(1 - \sigma(\langle \bar{w}, x_k \rangle + w_0))\end{aligned}$$

1.6.3. Classificação multiclasse linear

Na subseção anterior, poderíamos ter considerando normalização exponencial de um vetor, i.e., $\hat{\sigma}(s_1, s_2) = \left(\frac{e^{s_1}}{\sum_{c=1}^C e^{s_c}}, \frac{e^{s_2}}{\sum_{c=1}^C e^{s_c}} \right)$ e definido

$$\hat{\rho}_w(x) = \hat{\sigma}(\langle \bar{w}, x \rangle + w_0, -\langle \bar{w}, x \rangle - w_0).$$

Não é difícil de verificar que $\hat{\rho}_w(x) = \rho_{2w}(x)$, o que significa que podemos usar uma ou outra aplicação ao minimizar. A aplicação $\hat{\rho}_w$ porém nos permite considerar casos onde os valores atribuídos aos dados são não binários ($c = 1 \dots C$) e será esta generalização que iremos considerar aqui nesta subseção.

Estamos então supondo que os dados podem ser separados por hiperplanos $\{x \in \mathbb{R}^m; g_{w^c}(x) = \langle x, \bar{w}^c \rangle + w_{0,c} = 0\}$, indexados por $c \in \{1, \dots, C\}$ com $C > 2$. Destacamos que novamente não sabemos de início os parâmetros $w^c = (w_{0,c}, \bar{w}^c) \in \mathbb{R}^{m+1}$, de fato é isto que procuramos. Temos nossos dados de aprendizagens $(x_i, y_i)_{i=1}^p$ onde $x_i \in \mathbb{R}^m$ representa um dado (e.g uma imagem de um algarismo) e $y_i \in \{1, \dots, C\} \subset \mathbb{N}$ informa a qual classe x_i pertence, ou seja se $y_i = c$ então x_i pertence a classe c . Podemos definir as aplicações:

- (i) $X : \Omega = \{1, \dots, p\} \subset \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^m$ onde $X(i) = x_i$, i.e., que associa a cada etiqueta $i \in \Omega$ o dado de aprendizado x_i ;
- (ii) $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^C$ que associa a cada i um vetor $Z(i) = (z_1(i), \dots, z_C(i))$ tal que $z_c(i) = 1$ se $y_i = c$ (i.e., se x_i pertence a classe c) e $z_j(i) = 0$ caso contrário;

(iii) a função **softmax** $\hat{\sigma} : \mathbb{R}^C \rightarrow \mathbb{R}^C$ definida

$$\hat{\sigma}(s_1, \dots, s_C) = \left(\frac{e^{s_1}}{\sum_{c=1}^C e^{s_c}}, \dots, \frac{e^{s_C}}{\sum_{c=1}^C e^{s_c}} \right);$$

(iv) $\rho_w : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^C$ onde

$$\hat{\rho}_w(x) = \hat{\sigma}(g_{w^1}(x), \dots, g_{w^C}(x)),$$

para $w = (w^1, \dots, w^C) \in W = (\mathbb{R}^{m+1})^C$;

(v) $Y_w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^C$ onde $Y_w = \rho_w \circ X$;

(vi) $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ a função **penalidade**:

$$\begin{aligned} f(w) &= \mathcal{E}(Z, Y_w) \\ &= -\frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \langle Z(k), \ln(Y_w(k)) \rangle \end{aligned}$$

Tal como antes podemos aplicar o método do gradiente descendente a f obtendo o mínimo w_e de f e assim definimos $\rho(x) = \rho_{w_e}(x)$ como a função procurada $\rho : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^C$, a qual deverá prever para um novo dado $x \in \mathbb{R}^m$ as probabilidades dele pertencer as classes consideradas, i.e., $\sum_{c=1}^C \rho_c(x) = 1$ e $\rho_c(x)$ dá a probabilidade de x estar na classe c .

Para comodidade do(a) leitor(a) (que deseje implementar este método computacionalmente) terminamos deixando explícito a fórmula do gradiente de f .

$$\nabla f(w) = \left(\sum_{c=1}^C \frac{\partial f}{\partial b^c} e_c, \sum_{j=1}^C \sum_{s=1}^m \frac{\partial f}{\partial \bar{w}_s^j} e_s^j \right)$$

para:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial b} \right] = -\frac{1}{p} [Z] \mathbf{1} + \frac{1}{p} [H] \mathbf{1}$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \right] = -\frac{1}{p} [X] [Z]^t + \frac{1}{p} [X] [H]^t$$

onde

1. $[X]$ é a matriz $m \times p$ onde as colunas são $X(i)$;

2. $[Z]$ é a matriz $C \times p$ onde as colunas são $Z(i)$;
3. $\mathbf{1}$ é a matriz $p \times 1$ com todas entradas 1;
4. $\left[\frac{\partial f}{\partial b}\right]$ é matriz $C \times 1$ com $\left[\frac{\partial f}{\partial b}\right]_{c,1} = \frac{\partial f}{\partial b^c}$
5. $\left[\frac{\partial f}{\partial \bar{w}}\right]$ é matriz $m \times C$ com $\left[\frac{\partial f}{\partial \bar{w}}\right]_{sj} = \frac{\partial f}{\partial \bar{w}_s^j}$
6. $[H(w)]$ é a matriz $C \times p$ com $[H(w)]_{ik} = \frac{\exp(g_{w^i} \circ X(k))}{\sum_{c=1}^C \exp(g_{w^c} \circ X(k))}$

Observação 1.82. Pesos normalizados

Cabe aqui destacar um pequeno problema na discussão acima da modelagem da classificação multiclasse linear. Note que, fixo w^c , quão mais distante $x \in \mathbb{R}^m$ está do do hiperplano $\{x \in \mathbb{R}^m; g_{w^c}(x) = 0\}$ maior o valor de $g_{w^c}(x)$ e isto modela a **confiabilidade** de que x de fato está na classe c . Porém note que em um problema de mais de 2 classes, se tivermos um outros $w^{\tilde{c}}$ com $\|w^{\tilde{c}}\| \neq \|w^c\|$ podemos até ter que $g_{w^c}(x) = g_{w^{\tilde{c}}}(\tilde{x})$ porém isto não significa que os pontos $x, \tilde{x}$ estão a mesma distâncias dos hiperplanos que separam as classes c e $\tilde{c}$ e assim podem não ter a mesma confiabilidade. A solução teórica para esta questão é simples. Bastaria sempre considerar que $\|w\| = 1$ ou seja que $W = \mathbb{R}^C \times (\mathbb{S}^{m-1})^C$. Porém a implementação desta idéia deve levar em conta o tempo de máquina. Por vezes em alguns problemas simples ou com um conjunto de dados de aprendizado bem comportados (como os de reconhecer algoritmos) parece ser suficiente que os pesos iniciais $\bar{w}^c$ sejam unitários para garantir a convergências para uma função ρ que consegue fazer boas previsões. Em uma situação pior, poderíamos sempre normalizar as interações.

1.7. (*) Curvatura de Gauss de superfícies

Por motivos didáticos estaremos considerando aqui sempre $M = g^{-1}(c)$ uma superfície regular onde c será um valor regular de uma função $g : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Após vermos o conceito de plano tangente de uma superfície de nível M seria natural nos perguntarmos por objetos que meçam quão diferente localmente a superfície possa ser de um plano. Uma possível abordagem seria olhar o vetor normal unitário $\eta = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}$ e nos perguntarmos quão rápido ele gira. Ou seja pensando nele

intuitivamente como uma alavanca (ou um Joystick de videogame) gostaríamos de ver quão rápido ele muda de posição. Claramente se ele nunca mudar de posição ou seja se sua derivada for zero, então M é (ou pelo menos parece ser) um plano. Isto nos motiva a definir o seguinte operador

Definição 1.83.

Dado um superfície regular $M^2 = g^{-1}(c)$ em $\mathbb{R}^3$ e campo unitário $\eta = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}$ podemos definir a aplicação simétrica $\mathcal{S}_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ como

$$\mathcal{S}_p(X) := -D\eta_p X =: D_X \eta(p)$$

chamada **operador forma (shape operator) ou Weingarten operator**.

A definição acima claramente demanda várias explicações.

A primeira seria porque este operador de fato é um operador linear de $T_p M$ para $T_p M$. Para ver isto considere uma curva $t \rightarrow \alpha(t) \in M$ com $\alpha'(0) = X \in T_p M$. Podemos então definir a função $f(t) = \langle \eta \circ \alpha(t), \eta \circ \alpha(t) \rangle = 1$. Ao derivar f em $t = 0$ concluímos que:

$$0 = f'(0) = 2\langle -\mathcal{S}_\eta X, \eta(p) \rangle$$

A equação acima então implica que de fato $\mathcal{S}_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$

A segunda explicação que deveríamos dar é porque a aplicação $\mathcal{S}_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ é simétrica (e talvez porque este incômodo sinal de menos). Como isto exige um pouco mais de contas, coloquemos esta explicação em um pequeno lema.

Lema 1.84.

$\mathcal{S}_\eta(p) : T_p M \rightarrow T_p M$ é de fato simétrica.

Demonstração.

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{S}_\eta X, Y \rangle &= \langle -(D_X \eta)_p, Y \rangle \\ &\stackrel{(*)}{=} \langle \eta_p, D_X Y \rangle \\ &\stackrel{(**)}{=} \langle \eta_p, D_Y X \rangle \\ &\stackrel{(*)}{=} \langle -(D_Y \eta)_p, X \rangle \\ &= \langle \mathcal{S}_\eta Y, X \rangle \end{aligned}$$

Igualdade (*) segue definindo $f(t) = \langle \eta \circ \alpha(t), Y \circ \alpha(t) \rangle = 0$ e derivando em $t = 0$ (ou seja alterando levemente o truque acima discutindo). A igualdade (**) seguirá da expressão 1.3.5 para o campo colchete. $\square$

Uma vez definido o operador forma, podemos tentar medir quanto ele difere de zero, e assim tentar estabelecer uma medida de quanto M difere de um plano (pelo menos localmente). Por ser um operador simétrico nada mais natural do que olhar para seus autovalores.

Definição 1.85.

Os autovalores λ_1 e λ_2 de $\mathcal{S}_\eta(p) : T_p M \rightarrow T_p M$ são chamados **curvaturas principais**.

Antes interpretar o significado destes auto-valores, reformulemos o que vimos na demonstração do Teorema 1.66.

Proposição 1.86.

Seja $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ função de classe C^3 . Suponha que $p \in U$ seja ponto crítico (i.e, $dh(p) = 0$) e que os autovalores λ_i de $\text{Hess } h(p)$ sejam diferentes de zero, i.e, $\det \text{Hess } h(p) \neq 0$.

- (a) Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ o gráfico associado a h é aproximado (perto de p) por um parabolóide elíptico.
- (b) Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ o gráfico associado a h é aproximado (perto de p) por um parabolóide hiperbólico.

Proposição 1.87.

Seja M o gráfico em $\mathbb{R}^3$ de uma função $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suave tal que $(0, 0) \in U$, $h(0, 0) = 0$ e $\nabla h(0, 0) = (0, 0)$. Temos então:

- (a) $T_{(0,0,0)} M = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$,
- (b) se $\eta(0, 0, 0) = (0, 0, 1)$ então $S_\eta(v, 0) = (\text{Hess } h(0, 0)v, 0)$, onde S_η é o operador forma.
- (c) As curvaturas principais em p são auto-valores λ_1 e λ_2 do $\text{Hess } h(0, 0)$ e

Continuação.

assim M pode ser aproximado por um parabolóide elíptico (respectivamente parabolóide hiperbolóide) se $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ (respectivamente se $\lambda_1 \lambda_2 < 0$).

Demonstração. (a) Ao definir $g(x) = x_3 - h(x_1, x_2)$ temos que o vetor normal $\nabla g(x) = (-\frac{\partial h}{\partial x_1}, -\frac{\partial h}{\partial x_2}, 1)$. Assim $\eta(0, 0, 0) = \nabla g(0, 0, 0) = (0, 0, 1)$ e consequentemente o plano tangente em $(0, 0, 0)$ é $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

(b) Definamos a parametrização $\psi(x_1, x_2) = (x_1, x_2, h(x_1, x_2))$ e com ela vetor normal e sua representação em uma parametrização (ou seja $\eta \circ \psi = \tilde{\eta}$)

$$\tilde{\eta}(x_1, x_2) = \frac{(-h_{x_1}, -h_{x_2}, 1)}{\sqrt{h_{x_1}^2 + h_{x_2}^2 + 1}}$$

onde $h_{x_i} = -\frac{\partial h}{\partial x_i}$. Seja $\alpha = \psi(\tilde{\alpha})$. Temos então:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\eta \alpha'(0) &= -\frac{d}{dt} \tilde{\eta} \circ \tilde{\alpha}(t)|_{t=0} \\ &= -\left(\frac{d}{dt} ((h_{x_1} \circ \tilde{\alpha}(t))^2 + (h_{x_2} \circ \tilde{\alpha}(t))^2 + 1)^{-1/2} \Big|_{t=0} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} -h_{x_1} \circ \tilde{\alpha}(t) \\ -h_{x_2} \circ \tilde{\alpha}(t) \\ 1 \end{bmatrix} \Big|_{t=0} \right) \\ &= 0 + \begin{bmatrix} h_{x_1 x_1}(0, 0) & h_{x_2 x_1}(0, 0) \\ h_{x_1 x_2}(0, 0) & h_{x_2 x_2}(0, 0) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}'_1(0) \\ \tilde{\alpha}'_2(0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

lembrando que $\alpha'(0) = (\tilde{\alpha}'_1(0), \tilde{\alpha}'_2(0), 0)$

(c) segue direto da Proposição 1.86. □

Agora que temos uma interpretação do que são as curvaturas principais no caso particular descrito acima, podemos observar que toda superfície $M = g^{-1}(c)$ pode ser rodada e localmente na vizinhança do ponto p recaímos na situação descrita na Proposição 1.87. Assim a proposição acima motiva a definição de curvatura de Gauss a seguir e implica o corolário apresentado abaixo.

Definição 1.88.

Dado uma superfície regular $M = g^{-1}(c)$ e sejam λ_1, λ_2 curvaturas principais associadas a $\eta(p) = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}(p)$. A **curvatura de Gauss** em $p \in M$ é definida como $K(p) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$.

Corolário 1.89.

Seja $M = g^{-1}(c)$ superfície regular.

- (a) Se $K(p) > 0$ então M é aproximado (perto de p) por um parabolóide elíptico,
- (b) se $K(p) < 0$ então M é aproximado (perto de p) por um parabolóide hiperbólico.

Observação 1.90.

Note que embora os sinais das curvaturas principais possam depender da escolha do sentido do vetor normal unitário η (ou seja para $\hat{\eta} = -\eta$, $\hat{\lambda}_i = -\lambda_i$) a curvatura de Gauss não depende da escolha do sentido do vetor η .

Exercício 1.91.

Utilizando diretamente a definição de $\mathcal{S}_\eta$, determine as curvaturas principais e curvatura de Gauss de um plano em $\mathbb{R}^3$ e da esfera (canônica) $\mathbb{S}^2(r)$ de raio r e centro zero em $\mathbb{R}^3$ com vetor normal apontando para fora.

Para exemplos mais complicados, podemos calcular explicitamente curvaturas principais e curvatura de Gauss via parametrização, mas, antes de formalizar isto, precisamos do conceito de segunda forma, que não é mais que a aplicação bilinear associada ao operador de Weingarten (que, como vimos, é uma aplicação linear autoadjunta)

Definição 1.92.

Seja $M \subset \mathbb{R}^2$ uma subvariedade mergulhada. A forma quadrática $II_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$II_p(X) = \langle S_\eta(X), X \rangle, \quad (1.7.1)$$

Continuação.

é chamada de **segunda forma fundamental**.

Observação 1.93.

Se $\psi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ é uma parametrização de M , η vetor normal e $\tilde{\eta}$ definido como $\tilde{\eta} = \eta \circ \psi$. então os coeficientes da segunda forma fundamental estão dados por

$$b_{ij} = \langle -\tilde{\eta}_{x_i}, \psi_{x_j} \rangle = \langle \tilde{\eta}, \psi_{u_i, u_j} \rangle.$$

Proposição 1.94.

Sejam M superfície mergulhada em $\mathbb{R}^3$ e g_{ij} e b_{ij} os coeficientes da primeira e segunda forma, respectivamente. Então:

(a) a representação matricial do operador forma está dada por

$$[\mathcal{S}_\eta] = \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix};$$

(b) a curvatura de Gauss é dada por

$$\tilde{K}(x_1, x_2) = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2};$$

(c) a média das curvaturas principais, $H = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$, é calculada em coordenadas como:

$$\tilde{H}(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{b_{11}g_{22} - 2b_{12}g_{12} + g_{11}b_{22}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \right);$$

(d) e as curvaturas principais por $\lambda_i = H \pm \sqrt{H^2 - K}$.

Demonstração. Sejam a_{ij} funções tais que:

$$-\tilde{\eta}_{x_1} = a_{11}\psi_{x_1} + a_{21}\psi_{x_2}$$

$$-\tilde{\eta}_{x_2} = a_{12}\psi_{x_1} + a_{22}\psi_{x_2}$$

Multiplicando tais equações por ψ_{x_i} temos:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

a qual implica o item (a).

No caso dos itens (b) e (c) basta observar que $K = \det[\mathcal{S}_\eta]$ e $H = \text{tr}[\mathcal{S}_\eta]$ (deixamos o cálculo explícito aos leitores).

Para demonstrar (d) observe que o cálculo dos auto-valores de $\mathcal{S}_\eta$ pode ser feito calculando o polinômio característico da matriz $[\mathcal{S}_\eta] = [a_{ij}]$. Assim,

$$0 = P(\lambda) = \det([\mathcal{S}_\eta] - \lambda Id) = \lambda^2 - \text{tr}[\mathcal{S}_\eta]\lambda + \det[\mathcal{S}_\eta] = \lambda^2 - 2H\lambda + K. \quad \square$$

Exemplo 1.95. Superfície de Revolução

Considere M uma superfície de revolução em $\mathbb{R}^3$. Temos então a parametrização

$$\psi(t, s) = (r(t) \cos(s), r(t) \sin(s), h(t))$$

onde $t \rightarrow \beta(t) = (r(t), h(t))$ é a curva geratriz com $\|\beta'(t)\| \neq 0$.

$$\psi_t = \frac{\partial \psi}{\partial t} = (r'(t) \cos(s), r'(t) \sin(s), h'(t))$$

$$\psi_s = \frac{\partial \psi}{\partial s} = (-r(t) \sin(s), r(t) \cos(s), 0)$$

Logo a métrica em coordenadas é:

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} (r'(t))^2 + (h'(t))^2 & 0 \\ 0 & (r(t))^2 \end{bmatrix}$$

Para calcula b_{ij} primeiro calculemos o vetor normal.

$$\tilde{\eta}(t, s) = \frac{\psi_t \times \psi_s}{\|\psi_t \times \psi_s\|} = \frac{(-\cos(s)h'(t), -\sin(s)h'(t), r'(t))}{\sqrt{(h')^2 + (r')^2}}$$

Em seguida calculemos as derivadas segundas:

$$\psi_{tt} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (r''(t) \cos(s), r''(t) \sin(s), h''(t))$$

$$\psi_{ts} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial s} = (-r'(t) \sin(s), r'(t) \cos(s), 0)$$

$$\psi_{ss} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} = (-r(t) \cos(s), -r(t) \sin(s), 0)$$

Continuação.

$$[b_{ij}] = \frac{1}{\sqrt{(h'(t))^2 + (r'(t))^2}} \begin{bmatrix} -r''(t)h'(t) + h''(t)r'(t) & 0 \\ 0 & r(t)h'(t) \end{bmatrix}$$

Usando o item (b) da Proposição 1.94 podemos calcular a curvatura de Gauss.

$$\begin{aligned} K(p) &= \frac{1}{((r'(t))^2 + (h'(t))^2) r^2} \frac{(-r''(t)h'(t) + r'(t)h''(t)) r(t)h'(t)}{\sqrt{(r'(t))^2 + (h'(t))^2}} \\ &= \frac{-r''(t)(h'(t))^2 + r'(t)h'(t)h''(t)}{r(t)((r'(t))^2 + (h'(t))^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Analogamente, pelo item (c) da Proposição 1.94 segue

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{1}{2r^2 ((r'(t))^2 + (h'(t))^2)} \\ &\quad \cdot \frac{(-r''(t)h'(t) + r'(t)h''(t)) (r(t))^2 + ((r'(t))^2 + (h'(t))^2) r(t)h'(t)}{\sqrt{(r'(t))^2 + (h'(t))^2}} \\ &= \frac{-r''(t)h'(t)(r'(t))^2 + (r(t))^2 r'(t)h''(t) + r(t)(r'(t))^2 h'(t) + r(t)(h'(t))^3}{2r^2 ((r'(t))^2 + (h'(t))^2)} \end{aligned}$$

Finalmente, se a curva β está parametrizada por comprimento de arco, ou seja, $\|\beta'\| = 1$, segue

$$\begin{aligned} K(p) &= \frac{-r''(t)(1 - (r'(t))^2) + r'(t)(-r'(t)r''(t))}{r(t)((r'(t))^2 + 1 - (r'(t))^2)^{3/2}} \\ &= \frac{-r''(t)(1 - (r'(t))^2) - r''(t)(r'(t))^2}{r(t)} \\ &= -\frac{r''(t)}{r(t)}. \end{aligned}$$

1.8. (*) Curvatura média e superfícies mínimas

Nesta seção vamos estudar conceitos que estão diretamente relacionados à média das curvaturas principais (vide item (c) da Proposição 1.94). Para isso, vamos introduzir formalmente este conceito.

Definição 1.96.

Seja uma superfície S em $\mathbb{R}^3$ e $p \in S$. A média das curvaturas principais

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2},$$

é chamada de **curvatura média** de S no ponto p , e o vetor $\mathbf{H} = HN$ é chamado de **vetor curvatura média**.

Observação 1.97.

Assim como no caso da curvatura de Gauss (Observação 1.90), o sentido do vetor curvatura média não depende do sentido do vetor normal, pois se mudamos o sentido deste, também muda o sinal da curvatura média e, portanto, o sentido de $\mathbf{H}$ permanece invariante.

1.8.1. Superfícies mínimas

A palavra mínima neste contexto está relacionada com o problema de encontrar a superfície com a menor área dentre todas as superfícies que tem a mesma fronteira.

De fato, se consideremos uma superfície S em $\mathbb{R}^3$ e consideramos variações normais de tal superfície, ou seja, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, consideramos a aplicação

$$\begin{aligned} \psi_\lambda : \quad U &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2) &\longmapsto \psi(x_1, x_2) + \lambda h(x_1, x_2)N(x_1, x_2) \end{aligned}$$

onde N é o normal à superfície e $h(x_1, x_2)$ uma função arbitrária e diferenciável em U , então a primeira variação da área é dada por:

$$A'(0) = -2 \iint_D hH \sqrt{\det(g)} dx_1 dx_2. \quad (1.8.1)$$

Então podemos estabelecer a seguinte proposição.

Proposição 1.98.

Seja S uma superfície mergulhada $\psi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Então ela é um ponto crítico do funcional da área para uma dada condição de contorno se, e somente se, a sua curvatura média é identicamente nula.

Demonstração. Se $H \equiv 0$ é claro que a condição é satisfeita pois vale (1.8.1). Reciprocamente, suponhamos que $A'(0) = 0$ e que existe $q \in D$ tal que $H(q) \neq 0$, então existe uma vizinhança V na qual H não se anula. Escolhamos $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável tal que $h(q) = H(q)$, $hH > 0$ em V e h tem suporte compacto em V . Assim $A'(0) < 0$ para a variação determinada por essa função h , o que é uma contradição. $\square$

Definição 1.99.

Uma superfície mergulhada S é chamada de **superfície mínima** se a curvatura média é zero em cada ponto da superfície.

Observação 1.100.

A seguinte questão é, então, natural: se S é uma superfície mínima que tem como bordo a curva Γ , ela minimiza globalmente a área? A resposta a esta pergunta é negativa e isto foi observado por H. A. Schwarz (ver obras completas publicadas em 1890) mostrando que, quando a fórmula da segunda variação do funcional área para a superfície mínima que tem como bordo Γ é estritamente menor que zero, ela não minimiza globalmente a área. Porém, as mesmas minimizam localmente a área e a prova pode ser encontrada em [?].

Lema 1.101.

Uma superfície mínima está caracterizada em termos da primeira e segunda forma fundamental pela equação

$$g_{11}b_{22} + g_{22}b_{11} - 2g_{12}b_{12} = 0. \quad (1.8.2)$$

Demonstração. Segue diretamente do item (c) da Proposição 1.94. $\square$

Exemplo 1.102. O catenoide

O catenoide é a superfície gerada pela rotação da catenária $x_2 = a \cosh\left(\frac{x_3}{a}\right)$, $a > 0$ em torno do eixo x_3 (veja figura 1.24).

Continuação.

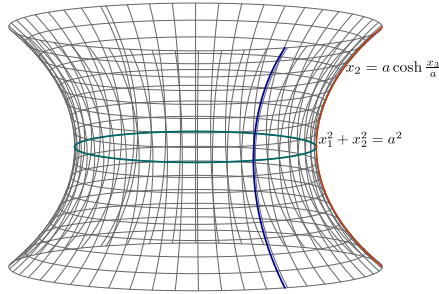


Figura 1.24: O catenoide obtido pela rotação da catenária ao redor do eixo x_3 .

Logo, ele é a imagem da aplicação

$$\psi(s, t) = (a \cosh(t) \cos(s), a \cosh(t) \sin(s), at).$$

Fazendo uso da fórmula para H obtida no Exemplo 1.95 – observando que, neste caso, $r(t) = a \cosh(t)$ e $h(t) = at$ – obtêm-se $H = 0$ (deixamos o cálculo explícito ao cargo do leitor). Logo tal superfície é mínima.

Um fato interessante do catenoide é que pode ser caracterizado como a única superfície mínima de revolução (não plana).

Exercício 1.103.

Se S é uma superfície mínima de revolução em $\mathbb{R}^3$ (não plana), então S é um catenoide ou um pedaço dele.

Sugestao: Fazendo $H = 0$ na fórmula do Exemplo 1.95, mostre que as únicas possibilidades para r e h são as do exemplo precedente.

1.8.2. EDP das superfícies mínimas

Vamos considerar o caso em que a superfície mínima seja o gráfico de uma função diferenciável $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Sabemos que uma parametrização é dada por:

$$\psi(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_3 - f(x_1, x_2)).$$

Assim,

$$d\psi_p(e_1) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x_1}\right) \quad \text{e} \quad d\psi_p(e_2) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right).$$

Logo, da Definição 1.34 segue que os coeficientes da métrica induzida estão dados por

$$g_{11} = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2, \quad g_{12} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right), \quad \text{e} \quad g_{22} = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2.$$

O vetor normal unitário é, portanto,

$$N = \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}, -\frac{\partial f}{\partial x_2}, 1 \right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 + 1}},$$

e, como

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} = \left(0, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right),$$

segue que os coeficientes da segunda forma são

$$b_{ij} = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 + 1}}.$$

Com isto obtemos uma equação equivalente à equação (1.8.2), que é uma equação diferencial parcial quasilinear e elíptica dada por:

$$\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right) - 2 \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right) = 0. \quad (1.8.3)$$

Sendo que toda superfície mergulhada é localmente um gráfico, a equação (1.8.3) nos permite encontrar exemplos específicos de superfícies mínimas. Tal equação é chamada de **EDP das superfícies mínimas**.

Exemplo 1.104.

Vamos usar a equação (1.8.3) para mostrar que o helicóide é uma superfície mínima. O helicóide de passo um está dado pela imersão

$$\psi(x_1, x_2) = (x_2 \cos x_1, x_2 \sin x_1, x_1).$$

Continuação.

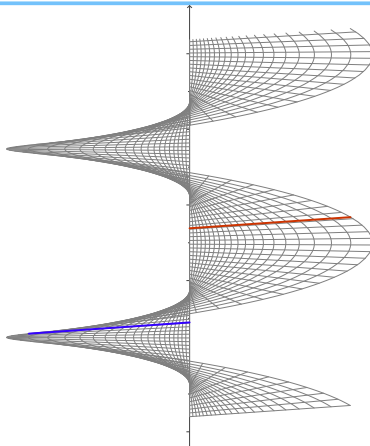


Figura 1.25: O helicóide como uma superfície regrada.

Supondo que $x_1 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $x_2 \neq 0$, temos que

$$\frac{x_2(x_1, x_2)}{x_1(x_1, x_2)} = \tan x_1,$$

logo,

$$x_3 = \arctan \frac{x_2}{x_1}.$$

Portanto, o helicóide é, localmente, o gráfico da função

$$f(x_1, x_2) = \arctan \frac{x_2}{x_1},$$

Continuação.

onde $x_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e $x_2 \neq 0$. Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2} \cdot \frac{-x_2}{x_1^2} = \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2} \cdot \frac{1}{x_1} = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{x_2 \cdot 2x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{-2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{-(x_1^2 + x_2^2) + x_2 \cdot 2x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}.$$

Donde,

$$\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{(x_1^2 + x_2^2)^2 + x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \cdot \frac{2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \quad (1.8.4)$$

$$\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{(x_1^2 + x_2^2)^2 + x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \cdot \frac{-2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}. \quad (1.8.5)$$

Continuação.

Somando (1.8.4) e (1.8.5) obtemos,

$$\begin{aligned}
 & \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \\
 &= \frac{2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \left(\frac{(x_1^2 + x_2^2)^2 + x_1^2 - (x_1^2 + x_2^2)^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \right) \\
 &= \frac{2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \cdot \frac{-(x_2^2 - x_1^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\
 &= 2 \cdot \frac{-x_2}{(x_1^2 + x_2^2)} \cdot \frac{x_1}{(x_1^2 + x_2^2)} \cdot \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\
 &= 2 \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}.
 \end{aligned}$$

O helicóide pode ser caracterizado como a única superfície mínima regrada.

Exercício 1.105. *

Toda superfície mínima regrada ou é parte de um plano ou é parte de um helicóide.

Sugestão: Use o fato de que uma superfície regrada⁶ é a imagem da parametrização

$$\psi(x_1, x_2) = \gamma(x_1) + x_2 w(x_1), \quad x_1 \in I \subset \mathbb{R}, \quad x_2 \in \mathbb{R},$$

onde $\{\gamma(t), w(t)\}$ é a família a 1-parâmetro geradora da superfície. Obtenha a fórmula para a curvatura média de uma superfície com tal parametrização, e mostre a seguir que se a mesma for 0 então as expressões de γ e w são as do helicóide.

1.9. (*) Hessiana orlada e o Hessiano Riemanniano

Vimos no Teorema 1.50 o clássico teorema de multiplicadores de Lagrange, que garante uma condição necessária para que a restrição de uma função u em um variedade regular $M = G^{-1}(c)$ tenha máximo ou mínimo em um ponto $p \in M$.

⁶As superfícies regradas são aquelas que tem a propriedade de que por cada um dos seus pontos passa uma reta que está inteiramente contida na superfície.

Porém tal critério não garantiu que de fato a solução seja um ponto de máximo ou mínimo i.e., é um critério necessário porém não suficiente para existência de máximos e mínimos. Nos problemas clássicos de multiplicadores de Lagrange, as funções u , são particulares o suficiente para admitirem apenas números finitos de candidatos a máximos e mínimos, então comparando-se os valores e usando compacidade de M estabelece-se que o valor menor é de fato o mínimo absoluto e o valor maior o máximo absoluto.

Apresentamos aqui o critério de **Hessianos orlados (ou bordered hessian)** o qual garante se um ponto crítico $q \in M$ intrínseco é máximo ou mínimo local da função restrita a variedade M .

Utilizaremos esta discussão para já introduzir o conceito de conexão Riemanniana associada a métrica induzida do ambiente. Por motivos puramente didáticos estaremos considerando aqui sempre $S = g^{-1}(c)$ uma superfície onde c será um valor regular de uma função $g : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Embora de fato seja possível em um ponto crítico falar de Hessiano intrínseco sem envolver a estrutura geométrica (métrica induzida), utilizando apenas os colchetes dos campos, achamos que esta seria uma boa oportunidade para introduzir o conceito de derivação intrínseca e ver como ele pode ser uma ferramenta útil.

1.9.1. Motivação e o teorema do Hessiano orlado

Sejam $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ função definida como $u(x) = \frac{1}{2}(\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2)$, a superfície $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g(x) = x_1 = c\}$, $p = (c, 0, 0)$ e $f = u|_S$. Desejamos saber se p é ponto de máximo ou mínimo local de f e ao mesmo tempo motivar a apresentação do critério da Hessiana orlada.

Fácil ver que

- $f(x_2, x_3) = \frac{1}{2}(\lambda_1 c^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2)$
- $\text{grad } f(0, 0) = (0, 0)$
- $\text{Hess } f(0, 0) = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$ Assim p é máximo local de f se $\lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$
e é mínimo se $\lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$

Fizemos uma conta intrínseca. Mas e se quisermos fazer uma conta extrínseca, i.e., usando u ? Primeiro notemos que

$$\nabla u(p) = (\lambda_1 c, 0, 0) = \lambda \nabla g(p) = \lambda(1, 0, 0)$$

Ou seja, por multiplicador de Lagrange, p é o candidato para ser máximo ou mínimo. Note também que $\text{Hess } u(p) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$ e assim contém informação a mais, i.e não precisamos saber sinal de λ_1 . Suponha que voce esteja ensinando um computador a se livrar da informação adicional (i.e., λ_1). Um bom truque é usar a seguinte matriz orlada (colocando $\nabla g(p) = (1, 0, 0)$ no bordo).

$$\overline{H}_3 = \overline{\text{Hess } u} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \text{ e } \overline{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Visto que $\det \overline{H}_2 = (-1)\lambda_2$ e $\det \overline{H}_3 = (-1)\lambda_2\lambda_3$ concluímos que:

- Se $\det \overline{H}_2 < 0$ e $\det \overline{H}_3 < 0$, então p é mínimo de f ($\lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$).
- Se $\det \overline{H}_2 > 0$ e $\det \overline{H}_3 < 0$, então p é máximo de f ($\lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$).

O truque da matriz orlada parece ser bom no caso em que a superfície S é um plano. Mas se S não for um plano? (vide Observação 1.7) Se S tiver curvatura diferente de zero? Para lidar com tal questão no lugar de usar $\text{Hess } u(p)$ precisaremos em geral usar uma outra matriz simétrica H , relacionada ao conceito Hessiano Riemanniano (o qual vamos discutir dentro em breve).

Definição 1.106. Matriz Hessiana orlada

Sejam $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g(x) = c\}$ superfície regular e $p \in S$ é tal que $\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p)$, onde u e g são suaves. Definimos:

$$H = \text{Hess } u(p) - \lambda \text{Hess } g(p)$$

Antes de discutir mais sobre H vamos apresentar o resultado desta seção que foi ilustrado pela nossa motivação.

Teorema 1.107.

Seja $p \in S$ com $\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p)$. Suponha que $\frac{\partial g}{\partial x_1}(p) \neq 0$.

- Se $\det \overline{H}_2 < 0$ e $\det \overline{H}_3 < 0$ então p é mínimo local de f .
- Se $\det \overline{H}_2 > 0$ e $\det \overline{H}_3 < 0$ então p é máximo local de f .

Continuação.

onde

$$\overline{H}_3 = \overline{H} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(p) & \frac{\partial g}{\partial x_3}(p) \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(p) & H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2}(p) & H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ \frac{\partial g}{\partial x_3}(p) & H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix}$$

$$\overline{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(p) \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(p) & H_{11} & H_{12} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2}(p) & H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$$

Observação 1.108.

As vezes H pode ser expresso com outra notação. De fato, seja $L : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ função, defina

$$L(\lambda, x) = u(x) - \lambda(g(x) - c).$$

Então

$$\nabla L(\lambda, x) = (g(x) - c, \nabla u(x) - \lambda \nabla g(x))$$

Se $\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p)$ então H coincide com a matriz 3×3 esquerda superior de Hess $L(p, \lambda)$. Observamos também que como H não é positiva definida ou negativa definida, o Teorema 1.107 **não é corolário direto** do Teorema 1.69 e Corolário 1.68.

1.9.2. () Ideia da Prova****Derivada Intrínseca e o Hessiano Riemanniano**

Inspirado na discussão do gradiente Riemanniano $\text{grad } f(p)$ podemos nos perguntar: Dados campos $\vec{X}$ e $\vec{Y}$ tangentes a superfície S como derivar $\vec{X}$ na direção de $\vec{Y}$ de forma que o resultado continue tangente a S ? Afinal mesmo que os 2 campos sejam tangente a S , $D_{\vec{Y}}\vec{X}$ pode não ser tangente a S . A solução será considerar a parte tangente de $D_{\vec{Y}}\vec{X}$.

Definição 1.109. Conexão Riemanniana

Dado campos $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ definimos o operador $\nabla : \mathfrak{X}(S) \times \mathfrak{X}(S) \rightarrow$

Continuação.

$\mathfrak{X}(S)$ como

$$\nabla_Y \vec{X}(p) = D_{\vec{Y}} \vec{X}(p) - \left\langle D_{\vec{Y}} \vec{X}(p), \frac{\nabla g(p)}{\|\nabla g(p)\|} \right\rangle \frac{\nabla g(p)}{\|\nabla g(p)\|}$$

Tal operador será chamado **conexão Riemanniana associada a métrica induzida**.

Uma vez que sabemos derivar campos $\vec{X}$ tangentes a S , podemos derivar o grad f , definindo o conceito do Hessiano intrínseco ou Riemanniano $\mathcal{H}(p)$.

Definição 1.110. Hessiano Riemanniano

$$\mathcal{H}(p)(X, Y) = \langle \nabla_X \text{grad } f, Y \rangle, \quad X, Y \in T_p S$$

Proposição 1.111.

Seja $p \in S$, com $\text{grad } f(p) = 0$.

- Se $\mathcal{H}(p)$ é positivo definido (i.e., tenha auto-valores positivo). então $p \in S$ é ponto de mínimo local.
- Se $\mathcal{H}(p)$ é negativo definido (i.e., tenha auto-valores negativos). então $p \in S$ é ponto de máximo local.

De volta a discussão extrínseca

A Proposição 1.111 já resolve, pelo menos em teoria, nossa questão de determinar se um ponto crítico é ou não um ponto de máximo ou mínimo local. Porém na prática aplica-la diretamente para fazer uma conta, pode ser uma má ideia. Primeiro trata-se de uma conta intrínseca. Teríamos que sempre parametrizar a superfície de nível? Segundo e de fato a questão mais séria (que já aparecia no problema análogo em $\mathbb{R}^2$) é que se só necessitamos saber os sinais dos autovalores, deveríamos ter um algoritmo onde esta informação fosse obtida sem gastar tanto tempo para calcular explicitamente algo que de fato não vamos utilizar. Cabe lembrar que nossa discussão para superfícies pode (e é) generalizada para dimensões maiores, e assim o tempo gasto para calcular auto-valores pode ser relevante. A álgebra linear nos dá um critério para resolver este tipo de questão. Então nosso objetivo será

converter nossa conta intrínseca para uma conta extrínseca (vide Proposição 1.112 e Proposição 1.113) e adaptar um critério de álgebra linear (vide Proposição 1.114) para determinar os sinais dos auto-valores, provando assim o Teorema 1.107.

Proposição 1.112.

Para todo $X, Y \in T_p S$

- (a) $\mathcal{H}(p)(X, Y) = \text{Hess } u(p)(X, Y) + \langle \nabla u^\nu, D_X Y \rangle$, onde ∇u^ν é a componente normal de ∇u .
- (b) $\mathcal{H}(p)(X, Y) = \text{Hess } u(p)(X, Y) - \lambda \text{Hess } g(p)(X, Y)$, quando p é um ponto crítico intrínseco, i.e., quando $\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p)$.

Demonstração. Seja ξ vetor normal a S , i.e., $\xi = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}$.

(a) Levando em conta a definição de $\text{grad } u$, do Hessiano Riemanniano $\mathcal{H}$ e que $\langle \xi, Y \rangle = 0$ podemos concluir que:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}(p)(X, Y) &= \langle \nabla_X \text{grad } u, Y \rangle \\
 &= \langle D_X \text{grad } u - \langle D_X \text{grad } u, \xi \rangle \xi, Y \rangle \\
 &= \langle D_X \text{grad } u, Y \rangle \\
 &= \langle D_X \nabla u - D_X (\langle \nabla u, \xi \rangle \xi), Y \rangle \\
 &= \langle D_X \nabla u, Y \rangle - X \bullet \langle \nabla u, \xi \rangle \langle \xi, Y \rangle \\
 &\quad - \langle \nabla u, \xi \rangle \langle D_X \xi, Y \rangle \\
 &= \langle D_X \nabla u, Y \rangle + \langle \nabla u, \xi \rangle \langle \xi, D_X Y \rangle \\
 &= \text{Hess } u(p)(X, Y) + \langle \nabla u^\nu, D_X Y \rangle.
 \end{aligned}$$

(b) Substituindo $\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p)$ na equação do item (a) temos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}(p)(X, Y) &= \text{Hess } u(p)(X, Y) + \lambda \langle \nabla g, D_X Y \rangle \\
 &= \text{Hess } u(p)(X, Y) - \lambda \langle D_X \nabla g, Y \rangle \\
 &= \text{Hess } u(p)(X, Y) - \lambda \text{Hess } g(p)(X, Y).
 \end{aligned}$$

□

Segue assim do item (b) que no caso em que $\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p)$, temos que $H|_{T_p S \times T_p S} = \mathcal{H}(p)$. Assim podemos reformular a Proposição 1.111 da seguinte maneira:

Proposição 1.113.

Seja $p \in S$ tal que $\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p)$ (i.e, $\text{grad} f(p) = 0$). Então:

- Se $H|_{T_p S \times T_p S}$ é positivo definido, então $p \in S$ é ponto de mínimo local.
- Se $H|_{T_p S \times T_p S}$ é negativo definido então $p \in S$ é ponto de máximo local.

A próxima proposição de Álgebra Linear pode ser demonstrada usando a matriz apresentada na motivação, o teorema espectral e a lei de inércia de Sylvester

Proposição 1.114.

Seja A matriz simétrica e suponha que existe um plano V tal que a aplicação bilinear associada a A restrita a $V \times V$ seja também simétrica. Ou seja existe aplicação simétrica $\mathcal{H} : V \rightarrow V$ tal que $Y^t A X = Y^t \mathcal{H} X$ para todo $X, Y \in V$. Vamos também supor que $\mathcal{H}$ não seja degenerado. Seja w vetor normal a V . Suponha que $w_1 \neq 0$.

- (a) Se $\det \bar{A}_2 < 0$ e $\det \bar{A}_3 < 0$ então $y^t A x|_{V \times V}$ é positivo definido.
- (b) Se $\det \bar{A}_2 > 0$ e $\det \bar{A}_3 < 0$ então $y^t A x|_{V \times V}$ é negativo definido.

$$\bar{A}_3 = \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & w_1 & w_2 & w_3 \\ w_1 & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ w_2 & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ w_3 & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & w_1 & w_2 \\ w_1 & A_{11} & A_{12} \\ w_2 & A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Demonstração. Seja a base $\{q_1, q_2, q_3\}$ como $q_1 = \frac{w}{\|w\|}$, $\mathcal{H}q_2 = \lambda_2 q_2$ e $\mathcal{H}q_3 = \lambda_3 q_3$. Temos então que $Aq_2 = b_{12}q_1 + \lambda_2 q_2$ e $Aq_3 = b_{13}q_1 + \lambda_3 q_3$, onde $b_{12} = \langle A(q_1), q_2 \rangle$ e $b_{13} = \langle A(q_1), q_3 \rangle$. Definamos agora base para $\mathbb{R}^4$ $\bar{q}_0 = (1, 0, 0, 0)$, $\bar{q}_i = (0, q_i)$, para $i = 1 \cdots 3$. Definindo Q a matriz ortogonal com colunas $\bar{q}_j$ não é difícil verificar que:

$$Q^t \bar{A} Q = B = \begin{bmatrix} 0 & \|w\| & 0 & 0 \\ \|w\| & c_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{12} & \lambda_2 & 0 \\ 0 & b_{13} & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Por escalonamento (análogo a decomposição LU), e utilizando o fato de λ_2 e λ_3 serem diferentes de zero temos que B é conjugado a:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \|w\| & 0 & 0 \\ \|w\| & \tilde{c}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & o & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Por outro lado ao escalonar diretamente A temos que A é conjugada a

$$D = \begin{bmatrix} 0 & w_1 & 0 & 0 \\ w_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que B e D são equivalentes, temos pela lei de inércia de Sylvester, que sinal de d_2 e d_3 são iguais a λ_2 e λ_3 , respectivamente. A hipótese do item (a) e argumento usual de decomposição LU implicam que d_2 e d_3 tem sinais positivos e assim λ_2 e λ_3 são positivos. De forma análoga a hipótese do item (b) implica que d_2 e d_3 tem sinais negativos e assim λ_2 e λ_3 são negativos.

□

Proposições 1.113 e 1.114 implicam o Teorema 1.107.

Campos e fluxos em variedades

Neste capítulo iremos explorar conceitos de campos, fluxos e veremos o teorema Frobenius. Tais resultados serão discutidos na linguagem mais geral de variedades *abstratas*. O(a) leitor(a) que se sentir mais confortável poderá considerar sempre que variedades são mergulhadas em espaços Euclidianos.

2.1. Variedades

Utilizando a regra da cadeia e a Definição 1.6 temos o seguinte exercício, que irá motivar a definição de variedades.

Exercício 2.1. Mudança de coordenadas

Seja $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$ subvariedade mergulhada. Considere 2 parametrizações $\varphi_i : V_i \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$ tal que $W := \varphi_1(V_1) \cap \varphi_2(V_2) \neq \emptyset$. Verifique: $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1|_{V_{12}}$ é um difeomorfismo na sua imagem, onde $V_{1,2} = \varphi_1^{-1}(W)$.

Definição 2.2.

Uma variedade M^m de dimensão m é um espaço topológico Hausdorff com base enumerável que admite uma estrutura diferenciável, i.e., duplas (U_α, ψ_α) (**cartas**) tal que para cada α , U_α é aberto de M e $\psi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \psi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^m$ são homeomorfismos entre abertos, tais que:

- (a) $M = \cup_\alpha U_\alpha$;

Continuação.

- (b) se $W = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(W) \rightarrow \psi_\beta(W)$ é um difeomorfismo (veja Figura 2.1);
- (c) a coleção $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_\alpha$ (**atlas**) é máxima em relação aos itens acima.

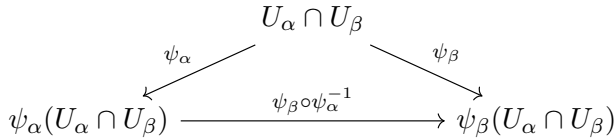


Figura 2.1:

Observação 2.3.

De forma equivalente, dizemos que 2 atlas (que atendem (a) e (b)) $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ e $\{(\hat{U}_\beta, \hat{\psi}_\beta)\}$ são **equivalentes** (ou **compatíveis**) se a união $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\} \cup \{(\hat{U}_\beta, \hat{\psi}_\beta)\}$ é um atlas suave, ou seja dados α, β com $W = U_\alpha \cap \hat{U}_\beta \neq \emptyset$ temos que $\hat{\psi}_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(W) \rightarrow \hat{\psi}_\beta(W)$ é suave. Uma classe de equivalência de atlas $\{[(U_\alpha, \psi_\alpha)]\}$ é chamada **estrutura diferenciável**. Assim sendo uma variedade M é um espaço topológico Hausdorff com base enumerável e estrutura diferenciável $[(U_\alpha, \psi_\alpha)]$.

Exemplo 2.4. A esfera

Vamos ilustrar o item (a) e (b) da Definição 2.2 para parametrizações estereográficas da esfera, a qual tem um interesse em si devido às suas propriedades conformes.

Denotemos por N o polo norte da esfera. Seja ψ_N a projeção estereográfica desde o polo norte N que, lembramos, está definida da seguinte maneira. Por cada ponto $p = (x_1, x_2, x_3) \in S^2 \setminus \{N\}$ traçamos a reta r que une p e N , e fazemos corresponder o ponto q da interseção dessa reta com o plano $x_3 = 0$ (veja a figura 2.2), ou seja, a interseção da reta

$$r(t) = N + t(p - N) = (tx_1, tx_2, 1 + t(x_3 - 1))$$

com o plano $x_3 = 0$. Daí

$$t = \frac{1}{1 - x_3}$$

Continuação.

e, portanto, ψ_N é a aplicação dada por

$$\psi_N(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3} \right).$$

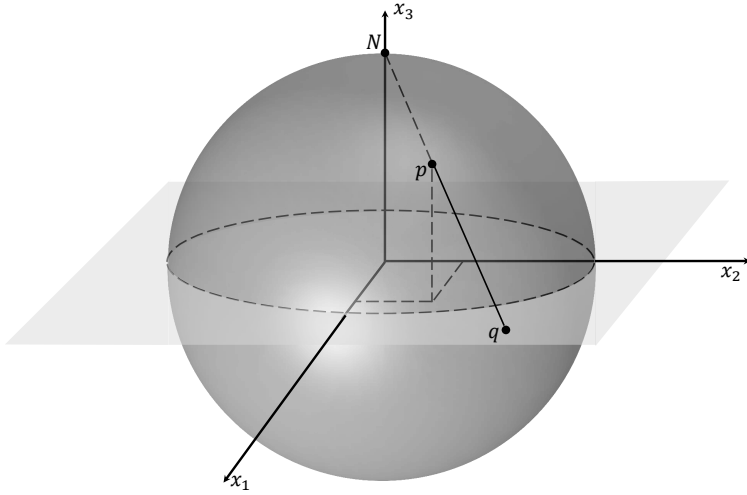


Figura 2.2: Projeção estereográfica desde o polo norte.

Além disso, esta aplicação tem uma inversa que determinamos analogamente. Seja $q = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, então a reta que une q e N está dada por

$$r(t) = N + t(q - N) = (tx_1, tx_2, 1 - t).$$

Fazendo a interseção desta reta com S^2 temos

$$t^2 x_1^2 + t^2 x_2^2 + (1 - t)^2 = 1,$$

onde

$$t = \frac{2}{1 + x_1^2 + x_2^2}.$$

Continuação.

Portanto a inversa de ψ_N é

$$\psi_N^{-1}(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{2x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right).$$

Analogamente definimos a projeção estereográfica desde o polo sul S como sendo a aplicação $\psi_S : S^2 \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$\psi_S(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1 + x_3}, \frac{x_2}{1 + x_3} \right),$$

e cuja inversa é

$$\psi_S^{-1}(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{2x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{1 - x_1^2 - x_2^2}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right).$$

Temos então:

- (a) $S^2 = (S^2 \setminus \{S\}) \cup (S^2 \setminus \{N\})$;
- (b) Se $p \in S^2 \setminus \{N, S\}$, a composta $\psi_N \circ \psi_S^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tem a expressão

$$\psi_N \circ \psi_S^{-1}(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right),$$

que é claramente um difeomorfismo.

Isso mostra que a esfera é uma variedade de dimensão 2, bastando considerar o atlas maximal, ou usando esse atlas para definir a classe de equivalência de variedades coordenadas.

Interessante observar que, para dimensões baixas, por exemplo menor ou igual a três, uma variedade só pode ter uma estrutura diferenciável. Porém para dimensões maiores, a mesma variedade pode ter estruturas diferenciáveis diferentes i.e., se (U_α, ψ_α) e $(\hat{U}_\beta, \hat{\psi}_\beta)$ são estruturas diferenciáveis, então $\hat{\psi}_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ pode ser apenas um homeomorfismo. Por exemplo esferas $\mathbb{S}^7$ podem ter mais do que uma estrutura diferenciável.

Outra observação relevante é que toda variedade M^m pode ser vista, de acordo com Teorema de mergulho de Whitney, como variedade mergulhada em $\mathbb{R}^{m+k}$ para um k suficientemente grande (i.e., admite um mergulho, vide próxima seção). Mesmo assim, como por vezes as variedades que estudamos carregam estruturais adicionais

que nos interessam, pode não ser conveniente considera-las como subvariedades mergulhadas em espaço Euclidiano, se o preço a pagar for a perda das estruturas adicionais pela quais temos interesse ou com as quais temos facilidade de lidar. Por exemplo, existem grupos de Lie (i.e., variedades com estrutura de grupo, com produto e inversão suave) que não admitem *representação matricial* ou seja não serão visto diretamente como subgrupos de matrizes.

Definição 2.5.

Sejam duas variedades M e N com atlas $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ e $\{(V_\beta, \phi_\beta)\}$, respectivamente. Uma aplicação $F : M \rightarrow N$ é chamada uma **aplicação suave em um ponto p** se existe uma vizinhança U_α de p e uma vizinhança V_β de $F(p)$ tal que a aplicação $\phi_\beta \circ F \circ \psi_\alpha^{-1}$ é suave em $\psi_\alpha(p)$ (vide Figura 2.3). Dizemos que F é uma **aplicação suave** se for suave para todo $p \in M$.

Exercício 2.6.

Verifique que tal definição não depende da escolha de cartas.

$$\begin{array}{ccc}
 U_\alpha \subset M & \xrightarrow{F} & V_\beta \subset N \\
 \downarrow \psi_\alpha & & \downarrow \phi_\beta \\
 \psi_\alpha(U_\alpha) & \xrightarrow{\phi_\beta \circ F \circ \psi_\alpha^{-1}} & \phi_\beta(V_\beta)
 \end{array}$$

Figura 2.3:

Exercício 2.7.

Sejam M^m e N^n subvariedades de $\mathbb{R}^{m+k}$ e $\mathbb{R}^{n+l}$ respectivamente. Suponha que exista uma aplicação suave $F : \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^{n+l}$ tal que $F(M) = N$. Verifique que $F|_M : M \rightarrow N$ é uma aplicação suave, no sentido definido acima. Conclua que:

- se M é superfície invariante por rotação (recorde Exercício 1.18) então a rotação $F = R_\theta$ induz um difeomorfismo $F_M : M \rightarrow M$;
- Se $M = \mathbb{O}(n)$ é o grupo ortogonal então a aplicação $L_g : M \rightarrow M$

Continuação.

definida como $L_g(x) = g \cdot x$ é suave, onde $g \in \mathbb{O}(n)$ é uma matriz fixa.

Exercício 2.8.

Sejam M^m e N^n subvariedades mergulhadas em $\mathbb{R}^{m+k}$ e $\mathbb{R}^{n+l}$ respectivamente. Suponha que $F : M \rightarrow N$ seja uma aplicação suave, vide Definição 2.5.

- Prove que F admite extensões locais, ou seja dado $p \in M$ existe uma vizinhança $\tilde{U}$ em $\mathbb{R}^{m+k}$ e uma aplicação suave $\tilde{F} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n+l}$ tal que $F|_U = \tilde{F}|_U$ onde $U = \tilde{U} \cap M$.
- Suponha que $m = n$ e $k = l$ e $F : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo. Prove que para cada $p \in M$ existe uma extensão $F_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ que é um difeomorfismo, ou seja as extensões locais podem ser escolhidas para serem difeomorfismos.

2.2. Velocidades e derivações

Antes de definir espaço tangente em variedades gerais, vamos pensar em uma definição alternativa à Definição 1.25 para o caso de uma variedade mergulhada M^m em $\mathbb{R}^{m+k}$.

Dado um vetor $v_q \in T_q \mathbb{R}^m$ podemos associar a ele um operador agindo nas funções suaves próximas a q da seguinte forma:

$$v_q \bullet h := \sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial h}{\partial x_i}(q), \quad (2.2.1)$$

onde v_i , $1 \leq i \leq m$, são as coordenadas de v na base canônica.

Assim sendo, dado uma parametrização $\varphi : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U \subset M$, $q \in V$ e $v_q \in T_q V$, o vetor $d\varphi_q v_q \in T_{\varphi(q)} M$ pode ser visto como um operador sobre o espaço das funções diferenciáveis em uma vizinhança de $\varphi(q)$. Se f é uma função

suave em uma vizinhança de $\varphi(q) \in \mathbb{R}^{m+k}$, temos, então, pela regra da cadeia:

$$\begin{aligned} (d\varphi_q v_q) \bullet f &= df_{\varphi(q)} d\varphi_q v_q \\ &= d(f \circ \varphi)_q v_q \\ &= v_q \bullet (f \circ \varphi) \\ &= \sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i}(q) \end{aligned}$$

onde $\hat{f} = (f \circ \varphi)$.

Tal conta nos motiva considerar vetores em $T_p M$ como derivações e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right\}$ como base de $T_p M$, onde $p = \varphi(q)$.

Definição 2.9.

Seja M variedade e $p \in M$. Considere $C^\infty(p)$ a álgebra dos germes de funções suaves em p ¹. O **espaço tangente** $T_p M$ é definido como o espaço das **derivações lineares** em p , i.e., o conjunto das aplicações $v_p: C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$ tais que:

1. $v_p \bullet (af + bg) = av_p \bullet f + bv_p \bullet g$ ($\mathbb{R}$ -lineares);
2. $v_p \bullet (fg) = (v_p \bullet f)g(p) + f(p)(v_p \bullet g)$ (regra de Leibniz).

para todos $f, g \in C^\infty(p)$ e $a, b \in \mathbb{R}$.

Seja (U, ψ) um sistema de coordenadas onde $\psi(\cdot) = (x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot))$ é o sistema de coordenadas da vizinhança U contendo p . Considere $\hat{f} := f \circ \psi^{-1}$ a representação de $f \in C^\infty(p)$ no sistema de coordenadas ψ . Chamaremos **vetores coordenados** às derivações lineares:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) \bullet f := \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i} \Big|_{\psi(p)}. \quad (2.2.2)$$

Proposição 2.10.

Seja M^m uma variedade e $p \in M$. Então $T_p M$ é um espaço vetorial e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right\}$

¹Dizemos que duas funções f e g tem o **mesmo germe** em p se p está no domínio das duas e se existe uma vizinhança de p (comum aos dois domínios) onde f e g coincidem.

Continuação.

é uma base de $T_p M$. Em particular, $\dim T_p M = \dim M = m$.

Demonstração. Fica ao cargo do leitor mostrar que $T_p M$ é um espaço vetorial.

Mostremos agora que o conjunto $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right\}$ é linearmente independente em $T_p M$. Ou seja, desejamos provar que se $\sum_i^m c_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p = 0$, então $c_i = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$. Para tanto basta derivar cada uma das funções coordenadas $x_j : U \rightarrow \mathbb{R}, j \in \{1, \dots, n\}$. Mais precisamente,

$$0 = \left(\sum_i^m c_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) \bullet x_j = \sum_i^m c_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \bullet x_j = \sum_i^m c_i \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_i}(p) = \sum_i^m c_i \delta_{ij} = c_j.$$

Verifiquemos, agora, que $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right\}$ gera $T_p M$. Seja $v_p \in T_p M$ e defina $v_i := v_p \bullet x_i$. Desejamos provar que

$$z_p := v_p - \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p = 0. \quad (2.2.3)$$

Para tanto, aceitemos momentaneamente que existe uma vizinhança U de p e funções $g_i : U \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq m$, tal que

$$f(\cdot) = f(p) + \sum_i (x_i(\cdot) - q_i) g_i(\cdot). \quad (2.2.4)$$

Utilizando as propriedades que definem a derivação linear concluímos que

$$\begin{aligned} v_p \bullet f &= v_p \bullet f(p) + v_p \bullet \left(\sum_i (x_i(\cdot) - q_i) g_i(\cdot) \right) \\ &= 0 + \sum_i (v_p \bullet x_i(\cdot)) g_i(p) + \sum_i (x_i(p) - q_i) v_p \bullet g_i(\cdot) \\ &= \sum_i g_i(p) v_p \bullet x_i(\cdot) \\ &= \sum_i g_i(p) v_i; \end{aligned}$$

bem como

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_j v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) \bullet f \\
 &= \sum_j v_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \bullet f(p) + \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \bullet \left(\sum_i (x_i(\cdot) - q_i) g_i(\cdot) \right) \right) \\
 &= \sum_j v_j \left(0 + \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \bullet x_i(\cdot) \right) g_i(p) + \sum_i (x_i(p) - q_i) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \bullet g_i(\cdot) \right) \\
 &= \sum_{ij} v_j g_i(p) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \bullet (x_i(\cdot)) \\
 &= \sum_{ij} v_j g_i(p) \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial x_j}(p) \\
 &= \sum_{ij} v_j g_i(p) \delta_{ij} \\
 &= \sum_i v_i g_i(p)
 \end{aligned}$$

As duas equações acima e a arbitrariedade da escolha de f implicam (2.2.3).

Por fim, para verificar a equação 2.2.4, defina $\hat{f}(x) = f \circ \psi^{-1}(x)$ e $\alpha(t) = q + t(x - q)$ ($0 \leq t \leq 1$). Pelo Teorema Fundamental do Cálculo aplicado a $\hat{f} \circ \alpha$, temos

$$\begin{aligned}
 f(\cdot) - f(p) &= \hat{f}(x) - \hat{f}(q) \\
 &= (\hat{f} \circ \alpha)(1) - (\hat{f} \circ \alpha)(0) \\
 &= \int_0^1 (\hat{f} \circ \alpha)'(t) dt \\
 &= \int_0^1 \langle \nabla \hat{f}(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle dt \\
 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^m \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i}(\alpha(t)) (x_i(\cdot) - q_i) dt \\
 &= \sum_{i=1}^m (x_i(\cdot) - q_i) \int_0^1 \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i}(\alpha(t)) dt
 \end{aligned}$$

Definindo $\hat{g}_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i}(\alpha(t)) dt$ e $g_i(\cdot) = \hat{g}_i \circ \psi(\cdot)$ conclui-se a demonstração da equação (2.2.4). $\square$

Antes de apresentar a definição de derivada de uma aplicação $F : M \rightarrow N$, no caso de 2 variedades gerais, vamos primeiro supor que elas são mergulhadas em espaços Euclidianos. Então pela regra da cadeia temos para $f \in C^\infty(N)$

$$\begin{aligned} dF_p(v) \bullet f &= df_{F(p)} dF_p(v_p) \\ &= d(f \circ F)_p v_p \\ &= v_p \bullet (f \circ F) \end{aligned}$$

Esta conta motiva a definição geral.

Definição 2.11.

Seja $F : M \rightarrow N$ uma aplicação suave e $p \in M$. A derivada de F em p é a aplicação linear $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$, tal que se $v_p \in T_p M$, então $dF_p v_p$ é o vetor tangente a $F(p)$ atendendo

$$dF_p(v_p) \bullet f = v_p \bullet (f \circ F)$$

para todo $f \in C^\infty(F(p))$.

Observe que, de forma análoga ao caso Euclidiano,

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p = d\psi_q^{-1}(e_i|_q), \quad (2.2.5)$$

onde $q = \psi(p)$ e $e_i|_q$ é o i -ésimo vetor canônico em $T_q U = \mathbb{R}^m$.

Observação 2.12.

Vale a pena aqui fixar algumas notações que iremos usar ao longo do texto. Reservaremos D para derivadas de aplicações de espaço Euclidianos (como era usual em Cálculo Diferencial) e para a conexão Euclidiana enquanto d será reservado para diferenciação de aplicação entre variedades, e $\mathbf{d}$ para derivação exterior de formas.

A definição acima em particular implica que a regra da cadeia passa a valer para variedades.

Proposição 2.13.

Sejam $F : M^m \rightarrow N^n$ uma aplicação suave, e $\psi_\alpha(\cdot) = (x_1(\cdot), \dots, x_m(\cdot))$ e $\phi_\beta(\cdot) = (y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot))$ sistema de coordenadas de M e N em torno de p

Continuação.

e $F(p)$, respectivamente. A representação matricial de dF_p nas bases $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}_{i=1}^m$ e $\left\{\frac{\partial}{\partial y_j}\right\}_{j=1}^n$ é $D\widehat{F}(q)$ onde $\widehat{F} = \phi_\beta \circ F \circ \psi_\alpha^{-1}$ e $q = \psi_\alpha(p)$.

Demonstração.

Observe que a entrada (i, j) da representação matricial de dF_p nas bases $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}_{i=1}^m$ e $\left\{\frac{\partial}{\partial y_j}\right\}_{j=1}^n$ é $\left(dF_p \frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p \bullet y_i$. Definindo $\widehat{F}(\cdot) = (f_1(\cdot), \dots, f_n(\cdot))$ temos:

$$\begin{aligned} \left(dF_p \frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p \bullet y_i &= \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_p \bullet (y_i \circ F) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_p (y_i \circ F \circ \psi_\alpha^{-1})(q) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_p (\pi_i \circ \phi_\beta \circ F \circ \psi_\alpha^{-1})(q) \\ &= \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(q), \end{aligned}$$

onde $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é a projeção $\pi_i(y_1, \dots, y_n) = y_i$. $\square$

Podemos também inferir a definição de vetor tangente a uma curva. De fato, considerando $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ como aplicação entre variedades, temos

$$\alpha'(0) \bullet f = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)|_{t=0}.$$

Em particular, num sistema de coordenadas ψ , escrevendo

$$\psi \circ \alpha(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t)),$$

temos

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^n u'_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p \in T_p M.$$

Com as definições acima os conceitos de imersão, submersão e difeomorfismo vistos nos Capítulo 1 podem ser facilmente generalizados para variedades.

Neste contexto mais geral, uma imersão $F : M \rightarrow N$ é chamada um **mergulho** se $F : M \rightarrow F(M) \subset N$ é um homeomorfismo, considerando $F(M)$ com a topologia induzida.

Além disso, considere variedades P e N com $P \subset N$. Diremos que P uma **subvariedade imersa** de N se a inclusão $i: P \hookrightarrow N$ é uma imersão. Além disto, se $i: P \hookrightarrow N$ for um mergulho, então P será uma **variedade mergulhada**. Convidamos o leitor ou leitora a comparar este conceito de variedade mergulhada com o conceito apresentado no Capítulo 1.

Terminamos esta seção apresentando o teorema do posto, que generaliza os teoremas de submersão e imersão.

Definição 2.14.

Sejam M e N variedades diferenciáveis e $F: M \rightarrow N$ uma aplicação suave. O **posto** de F em $p \in M$ como o posto de $dF_p: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$.²

Exemplo 2.15.

Considere a aplicação $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como:

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, -x_1^2 - x_2^2)$$

Não é difícil verificar que:

- dF_x tem posto constante,
- $F(U)$ é uma variedade mergulhada, para abertos $U \subset \mathbb{R}^2$,
- $\{F^{-1}(p)\}_{p \in F(U)}$ são as fibras da submersão canônica $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\pi(x) = (x_1, x_2)$.

O exemplo acima ilustra o teorema a seguir.

Teorema 2.16. Teorema do Posto

Seja $F: M^{m+n} \rightarrow N^{m+l}$ aplicação suave entre variedades. Suponha que dF_x tem posto m para todo $x \in M$. Então para todo $p \in M$ existe uma vizinhança U_0 de p tal que:

- (a) $L = F(U_0)$ é variedade mergulhada,

²Lembre que o posto de uma aplicação linear é a dimensão da sua imagem.

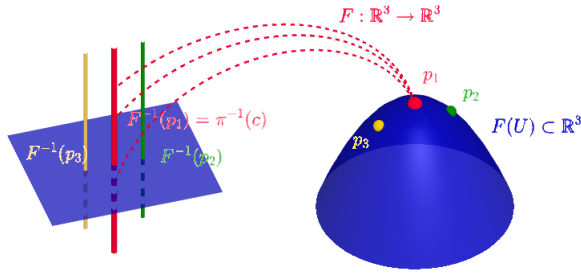


Figura 2.4: Exemplo 2.15 ilustrando o teorema do posto, vide Teorema 2.16

Continuação.

(b) $\{F^{-1}(c)\}_{c \in L} \cap U_0$ são fibras de uma submersão.

Demonstração. Compondo a aplicação F com sistemas de coordenadas de M e N podemos supor que $F : U \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^{m+l}$. Desejamos demonstrar que existem vizinhanças U_1 de $F(p)$ e difeomorfismos $\psi : V_0 \rightarrow U_0$ e $\varphi : U_1 \rightarrow V_1$ tais que

$$\varphi \circ F \circ \psi(x, y) = (x, 0)$$

Podemos supor, após aplicar movimentos rígidos que $\mathbb{R}^m \times \{0\} = DF_p(\mathbb{R}^{m+n})$. Observe que $D(\pi_1 \circ F)_x$ é sobrejetor para x próximo a p , onde $\pi_1(x, y) = x$. Concluimos, assim, pelo teorema de submersão que existe um difeomorfismo ψ tal que $\pi_1 \circ F \circ \psi(x, y) = x$. Consequentemente $F \circ \psi(x, y) = (x, H(x, y))$

Observe que:

$$D(F \circ \psi)_p = \begin{bmatrix} Id & 0 \\ D_x H & D_y H \end{bmatrix}$$

Isto e o fato que $\text{posto } D(F \circ \psi) = \text{posto } DF = m$ nos permite concluir que $D_y H = 0$ ou seja $H(x, y)$ é independente de y . Defina $\hat{H}(x) = H(x, y)$. Assim $(x, \hat{H}(x)) = F \circ \psi(x, y) = F \circ \psi(x, 0)$. Logo $F \circ \psi(x, 0)$ é um gráfico o que nos permite concluir, pelo teorema da imersão (apos reduzir as vizinhanças se necessário) que existe um difeomorfismo φ tal que $(x, 0) = \varphi \circ F \circ \psi(x, 0) = \varphi \circ F \circ \psi(x, y)$ o que termina a demonstração. $\square$

Exercício 2.17. (*)

Sejam H e K dois subgrupos fechados de $\mathcal{O}(n)$. Aceite o fato que todo grupo fechado se torna variedade mergulhada. Seja $\phi : K \rightarrow H$ um homomor-

Continuação.

fismo de grupos que é de classe C^∞ . Prove que $d\phi$ tem posto constante.

2.3. Campos e fibrados vetoriais

Recordemos que um campo $\vec{F}$ suave em um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ era uma aplicação suave $\vec{F} : U \rightarrow U \times \mathbb{R}^m$ definida como $\vec{F}(x) = (x, F(x))$, onde $F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ era uma aplicação suave $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Ou seja uma aplicação do nosso **espaço de configurações** U para o nosso **espaço de fases** $U \times \mathbb{R}^m$ tal que $\pi \circ \vec{F}(x) = x$ onde $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ era a projeção canônica $\pi(x, v) = x$. Visto que nosso espaço de fases era um produto trivial era possível escrever o campo $\vec{F}$ em termos dos **campos canônicos** $\vec{e}_i(x) = (x, e_i)$ da seguinte forma $\vec{F} = \sum_i f_i \vec{e}_i$, (vide Definição 1.36 e Figura 2.5).

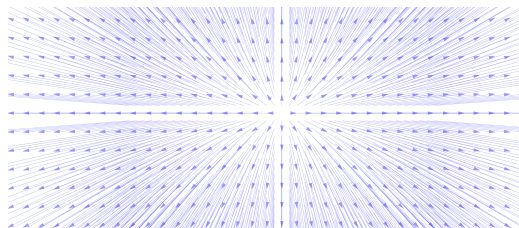


Figura 2.5: Campo $\vec{F} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{3}{2} x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$

Agora inspirados pela discussão da seção anterior, também podemos identificar os campos canônicos com as derivações canônicas e assim escrever $\vec{F} = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Desejamos agora generalizar a discussão acima para variedades e assim precisamos discutir qual objeto desempenhará o papel do espaço de fases.

Definição 2.18. Fibrado vetorial

Sejam E e M variedades, $\pi : E \rightarrow M$ uma submersão e $G = GL(n)$ os autormorfismos de $\mathbb{R}^n$. Suponha que existe uma cobertura $\{U_\alpha\}$ de M e difeomorfismos $\varphi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$ tais que:

- (a) $\pi \circ \varphi_\alpha(p, v) = p$ para todo $(p, v) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^n$

Continuação.

- (b) se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ então $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha(p, v) = (p, \theta_{\beta, \alpha}(p)v)$ onde $\theta_{\alpha, \beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ é suave
- (c) $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ é máximo em relação aos itens acima.

A tripla (E, M, π) (por vezes também denotada por $\mathbb{R}^n \rightarrow E \rightarrow M$) é chamada **fibrado vetorial de posto n** e projeção π . Para cada $p \in M$ o espaço $E_p := \pi^{-1}(p)$ é chamado de fibra sobre p e herda naturalmente uma estrutura de espaço vetorial.

Exemplo 2.19.

- (a) O **fibrado tangente** de uma variedade M^m é definido como $TM = \cup_{p \in M} T_p M$ onde a projeção $\pi : TM \rightarrow M$ é a projeção canônica $\pi(v_p) = p$.
- (b) O **fibrado cotangente** de uma variedade M^m é definido como $TM^* = \cup_{p \in M} T_p^* M$ onde $T_p^* M$ é o espaço dual de $T_p M$.
- (c) o **fibrado normal** de uma subvariedade $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$ é definido como $\nu(M) = \cup_{p \in M} \nu_p(M)$, onde $\nu_p M$ é espaço normal a $T_p M$.

Definição 2.20.

Dado um fibrado vetorial (E, M, π) uma **seção** é uma aplicação $\xi : M \rightarrow E$ tal que $\pi \circ \xi = id$. Em particular, um **campo vetorial** $\vec{F}$ é uma seção de TM . Denotaremos o conjunto (modulo) de campos vetoriais de M por $\mathfrak{X}(M)$.

De forma análoga, uma 1-forma diferencial de uma variedade M^m é uma seção de TM^* e se $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$ for variedade mergulhada então um **campo normal** a M é uma seção de $\nu(M)$.

Dado dois fibrados vetoriais (E, M, π) e $(\tilde{E}, \tilde{M}, \tilde{\pi})$ um **homomorfismo** $F : E \rightarrow \tilde{E}$ é uma aplicação suave que induz uma aplicação suave $f : M \rightarrow \tilde{M}$ que comuta com as projeções e que induz um homomorfismo linear entre E_p e $E_{f(p)}$ para todo p .

Usando campos invariantes à esquerda (a ser definido no próximo capítulo) não é difícil verificar que o fibrado tangente TG de um grupo de Lie é de fato isomorfo

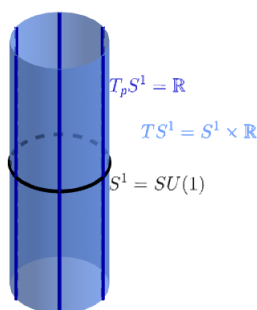


Figura 2.6: Fibrado tangente de $S^1 = SU(1)$

a $G \times T_e G$, vide Figura 2.6. Isto porém não costuma acontecer com uma variedade geralmente.

Exercício 2.21. (*)

Prove que o fibrado tangente da esfera $\mathbb{S}^2$ não é trivial, ou seja $T(\mathbb{S}^2)$ não é isomorfo a $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$

2.4. Fluxos de campos

Nosso objetivo aqui é recordar alguns resultados de equações diferenciais, dentre eles o conceito de fluxo e suavidade das condições iniciais.

Definição 2.22.

Dado um aberto U de uma variedade M e $\vec{F} \in \mathfrak{X}(U)$. Uma curva $\alpha : I \rightarrow U \subset M$ é chamada **curva integral** de F se $\alpha'(t) = \vec{F}(\alpha(t))$.

Teorema 2.23. [Lan83]

Dado $\vec{F} \in \mathfrak{X}(U)$ e $p \in U$ existe uma única curva integral $\alpha_p : I_p \rightarrow U$ de $\vec{F}$ onde I_p é o maior intervalo contendo 0 e $\alpha_p(0) = p$.

Definição 2.24. Fluxo

Seja $U_F = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times U, t \in I_x\}$. Definimos o **fluxo** de $\vec{F}$ como sendo a aplicação $\varphi^F : U_F \rightarrow U$ definida por $\varphi^F(t, x) = \alpha_x(t)$. Além disto, para t fixo, denotamos $\varphi_t^F(x) = \varphi^F(t, x)$.

Por vezes na teoria Geométrica de Controle, e quando não causar confusão, denotamos o fluxo como $e^{tF}(x)$, justamente para destacar propriedades relevantes do fluxo.

Teorema 2.25. [Lan83]

Seja $\vec{F} \in \mathfrak{X}(U)$ então U_F é um conjunto aberto de $\mathbb{R} \times U$ contendo $\{0\} \times U$ e φ^F é aplicação suave. Além disto:

- (a) φ_t^F é um difeomorfismo,
- (b) $\varphi_{t+s}^F = \varphi_t^F \circ \varphi_s^F$ quando eles estiverem bem definidos.

Chamaremos um campo $\vec{F} \in \mathfrak{X}(M)$ (ou seu fluxo) de **completo** se $U_F = \mathbb{R} \times M$. Exemplo de campos completos são campos definido em variedades compactas. Outro exemplo são os campos lineares em espaços Euclidianos.

Observação 2.26.

Pelo item (b), φ_{-t} existe e também é um difeomorfismo, sendo a inversa de φ_t . Quando o campo é completo, $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ é chamado **grupo a um parâmetro** de difeomorfismos por ter estrutura de grupo.

Exemplo 2.27. Fluxo de campo linear

Dado $A \in M^{m \times m}(\mathbb{R})$ a E.D.O

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= A\alpha(t) \\ \alpha(0) &= p,\end{aligned}$$

Continuação.

tem como solução $\alpha(t) = e^{tA}p$ onde $e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$. Assim sendo, o fluxo de um campo linear $F(x) = Ax$ é dado por $\varphi(t, x) = e^{tA}(x)$.

Vale também observar que a aplicação

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\rightarrow GL(n, \mathbb{R}) \\ t &\mapsto e^{tA}\end{aligned}$$

é um homomorfismo de grupos, ou seja,

$$e^{tA}e^{sA} = e^{(t+s)A},$$

que é a propriedade (b) do teorema anterior. Note, porém, que $e^A e^B = e^B e^A$ se e somente se $[A, B] = AB - BA = 0$.

Vamos agora considerar um campo linear muito especial, os assim chamados **campos de Killing** em $\mathbb{R}^3$. Tais campos são caracterizados como sendo campos cujos fluxos são isometrias.

Exemplo 2.28.

Observemos primeiro a seguinte propriedade algébrica. Dado $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$, defina

$$A_\xi = \begin{pmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

É fácil verificar que $A_\xi(v) = \xi \times v$, para todo $v \in \mathbb{R}^3$.

Vamos definir o nosso campo de Killing como $\vec{\xi}(p) = A_\xi p \in T_p \mathbb{R}^3$. Pelo Exemplo 2.27, o fluxo de $\vec{\xi}$ é dado por e^{tA_ξ} . Note que $e^{tA_\xi} \in \mathbb{SO}(3)$. De fato,

$$\begin{aligned}(e^{sA_\xi})(e^{sA_\xi})^t &= (e^{sA_\xi})(e^{s(A_\xi)^t}) \\ &= (e^{sA_\xi})(e^{-s(A_\xi)}) \\ &= (e^{sA_\xi - s(A_\xi)}) \\ &= e^0 = I.\end{aligned}$$

o que garante que $e^{tA_\xi} \in \mathbb{O}(3)$ e, visto que $e^{0A_\xi} = Id$, concluímos que:

$$e^{tA_\xi} \in \mathbb{SO}(3).$$

Continuação.

Desejamos agora verificar que:

Afirmção: o fluxo e^{tA_ξ} é uma rotação em torno do eixo ξ , com velocidade angular $\|\xi\|$.

Primeiro observe que como $A_\xi(\xi) = \xi \times \xi = 0$, então $e^{tA_\xi}\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (tA_\xi)^n \xi = \xi$, o que mostra que esta isometria fixa o eixo ξ .

Agora considere uma base ortonormal $\{q_1, q_2, q_3\}$ com mesma orientação da base canônica $\{e_i\}$ e tal que $q_3 = \frac{\xi}{\|\xi\|}$. Definamos o **fluxo de rotação em torno de ξ com velocidade angular $\|\xi\|$** (escrito na base $\{q_i\}$) como:

$$\varphi_t = \begin{bmatrix} \cos(\|\xi\|t) & -\sin(\|\xi\|t) & 0 \\ \sin(\|\xi\|t) & \cos(\|\xi\|t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que de fato $t \rightarrow \varphi_t$ é um fluxo (i.e., $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$) e induz um campo $\vec{Y}$, i.e., $\frac{d}{dt}\varphi_t = \vec{Y} \circ \varphi_t$. Utilizando o fato que $e^{tA_\xi}(\xi) = \xi$ é fácil verificar que $\vec{\xi}(p)$ e $\vec{Y}(p)$ tem mesma direção e sentido. Por fim note que se de um lado $\|\vec{Y}(p)\| = \|\xi\|\sqrt{p_1^2 + p_2^2}$ de outro temos:

$$\begin{aligned} \|\vec{\xi}(p)\| &= \|\xi \times p\| \\ &= \|\xi\|\|p\|\sin(\theta) \\ &= \|\xi\|\sqrt{p_1^2 + p_2^2} \end{aligned}$$

onde θ é o ângulo entre p e ξ . Concluimos então que $\vec{\xi}(p) = \vec{Y}(p), \forall p$ e assim por unicidade de E.D.O temos, $e^{tA_\xi} = \varphi_t$, como queríamos verificar, terminando assim a prova da Afirmção.

No próximo exercício veremos o operador **rotacional** $\text{Rot} : \mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathfrak{X}(U)$ para um aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ e daremos sua interpretação para campo linear.

Exercício 2.29.

Utilizaremos neste exercício a notação $\mathbf{i} = \vec{e}_1, \mathbf{j} = \vec{e}_2$ e $\mathbf{k} = \vec{e}_3$ (a qual é inspirada nos quatérnios). Seja $\vec{F} = f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k}$ campo suave em aberto

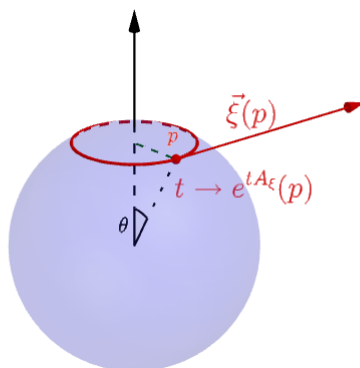


Figura 2.7: Ilustra Exemplo 2.28.

Continuação.

$U \subset \mathbb{R}^3$ definamos:

$$\begin{aligned} \text{Rot } \vec{F} &= \nabla \times F \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{i} \\ &\quad - \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \right) \mathbf{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

Dado campo linear $\vec{\xi}(v) := A_{\xi}(v) = \xi \times v$, verifique que:

$$\text{Rot } \vec{\xi} = 2\vec{\xi}$$

concluindo em particular que $\|\text{Rot } \vec{F}\|$ é duas vezes a velocidade angular da rotação $e^{tA_{\xi}}$

Observação 2.30.

Continuação.

Dado um campo $\vec{F} = f_1\vec{e}_1 + f_2\vec{e}_2$ em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ podemos definir um operador $\text{Rot } \mathfrak{X}(U) \rightarrow C^\infty(U)$ como $\text{Rot } \vec{F} = (\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2})$. Em particular se extendemos o campo $\vec{F}$ para o campo $\tilde{F}$ definindo $f_3 = 0$ concluímos: $\text{Rot } \tilde{F} = (\text{Rot } \vec{F})\vec{e}_3$.

A seguir vemos um resultado importante, que afirma que se o campo for diferente de zero em uma vizinhança U , reduzindo U se necessário, as curvas integrais são difeomorfismos a uma folheação canônica (com folhas de dimensão 1). Ou seja, podemos “desintortar”, *retificar* localmente as linhas integrais.

Exercício 2.31.

Seja $\vec{F}(x_1, x_2) = f_1(x_1, x_2)\vec{e}_1 + f_2(x_1, x_2)\vec{e}_2$, onde $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são suaves. Suponha que para $\epsilon_0 > 0$ temos que $\vec{F}(\epsilon_0, 0) = a\vec{e}_1$ onde $a \neq 0$. Seja ϕ_t o fluxo de $\vec{F}$. Verifique que existe uma vizinhança U_0 de $(0, 0)$ tal que a aplicação $\hat{\phi} : U_0 \rightarrow U_1$, definida por $\hat{\phi}(t, x_2) = \phi_t(\epsilon_0, x_2)$ é um difeomorfismo.

Não é difícil verificar que o exercício acima pode ser generalizado para campos não nulos em abertos de $\mathbb{R}^m$ (deixamos a cargo do leitor esta verificação). A aplicação $\hat{\phi}$ costuma ser chamada **retificação do fluxo**.

Vejamos agora um novo operador que (diferente do operador Rot) pode ser definido para toda dimensão.

Definição 2.32.

Considere um campo $\vec{F} = \sum_{i=1}^m f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ em uma vizinhança U em $\mathbb{R}^m$. Definimos o **divergente** do campo $\vec{F}$ como:

$$\begin{aligned} \text{Div } F &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^m \langle D_{\vec{e}_i} \vec{F}, \vec{e}_i \rangle \end{aligned}$$

O próximo exercício ilustra a fundamental interpretação do que é o divergente de um campo (e novamente pode ser generalizado para dimensões maiores).

Exercício 2.33.

Considere o campo linear $\vec{F}$ em $\mathbb{R}^2$, definido como

$$\vec{F}(x) = \lambda_1 x_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 x_2 \vec{e}_2,$$

i.e.,

$$F(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

a) Esboce o fluxo para os seguintes casos:

(i) $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$;

(ii) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$;

(iii) $\lambda_2 > 0 > \lambda_1$;

b) Seja $\hat{\phi}$ a retificação do fluxo, vide Problema 2.31. Definindo $A(t, s) = \det(D\hat{\phi}(t, s))$ como o elemento de área, verifique que

$$\text{Div } \vec{F}(\epsilon, 0) = \frac{d}{dt} [\ln A(t, 0)] \big|_{t=0}.$$

onde $\text{Div}(\vec{F}) = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ para $\vec{F} = \sum_i f_i e_i \in \mathfrak{X}(\Omega)$

Exercício 2.34.

Seja C uma matriz 3×3 real.

(a) Verifique que existem matrizes S simétrica e A anti-simétrica tal que $C = S + A$ e que tal decomposição é única.

(b) Sejam $\vec{C}$, $\vec{S}$ e $\vec{A}$ campos lineares associados a C , S e A . Verifique:

$$\text{Rot } \vec{C} = \text{Rot } \vec{A}$$

$$\text{div } \vec{C} = \text{div } \vec{S}.$$

2.5. Colchete de campos

Nesta seção vamos estudar o operador colchete de campos

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

o qual medirá a (não) comutatividade de campos, vide Lemma 2.45 e Exercício 2.47.

Definição 2.35. Colchete de campos

Dados uma variedade M e dois campos $\vec{X}, \vec{Y} \in \mathfrak{X}(M)$, definimos o campo $[\vec{X}, \vec{Y}] \in \mathfrak{X}(M)$ como:

$$[\vec{X}, \vec{Y}] \bullet f := \vec{X} \bullet (\vec{Y} \bullet f) - \vec{Y} \bullet (\vec{X} \bullet f)$$

para toda função suave f sobre M .

A seguir vamos verificar (no item (a)) que a definição geral dada acima implica a definição no espaço Euclidiano apresentada (rapidamente) no capítulo anterior.

Exercício 2.36.

Dado um aberto Ω em $\mathbb{R}^n$, considere os campos $\vec{F}, \vec{G} \in \mathfrak{X}(\Omega)$ definidos como $\vec{F} = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $\vec{G} = \sum_j g_j \frac{\partial}{\partial x_j}$.

- Prove que $[\vec{F}, \vec{G}] = \nabla_{\vec{F}} \vec{G} - \nabla_{\vec{G}} \vec{F}$, onde $\nabla_X \vec{F}_p := (p, DF(p)X)$.
- Se $\vec{F}$ e $\vec{G}$ são campos lineares (i.e., $F = Ax$ e $G = Bx$), então $[\vec{F}, \vec{G}] = \vec{H}$, onde $\vec{H}$ é o campo linear dado por

$$H(x) = -(AB - BA)x.$$

O espaço vetorial $\mathbb{V} = \mathfrak{X}(M)$ (sobre o corpo dos reais) dotado com o colchete de campos $[\cdot, \cdot]$ se torna o que chamamos de uma *algebra de Lie* (de dimensão infinita).

Definição 2.37.

Uma **álgebra de Lie** $\mathfrak{g}$ é um espaço vetorial com uma aplicação bilinear (chamado **colchete de Lie**) $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ atendendo, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, as seguintes propriedades:

- (a) anti-simétrica: $[X, Y] = -[Y, X]$;
- (b) idade de Jacobi: $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$.

Exercício 2.38.

Considere o espaço vetorial $\mathfrak{so}(3) = \{A \in \mathfrak{gl}(3); A + A^t = 0\}$ dotado com o comutador de matrizes $[\cdot, \cdot]$ como sendo o colchete de Lie.

- (a) Verifique que $\mathfrak{so}(3)$ é uma álgebra de Lie;
- (b) verifique que $\mathbb{R}^3$ com o produto vetorial $(\cdot) \times (\cdot)$ é uma álgebra de Lie;
- (c) Verifique que a aplicação linear $\Psi : (\mathbb{R}^3, \times) \rightarrow (\mathfrak{so}(3), [\cdot, \cdot])$ definida como $\Psi(\xi) = A_\xi$ (onde A_ξ está definido no Exemplo 2.28) é um isomorfismo de álgebras de Lie, i.e., $\Psi(\xi \times \eta) = [\Psi\xi, \Psi\eta]$
- (d) defina a aplicação linear injetora $\Psi : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ como $\Psi(A) = \vec{A}$. Verifique que Ψ é um antimorfismo, i.e., $\Psi[A, B] = -[\vec{A}, \vec{B}]$.

Veremos a seguir que um difeomorfismo $\varphi : M \rightarrow N$ entre variedades induzirá um isomorfismo (o assim chamado *push-forward*) entre as álgebras de Lie $(\mathfrak{X}(M), [\cdot, \cdot])$ e $(\mathfrak{X}(N), [\cdot, \cdot])$

Definição 2.39.

Dado um difeomorfismo $\varphi : M \rightarrow N$ entre duas variedades de mesma dimensão, definimos a aplicação **push-forward** $\varphi_* : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(N)$ entre módulos de campos como: $\vec{Y} = \varphi_* \vec{X}$ onde $\vec{Y}(q) = d\varphi_{\varphi^{-1}(q)} \vec{X}(\varphi^{-1}(q))$. Quando tivermos também que $M = N$, denotamos $Ad(\varphi) := (\varphi^{-1})_*$ como aplicação **pull-back**.

Por vezes, embora $\varphi : M \rightarrow N$ não seja um difeomorfismo, é ainda possível relacionar certos campos em N com certos campos em M . De fato um campo $\vec{Y} \in \mathfrak{X}(N)$ é chamado **φ -relacionado** a um campo $\vec{X} \in \mathfrak{X}(M)$ se

$$\vec{Y} \circ \varphi(\cdot) = d\varphi \vec{X}(\cdot).$$

Por exemplo, considere a submersão $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $\varphi(x) = (x_1, x_2)$. Para os campos

$$\vec{X} = f_1(x_1, x_2)\vec{e}_1 + f_2(x_1, x_2)\vec{e}_2 + f_3(x)\vec{e}_3,$$

$$\vec{Y} = f_1(x_1, x_2)\vec{e}_1 + f_2(x_1, x_2)\vec{e}_2$$

temos que $\vec{Y} \circ \varphi(\cdot) = d\varphi \vec{X}(\cdot)$, i.e., $\vec{Y}$ é φ relacionado a $\vec{X}$.

Observe que ser φ relacionado equivale a

$$(\vec{Y} \bullet h) \circ \varphi = \vec{X} \bullet (h \circ \varphi), \quad \forall h \in C^\infty(N). \quad (2.5.1)$$

Lema 2.40.

Considere uma aplicação suave $\varphi : M \rightarrow N$ e campos $\vec{X}_i \in \mathfrak{X}(M)$ e $\vec{Y}_i \in \mathfrak{X}(N)$ (para $i = 1, 2$) tal que $\vec{Y}_i$ é φ -relacionado a $\vec{X}_i$, ou seja $\vec{Y}_i \circ \varphi(\cdot) = d\varphi \vec{X}_i(\cdot)$. Então $[\vec{Y}_1, \vec{Y}_2]$ é φ relacionado a $[\vec{X}_1, \vec{X}_2]$ ou seja

$$[\vec{Y}_1, \vec{Y}_2] \circ \varphi = d\varphi([\vec{X}_1, \vec{X}_2]).$$

Demonstração. Baseado na Eq. (2.5.1) precisamos provar que

$$([\vec{Y}_1, \vec{Y}_2] \bullet h) \circ \varphi = [\vec{X}_1, \vec{X}_2] \bullet (h \circ \varphi), \quad \forall h \in C^\infty(N).$$

Temos

$$\begin{aligned} ([\vec{Y}_1, \vec{Y}_2] \bullet h) \circ \varphi &= (\vec{Y}_1 \bullet (\vec{Y}_2 \bullet h)) \circ \varphi - (\vec{Y}_2 \bullet (\vec{Y}_1 \bullet h)) \circ \varphi \\ &= \vec{X}_1 \bullet ((\vec{Y}_2 \bullet h) \circ \varphi) - \vec{X}_2 \bullet ((\vec{Y}_1 \bullet h) \circ \varphi) \\ &= \vec{X}_1 \bullet (\vec{X}_2 \bullet (h \circ \varphi)) - \vec{X}_2 \bullet (\vec{X}_1 \bullet (h \circ \varphi)) \\ &= [\vec{X}_1, \vec{X}_2] \bullet (h \circ \varphi) \end{aligned}$$

□

Observação 2.41.

Sejam G subgrupo fechado de $GL(n)$ e $L_g : G \rightarrow G$ aplicação definida como $L_g(x) = gx$. Para cada vetor $\xi \in T_e G$ podemos definir um campo $\vec{\xi}$ como $\vec{\xi}(g) = dL_g \xi \in T_g G$ e é possível demonstrar que $\vec{\xi} \in \mathfrak{X}(G)$ (ie., é campo suave) e não é difícil verificar que $\vec{\xi}$ é L_g relacionado com ele mesmo, para todo $g \in G$. O modulo de campos invariantes a esquerda (o qual é um espaço vetorial de dimensão finita) dotado do comutador de campos é chamado de **a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ associada ao grupo de Lie G** . Por fim não é difícil demonstrar que $T_e G$ com a estrutura de comutador

Continuação.

de matriz é álgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{g}$, vide [AB15].

Exercício 2.42.

Sejam M , N e K variedades, e $\varphi : M \rightarrow N$ e $\phi : N \rightarrow K$ difeomorfismos. Verifique que $(\varphi \circ \phi)_* = \varphi_* \circ \phi_*$.

Exercício 2.43.

Sejam $\vec{X}$ e $\vec{Y}$ campos lineares em $\mathbb{R}^m$.

- (a) Verifique que $\text{Ad}(e^{tX})\vec{Y} = e^{-tX}\vec{Y}e^{tx}$
- (b) Conclua que $[\vec{X}, \vec{Y}] = \frac{d}{dt}(\text{Ad}(e^{tX})\vec{Y})\Big|_{t=0}$.

O item (b) do exercício acima pode ser generalizado para campos suaves em geral.

Proposição 2.44.

Sejam $\vec{X}$ e $\vec{Y}$ campos suaves em variedade M . Então:

$$[\vec{X}, \vec{Y}] = \frac{d}{dt}(\text{Ad}(e^{tX})\vec{Y})\Big|_{t=0}. \quad (2.5.2)$$

Demonstração. Como os dois termos da expressão acima são termos contínuos bastará prova-la para ponto p (e assim vizinhança de p) onde $\vec{X}(p) \neq 0$. A estratégia da prova é utilizar a retificação do fluxo de $\vec{X}$ para reduzir ao caso em que um dos campos é $\frac{\partial}{\partial x_1}$, e neste caso a conta será mais simples. Considere então φ a retificação do fluxo e^{tX} e $\psi = \varphi^{-1}$. É possível verificar que

$$\varphi_* \frac{\partial}{\partial x_1} = \vec{X}. \quad (2.5.3)$$

Seja $\vec{W} = \sum_i w_i \frac{\partial}{\partial x_i} := \psi_* \vec{Y}$. Segue da definição em coordenadas que:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \vec{W} \right] = \sum_i \frac{\partial w_i}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{d}{dt}(\text{Ad}(e^{t \frac{\partial}{\partial x_1}}) \vec{W})\Big|_{t=0}. \quad (2.5.4)$$

Precisamos agora observar que o Exercício 2.42 implica:

$$\text{Ad}(\psi e^{tX} \psi^{-1}) = \psi_* \text{Ad}(e^{tX}) \psi_*^{-1}. \quad (2.5.5)$$

Também notemos que (pela definição de ψ_*), se $\lim_{t \rightarrow 0} \vec{Z}_t(x) = \vec{Z}(x) \forall x$ então:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \psi_* \vec{Z}_t(y) = \psi_* \vec{Z}(y). \quad (2.5.6)$$

Finalmente podemos concluir que:

$$\begin{aligned} \psi_* [\vec{X}, \vec{Y}] &= [\psi_* \vec{X}, \psi_* \vec{Y}] \\ &\stackrel{(2.5.3)}{=} \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \vec{W} \right] \\ &\stackrel{(2.5.4)}{=} \frac{d}{dt} \left(\text{Ad}(e^{\psi_* t \vec{X}}) \psi_* \vec{Y} \right) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\text{Ad}(\psi e^{tX} \psi^{-1}) \psi_* \vec{Y} \right) \Big|_{t=0} \\ &\stackrel{(2.5.5)}{=} \frac{d}{dt} \left(\psi_* \text{Ad}(e^{tX}) \psi_*^{-1} \psi_* \vec{Y} \right) \Big|_{t=0} \\ &\stackrel{(2.5.6)}{=} \psi_* \frac{d}{dt} \left(\text{Ad}(e^{tX}) \vec{Y} \right) \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

Assim $\psi_* [\vec{X}, \vec{Y}] = \psi_* \frac{d}{dt} \left(\text{Ad}(e^{tX}) \vec{Y} \right) \Big|_{t=0}$ e consequentemente provamos Eq. (2.5.2). $\square$

Interpretações de colchete de campos são apresentadas nos resultados a seguir.

Lema 2.45.

Sejam $\vec{X}$ e $\vec{Y}$ campos de uma variedade, e^{tX} e e^{sY} seus respectivos fluxos. Então as afirmações são equivalentes:

(a) $e^{tX} \circ e^{sY} = e^{sY} \circ e^{tX}.$

(b) $[\vec{X}, \vec{Y}] = 0$

Demonstração. A demonstração a seguir está escrita no formato geral, mas para maior comodidade, o(a) leitor(a) pode considerar o caso linear para criar maior intuição.

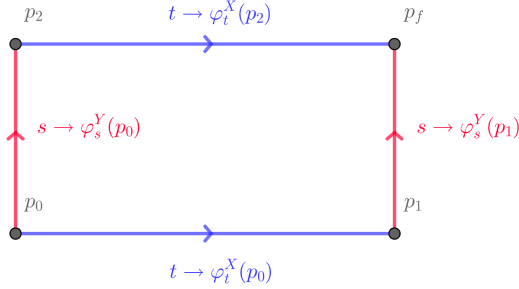


Figura 2.8: Ilustra Lema 2.45.

Suponha (a), i.e., $e^{sY} = e^{-tX} \circ e^{sY} \circ e^{tX}$. Pela Proposição 2.44

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} e^{sY} \big|_{s=t=0} \\
 &= \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} e^{-tX} \circ e^{sY} \circ e^{tX} \big|_{s=t=0} \\
 &= \frac{d}{dt} \text{Ad}(e^{tX}) \vec{Y} \big|_{t=0} \\
 &= [\vec{X}, \vec{Y}].
 \end{aligned}$$

Suponha (b), i.e., $[\vec{X}, \vec{Y}] = 0$.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \text{Ad}(e^{tX}) \vec{Y} \big|_{t=t_0} &= \text{Ad}(e^{t_0X}) \frac{d}{dt} \text{Ad}(e^{tX}) \vec{Y} \big|_{t=0} \\
 &= \text{Ad}(e^{t_0X}) [\vec{X}, \vec{Y}] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Assim $\text{Ad}(e^{tX}) \vec{Y} = \vec{Y}$ e consequentemente seus fluxos são iguais, i.e., $e^{sY} = e^{-tX} \circ e^{sY} \circ e^{tX}$. $\square$

Cabe destacarmos a seguir a relação entre $\text{ad}(\vec{X})(\cdot) := [\vec{X}, \cdot]$ e $\text{Ad}(e^{tX})$ utilizada na demonstração da proposição acima.

Observação 2.46.

Seja $\mathbb{V} = \mathfrak{X}(M)$ o espaço vetorial dos campos em M . Note que $t \rightarrow \text{Ad}(e^{tX})$ é

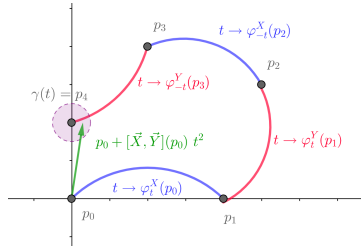


Figura 2.9: ilustra o Exercício 2.47

Continuação.

um fluxo em $\mathbb{V}$, ou seja $\text{Ad}(e^{sX})\text{Ad}(e^{tX}) = \text{Ad}(e^{(s+t)X})$. Derivando temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{Ad}(e^{tX})\vec{Y}|_{t=t_0} &= \text{Ad}(e^{t_0X})[\vec{X}, \vec{Y}] \\ &= [\text{Ad}(e^{t_0X})\vec{X}, \text{Ad}(e^{t_0X})\vec{Y}] \\ &= [\vec{X}, \text{Ad}(e^{t_0X})\vec{Y}] \\ &= \text{ad}(\vec{X}) \circ \text{Ad}(e^{t_0X})\vec{Y} \end{aligned}$$

i.e., $\text{ad}(\vec{X})(\cdot)$ é o campo vetorial em $\mathbb{V}$ associado ao fluxo $t \rightarrow \text{Ad}(e^{tX})$ ou seja:

$$e^{t\text{ad}(\vec{X})} = \text{Ad}(e^{tX}).$$

Exercício 2.47.

Sejam $\vec{X}$ e $\vec{Y}$ campos lineares i.e., $X(p) = Ap$, $Y(p) = Bp$, $\forall p \in \mathbb{R}^m$ e $e^{tA} = \varphi_t^X$ e $e^{tB} = \varphi_t^Y$ seus fluxos. Dado $p_0 \in \mathbb{R}^m$ defina a curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ como $\gamma(t) = \varphi_{-t}^Y \circ \varphi_{-t}^X \circ \varphi_t^Y \circ \varphi_t^X(p_0)$. Verifique (via expansão de Taylor) que:

$$\gamma(t) = p_0 + [\vec{X}, \vec{Y}](p_0)t^2 + R(t).$$

onde $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(t)}{t^2} = 0$

2.6. Teorema de Frobenius

Dado um campo $\vec{X} \in \mathfrak{X}(M)$ que nunca se anula, podemos definir o *campo de retas* associado a $\vec{X}$ como sendo a aplicação que a cada $p \in M$ associa a reta $\mathcal{H}(p) = \{\lambda \vec{X}(p); \lambda \in \mathbb{R}\} \subset T_p M$. Sabemos por E.D.O que existe uma partição de M por curvas $\{C_x\}_{x \in M}$ (imagens das curvas integrais) tal que $T_x C = \mathcal{H}(x)$, para todo $x \in M$. Nesta seção vamos generalizar estes conceitos, em particular vamos discutir sob que condições dado um *campo de planos* existe uma partição por superfícies que sejam sempre tangentes ao campo de plano dado, i.e., sob que condições a distribuição de planos será *integrável*, vide Figura 2.10.

2.6.1. Definições e resultado principal

Definição 2.48.

Uma m -distribuição $\mathcal{H}$ em M^{m+k} é uma aplicação que associa a cada $p \in M$ um m -subespaço $\mathcal{H}(p) \subset T_p M$ (i.e., é uma seção da m Grassmaniana). Ela é suave se para todo ponto $p_0 \in M$ existe uma vizinhança U de p_0 e campos suaves $\vec{X}_i \in \mathfrak{X}(U)$ ($i = 1 \cdots m$) tal que para todo $x \in U$ temos:

- (a) $\vec{X}_i(x) \in \mathcal{H}(x)$;
- (b) $\{\vec{X}_i(x)\}$ é base de $\mathcal{H}(x)$.

Vamos denotar $\mathfrak{X}(\mathcal{H})$ o conjunto dos campos suaves que são sempre tangentes a uma distribuição $\mathcal{H}$.

Definição 2.49.

Uma partição $\mathcal{F} = \{L_x\}_{x \in M}$ de M por subvariedades imersas de mesma dimensão m é chamada **folheação** se localmente é descrita por uma submersão, ou seja para todo $p \in M$ existe uma vizinhança U e uma submersão $\pi : U \rightarrow B$ tal que $\mathcal{F} \cap U = \{\pi^{-1}(c)\}$, ou, dita de forma equivalente, é localmente difeomorfa a uma folheação canônica.

Denotaremos por $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$ os campos em $\mathfrak{X}(M)$ que são sempre tangentes as folhas de $\mathcal{F}$.

Exercício 2.50.

Seja $\mathcal{F} = \{L_x\}_{x \in M}$ uma partição de M por subvariedades imersas de dimensão m . Verifique que as afirmações abaixo são equivalentes:

- (a) $\mathcal{F}$ é uma folheação;
- (b) para cada vetor $v \in T_p L_p$ existe um campo $\vec{X}$ tal que $\vec{X}(p) = v$ e $\vec{X} \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$.

Observação 2.51. Folheação singular

O exercício acima indica como generalizar a definição de folheação para uma folheação singular. Uma folheação singular $\mathcal{F} = \{L_x\}_{x \in M}$ é uma partição do espaço por subvariedades imersas (possivelmente de dimensões diferentes) tal que para todo V_p existe um campo $\vec{X}$ definido em uma vizinhança U de p tal que $\vec{X}(x) \in T_x L_x$ para todo $x \in U$ e $\vec{X}(p) = V_p$.

Definição 2.52.

Uma distribuição $\mathcal{H}$ de M é dita **involutiva** se a propriedade a seguir vale:

$$\text{Se } \vec{X}, \vec{Y} \in \mathfrak{X}(\mathcal{H}) \text{ então } [\vec{X}, \vec{Y}] \in \mathfrak{X}(\mathcal{H}).$$

O exercício a seguir fornece um exemplo de uma distribuição involutiva.

Exercício 2.53.

Sejam $\mathcal{F} = \{L_x\}_{x \in M}$ uma m -folheação em M e a m -distribuição $\mathcal{H} = T\mathcal{F}$ associada, i.e., $\mathcal{H}(x) = T_x L_x$ para todo $x \in M$. Verifique que $\mathcal{H}$ é involutiva.

Vamos ver a seguir uma recíproca do exercício anterior.

Teorema 2.54. Frobenius

Seja $\mathcal{H}$ uma m -distribuição em M^{m+k} . Suponha que $\mathcal{H}$ seja involutiva. Então existe uma única folheação $\mathcal{F} = \{L_x\}_{x \in M}$ tal que $T_x L_x = \mathcal{H}_x \forall x \in M$, ou seja, $\mathcal{H}$ é uma **distribuição integrável**.

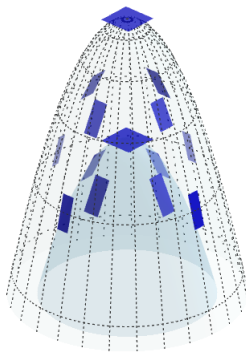


Figura 2.10: Exemplo de uma distribuição integrável

2.6.2. Prova do Teorema 2.54

Lema 2.55.

Sejam $\mathcal{F} = \{L_x\}_{x \in M}$ uma folheação de codimensão k em M^{m+k} e N^m uma subvariedade imersa em M tal que $T_p N = T_p L_p \forall p \in N$. Então N é aberta em uma folha L_{p_0} .

Demonstração. Dado $p_0 \in N$, considere uma curva suave $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow N$ com $\alpha(0) = p_0$ que fique contida em uma vizinhança U onde $\mathcal{F}_U$ (folheação $\mathcal{F}$ restrita à vizinhança U) seja difeomorfa à folheação canônica $\{\pi^{-1}(c)\}_{c \in \mathbb{R}^k}$ onde $\pi : \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ é a projeção canônica. Assim, compondo com uma carta podemos supor que $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. Por hipótese $\alpha'_2(t) = 0$. Logo $\alpha_2(t) = \alpha_2(0)$ ou seja $\alpha \subset \pi^{-1}(\alpha_2(0))$. A arbitrariedade da escolha de α implica que o aberto de N fica contido em $\pi^{-1}(\alpha_2(0))$. O argumento de conexidade então conclui a prova. $\square$

Lema 2.55 garante a unicidade da folheação e a que a demonstração do Teorema 2.54 termina com o próximo lema.

Lema 2.56.

Dado $p \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$, existe uma vizinhança U de p e uma folheação $\mathcal{F} = \{L_x\}_{x \in U}$ em U tal que $T_x L_x = \mathcal{H}_x \forall x \in U$.

Demonstração. Por motivos didáticos vamos provar o Lema 2.56 no caso em que $k = 1$ e $m = 2$. Caso geral é análogo e é um bom exercício para o(a)s aluno(a)s.

Passo 1 Vamos primeiro demonstrar o Lema 2.56 no caso particular onde existe uma base $\vec{X}_1, \vec{X}_2 \in \mathfrak{X}(\mathcal{H})$ tal que $[\vec{X}_1, \vec{X}_2] = 0$.

Após um movimento rígido podemos supor que $\mathcal{H}(p) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Seja S um aberto no eixo x_3 . Então podemos definir a aplicação $\psi : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S \rightarrow \mathbb{R}^3$ por $\psi(t_1, t_2, s) = \varphi_{t_1}^1 \circ \varphi_{t_2}^2 \circ (0, 0, s)$, onde $\varphi_{t_i}^i$, é o fluxo do campo $\vec{X}_i$. Como $\varphi_0^i = Id$ temos que

- $\frac{\partial}{\partial t_1} \psi(0, 0, 0) = \vec{X}_1(0)$
- $\frac{\partial}{\partial t_2} \psi(0, 0, 0) = \vec{X}_2(0)$
- $\frac{\partial}{\partial s} \psi(0, 0, 0) = (0, 0, 1)$

Assim $D\psi(0, 0, 0)$ é invertível e pelo teorema da função inversa, ψ é um difeomorfismo (reduzindo U). Definimos $\mathcal{F} = \{L\}$ como a folheação dada por $L_{\psi(t_1, t_2, s)} = \psi(U \cap \mathbb{R}^2 \times \{s\})$.³

Vamos agora verificar que $\mathcal{H}_x = T_x L_x$

$$\begin{aligned} D\psi_{(t_1, t_2, s)}(1, 0, 0) &= \frac{\partial}{\partial t_1} \psi(t_1, t_2, s) \\ &= \frac{\partial}{\partial t_1} \varphi_{t_1}^1 \circ \varphi_{t_2}^2 \circ (0, 0, s) \\ &= \vec{X}_1 \circ \varphi_{t_1}^1 (\varphi_{t_2}^2 \circ (0, 0, s)) \\ &= \vec{X}_1(\psi(t_1, t_2, s)) \end{aligned}$$

Visto que $[\vec{X}_1, \vec{X}_2] = 0$, temos pelo Lemma 2.45 que $\psi(t_1, t_2, s) = \varphi_{t_1}^1 \circ \varphi_{t_2}^2(0, 0, s) = \varphi_{t_2}^2 \circ \varphi_{t_1}^1(0, 0, s)$ Assim temos:

$$\begin{aligned} D\psi_{(t_1, t_2, s)}(0, 1, 0) &= \frac{\partial}{\partial t_2} \psi(t_1, t_2, s) \\ &= \frac{\partial}{\partial t_2} \varphi_{t_2}^2 \circ \varphi_{t_1}^1 \circ (0, 0, s) \\ &= \vec{X}_2 \circ \varphi_{t_2}^2 (\varphi_{t_1}^1 \circ (0, 0, s)) \\ &= \vec{X}_2(\psi(t_1, t_2, s)) \end{aligned}$$

³Usando a linguagem da Seção 2.7 é possível observar que $\mathcal{F}$ fica contida nas órbitas dada pelos campos, isto é fenômeno geral de controle geométrico.

Uma vez provado que:

$$D\psi_{(t_1, t_2, s)}(1, 0, 0) = \vec{X}_1(\psi(t_1, t_2, s)) \in \mathcal{H}_{\psi(t_1, t_2, s)}$$

$$D\psi_{(t_1, t_2, s)}(0, 1, 0) = \vec{X}_2(\psi(t_1, t_2, s)) \in \mathcal{H}_{\psi(t_1, t_2, s)}$$

concluimos

$$T_{\psi(t_1, t_2, s)}L = D\psi_{(t_1, t_2, s)}(\mathbb{R}^2 \times \{0\}) = \mathcal{H}_{\psi(t_1, t_2, s)}$$

terminando a prova do lema no **Passo 1**.

Passo 2 Vamos agora provar Lema 2.56 no caso geral, i.e., onde existe uma base $\vec{Y}_1, \vec{Y}_2 \in \mathfrak{X}(\mathcal{H})$ tal que $[\vec{Y}_1, \vec{Y}_2] \in \mathfrak{X}(\mathcal{H})$.

Continuaremos supondo que $\mathcal{H}(p) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ e S um aberto no eixo x_3 .

Vamos definir $[Y]$ como a matriz 3×2 com colunas Y_1, Y_2 . Visto que $\mathcal{H}(p) =$

$$\mathbb{R}^2 \times \{0\} \text{ temos que } [Y](p) = \begin{bmatrix} y_{11}(p) & y_{12}(p) \\ y_{21}(p) & y_{22}(p) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ Como } Y_1, Y_2 \text{ são lineamente}$$

independentes, temos por continuidade dos campos que a matriz 2×2 definidas $[y_{ij}]_{i=1,2, j=1,2}$ é invertível. Definimos a matriz $[A]_{2 \times 2}$ como a matriz inversa de $[y_{ij}]_{i=1,2, j=1,2}$.

Vamos agora definir a matriz $[X]_{2 \times 2}$ como $[X] = [Y][A]$, ou seja,

$$[X] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \\ y_{31} & y_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Visto que $[X]\mathbb{R}^2 = [Y][A]\mathbb{R}^2 = [Y]\mathbb{R}^2$ concluimos que os campos $\vec{X}_1$ e $\vec{X}_2$ (definidos como colunas da matriz $[X]$) continuam sendo base de $\mathcal{H}$.

Note também que $[\vec{X}_1, \vec{X}_2] = (0, 0, f)$. Como S é (por continuidade) transversal a $\mathcal{H}$ e $[\vec{X}_1, \vec{X}_2] \in \mathfrak{X}(\mathcal{H})$, concluimos que $[\vec{X}_1, \vec{X}_2] = 0$.

Recaímos então no Passo 1 e concluimos a existência de uma folheação $\mathcal{F}$ tal que $T_x L = \mathcal{H}_x \forall x \in U$ terminando a prova do Lema 2.56 e assim (pelo Lema 2.55) terminamos a demonstração do Teorema 2.54. $\square$

A seguir um resultado útil em variedades, que pode ser visto como uma consequência do teorema de Frobenius.

Corolário 2.57.

Sejam M^m e N^{k+l} (onde $l > 0$) variedades mergulhadas em $\mathbb{R}^{m+k}$. Suponha que existe $p \in M \cap N$ e que $T_p M + T_p N = T_p \mathbb{R}^{m+k}$. Demonstre que existe uma vizinhança B de p tal que $L^l = B^{m+k} \cap M^m \cap N^{k+l}$ é variedade mergulhada.

Demonstração. Vamos aqui apresentar as ideias principais e deixamos para o(a) leitor(a) completar os detalhes, o que será um bom exercício.

Passo 1: Observe que, compondo com um difeomorfismo, podemos supor que, próximo a $p = 0$, a variedade M é fibra de uma submersão $\pi : \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow B \subset \mathbb{R}^k$ e N é o subespaço vetorial $\mathbb{R}^{k+l}$ e assim folha da folheação canônica $\{N+p\}_{p \in \mathbb{R}^{m+k}}$.

Passo 2: Definamos Π como a distribuição involutiva dos espaços tangentes as fibras de π e E a distribuição involutiva tangente a folheação canônica $\{N+p\}_p$. Verifique que por continuidade: $\Pi + E = T\mathbb{R}^{m+k}$.

Passo 3: Defindo $D = \Pi \cap E$, verifique que, próximo a $p = 0$, a distribuição D é regular com $\dim D = l$ e involutiva.

Passo 4: Seja $\mathcal{F} = \{L\}$ associada a D i.e., $T_x L = D_x$, verifique que L_p fica sempre contida em N e que $L_p = M \cap N$ próximo a $p = 0$.

□

2.7. (*) Controle geométrico e o teorema de Stefan-Sussmann

Nesta seção opcional, iremos introduzir alguns conceitos e resultados da teoria de Controle Geométrico que de certa forma, generalizam conceitos e resultados discutidos anteriormente. Esta seção se baseia em [AS04].

Dado uma variedade M chamaremos uma coleção $\{\vec{X}_u\}_{u \in U}$ de **sistema de controle geométrico** quando seus domínios cobrem M . Aqui iremos supor que os campos são completos, o que facilitará bastante a apresentação. Usualmente U pode ter propriedades adicionais, e.g., ser uma outra variedade, um certo conjunto finito, um simplexo em $\mathbb{R}^m$ etc).

Exemplo 2.58.

Considere um trem de massa 1 unidade em uma linha reta. Suponha aceleração $|u| \leq 1$. Então os possíveis movimentos devem atender $x_1''(t) = u^4$. Considerando $M = \mathbb{R}^2$ como o espaço posição e velocidade, nossas E.D.O's

Continuação.

de grau 2 podem ser transformadas nas seguintes E.D.O's de grau 1.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ u \end{bmatrix}$$

Defina nossa família de campos como $X_u(x) = (x_2, u)$. Tal família descreve todos os movimentos de nosso trem. Uma função $t \rightarrow u(t) \in U = [-1, 1]$ a qual mede determinada escolha em nosso sistema será chamada de **função controle** (e frequentemente ela é localmente constante, semi-continua). Consideremos por exemplo a seguinte questão. O trem deve embarcar as pessoas na estação $x_1 = -a$ (com velocidade zero) e desembarcar as pessoas na estação $x_1 = 0$ (com velocidade zero).

Uma das possibilidades de resolver tal questão seria tentar primeiro acelerar $u = 1$ entre $[0, t_1]$ e depois desacelerar com $u = -1$ entre $[t_1, t_f]$. Em outras palavras consideraríamos a E.D.O descrita pelo campo $X_1 = (x_2, 1)$ e no momento correto ($t = t_1$) passariamos a considerar a E.D.O descrita pelo campo $X_{-1} = (x_2, -1)$ e neste caso a função controle $u : [0, t_f] \rightarrow [-1, 1]$ seria

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \leq t_1 \\ -1 & \text{se } t_1 < t \leq t_f \end{cases}$$

Resolvendo as E.D.O's e considerando certas interseções dos fluxos $t \rightarrow \varphi_t^{X_1}$ e $s \rightarrow \varphi_s^{X_{-1}}$ notamos que nosso problema de fato tem solução e que $t_1 = \sqrt{a}$ e $t_f = 2\sqrt{a}$. A solução de nosso problema pode ser então pensada como uma curva contínua (suave por partes) $t \rightarrow q_u(t) \in M$ que atende q.t.p (em quase todo ponto) a equação

$$\frac{d}{dt} q_u(t) = \vec{X}_{u(t)}(q_u(t))$$

e que é definida via *composição de fluxos*:

$$q_u(t) = \begin{cases} \varphi_t^{X_1}(-a, 0) & \text{se } 0 \leq t \leq \sqrt{a} \\ \varphi_t^{X_{-1}}(q_1) & \text{se } \sqrt{a} < t \leq 2\sqrt{a} \end{cases}$$

$$\text{onde } q_1 = (-\frac{a}{2}, \sqrt{a}) = \varphi_{\sqrt{a}}^{X_1}(-a, 0)$$

A solução acima para a questão embarcar passageiros em $x_1 = -a$ e desembarcar $x_1 = 0$ de fato *otimiza* o tempo (isto é demonstrado e.g, na teoria de Controle

⁴Comentaremos posteriormente que um modelo realista para um trem é $x_1''(t) = u - r(x_1'(t))$, onde r é uma resistência que aumenta com a velocidade $v = x_1'(t)$.

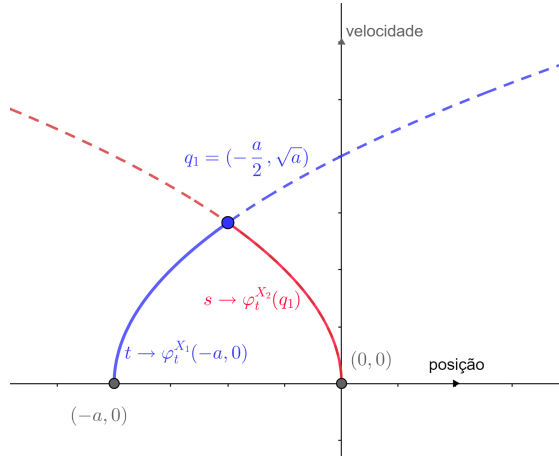


Figura 2.11: ilustra uma possível maneira de sair da estação $-a$ (com velocidade zero) e chegando na estação 0 (com velocidade zero)

Geométrico utilizando Teoremas de Filippov e o Princípio do Máximo de Pontryagin).

O Exemplo 2.58 sugere a relevância de considerar os espaços de todas possíveis composições de fluxos.

Definição 2.59.

Dado um sistema $\mathcal{C} = \{\vec{X}_u\}_{u \in U}$ a **órbita** passando por um ponto q_0 é definida como

$$\mathcal{O}(q_0) = \{\varphi_{t_n}^{X_n} \circ \dots \circ \varphi_{t_1}^{X_1}(q_0) \mid \forall \vec{X}_i \in \mathcal{C}, \forall t_i \in \mathbb{R}\}$$

Exemplo 2.60.

Consideremos o sistema dos campos $\{\vec{\xi}\}$ induzidos por uma ação de grupos de Lie $\mu : G \times M \rightarrow M$. Em outras palavras defina $\vec{\xi}(p) = \frac{d}{dt} \mu(\exp(t\xi), p)|_{t=0}$ para ξ contido na álgebra de Lie $\mathfrak{g} = T_e G$. Neste caso as órbitas são

$$\mathcal{O}(q_0) = G(q_0) = \{\mu(g, q_0) \mid \forall g \in G\}.$$

Continuação.

Por exemplo, considere $G = \text{SO}(3)$, $M = \mathbb{R}^3$ e ação multiplicação de matrizes $\mu(g, v) = gv$. Neste exemplo, se $\|v\| \neq 0$ temos que $G(v) = \mathbb{S}_{\|v\|}^2$ (ou seja esfera de centro 0 e raio $\|v\|$) e se $v = 0$ então a órbita é o ponto $0 = G(0)$. Neste exemplo vemos que órbitas são subvariedades e tais subvariedades podem ter dimensões diferentes. Veremos em breve que isto é um resultado mais geral.

Definição 2.61.

Dado um sistema $\mathcal{C} = \{\vec{X}_u\}_{u \in U}$ o **conjunto alcançável** passando por um ponto q_0 é definida como

$$\mathcal{A}(q_0) = \{\varphi_{t_n}^{X_n} \circ \cdots \circ \varphi_{t_1}^{X_1}(q_0) \mid \forall \vec{X}_i \in \mathcal{C}, \forall t_i \geq 0\}$$

Exemplo 2.62.

Sejam $M = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{C} = \{X_1 = (1, 1), X_{-1} = (-1, 1)\}$. Neste caso o conjunto alcançável passado por 0 é um cone, i.e. $\mathcal{A}(0) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; |x_1| \leq x_2\}$. Observe que $\mathcal{O}(0) = \mathbb{R}^2 \neq \mathcal{A}(0)$.

Observação 2.63.

Informalmente falando, o conjunto alcançável $\mathcal{A}(q_0)$ indica todos os estados que podemos alcançar, daqui para frente. A órbita $\mathcal{O}(q_0)$ contém não só tais estados mas contém também todos os estados que poderíamos ter alcançado se no passado tivéssemos tomado decisões diferentes. Tal como já ilustrado no Exemplo 2.62 conjunto alcançável não precisa coincidir com a órbita. No caso em que $\vec{X} \in \mathcal{C} \Rightarrow -\vec{X}$ então dizemos que $\mathcal{C}$ é **simétrico** e neste caso $\mathcal{A}(q_0) = \mathcal{O}(q_0)$. Existem situações em que o sistema não é simétrico, e mesmo assim os 2 conjuntos coincidem. Por exemplo poderíamos alterar Exemplo 2.62 considerando $M = S^1 \times S^1$ (o qual é recoberto por $\mathbb{R}^2$) e 2 campos $\vec{Y}_1$ e $\vec{Y}_2$ em M que se levantam para os campos $\vec{X}_1$ e $\vec{X}_2$ em $\mathbb{R}^2$. Aqui, devido a compacidade da órbita e propriedade dos fluxos é possível demonstrar que de fato o conjunto alcançável e órbita coincidem.

Antes de apresentar o próximo resultado, convém generalizar nossa definição de folheação (regular) permitindo agora que as folhas tenham dimensões diferentes.

Definição 2.64.

Uma partição $\mathcal{F} = \{L\}$ de M por variedades (imersas) sem auto-interseções (as chamadas **folhas**) é chamada **folheação singular** se para cada $V_p \in T_p L_p$ (i.e., vetor tangente a folha L_p passando por p) encontramos um campo local $\vec{X}$ (definido em uma vizinhança U de p) tal que $\vec{X}(p) = V_p$ e $\vec{X}(z) \in T_z L_z$, para qualquer $z \in U$.

O Exemplo 2.60 ilustra a Definição 2.64 e nos leva a questionar se a partição por órbitas de um controle geométrico $\mathcal{C} = \{\vec{X}_u\}_{u \in U}$ é sempre uma folheação singular. Além disto, como espaços tangentes de órbitas de uma ação $\mu : G \times M \rightarrow M$ são invariantes pela ação de G , podemos também nos perguntar se uma propriedade como esta (e.g. ser invariante por pull-back i.e. invariante por $\text{Ad}(e^{tx})$) é de fato o que caracterizaria espaços tangentes das órbitas de um controle geométrico. O teorema a seguir traz respostas positivas a estas questões.

Teorema 2.65. Stefan -Sussmann

Dado um sistema $\mathcal{C} = \{\vec{X}_u\}_{u \in U}$ de campos completos em M então

- (a) $\mathcal{F} = \{\mathcal{O}(q)\}_{q \in M}$ é uma folheação singular.
- (b) $T_q \mathcal{O} = \text{gerado} \{ \text{Ad}(\varphi_t^X) \vec{Y}(q) | \vec{Y}, \vec{X} \in \mathcal{C} \}$.

Observação 2.66.

Será conveniente para demonstração dos próximos resultados, estender a definição do operador $\bullet$. Como já havíamos visto antes $\vec{X} \bullet \varphi := d\varphi \vec{X}$. Agora iremos denotar $q \bullet \vec{X} := \vec{X}(q)$ e $q \bullet f := f(q)$, ou seja podemos pensar que ponto operar em campos ou funções ao ser avaliado nele. Também podemos operar difeomorfismo φ em funções f como $\varphi \bullet f := f \circ \varphi$. Utilizando esta notação temos que $\text{Ad}(\varphi) \vec{X} = \varphi \bullet \vec{X} \bullet \varphi^{-1}$.

Demonstração. Seja $\mathcal{P}$ o grupo de difeomorfismos gerados pelos fluxos dos campos em $\mathcal{C}$. Tal como sugere o item (b) o candidato natural para desempenhar o papel de espaço tangente das órbitas é:

$$\Pi(q) := \text{span} \{ q \bullet \text{Ad}(\varphi) \vec{X} |, \forall \vec{X} \in \mathcal{C}, \forall \varphi \in \mathcal{P} \}.$$

Vamos agora entender a ideia da prova por meio da várias afirmações:

Afirmção 1: $\Pi(q_0) \bullet \varphi_0 = \Pi(q)$, onde $q = q_0 \bullet \varphi_0$, para $\varphi_0 \in \mathcal{P}$. Em particular $\dim \Pi(q \bullet \varphi_0) = \dim \Pi(q_0)$

Prova da afirmação: De fato:

$$\begin{aligned} q_0 \bullet \text{Ad}(\varphi) \vec{X} \bullet \varphi_0 &= q_0 \bullet \varphi \bullet \vec{X} \bullet \varphi^{-1} \bullet \varphi_0 \\ &= q_0 \bullet \varphi_0 \bullet \varphi_0^{-1} \bullet \varphi \bullet \vec{X} \bullet \varphi^{-1} \bullet \varphi_0 \\ &= q \bullet \text{Ad}(\varphi \circ \varphi_0^{-1}) \vec{X} \quad \square \end{aligned}$$

Considere $\{\vec{V}_i\}_{i=1}^m \subset \text{Ad}(\mathcal{P})\mathcal{C}$ tal que $\{\vec{V}_i(q_0)\}$ é uma base de $\Pi(q_0)$. Defina $G_q : U_0 \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$ como

$$G_q(t_1, \dots, t_m) = q \bullet e^{t_1 V_1} \bullet \dots \bullet e^{t_m V_m}.$$

Tal como na demonstração do Lema 2.56 (início do passo 1), derivando G_q em $t = (t_1, \dots, t_m) = (0, \dots, 0)$ podemos verificar que $d(G_q)_{t=0}$ é um isomorfismo, e assim, pelo teorema da função inversa, concluir a afirmação a seguir:

Afirmção 2: Reduzindo U_0 se necessário, $G_q(U_0) \subset \mathcal{O}(q_0)$ se torna variedade mergulhada.

A variedade mergulhada $G_q(U_0)$ será o candidato do que costuma ser chamado **placa** de nossa folheação singular, i.e., a grosso modo falando, um aberto conexo (pequeno o suficiente) na topologia da folha $\mathcal{O}(q)$ (a qual não precisa estar mergulhada).

Afirmção 3: $d(G_q)_t T_t \mathbb{R}^m = \Pi(G(t))$.

Prova da afirmação: Vamos verificar que $d(G_q)_t T_t \mathbb{R}^m \subset \Pi(G(t))$.

$$\begin{aligned} dG_q e_i &= \frac{d}{ds} q_0 \bullet e^{t_1 V_1} \bullet \dots \bullet e^{t_{i-1} V_{i-1}} \bullet e^{(t_i+s) V_i} \bullet e^{t_{i+1} V_{i+1}} \bullet \dots \bullet e^{t_m V_m} \Big|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds} q_0 \bullet e^{t_1 V_1} \bullet \dots \bullet e^{t_{i-1} V_{i-1}} \bullet e^{t_i V_i} \bullet e^{s V_i} \bullet \varphi \Big|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds} q_0 \bullet e^{t_1 V_1} \bullet \dots \bullet e^{t_{i-1} V_{i-1}} \bullet e^{t_i V_i} \bullet \varphi \bullet \varphi^{-1} \bullet e^{s V_i} \bullet \varphi \Big|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds} G_q(t) \bullet \varphi^{-1} \bullet e^{s V_i} \bullet \varphi \Big|_{s=0} = G_q(t) \bullet \text{Ad}(\varphi^{-1}) V_i \end{aligned}$$

onde $\varphi = e^{t_{i+1} V_{i+1}} \bullet \dots \bullet e^{t_m V_m}$. O resto da prova segue do fato dos 2 subespaços terem mesma dimensão $\square$

A próxima afirmação nos ajuda a "grudar" as placas e terminar a ideia da prova.

Afirmação 4: Se $\hat{q} \in G_q(U_q) \cap G_{\tilde{q}}(\tilde{U}_{\tilde{q}})$ então $G_{\hat{q}}(\hat{U}_{\hat{q}})$ é um conjunto aberto de $G_q(U_q)$ e $G_{\tilde{q}}(\tilde{U}_{\tilde{q}})$

Prova da afirmação: Sendo $G_{\hat{q}}(t_1, \dots, t_m) = q \bullet e^{t_1 \hat{V}_1} \bullet \dots \bullet e^{t_m \hat{V}_m}$. Observamos que os campos vetoriais $\hat{V}_i$ são tangentes a distribuição (definida intrinsecamente) Π o qual era espaço tangente de $G_q(U_q)$ (vide Afirmação 3). O resultado agora segue do fato que *se um campo é tangente a uma subvariedade, então sua curva integral está contida na variedade*. $\square$.

$\square$

Seja $\text{Lie}(\mathcal{C})$ campos gerados por colchetes. Note que $\text{Lie}(\mathcal{C})(q) \subset T_q \mathcal{O}$. Vamos agora ver uma condição (aparentemente) técnica que nos permitirá garantir a igualdade. Tal condição também nos permitirá discutir uma versão do teorema singular de Frobenius bem como condições para o conjunto alcançável ter uma boa estrutura.

Definição 2.67.

Um submódulo $\mathcal{V}$ é localmente **finitamente gerado** sobre $C^\infty(M)$ se para cada q , existe uma vizinhança U de q e campos vetoriais $\vec{V}_1 \dots \vec{V}_k$ de $\mathcal{V}$ com domínio contendo U tal que $\mathcal{V}|_U = \{\sum_i a_i \vec{V}_i \mid a_i \in C^\infty(U)\}$.

Exemplo 2.68.

Consideremos o módulo $\mathcal{V}$ dos campos induzidos por uma ação de grupos de Lie $\mu : G \times M \rightarrow M$ como $\vec{\xi}(p) = \frac{d}{dt} \mu(\exp(t\xi), p)|_{t=0}$ para ξ contido na algebra de Lie $\mathfrak{g} = T_e G$. Neste caso podemos considerar uma base $\xi_1 \dots \xi_n$ de $\mathfrak{g}$ e assim a família de campos induzidos $\vec{\xi}_i$. Note que se $\xi = \sum_i a_i \xi_i$ então $\vec{\xi} = \sum_i a_i \vec{\xi}_i$ para funções constantes a_i . Isto prova que $\mathcal{V}$ é (localmente) finitamente gerado.

Observação 2.69.

Importante observar que na Definição 2.67 estamos solicitando a existência de funções $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ suaves. Não basta assim que $\{\vec{V}_i\}$ gere $\mathcal{V}$ ou seja não é suficiente que para cada x_0 fixo tenhamos $\vec{V}(x_0) = \sum_i c_i \vec{V}_i(x_0)$ para constantes c_i . Precisamos que tais c_i sejam na verdade $c_i = a_i(x_0)$ para funções bem definidas $a_i \in C^\infty(U)$.

Existe uma condição (simples de verificar) que implica que $\text{Lie } \mathcal{C}$ é finitamente localmente gerado, vide [AS04].

Proposição 2.70.

Se $\mathcal{C}$ e M são analíticos, então $\text{Lie}(\mathcal{C})$ é localmente finitamente gerado.

Teorema 2.71.

Se $\text{Lie}(\mathcal{C})$ é localmente finitamente gerado, então $\text{Lie}(\mathcal{C})(q) = T_q \mathcal{O} \forall q \in M$.

Afim de provar este teorema, iremos precisar de dois lemas.

Lema 2.72. (a) $\text{ad}(\vec{X})f\vec{Y} = \vec{X} \bullet f\vec{Y} + f\text{ad}(\vec{X})\vec{Y}$

(b) $\text{Ad}(\varphi)f\vec{X} = \varphi \bullet f\text{Ad}(\varphi)\vec{X}$

(c) $\text{Ad}(e^{tX}) = e^{t\text{ad}(X)}$

A seguir o lema central da demonstração do teorema.

Lema 2.73.

Seja $\mathcal{V}$ o módulo de campos finitamente gerados sobre $C^\infty(M)$. Suponha que dado $\vec{X} \in \mathfrak{X}(M)$ tenhamos $\text{ad}(\vec{X})(\mathcal{V}) := \{\text{ad}(\vec{X})\vec{Y} \mid \vec{Y} \in \mathcal{V}\} \subset \mathcal{V}$. Então

$$\text{Ad}(e^{tX})\mathcal{V} = \mathcal{V}.$$

Demonstração. Vamos considerar $\{\vec{V}_i\}$ tal que $\mathcal{V}|_U = \{\sum_i a_i \vec{V}_i \mid a_i \in C^\infty(U)\}$.

Definamos:

$$V_i(s) := \text{Ad}(e^{sX})\vec{V}_i \stackrel{(c)}{=} e^{s\text{ad}(X)}\vec{V}_i$$

Derivando:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_i(s) &= e^{s \operatorname{ad}(X)} \operatorname{ad}(X) V_i \\
 &= e^{s \operatorname{ad}(X)} \left(\sum_j a_{ij} \vec{V}_j \right) \\
 &\stackrel{(c)}{=} \operatorname{Ad}(e^{sX}) \left(\sum_j a_{ij} \vec{V}_j \right) \\
 &\stackrel{(b)}{=} \sum_j \operatorname{Ad}(e^{sX}) \bullet a_{ij} \operatorname{Ad}(e^{sX}) \vec{V}_j \\
 &= \sum_j b_{ji}(s) \vec{V}_j(s)
 \end{aligned}$$

onde $b_{ji}(s) := \operatorname{Ad}(e^{sX}) \bullet a_{ij}$. Assim em termos matriciais (colocando as funções componentes v_{ij} de $V_i = \sum_k v_{ki} \frac{\partial}{\partial x_k}$ nas colunas) temos $\frac{d}{ds}[V] = [V][B]$

ou seja $\frac{d}{ds}[V]^t = [B]^t[V]^t$. Concluimos que $[V]^t = e^{\left(\int_0^s [B(z)]^t dz\right)} V(0)^t$ e assim $[V]^t(s) = C^t(s)V(0)^t$. Logo $V(s) = [V(0)][C(s)]$ ou seja

$$V_i(s) = \operatorname{Ad}(e^{sX}) \vec{V}_i = \sum_j c_{ij}(s) \vec{V}_j \in \mathcal{V},$$

o que implica que $\operatorname{Ad}(e^{tX})\mathcal{V} = \mathcal{V}$ terminando assim a demonstração. $\square$

Demonstração. Vamos agora demonstrar o Teorema 2.71. Pela definição de $\operatorname{Lie}(\mathcal{C})$ temos que $\operatorname{ad}(\vec{X})\operatorname{Lie}(\mathcal{C}) \subset \operatorname{Lie}(\mathcal{C})$. Segue pelo Lemma 2.73 (tomando $\mathcal{V} = \operatorname{Lie}(\mathcal{C})$) que

$$\operatorname{Ad}(e^{tX})\operatorname{Lie}(\mathcal{C}) \subset \operatorname{Lie}(\mathcal{C}) \quad (2.7.1)$$

A equação acima e Teorema 2.65 implicam que $\operatorname{Lie}(\mathcal{C})(q) = T_q\mathcal{O} \forall q \in M$. $\square$

Podemos obter o teorema de Frobenius como um corolário do Teorema 2.71.

Corolário 2.74.

Seja $\mathcal{H}$ uma distribuição regular involutiva em M i.e., se $\vec{X}, \vec{Y} \in \mathfrak{X}(\mathcal{H})$ então $[\vec{X}, \vec{Y}] \in \mathfrak{X}(\mathcal{H})$. Temos então que $\mathcal{H}$ é integrável, i.e., existe uma folheação (regu-

Continuação.

lar) $\mathcal{F} = \{L\}$ tal que $\mathcal{H}_x = T_x L$.

Demonstração. Como $\mathcal{H}$ é distribuição (regular), perto de p_0 podemos encontrar um controle geométrico $\mathcal{C} = \{\vec{V}_i\}$ tal que $\{\vec{V}_i(x)\}$ é base $\mathcal{H}(x)$ para todo x próximo p_0 . A condição que a distribuição é involutiva então implica que

$$\mathcal{H}(x) = \text{Lie } \mathcal{C}(x). \quad (2.7.2)$$

Visto que $\text{Lie } \mathcal{C}$ é finitamente gerado, então pelo Teorema 2.71 e Equação (2.7.2) temos:

$$\mathcal{H}(x) = \text{Lie } \mathcal{C}(x) = T_x \mathcal{O}(x)$$

□

Podemos agora nos perguntar se podemos ter uma versão do teorema de Frobenius para distribuições singulares. Uma aplicação que a cada $x \in M$ associa um subespaço $\mathcal{H}(x) \in T_x M$, sendo que as dimensões destes subespaços podem mudar ponto a ponto, é chamada **distribuição singular suave** se para cada x_0 temos um conjunto de vetores $\{\vec{V}_i\}$ suaves em uma vizinhança U de x_0 tais que $\text{span } \{\vec{V}_i\}(x) = \mathcal{H}(x)$ para todo $x \in U$.

Note que $\{\vec{V}_i(x)\}$ gera a distribuição mas não precisa ser uma base de $\mathcal{H}(x)$ para todos os x próximos a x_0 em particular mesmo supondo que a distribuição singular $\mathcal{H}$ seja involutiva, não podemos seguir a demonstração do Corolário 2.74 para ter uma versão do *teorema Frobenius singular*. Nossa estratégia será considerar a a tese do Lema 2.73 como uma propriedade atendida por nossa distribuição singular e seguir então o resto da prova do Teorema 2.71.

Definição 2.75.

Uma distribuição singular suave $\mathcal{H}$ é **Ad-invariante** se

$$\text{Ad}(e^{tX})\mathfrak{X}(\mathcal{H}) = \mathfrak{X}(\mathcal{H})$$

para qualquer $\vec{X} \in \mathfrak{X}(\mathcal{H})$, onde $\mathfrak{X}(\mathcal{H})$ é conjunto de campos suaves tangentes a distribuição singular.

Segue direto do item (b) do Teorema 2.65, que, para uma distribuição Ad-invariante $\mathcal{H}$ temos: $T_q \mathcal{O}(q) \subset \mathcal{H}(q)$. Como a outra inclusão é imediata concluímos:

Corolário 2.76.

Seja $\mathcal{H}$ distribuição singular Ad -invariante. Então existe uma folheação singular $\mathcal{F} = \{L\}$ com $T_q L_q = \mathcal{H}(q)$ para todo $q \in M$.

Concluimos esta seção apresentando um resultado que garante que sobe boas condições (e.g. quando $\mathcal{C} = \{\vec{X}_u\}_{u \in U}$ é análítico) o conjunto alcançável, embora não precise ser uma variedade, pode ter boa estrutura, vide Exemplo 2.62.

Teorema 2.77. Krener

Seja $\text{Lie}(\mathcal{C})$ localmente finitamente gerado. Então $\text{int}\mathcal{A}(q)$ é denso em $\mathcal{A}(q)$ (na topologia da órbita $\mathcal{O}(q)$).

Demonstração. Sejam $q_0 \in M$ e $q \in \mathcal{A}_{q_0} \subset \mathcal{O}_{q_0}$. Desejamos mostrar que dado uma vizinhança U de q (na topologia $\mathcal{O}_{q_0}$) temos $\text{int}\mathcal{A}(q_0) \cap U \neq \emptyset$. Vejamos primeiro a estratégia da prova. O ingrediente principal da demonstração será o argumento que se todos os campos $\vec{Y} \in \mathcal{C}$ sempre fossem tangentes a uma variedade $N \subset \mathcal{O}(q_0)$ com $\dim N < \dim \mathcal{O}(q_0)$ então, como colchetes de campos tangentes a $N \subset \mathcal{O}(q_0)$ ficam sempre tangentes a N , teríamos uma contradição com a hipótese que $\text{Lie}(\mathcal{C})(x) = T_x \mathcal{O}(x)$. A estratégia então será construir (por indução) variedades mergulhada $N_i \subset \mathcal{A}(q_0)$. Caso a dimensão N_i seja menor do que a dimensão de $\mathcal{O}(q_0)$ poderemos (devido ao argumento acima) encontrar um campo $\vec{Y}_{i+1}$ transversal a N_i (encolhendo um pouco N_i se necessário) e construiremos uma nova variedade N_{i+1} com $\dim N_{i+1} = 1 + \dim N_i$ contendo a curva integral de $\vec{Y}_{i+1}$, ou seja $N_{i+1} = \{N_{i+1} \bullet e^{sY_{i+1}}\}_{s \in (0, \epsilon_{i+1})}$. Continuaremos a construir tais variedades até atingirmos o momento que a variedade N_n mergulhada tiver a dimensão da órbita. Neste momento $N \subset \mathcal{A}_{q_0}$ se torna um aberto de $\mathcal{A}_{q_0}$ e a prova terminará. Vamos agora dar mais detalhes da ideia da prova, apresentando explicitamente a construção para baixas dimensões das variedades N_i e deixando então para o leitor complementar o argumento de indução.

Sabemos $q = q_0 \bullet e^{t_1 X_1} \bullet \dots \bullet e^{t_n X_n}$. Definamos $q_1^{\epsilon_1} := q_0 \bullet e^{t_1 X_1} \bullet \dots \bullet e^{t_{n-1} X_{n-1}} \bullet e^{(t_n - \epsilon_1) X_n}$ e a curva $\psi_1^{\epsilon_1}(s_1) := q_1^{\epsilon_1} \bullet e^{s_1 X_n}$ com variável s_1 pequena. Em particular $\psi_1(\epsilon_1) = q$. Reduzindo ϵ_1 e definindo $I_1^{\epsilon_1} = (0, \epsilon_1)$, temos que a curva $\psi_1^{\epsilon_1}$ se torna um mergulho e assim $N_1^{\epsilon_1} = \psi_1^{\epsilon_1}(I_1^{\epsilon_1})$ variedade mergulhada de dimensão 1. Caso a $\dim \mathcal{O}_{q_0} = 1$ temos que $N_1^{\epsilon_1}$ é aberto na órbita e contido em $\mathcal{A}_{q_0}$ e assim diminuindo $I_1^{\epsilon_1}$ temos que $N_1^{\epsilon_1} \subset (\text{int}\mathcal{A}(q_0) \cap U) \neq \emptyset$ como queríamos demonstrar.

Vamos então supor que $\dim \mathcal{O}_{q_0} > 1$. Notemos que dado ϵ_1 pequeno suficiente, existe sempre $\vec{Y}_2 \in \mathcal{C}$ tal que $\vec{Y}_2|_{N_1^{\epsilon_1}}$ não é tangente a variedade mergulhada

$N_1^{\epsilon_1}$. De fato supanhamos que todo $\vec{Y} \in \mathcal{C}$ é tangente a $N_1^{\epsilon_1}$. Então colchetes destes campos ficam tangentes a $N_1^{\epsilon_1}$. Assim $\text{Lie}(\mathcal{C})(x) \subset T_x N_1$ para $x \in N_1$. Mas isto contraria a hipótese que $\text{Lie}(\mathcal{C})(x) = T_x \mathcal{O}_{q_0}$.

Reduzindo ϵ_1 e escolhendo $\epsilon_2 < \epsilon_1$ pequeno suficiente, podemos garantir (visto que Y_2 não é sempre tangente a N_1^ϵ) que a aplicação a seguir é um mergulho:

$$\begin{aligned} \psi_2^{(\epsilon)} : I_1^2 \times I_2 &\rightarrow \mathcal{O}_{q_0} \\ (s_1, s_2) &\rightarrow \psi_1^{\epsilon_1}(s_1) \bullet e^{s_2 Y_2} \end{aligned}$$

onde $(\epsilon) = (\epsilon_1, \epsilon_2) \in \mathbb{R}^2$, $s_1 \in I_1^2 = (0, \epsilon_1 - \epsilon_2)$ e $s_2 \in I_2 = (0, \epsilon_2)$. Assim $N_2^{(\epsilon)} = \psi_2^{(\epsilon)}(I_1^2 \times I_2)$ é variedade mergulhada. Se $\dim \mathcal{O}_{q_0} = 2$ então esta variedade mergulhada é um aberto na órbita e contida em $\mathcal{A}_{q_0}$. Reduzindo $\epsilon_2 < \epsilon_1$ temos $N_2^{(\epsilon)} \subset (\text{int} \mathcal{A}(q_0) \cap U) \neq \emptyset$ como queríamos demonstrar. Caso a dimensão $\mathcal{O}(q_0) > 2$ continuamos a construção por indução, como discutido no início até finalmente termos $\dim N_n^{(\epsilon)} = \dim \mathcal{O}(q_0)$. Tendo mesma dimensão então $\dim N_n^{(\epsilon)}$ (reduzindo (ϵ)) tornar-se um aberto e a demonstração é concluída. $\square$

Parte II

Integral e formas diferenciais

Integração

Em Cálculo I aprendemos que para cada função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, que possua apenas um número finito de descontinuidade, podemos associar um número $\int_a^b f(x)dx$, a *integral da função f no intervalo $[a, b]$* . Dado uma margem de erro $\epsilon > 0$, podemos encontrar uma partição $a = x_0 < \dots < x_n = b$ fina o suficiente para que $\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i \right| < \epsilon$, onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. A soma de Riemann $\sum_i f(c_i)\Delta x_i$ pode ser interpretada de várias formas: quando $a = 0$ e $b = 1$ ela pode representar uma *média*, quando f é não negativa ela também pode representar *soma das áreas* de retângulos que se aproximam do gráfico de f . Neste capítulo generalizamos tais ideias para várias variáveis, revendo várias discussões apresentadas em Cálculo III, em particular apresentando as demonstrações do *Teorema de Fubini* e *Teorema de mudança de variável*. Este capítulo é baseado em [Spi03] e [CT02].

3.1. Definições e propriedades básicas

Recordemos aqui as definições necessárias para estabelecer o conceito de integral de Riemann.

Sejam $A = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_m, b_m]$ um m -retângulo, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ função limitada e P uma partição de A por retângulos menores $S = [t_{i,1}, t_{(i+1),1}] \times \dots \times [t_{j,m}, t_{(j+1),m}]$. Defina

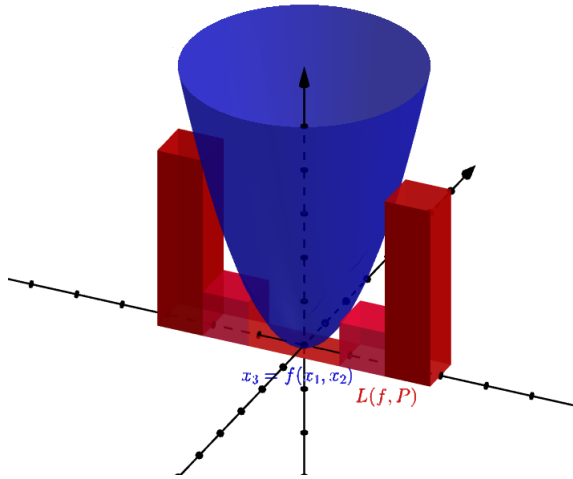


Figura 3.1: $L(f, P) = \sum_{S \in P} m_S(f) \text{vol}(S)$ onde $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ e $A = [-3, 3] \times [-1/2, 1/2]$

$$m_S(f) := \inf\{f(x), x \in S\}$$

$$M_S(f) := \sup\{f(x), x \in S\}$$

$$\text{vol}(S) = (t_{(i+1),m} - t_{i,m}) \cdots (t_{(j+1),1} - t_{j,1})$$

$$L(f, P) := \sum_{S \in P} m_S(f) \text{vol}(S)$$

$$U(f, P) := \sum_{S \in P} M_S(f) \text{vol}(S)$$

Exercício 3.1.

Seja $\tilde{P}$ um refinamento de P . Verifique que: $L(f, P) \leq L(f, \tilde{P})$ e $U(f, \tilde{P}) \leq U(f, P)$.

Exercício 3.2.

Continuação.

Sejam $\tilde{P}$ e P duas partições (uma não precisa ser refinamento da outra). Verifique que: $L(f, P) \leq U(f, \tilde{P})$.

Definimos agora os números:

$$L(f) := \sup_P \{L(f, P)\}; \quad U(f) := \inf_P \{U(f, P)\}$$

Definição 3.3.

Uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ limitada é chamada *integrável* se:

$$L(f) = U(f).$$

O número

$$\int_A f := L(f) = U(f)$$

é chamado *integral de f em A* .

Exercício 3.4.

Uma função limitada $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável, se e somente se para cada $\epsilon > 0$ existe uma partição P tal que $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$.

Definição 3.5.

Um conjunto B tem *medida nula* se para cada $\epsilon > 0$ existe uma cobertura de m -retângulos fechados $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(U_i) < \epsilon$.

Teorema 3.6.

Sejam A um m -retângulo fechado, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e uma função limitada e seja $B = \{x \in A \mid f \text{ não é contínuo em } x\}$. Então f é integrável se e somente se B tem medida nula.

Seja R uma região em $\mathbb{R}^m$ a função característica de R é a função $\chi_R : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$\chi_R(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in R \\ 0 & \text{se } x \notin R \end{cases}$$

Proposição 3.7.

Seja R uma região contida em um m -retângulo A . Então χ_R é integrável se e somente se ∂R tem medida nula.

É possível demonstrar que o produto de funções integráveis é uma função integrável.

Definição 3.8.

Dado uma função limitada $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ integrável em A e ∂R com medida nula, definimos:

$$\int_R f = \int_A f \cdot \chi_R$$

Também é possível que a soma e a diferença de funções integráveis são funções integráveis. Sabendo disso, obtemos as propriedades a seguir.

Exercício 3.9.

Sejam R_1 e R_2 regiões contidas em um retângulo A com bordos de medida nula e com $R_1 \cap R_2$ com medida nula. Dados $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ funções limitadas e integráveis. Verifique:

1. $\int_{R_1} f + g = \int_{R_1} f + \int_{R_1} g$
2. $\int_{R_1} cf = c \int_{R_1} f$
3. $\int_{R_1 \cup R_2} f = \int_{R_1} f + \int_{R_2} f$

3.2. Teorema de Fubini

O Teorema de Fubini (Teorema 3.15) a ser apresentado em breve em sua generalidade implicará diretamente a seguinte proposição:

Proposição 3.10.

Continuação.

Seja $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então:

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x) dx_2 \right) dx_1 = \int_c^d \left(\int_a^b f(x) dx_1 \right) dx_2$$

Aplicando a Proposição 3.10 à função $f \cdot \chi_R$, onde $R \subset [a, b] \times [c, d]$ é uma região cujo bordo tem medida nula, podemos concluir os seguintes resultados conhecidos.

Proposição 3.11.

Seja $R = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | h_1(x_1) \leq x_2 \leq h_2(x_1)\}$ onde $h_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, são funções suaves. Seja f uma função contínua em um retângulo contendo R . Então

$$\int_R f = \int_a^b \left(\int_{h_1(x_1)}^{h_2(x_1)} f(x) dx_2 \right) dx_1$$

De forma análoga temos resultado para região entre gráficos em relação a x_2 .

Proposição 3.12.

Seja $R = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | h_1(x_2) \leq x_1 \leq h_2(x_2)\}$ onde $h_i : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, são funções suaves. Seja f uma função contínua em um retângulo contendo R . Então

$$\int_R f = \int_c^d \left(\int_{h_1(x_2)}^{h_2(x_2)} f(x) dx_1 \right) dx_2$$

Exemplo 3.13.

A fim de ilustrar a Proposição 3.11 considere as funções $h_1(x_1) = x_1^2$ e $h_2(x_1) = x_1$ (vide Figura 3.2). Para $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$, temos

$$\int_R f = \int_0^1 \int_{x_1^2}^{x_1} x_1 x_2 dx_2 dx_1 = \int_0^1 x_1 \frac{1}{2} (x_1^2 - x_1^4) dx_1 = \frac{1}{24}$$

Observe que o Exemplo pode ser resolvido também usando 3.12. Deixamos ao leitor(a) a verificação deste fato.

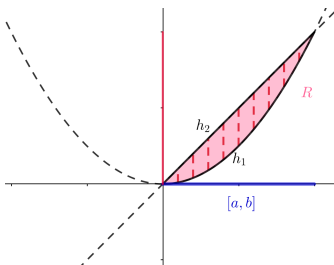


Figura 3.2: Figura da região integrada no Exemplo 3.2

Exercício 3.14.

Sejam $R = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 \geq x_2^2, x_1 + x_2 \leq 2\}$ e $f(x) = x_2$. Determine $\int_R f$.

Teorema 3.15.

Sejam $A \subset \mathbb{R}^m$ e $B \subset \mathbb{R}^n$ m -retângulo e n -retângulo, respectivamente, e $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Defina a função $g_x(y) := f(x, y)$. Então as funções $L(g_x)$ e $U(g_x)$ são integráveis e

$$\int_{A \times B} f = \int_A L(g_x) dx = \int_A U(g_x) dx.$$

De forma análoga, definindo $h_y(x) := f(x, y)$, temos que $L(h_y)$ e $U(h_y)$ são integráveis e

$$\int_{A \times B} f = \int_B L(h_y) dy = \int_B U(h_y) dy.$$

Note que se $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então g_x é integrável.

Demonstração. Considere uma partição $P \{S_A \times S_B\}$ de $A \times B$. Observe que para todo $x \in S_A$ temos

$$\sum_{S_B} m_{S_A \times S_B}(f) \text{vol}(S_B) \leq \sum_{S_B} m_{S_B}(g_x) \text{vol}(S_B) = L(g_x, P_B) \leq L(g_x).$$

Assim:

$$\begin{aligned} L(f, P) &= \sum_{S_A, S_B} m_{S_A \times S_B}(f) \text{vol}(S_A \times S_B) \\ &= \sum_{S_A} \left(\sum_{S_B} m_{S_A \times S_B}(f) \text{vol}(S_B) \right) \text{vol}(S_A) \\ &\leq L(L(g_x), P_A) \end{aligned}$$

De forma análoga se prova $U(U(g_x), P_A) \leq U(f, P)$. Assim:

$$L(f, P) \leq L(L(g_x), P_A) \leq U(L(g_x), P_A) \leq U(U(g_x), P_A) \leq U(f, P).$$

Como f é integrável $\int_{A \times B} f = \int_A L(g_x) dx$.

Argumentos análogos mostram os outros itens do Teorema. $\square$

No exercício a seguir, vemos uma aplicação interessante do teorema de Fubini, onde a estratégia que sugerimos ao leitor(a) é e considerar U como região entre dois gráficos horizontais e re-escrever $\int_U f dx$.

Exercício 3.16.

Calcule $\int_1^4 \int_{\frac{\ln(y)}{2}}^{\ln(2)} \frac{1}{\exp(x)+1} dx dy$

Exemplo 3.17.

Consideremos o problema do tempo enfrentado por uma pessoa em duas filas consecutivas, com tempo de espera médio $m_1 = 10$ e $m_2 = 5$ respectivamente. Seja X_i a variável aleatória que descreve possíveis tempos de espera na fila i (com $i = 1, 2$) e aceitemos que a probabilidade de X_i estar entre $a < b$ seja dada por:

$$P(a \leq X_i \leq b) = \int_a^b \rho_i(x_i) dx_i$$

onde a função densidade de probabilidade ρ_i é definida como:

$$\rho_i(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_i < 0 \\ \frac{\exp(-\frac{x_i}{m_i})}{m_i} & \text{se } x_i \geq 0. \end{cases}$$

Visto que as variáveis aleatórias são independentes, aceitaremos também que a função de probabilidade conjunta é dada por $\rho(x_1, x_2) = \rho_1(x_1)\rho_2(x_2)$,

Continuação.

visto que as variáveis aleatórias são independentes.

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_1 < 0 \text{ ou } x_2 < 0 \\ \frac{\exp(\frac{-x_1}{m_1})}{m_1} \frac{\exp(\frac{-x_2}{m_2})}{m_2} & \text{se } x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Nosso objetivo neste exemplo é calcular a probabilidade do indivíduo em menos de 20 minutos sair das duas filas.

No *passo 1* determinamos a região U onde iremos integrar função ρ . Baseado onde a função ρ não será zero, podemos escolher $U := \{x \in \mathbb{R}^2; x_1 + x_2 \leq 20, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.

No *passo 2* (baseado no passo 1) escolhemos a técnica de integração. Visto que U está entre 2 gráficos $h_1(x_1) = 0$ e $h_2(x_1) = 20 - x_1$ com domínio $x_1 \in [0, 20]$ é natural escolher a técnica de Fubini.

$$P(0 \leq X_1 + X_2 \leq 20) = \int_U \rho dx = \int_0^{20} \left(\int_0^{20-x_1} \rho dx_2 \right) dx_1$$

No *passo 3* armamos e resolvemos a integral.

$$\begin{aligned} \int_U \rho dx &= \int_0^{20} \int_0^{20-x_1} \left(\frac{\exp(\frac{-x_1}{10})}{10} \frac{\exp(\frac{-x_2}{5})}{5} dx_2 \right) dx_1 \\ &= \int_0^{20} \frac{\exp(\frac{-x_1}{10})}{10} \left(-\exp(\frac{-20+x_1}{5}) + \exp(0) \right) dx_1 \\ &= \frac{1}{10} \int_0^{20} \exp\left(\frac{-x_1}{10}\right) - \exp\left(-4 + \frac{x_1}{10}\right) dx_1 \\ &= -\exp(-4) \left(\exp\left(\frac{x_1}{10}\right) \Big|_0^{20} - \exp\left(-\frac{x_1}{10}\right) \Big|_0^{20} \right) \\ &= -2e^{-2} + 1 + e^{-4} \end{aligned}$$

3.3. Partição da unidade

Nesta seção vamos a introduzir as ferramentas necessárias para integrar em uma variedade M de dimensão m .

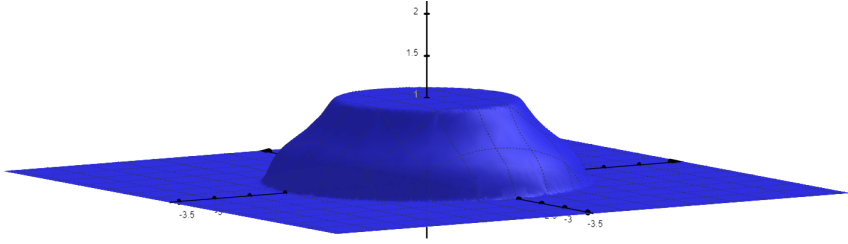


Figura 3.3: Função bump function

Definição 3.18.

Uma coleção de funções $\{\rho_i\}$ de funções suaves em M é chamada *partição da unidade* se:

- (a) $0 \leq \rho_i(x) \leq 1$;
- (b) A coleção $\{\text{supp } \rho_i\}_{i \in I}$, onde $\text{supp } \rho_i = \overline{\{x \in M \mid \rho_i(x) \neq 0\}}$, é **localmente finita**, i.e., para todo $x \in M$ existe uma vizinhança U contendo x tal que o número de i 's tal que $U \cap \text{supp } \rho_i \neq \emptyset$ é finito.
- (c) $\sum_i \rho_i = 1$.

Teorema 3.19. partição estritamente subordinada

Seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta de M . Então existe uma partição da unidade $\{\rho_\alpha\}$ tal que $\text{supp } \rho_\alpha \subset U_\alpha$.

Teorema 3.20. partição com suporte compacto

Seja $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma cobertura aberta de M . Então existe uma partição da unidade $\{\rho_\beta\}_{\beta \in J}$ com suporte compacto, tal que para cada β existe um α tal que $\text{supp } \rho_\beta \subset U_\alpha$.

Observe que frequentemente não é possível ter uma partição da unidade com suporte compacto, estritamente subordinada a cobertura de uma variedade não compacta.

Ideia da demonstração do Teorema 3.20 Defina $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \exp(-1/x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

e $b : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$b(x) = \frac{h(4 - x_1^2 - \cdots - x_m^2)}{h(4 - x_1^2 - \cdots - x_m^2) + h(x_1^2 + \cdots + x_m^2 - 1)}$$

Aceitemos o resultado a seguir.

Lema 3.21.

Dado uma cobertura $\{U_\alpha\}$ de M existe um refinamento localmente finito $\{V_i\}$, com coordenadas $\{V_i, \psi_i\}$, tal que $\psi(V_i) = D(3)$ (disco de raio 3).

Seja $b_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$b_i(x) = \begin{cases} b \circ \psi_i(x) & , x \in V_i \\ 0 & \text{se } x \notin V_i \end{cases}$$

A partição da unidade é definida então como: $\rho_i = \frac{b_i}{\sum_j b_j} \square$

3.4. Mudança de variáveis

Teorema 3.22.

Seja $\varphi : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ difeomorfismo de classe C^1 e $f : \varphi(A) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ função de suporte compacto. Então:

$$\int_{\varphi(A)} f(y) dy = \int_A f \circ \varphi(x) |\det D\varphi| dx$$

3.4.1. Exemplo e exercícios

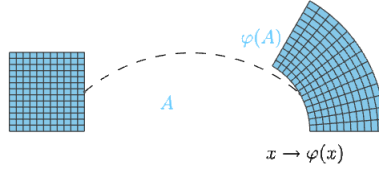


Figura 3.4: ilustrando teorema de mudança de variável

Exemplo 3.23.

Dado $U = \{x \in \mathbb{R}^2; \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} \leq 1\}$ desejamo calcular $\int_U x_1^2 dx$

No *passo 1* determinamos a região U . Notemos que $\partial U = \{x \in \mathbb{R}^2; \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} = 1\}$ ou seja a região U é a região delimitada pela elipse ∂U .

No *passo 2* (baseado no passo 1) escolhemos a técnica de integração. Notemos que para $\tilde{U} = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^2; \tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 \leq 1\}$ temos $T(\tilde{U}) = U$ onde $T(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (2\tilde{x}_1, 3\tilde{x}_2)$. Ou seja U é uma região que é a deformação linear do disco $\tilde{U}$, este por sua vez é uma região invariante por rotação. Estas observações sugerem que uma técnica natural de integração é mudança de variável e que a parametrização adequada seja a composta de uma parametrização polar $F(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ com a transformação linear T . Mais precisamente definimos $\varphi : V \rightarrow \tilde{U}$ como $\varphi(r, \theta) = (2r \cos(\theta), 3r \sin(\theta))$ para $V = \{(r, \theta); 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, vide Figura 3.5.

No *passo 3* armamos e resolvemos a integral. Para tanto notemos que $D\varphi = 6r$. Assim

$$\begin{aligned} \int_U x_1^2 dx &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2r \cos(\theta))^2 6r d\theta dr \\ &= \int_0^1 24r^3 \pi dr \\ &= 6\pi. \end{aligned}$$

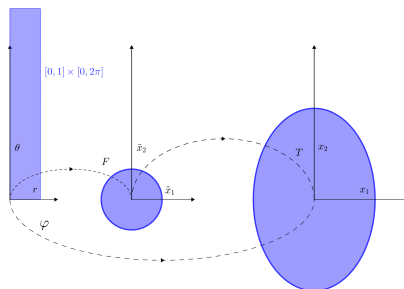


Figura 3.5: Ilustrando Exemplo 3.23

Exercício 3.24.

Dado $U = \{x \in \mathbb{R}^2; \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} \leq 1\}$ calcule $\int_U x_2^2 dx$

Exercício 3.25.

Calcule $\int_U x_1^2$ onde

$$U := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

3.4.2. Demonstração do Teorema 3.22

Por meio de **4 Afirmações** vamos reduzir a demonstração do Teorema a demonstração do caso particular descrito no Lema 3.26 (onde $f = 1$ e A será uma vizinhança pequena U de um ponto $a \in A$ onde iremos supor que $D\varphi(a) = Id$)

Para provar o Lema 3.26 utilizaremos os seguintes ingredientes:

- hipótese de indução (o teorema vale em $\mathbb{R}^1$)
- que para U pequeno $\varphi = F \circ H$ onde

$$H(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_{m-1}(x), x_m)$$

$$F(y) = (y_1, \dots, y_{m-1}, \varphi_m(H^{-1}(y)))$$

- Teorema de Fubini.

Observamos que as afirmações dependerão uma das outras, e aparecerão indiretamente na prova do Lema.

Afirmção 1: Para demonstrar o teorema basta provar que ele vale nos conjuntos de uma cobertura finita de abertos relativamente compactos de $\text{supp } f$. Isto é, vamos supor que dada uma tal cobertura U_α vale

$$\int_{\varphi(U_\alpha)} h_\alpha(y) dy = \int_{U_\alpha} (h_\alpha \circ \varphi)(x) |\det D\varphi| dx \quad (3.4.1)$$

para toda função integrável h_α com suporte compacto em U_α .

Demonstração. Seja $\{\rho_\alpha\}$ partição da unidade estritamente subordinada a $\{U_\alpha\}$. Aplicando Eq (3.4.1) em $h_\alpha(y) = \rho_\alpha(y)f(y)$ temos:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(A)} f(y) dy &= \sum_{\alpha} \int_{\varphi(A)} \rho_\alpha(y) \cdot f(y) dy \\ &= \sum_{\alpha} \int_{\varphi(U_\alpha)} \rho_\alpha(y) \cdot f(y) dy \\ &= \sum_{\alpha} \int_{U_\alpha} \rho_\alpha(\varphi(x)) f(\varphi(x)) |\det D\varphi| dx \\ &= \int_A (f \circ \varphi)(x) |\det D\varphi| dx \end{aligned}$$

□

Afirmção 2: Para demonstrar o teorema basta prova-lo no caso $f = 1$

Demonstração. Observe primeiro que, pelas propriedades da integral, se o teorema é válido para $f = 1$, então é válido para f constante (*). Seja K um retângulo contido em $\varphi(A)$, P uma partição de K e $f_S = m_S(f)$. Assim

$$\begin{aligned} L(f, P) = \sum_{S \in P} m_S(f) \text{vol}(S) &= \sum_{S \in P} \int_S f_S dy \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{S \in P} \int_{\varphi^{-1}(S)} f_S \circ \varphi |\det D\varphi| dx \\ &\leq \sum_{S \in P} \int_{\varphi^{-1}(S)} f \circ \varphi |\det D\varphi| dx \\ &= \int_{\varphi^{-1}(K)} f \circ \varphi |\det D\varphi| dx. \end{aligned}$$

De forma análoga

$$\int_{\varphi^{-1}(K)} f \circ \varphi |\det D\varphi| dx \leq U(f, P).$$

Assim, considerando todas as partições P , concluímos pela definição de integral que

$$\int_{\varphi^{-1}(K)} f \circ \varphi |\det D\varphi| dx = \int_K f dx.$$

Segue da Afirmação 1 a Afirmação 2. $\square$

Afirmação 3: Se o teorema vale para difeomorfismos H e F então ele é válido para o difeomorfismo composto $\varphi = F \circ H$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \int_{F \circ H(A)} f dz &= \int_{H(A)} f \circ F |\det DF| dy \\ &= \int_A f \circ F \circ H |\det DF| |\det DH| dx \\ &= \int_A f \circ \varphi |\det D\varphi| dx \quad \square \end{aligned}$$

$\square$

Afirmação 4: O teorema é válido quando φ é aplicação linear

Demonstração. As afirmações 1 e 2 implicam que basta provar que

$$\int_{\varphi(U)} 1 dy = \int_U |\det \varphi| dx,$$

o que é deixado como exercício. $\square$

Dado um ponto $a \in A$ e compondo φ como $(D\varphi(a))^{-1}$, as afirmações reduzem a demonstração do teorema a provar o lema.

Lema 3.26. (Principal)

Seja $\varphi : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ difeomorfismo de classe C^1 . Suponha que exista $a \in A$ tal que $D\varphi(a) = Id$. Então existe uma vizinhança relativamente compacta U de

Continuação.

a tal que:

$$\int_{\varphi(U)} dy = \int_U |\det D\varphi| dx \quad (3.4.2)$$

Demonstração. Quando a dimensão de $\mathbb{R}^m$ é 1 o resultado é provado em Cálculo. Vamos supor por indução que o teorema é verdadeiro para $m - 1$

Defina aplicação $H : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$H(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_{m-1}(x), x_m).$$

A hipótese de que $D\varphi(a) = Id$ garante que $DH = Id$ e assim que H é um difeomorfismo, se restringirmos o U .

Defina aplicação $F : H(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$F(y) = (y_1, \dots, y_{m-1}, \varphi_m(H^{-1}(y))).$$

Reduzindo U temos que F é difeo e que

$$\varphi = F \circ H$$

Pela Afirmação 3, basta provar o Lemma 3.26 para H e F . Vamos demonstrar para H (prova de F é analoga). Definindo $h_c = H(x_1, \dots, x_{m-1}, c)$ temos por Fubini (*) e pela hipótese de indução (**)

$$\begin{aligned} \int_{h(W \times [a,b])} 1 dy &\stackrel{(*)}{=} \int_{[a,b]} \left(\int_{h(W \times x_m)} 1 dy_1 \cdots dy_{m-1} \right) dx_m \\ &\stackrel{(**)}{=} \int_{[a,b]} \left(\int_W |\det Dh_{x_m}| dx_1 \cdots dx_{m-1} \right) dx_m \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_{W \times [a,b]} |\det Dh_{x_m}| dx \end{aligned}$$

□

3.5. Um pouco de integrais triplas

Nas seções anteriores concentramos nossos exemplos e exercícios em $\mathbb{R}^2$. Desejamos aqui ilustrar a teoria de integração com mais alguns exemplos agora em $\mathbb{R}^3$ e ao mesmo tempo destacar procedimentos padrões para calcular integrais.

O ponto de partida de todo cálculo de integral tripla é começar por tentar entender sob qual região estamos integrando. A compreensão da região de integração irá sugerir qual técnica de integração parece ser mais adequada para problema tratado, além de quais deveriam ser os limites de integração (uma vez escolhido a técnica). Em geral em Cálculo III:

- a região U em $\mathbb{R}^3$ é dada por *desigualdades*;
- seu bordo ∂U é composto por pedaços de superfícies (variedades de dimensão 2) que são dadas por *igualdades*.

Assim se estuda primeiro as superfícies dadas pelas igualdades para então determinar a região. Em particular merece destaque que em Cálculo III é comum que a região (e seu bordo) ou tenha alguma simetria (invariante por rotação ou translação) ou seja deformação de alguma região simétrica. Assim não custa recordar ou resumir como aluno(a)s de Cálculo III podem identificar facilmente as simetrias e deformações mais comuns.

- **Superfície de revolução:** Como já vimos,

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3, g(x_1^2 + x_2^2, x_3) = c\},$$

é uma superfície invariante por rotação. A forma mais simples de reconhecer se S é de fato dado pelo vínculo $g(x_1^2 + x_2^2, x_3) = c$ (o que por vezes não é imediato para um(a) leitor(a) iniciante) é substituir $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ na igualdade que define S e verificar se após a substituição sobram apenas as variáveis r e x_3 na igualdade, i.e., $g(r^2, x_3) = c$. Para esboçar S basta considerar a curva geratriz $C = S \cap \{x_1 = 0\} = \{(0, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | g(x_2^2, x_3) = c\}$ e gira-la em torno do eixo x_3 , vide mais discussões no Exemplo 3.28.

- **Superfície invariante por translação:**

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3; g(x_1, x_2) = c\}$$

é uma superfície onde falta a variável x_3 e assim invariante por aplicações $F_c(x) = x + ce_3$ (translações na direção de e_3). Para esboça-la basta considerar a curva plana $C = \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3; g(x_1, x_2) = c\}$ e translada-la na direção de x_3 , vide mais discussões no Exemplo 3.29.

- **Deformação por transformação linear:** Seja

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3; g(\frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{b}, \frac{x_3}{c}) = d\}$$

onde a, b, c são números positivos. Note que $S = T(\tilde{S})$ onde $\tilde{S} = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^3; \tilde{g}(\tilde{x}) = d\}$ e $T(\tilde{x}) = (a\tilde{x}_1, b\tilde{x}_2, c\tilde{x}_3)$. Então para esboçar S basta esboçar $\tilde{S}$ e deformá-la pela transformação T , vide mais discussões no Exemplo 3.29.

Discussões análogas podem ser feitas para superfícies de rotação ou translação em torno dos outros eixos x_1 e x_2 .

Exemplo 3.27.

Desejamos integrar $f(x_1, x_2, x_3) = x_1$ no tetraedro U limitado pelos planos coordenados e o plano $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$.

No *passo 1*, determinamos a região U . Após esboçá-las descobrimos que a região está entre dois gráficos associados as funções $h_1(x_1, x_2) = 0$ e $h_2(x_1, x_2) = \frac{1}{3}(6 - x_1 - 2x_2)$ com domínios $D = \{x \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x_1 \leq 6, 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{2}(6 - x_1)\}$, vide Figura 3.6.

No *passo 2* (baseado no passo 1) escolhemos a técnica de integração. No caso por estarmos entre dois gráficos, vamos escolher aplicar o Teorema de Fubini.

$$\int_U f(x) dx = \int_D \left(\int_{h_1}^{h_2} f(x) dx_3 \right) dx_1 dx_2.$$

No *passo 3* armamos e resolvemos a integral. Em particular usamos novamente Fubini para integrar sobre D .

$$\begin{aligned} \int_U f(x) dx &= \int_0^6 \left(\int_0^{\frac{1}{2}(6-x_1)} \left(\int_0^{\frac{1}{3}(6-x_1-2x_2)} x_1 dx_3 \right) dx_2 \right) dx_1 \\ &= \int_0^6 \left(\int_0^{\frac{1}{2}(6-x_1)} \frac{1}{3}(6-x_1-2x_2)x_1 dx_2 \right) dx_1 \\ &= \int_0^6 \left(\int_0^{(3-\frac{x_1}{2})} \left(2x_1 - \frac{x_1^2}{3} \right) - 2x_2 \frac{x_1}{3} dx_2 \right) dx_1 \\ &= \int_0^6 \left(3 - \frac{x_1}{2} \right) \left(2x_1 - \frac{x_1^2}{3} \right) - \left(3 - \frac{x_1}{2} \right)^2 \frac{x_1}{3} dx_1 \\ &= 9. \end{aligned}$$

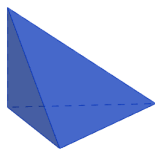


Figura 3.6: Ilustrando Exemplo 3.27

Exemplo 3.28.

Calculemos $\int_U \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} dx$ onde

$$U := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \geq \sqrt{3x_1^2 + 3x_2^2}, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}.$$

No *passo 1* determinamos a região U . Uma das superfícies que contém parte de ∂U é a superfície $S_1 = g_1^{-1}(0)$ onde $g_1(x) = x_3 - \sqrt{3x_1^2 + 3x_2^2}$. Ao substituir $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ em $g_1(x) = 0$ ficamos com $0 = x_3 - \sqrt{3}|r|$ o que implica que S_1 é uma superfície de revolução. Assim sendo para esboçá-la precisamos descobrir a curva geratriz no plano $x_1 = 0$, i.e., a curva dada por $x_3 = \sqrt{3}|x_2|$ e gira-la obtendo assim o cone S_1 . A outra superfície que contém parte de ∂U é $S_2 = g_2^{-1}(1)$ onde $g_2(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ ou seja a esfera de raio 1. A região U então é a região acima do cone S_1 e abaixo da esfera S_2 (considerando referencial canônico), vide Figura 3.7.

No *passo 2* (baseado no passo 1) escolhemos a técnica de integração. Por ser uma região invariante por rotação escolhemos mudança de variável utilizando uma parametrização adaptada a rotação. Mais precisamente, como se trata de um setor em uma bola, optamos pela parametrização esférica.

$$\varphi(v, t, r) = (r \sin(v) \cos(t), r \sin(v) \sin(t), r \cos(v)).$$

A figura indica que definindo $V = \{(v, t, r) \mid 0 \leq v \leq \frac{\pi}{6}, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq t \leq \pi\}$ temos $\varphi(V) = U$.

No *passo 3* armamos e resolvemos a integral. Note que $\det D\varphi = r^2 \sin(v)$. Seja $f = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ temos:

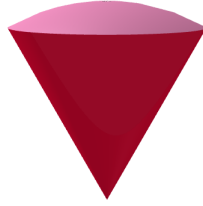


Figura 3.7: Ilustrando Exemplo 3.28

Continuação.

$$\begin{aligned}
 \int_U f(x) dx &= \int_V f \circ \varphi \det D\varphi dv dt dr \\
 &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} r^3 \sin(v) dv dt dr \\
 &= \frac{\pi}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right).
 \end{aligned}$$

Exemplo 3.29.

Dado $U = \{x \in \mathbb{R}^3; 0 \leq x_3 \leq 7 - x_1 - x_2, \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} \leq 1\}$ calculemos o centro de massa de U , i.e., o ponto $p = (p_1, p_2, p_3)$ onde $p_i = \frac{\int_U x_i dx}{\text{vol}(U)}$ e $\text{vol}(U) = \int_U dx$ (volume de U).

No *passo 1* determinamos a região U . Observe que parte do bordo ∂U está contido no plano S_1 dado pela equação $x_3 = 7 - x_1 - x_2$ e pelo plano $x_3 = 0$, ambos gráficos. A outra parte do bordo ∂U fica contida na superfície S_2 dada pela equação $\frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} = 1$. visto que esta igualdade não tem a variável x_3 podemos concluir que a superfície S_2 é invariante por translações $F_s(x) = x + se_3$. Notemos também que tal superfície S_2 é deformação de um cilindro $\tilde{S}_2$ dado pela equação $x_1^2 + x_2^2 = 1$, ou seja $S_2 = T(\tilde{S}_2)$ para $T(\tilde{x}) = (2\tilde{x}_1, 3\tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$. Conluimos que a região U fica contida entre 2 gráficos e dentro de um cilindro deformado, vide Figura 3.8.

No *passo 2* (baseado no passo 1) escolhemos a técnica de integração. Por

Continuação.

ser uma região determinada entre gráficos em um domínio $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} \leq 1\}$ utilizaremos Fubini e para $f = x_i$ ou $f = 1$ calcularemos

$$\begin{aligned} \int_U f dx &= \int_D \left(\int_0^{7-x_1-x_2} f dx_3 \right) dx_1 dx_2 \\ &= \int_D g dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Para integrar a função g (que dependerá da função f) iremos escolher então mudança de variável $\varphi(r, \theta) = (2r \cos(\theta), 3r \sin(\theta))$, observando que $D\varphi = 6r$ e para $V = \{(r, \theta); 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ temos $D = \varphi(V)$, recorde detalhes no Exemplo 3.23.

No passo 3 armamos e resolvemos a integral. Nas contas a seguir utilizaremos o fato da região D ser invariante por reflexões nos eixos x_1 e x_2 o que nos garante que

$$\int_D x_1 dx_1 dx_2 = \int_D x_2 dx_1 dx_2 = \int_D x_1 x_2 dx_1 dx_2 = 0. \quad (3.5.1)$$

Também utilizaremos as integrais do Exemplo 3.23 e Exercício 3.24, i.e.,

$$\int_D x_1^2 dx_1 dx_2 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2r \cos(\theta))^2 6r d\theta dr = 6\pi. \quad (3.5.2)$$

$$\int_D x_2^2 dx_1 dx_2 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (3r \sin(\theta))^2 6r d\theta dr = \frac{27\pi}{2}. \quad (3.5.3)$$

Podemos agora calcular $p_i = \frac{\int_U x_i dx}{\text{vol}(U)}$.

$$\begin{aligned} \text{vol}(U) &= \int_D \left(\int_0^{7-x_1-x_2} 1 dx_3 \right) dx_1 dx_2 \\ &= \int_D (7 - x_1 - x_2) dx_1 dx_2 \\ &\stackrel{(3.5.1)}{=} \int_D 7 dx_1 dx_2 \\ &= 42\pi. \end{aligned}$$

Continuação.

$$\begin{aligned}
\int_U x_1 dx &= \int_D \left(\int_0^{7-x_1-x_2} x_1 dx_3 \right) dx_1 dx_2 \\
&= \int_D x_1 (7 - x_1 - x_2) dx_1 dx_2 \\
&\stackrel{(3.5.1)}{=} \int_D -x_1^2 dx_1 dx_2 \\
&\stackrel{(3.5.2)}{=} -6\pi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_U x_2 dx &= \int_D \left(\int_0^{7-x_1-x_2} x_2 dx_3 \right) dx_1 dx_2 \\
&= \int_D x_2 (7 - x_1 - x_2) dx_1 dx_2 \\
&\stackrel{(3.5.1)}{=} \int_D -x_2^2 dx_1 dx_2 \\
&\stackrel{(3.5.3)}{=} -\frac{27\pi}{2}
\end{aligned}$$

Continuação.

$$\begin{aligned}
\int_U x_3 dx &= \int_D \left(\int_0^{7-x_1-x_2} x_3 dx_3 \right) dx_1 dx_2 \\
&= \frac{1}{2} \int_D (7 - (x_1 + x_2))^2 dx_1 dx_2 \\
&= \frac{1}{2} \int_D 49 dx_1 dx_2 - \frac{1}{2} \int_D 14(x_1 + x_2) dx_1 dx_2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_D x_1^2 dx_1 dx_2 + \frac{1}{2} \int_D 2x_1 x_2 dx_1 dx_2 + \frac{1}{2} \int_D x_2^2 dx_1 dx_2 \\
&\stackrel{(3.5.1)}{=} \frac{1}{2} \int_D 49 dx_1 dx_2 + \frac{1}{2} \int_D x_1^2 dx_1 dx_2 + \frac{1}{2} \int_D x_2^2 dx_1 dx_2 \\
&\stackrel{(3.5.2)}{=} \frac{49}{2} (6\pi) + \frac{1}{2} (6\pi) + \frac{1}{2} \int_D x_2^2 dx_1 dx_2 \\
&\stackrel{(3.5.3)}{=} \frac{49}{2} (6\pi) + \frac{1}{2} (6\pi) + \frac{1}{2} \left(\frac{27\pi}{2} \right) \\
&= \frac{627\pi}{4}
\end{aligned}$$

Concluimos então que:

$$p_1 = \frac{\int_U x_1 dx}{\text{vol}(U)} = -\frac{1}{7}$$

$$p_2 = \frac{\int_U x_2 dx}{\text{vol}(U)} = -\frac{9}{28}$$

$$p_3 = \frac{\int_U x_3 dx}{\text{vol}(U)} = \frac{209}{56}$$

3.6. Teoremas clássicos de Gauss, Stokes e Green

Desejamos aqui nesta seção relembrar os teoremas de Gauss e Stokes (em geral vistos em uma disciplina de Cálculo III), os quais serão demonstrados (utilizando a linguagem de formas diferenciais) no próximo capítulo.

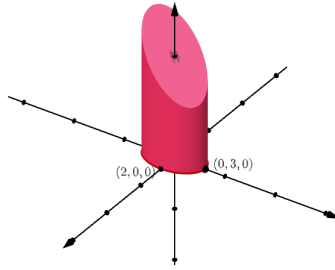


Figura 3.8: Ilustrando Exemplo 3.29

Ao longo desta seção S será sempre uma superfície mergulhada de $\mathbb{R}^3$ a qual será (a menos de um conjunto finito de curvas) imagem de uma parametrização, i.e., uma imersão $\varphi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$. Tal superfície será sempre orientada, ou seja admitirá um vetor normal unitário contínuo ao longo de S . Tal vetor normal unitário $\vec{N}$ pode ser descrito em termos da orientação como:

$$\vec{N} \circ \varphi(x_1, x_2) = c \frac{\varphi_{x_1} \times \varphi_{x_2}}{\|\varphi_{x_1} \times \varphi_{x_2}\|}$$

onde $|c| = 1$ (onde o sinal será escolhido de acordo com a orientação).

3.6.1. Fluxo através de superfícies e teorema clássico de Gauss

Começamos por relembrar os conceitos de integral de superfície e fluxo ao longo de superfície.

Dado uma função f definida na vizinhança de S podemos então definir a **integral de superfície** como

Definição 3.30.

$$\int_S f |\text{vol}_S| := \int_V f \circ \varphi \|\varphi_{x_1} \times \varphi_{x_2}\| dx$$

Observaremos no próximo capítulo que a mudança de variável garantirá que a definição acima não depende de parametrização.

Observação 3.31.

No caso em que $f = 1$ a integral é chamada **area de S** . No caso em que V é um

Continuação.

retângulo a interpretação da área de S segue direto da definição de integral dupla. Ou seja dado um $\epsilon > 0$ podemos encontrar uma partição P tal que

$$\left| \int_S |\text{vol}_S| - \sum_{V_i \in P} \|\varphi_{x_1} \times \varphi_{x_2}\| |\text{vol}(V_i)| \right| < \epsilon$$

sendo que o somatório pode ser interpretado como a área de uma superfície $\tilde{S}$ que é união de faces de paralelepíedros com arestas definidas por vetores coordenados φ_{x_1} e φ_{x_2} .

Exemplo 3.32.

Calculemos $\int_S (1 - x_3) |\text{vol}_S|$ onde

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3; x_3 = 1 - x_1^2 - x_2^2, x_3 \geq 0\}.$$

Passo 1: Estudamos a superfície. Identificamos que S é um gráfico e uma superfície de revolução ($x_3 = 1 - r^2$ onde $r^2 = x_1^2 + x_2^2$)

Passo 2: Escolhemos a técnica de integração. Baseado no Passo 1 e simplicidade do problema, utilizaremos a definição e escolheremos a parametrização de superfície de revolução, i.e.,

$$\varphi(r, \theta) = (\alpha_1(r) \cos(\theta), \alpha_1(r) \sin(\theta), \alpha_2(r))$$

onde $\alpha(r) = (\alpha_1(r), 0, \alpha_2(r))$ é a curva geratriz (ie., plana que é a interseção de S ao plano x_2). Como no nosso caso $\alpha(r) = (r, 0, 1 - r^2)$ e temos:

$$\varphi(\theta, r) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), 1 - r^2)$$

Passo 3: Armamos e resolvemos a integral dupla. Para tanto determinamos o domínio de integração $V = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, o elemento

Continuação.

de área $\|\varphi_r \times \varphi_\theta\| = r\sqrt{1+4r^2}$ e avaliamos $f \circ \varphi = 1 - (1 - r^2) = r^2$

$$\begin{aligned}\int_S f |\text{vol}_S| &= \int_U f \circ \varphi \|\varphi_{x_1} \times \varphi_{x_2}\| dx \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 (r\sqrt{1+4r^2}) dr d\theta \\ &= \pi \left(\frac{5\sqrt{5}}{12} + \frac{1}{60} \right)\end{aligned}$$

Se além disto tivermos um campo $\vec{F}$ definido na vizinhança de S **definimos o fluxo de $\vec{F}$ através de S** como a integral de superfície onde consideramos $f = \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle$ ou seja:

$$\begin{aligned}\int_S \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S &= \int_V \langle F, \vec{N} \rangle \circ \psi \|\psi_{x_1} \times \psi_{x_2}\| dx_1 dx_2 \\ &= c \int_V \langle F \circ \psi, \frac{\psi_{x_1} \times \psi_{x_2}}{\|\psi_{x_1} \times \psi_{x_2}\|} \rangle \|\psi_{x_1} \times \psi_{x_2}\| dx_1 dx_2 \\ &= c \int_V \langle F \circ \psi, \psi_{x_1} \times \psi_{x_2} \rangle dx_1 dx_2\end{aligned}$$

Exemplo 3.33.

Calculemos o fluxo $\int_S \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S$ orientada com vetor unitário com componente $\vec{e}_3$ negativa. onde:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= x_2 x_3 \vec{e}_1 + x_1 x_3 \vec{e}_2 + x_2 x_1 \vec{e}_3 \\ S &= \{x \in \mathbb{R}^3; x_3 = \sqrt{x_1 + x_2}, 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1, \}\end{aligned}$$

Passo 1: Estudamos a superfície. S é um gráfico, i.e, $x_3 = h(x_1, x_2)$, onde $h(x) = \sqrt{x_1 + x_2}$. Note que não é superfície de revolução (embora esteja contida em uma, o domínio do gráfico não é um disco).

Passo 2: Escolhemos a parametrização. Visto que é um gráfico temos:

$$\varphi(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \sqrt{x_1 + x_2})$$

com $V = \{x \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$

Continuação.

Passo 3: Armamos e resolvemos a integral dupla. Substituindo

$$F \circ \psi = \left(x_2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) \vec{e}_1 + \left(x_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) \vec{e}_2 + \left(x_2 x_1\right) \vec{e}_3$$

e calculando vetor normal (levando em conta a orientação):

$$\begin{aligned} -\|N\| \vec{N} \circ \varphi &= (\varphi_{x_1} \times \varphi_{x_2}) \\ &= -\frac{\partial h}{\partial x_1} \vec{e}_1 - \frac{\partial h}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ &= -\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right) \vec{e}_1 - \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right) \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{aligned}$$

temos que $\langle F \circ \psi, \vec{N} \rangle \|\vec{N}\| = -x_2 x_1$. O fluxo é:

$$\begin{aligned} \int_S \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S &= - \int_V \langle F \circ \psi, \psi_{x_1} \times \psi_{x_2} \rangle dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 x_2 x_1 dx_1 dx_2 \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Teorema 3.34. Teorema de Gauss

Sejam S superfície compacta (não necessariamente conexa) orientada por um vetor unitário normal $\vec{N}$ apontando para fora e U região delimitada por uma superfície S mergulhada (possivelmente união disjunta de superfícies mergulhadas S_i) ou seja $\partial U = S$. Considere um campo suave $\vec{F}$ definido em uma vizinhança contendo U . Então

$$\int_U \text{Div } \vec{F} \, dx = \int_S \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S.$$

Observação 3.35. Equação de continuidade

Consideremos um fluido com velocidade $\vec{v}$ e densidade ρ . Dado uma região aberta $U \subset \mathbb{R}^3$ contornada por uma superfície compacta S (i.e., $\partial U = S$) orientada por um vetor normal unitário $\vec{N}$ apontando para fora. Estamos aqui considerando o princípio que o fluido não é criado nem destruído, ou seja a quantidade que

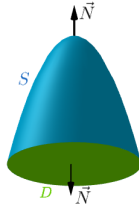


Figura 3.9: Ilustrando Exemplo 3.36

Continuação.

decrece em U deve coincidir com o fluxo através de S i.e.,:

$$-\frac{d}{dt} \int_U \rho dx = \int_S \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S$$

onde $\vec{F} = \rho \vec{v}$. Aplicando o teorema de Gauss temos:

$$\int_U -\frac{d}{dt} \rho dx = \int_S \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S = \int_U \text{Div } \vec{F} dx$$

A arbitrariedade na escolha de U garante que:

$$\frac{d}{dt} \rho + \text{Div} (\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.6.1)$$

Demonstraremos o Teorema 3.34 no próximo capítulo usando formas diferenciais e o conceito de variedade com bordo. Cabe aqui ressaltar que o teorema também vale para situações mais gerais do que as discutidas no próximo capítulo, quando S não é necessariamente variedade suave mas sim uma união finita de superfícies. Para demonstrar este caso mais geral faz-se necessário ir além de das variedades com bordo, e introduzir o conceito de cadeias, o que não faremos neste texto. Porém acreditamos que uma vez que o(a) leitor(a) tenha compreendido as ideias centrais de formas diferenciais em variedade com bordo, entenderá mais facilmente a generalização apresentada em topologia algébrica. Mesmo não demonstrando o teorema de Gauss para o caso em que S não é uma superfície e sim união de superfícies, apresentamos a seguir um exemplo desta situação, visto sua fundamental utilidade em cálculos e modelagens.

Exemplo 3.36.

Calcule $\int_S \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S$, onde

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_3 = 4 - x_1^2 - x_2^2, x_3 \geq 0\}$$

$$\vec{F} = (x_1 + \exp(x_2))\vec{e}_1 + (x_2x_3 + \sin^2(x_1))\vec{e}_2 + (5 + x_3^2)\vec{e}_3$$

$$0 < \langle \vec{N}, \vec{e}_3 \rangle$$

Passo 1: Estudamos a superfície. Nossa superfície S é um gráfico ($x_3 = h(x_1, x_2)$) e uma superfície de revolução ($x_3 = 4 - r^2, x_3 \geq 0$ onde $r^2 = x_1^2 + x_2^2$).

Passo 2: Baseado no Passo 1, escolhemos a técnica de integração. O campo $\vec{F}$ é em princípio um campo complicado para calcular o fluxo diretamente. Porém o cálculo do $\text{Div } \vec{F} = (1 + 3x_3)$ é de fato bem mais fácil. Assim optaremos em calcular o fluxo utilizando o teorema de Gauss, ou seja calculando o $\text{Div } \vec{F}$ na região U delimitada por S . Porém aqui temos um problema. A superfície S não é compacta, então não podemos utilizar o teorema diretamente. A questão é resolvida considerando a superfície $D = \{x \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$ (orientada com vetor normal apontando para baixo, i.e., $-\vec{e}_3$) e aplicando o teorema de Gauss a nova superfície $\tilde{S} = S \cup D$. Note que aqui a nova superfície $\tilde{S}$ não é uma variedade e sim união de 2 variedades, então estaremos aplicando uma versão mais geral do teorema de Gauss, vide Figura 3.9. Temos então:

$$\int_U \text{Div } \vec{F} dx = \int_{\tilde{S}} \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_{\tilde{S}} = \int_S \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S + \int_D \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_D$$

ou seja:

$$\int_S \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S = \int_U \text{Div } \vec{F} dx - \int_D \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_D$$

Passo 2.1 Afim de calcular $\int_U \text{Div } \vec{F} dx$, visto que S é uma superfície de revolução e gráfico, iremos escolher uma mudança de variável seguida por Fubini. Aqui o difeomorfismo sera parametrização cilíndrica:

$$\tilde{\varphi}(r, \theta, x_3) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), x_3)$$

Continuação.

com domínio

$$\tilde{V} = \{(r, \theta, x_3) | 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2, 0 \leq x_3 \leq 4 - r^2\}$$

Passo 2.2 Afim de calcular $\int_D \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_D$ utilizaremos a formula de fluxo e parametrização $\varphi(r, \theta) = (r \sin(\theta), r \cos(\theta))$ e domínio $V = \{(r, \theta); 0 \leq r \leq 2\}$ observando que $\langle \vec{F}, (-\vec{e}_3) \rangle \circ \varphi = -5$.

Passo 3: Armamos e resolvemos a integral.

Passo 3.1

$$\begin{aligned} \int_U \text{Div } \vec{F} dx &= \int_{\tilde{V}} (1 + 3x_3) r dx_3 d\theta dr \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{4-r^2} (1 + 3x_3) r dx_3 d\theta dr \\ &= 2\pi \int_0^2 r \left(x_3 + \frac{3}{2} x_3^2 \right) \Big|_0^{4-r^2} dr \\ &= 40\pi \end{aligned}$$

Passo 3.2

$$\begin{aligned} \int_D \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_D &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 -5r dr d\theta \\ &= -20\pi \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \int_S \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S &= \int_U \text{Div } \vec{F} dx - \int_D \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_D \\ &= 40\pi + 20\pi \\ &= 60\pi. \end{aligned}$$

3.6.2. Trabalho e os teoremas clássicos de Stokes e Green

Antes de enunciar o clássico teorema de Stokes, precisamos relembrar os objetos que aparecem em seu enunciados.

Definição 3.37.

Seja C uma curva suave (mergulhada) em $\mathbb{R}^m$ e f uma função suave definida em uma vizinhança C . A **integral de linha** ou integral de f ao longo de C é definida como:

$$\int_C f |\text{vol}_C| := \int_a^b f \circ \alpha(t) \|\alpha'(t)\| dt$$

onde $\alpha : [a, b] \rightarrow C$ uma parametrização regular de C (i.e., $\|\alpha'\| \neq 0$).

Quando temos um campo $\vec{F}$ suave em uma vizinhança da curva C podemos definir um tipo especial de integral de linha chamado trabalho. Para tanto precisamos também considerar em C uma **orientação** ou seja consideramos um campo unitário $\vec{T}$ tangente a C . O **trabalho** de $\vec{F}$ ao longo de C orientada por $\vec{T}$ é:

$$\begin{aligned} \int_C \langle \vec{F}, \vec{T} \rangle \text{vol}_C &= \int_a^b \left\langle \vec{F} \circ \alpha(t), \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \right\rangle \|\alpha'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \langle \vec{F} \circ \alpha(t), \alpha'(t) \rangle dt \end{aligned}$$

onde α é uma parametrização de C com $\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \vec{T} \circ \alpha$.

É possível demonstrar que integral de linha não depende da parametrização. Da mesma forma o trabalho de $\vec{F}$ ao longo da curva orientada C não depende da parametrização, somente de sua orientação. Note em particular que *trabalho ao longo da curva ligando p_0 a p é menos o trabalho da curva ligando p a p_0* .

Proposição 3.38. Campo conservativo

Considere um campo suave $\vec{F}$ em um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) $\vec{F}$ é um campo conservativo, i.e., existe uma função suave $f \in C^\infty(U)$ tal que $\vec{F} = \nabla f$;
- (b) o trabalho de $\vec{F}$ não depende do caminho ligando um ponto fixo $p_0 \in U$ a qualquer ponto $p \in U$.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b). Dado um campo $\vec{F} = \nabla f$ e um caminho C ligando dois pontos p_0 e p , considere uma parametrização $\gamma : [0, 1] \rightarrow C$ com mesma orientação de C . Então

$$\begin{aligned} \int_C \langle \vec{F}, \vec{T} \rangle \text{vol}_C &= \int_0^1 \langle \vec{F} \circ \gamma, \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (f \circ \gamma) dt \\ &= f \circ \gamma(1) - f \circ \gamma(0) \\ &= f(p) - f(p_0). \end{aligned}$$

Tal equação implica que o *trabalho de um campo conservativo depende apenas do ponto inicial e final e não do caminho que os liga*.

(b) $\Rightarrow$ (a). Por hipótese a função $f(p) = \int_C \langle \vec{F}, \vec{T} \rangle \text{vol}_C$ está bem definida sendo C uma curva qualquer ligando p_0 a p . Escolha $\epsilon > 0$ pequeno o suficiente tal que $\gamma(t) = p + t\epsilon\vec{e}_i \in U$ para qualquer $t \in [0, 1]$. Assim:

$$\begin{aligned} f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) &= \int_{C \cup \gamma} \langle \vec{F}, \vec{T} \rangle \text{vol}_C - \int_C \langle \vec{F}, \vec{T} \rangle \text{vol}_C \\ &= \int_{\gamma} \langle \vec{F}, \vec{T} \rangle \text{vol}_C \\ &= \int_0^1 f_i(p + t\epsilon\vec{e}_i) \epsilon dt \\ &= f_i(p) \epsilon + g(p) \end{aligned}$$

onde $g(\epsilon) = \epsilon \int_0^1 f_i(p + t\epsilon\vec{e}_i) - f_i(p) dt$. Visto que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{g}{\epsilon} = 0$ concluímos pela unicidade da derivada que $\frac{\partial}{\partial x_i} f(p) = f_i(p)$. A arbitrariedade de i e da escolha de $p \in U$ garantem assim que $\nabla f = \vec{F}$. □

A proposição acima é boa para encontrar a função potencial f uma vez que soubermos que o campo já é conservativo, porém não é muito eficiente para verificar que o campo é de fato conservativo, pois teríamos que de alguma forma garantir que o trabalho independe de integração ao longo de *todos os caminhos* ligando p_0 a qualquer p . A proposição a seguir garante uma forma eficiente para verificar que um campo é conservativo. Ela seguirá no caso $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ dos teoremas clássicos de Stokes e Green que veremos em breve. No caso geral ela será uma consequência do teorema de Stokes (para formas diferenciais) aplicado a uma superfície com bordo composto por 2 curvas ligando p_0 e p .

Proposição 3.39.

Seja $\vec{F} = \sum_{i=1}^m f_i \vec{e}_i$ um campo suave em uma aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ simplesmente conexo. ^a Então $\vec{F}$ é conservativo, se e somente se, $\frac{\partial}{\partial x_j} f_i = \frac{\partial}{\partial x_i} f_j$.

^aUm aberto U é simplesmente conexo se toda curva fechada pode ser deformado continuamente para um ponto.

Observação 3.40.

A proposição anterior se generaliza no próximo capítulo da seguinte forma: toda 1-forma ω em um aberto simplesmente conexo U , é fechada ($d\omega = 0$) se e somente se for exata (i.e., existe f tal que $df = \omega$).

O outro ingrediente que precisamos recordar é o de orientação induzida no bordo de uma superfície. Seja $V \subset \mathbb{R}^2$ um aberto relativamente compacto (i.e., tal que $\bar{V}$ é compacto) com bordo $\partial V = \cup_{i=1}^k C_i$ sendo uma união finita de curvas C_i sem auto-interseção e regulares. A orientação induzida em ∂V é definida da seguinte maneira: dado $x \in \partial V$, podemos encontrar $Q \in SO(2)$ tal que $Q\vec{e}_1$ é vetor normal ao bordo apontando para fora da região V . Então o campo $\vec{T}$ ao longo de ∂V que define a **orientação induzida** é definido como $\vec{T}(x) = Q\vec{e}_2(x)$.

Exemplo 3.41. Orientação induzida

Seja $V = \{x \in \mathbb{R}^2; \frac{1}{2} < \|x\| < 1\}$. Note que ∂V é união de dois círculos $C_1 = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| = \frac{1}{2}\}$ e $C_2 = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| = 1\}$. Quando dotamos o bordo com a orientação induzida, temos que C_1 é orientado no sentido horário e C_2 no sentido anti-horário.

Agora que entendemos orientação induzida no bordo $\partial V = \cup_{i=1}^k C_i$, estamos finalmente prontos para entender orientação do bordo de uma superfície S orientada por um vetor $\vec{N}$. Suponha que $V \subset \tilde{V} \subset \mathbb{R}^2$ e que S admite uma parametrização $\varphi : \tilde{V} \rightarrow S$ compatível com a orientação de S ou seja tal que $\vec{N} \circ \varphi = \frac{\varphi_{x_1} \times \varphi_{x_2}}{\|\varphi_{x_1} \times \varphi_{x_2}\|}$. A orientação de ∂S é então dada pela orientação das curvas $\varphi(C_i)$. Em particular se ∂S for conexo, a sua orientação coincide com a orientação induzida pela regra da mão direita em relação $\vec{N}$, vide Figura 3.10.

Estamos finalmente prontos para enunciar o teorema de Stokes.

Teorema 3.42. Stokes

Seja S superfície mergulhada orientada por um vetor normal $\vec{N}$ com bordo C (possivelmente desconexo) com orientação induzida $\vec{T}$. Dado um campo suave $\vec{F}$ definido na vizinha de S temos:

$$\int_S \langle \text{Rot } \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S = \int_C \langle \vec{F}, \vec{T} \rangle \text{vol}_C$$

Exemplo 3.43.

Calcule o trabalho $\int_C \langle \vec{F}, \vec{T} \rangle \text{vol}_C$ onde

$$\begin{aligned} \vec{F} &= (-x_2^3)\vec{e}_1 + (x_1^3)\vec{e}_2 + (-x_3^3)\vec{e}_3 \\ C &= \{x \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 = 3, x_1 + x_2 + x_3 = 1\} \end{aligned}$$

sendo C curva orientada no sentido anti-horário quando visto de cima (em relação ao eixo x_3).

Passo 1: Estudamos a curva Trata-se de uma curva contida na interseção de um plano e um cilindro, sendo assim fronteira de uma superfície S contido neste plano. Note que S é gráfico da função altura $h(x_1, x_2) = 1 - x_1 - x_2$ com domínio $D = \{x \in \mathbb{R}^2 | \|x\| \leq \sqrt{3}\}$.

Passo 2: baseado no Passo 1, vamos escolher a técnica de integração. Iremos aqui calcular o trabalho utilizando o teorema de Stokes. Para tanto iremos escolher o gráfico S descrito no passo 1, orientado pelo vetor normal $\vec{N}$ com terceira componente positiva, vide Figura 3.10. Em outras palavras desejamos calcular o fluxo definido no lado direito da equação:

$$\int_C \langle \vec{F}, \vec{T} \rangle \text{vol}_C = \int_S \langle \text{Rot } \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S$$

A superfície de S é parametrizada por $\varphi(x_1, x_2) = (x_1, x_2, h(x_1, x_2))$ e $(x_1, x_2) \in D$. Assim:

$$\varphi_{x_1} \times \varphi_{x_2} = \|N\| \vec{N} \circ \varphi = (-h_{x_1})\vec{e}_1 + (-h_{x_2})\vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

Note também que: $\text{Rot } \vec{F} = (3x_1^2 + 3x_2^2)\vec{e}_3$

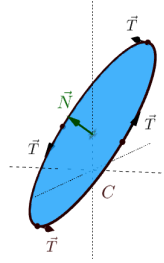


Figura 3.10: Ilustrando Exemplo 3.43

Continuação.

Passo 3: Armamos e resolvemos a integral. Baseado no Passo 2 temos:

$$\begin{aligned}
 \int_C \langle \vec{F}, \vec{T} \rangle \text{vol} C &= \int_S \langle \text{Rot } \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S \\
 &= \int_D \langle \text{Rot } \vec{F} \circ \varphi, \varphi_{x_1} \times \varphi_{x_2} \rangle dx \\
 &= \int_D (3x_1^2 + 3x_2^2) dx \\
 &\stackrel{(*)}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} 3r^2 r dr d\theta \\
 &= \frac{27\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

onde (*) utiliza a mudança de variável e parametrização polar.

Considerando S uma superfície plana, ou seja um aberto $V \subset \mathbb{R}^2$, vemos que o teorema clássico de Stokes implica diretamente o teorema clássico de Green.

Corolário 3.44. Green

Seja $V \subset \mathbb{R}^2$ aberto relativamente compacto sendo seu bordo $\partial V = C$ composto de um número finito de curvas suaves, com orientação induzida por $\vec{T}$. Dado um campo suave $\vec{F} = f_1 \vec{e}_1 + f_2 \vec{e}_2$ em uma vizinhança de V temos:

$$\int_V \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx = \int_C \langle \vec{F}, \vec{T} \rangle \text{vol}_C$$

De forma análoga ao teorema de Gauss, precisamos destacar que os teoremas clássicos de Stokes e de Green, também são verdadeiros quando as curvas que compõem o bordo de V são suave por partes (e não apenas regulares). Tal generalização em particular é utilizada no exercício a seguir.

Exercício 3.45.

Utilizando o teorema de Green e a Proposição 3.38 demonstre a Proposição 3.39 quando U é aberto em $\mathbb{R}^2$.

3.6.3. (*) Aplicações as Equações de Maxwell

Nosso modesto objetivo nesta subseção é observar como as formulações integrais das equações de Maxwell implicam suas formulações diferenciais, utilizando para isto os teoremas de Gauss e Stokes. Não iremos aqui discutir todos os conceitos da rica teoria de eletromagnetismo, nem toda história entre século XVIII e XIX que culminaram na síntese apresentada por Maxwell. Para tanto aconselhamos o(a) leitor(a) procurar a rica literatura da área.

Um **campo elétrico** $\vec{E}$ em Física é definido em cada ponto $x \in \mathbb{R}^3$ como a força experimentada por uma carga de teste estática em x , dividido pela carga de teste ou seja dado uma *carga teste estática* q em x **campo elétrico** $\vec{E}$ é definido como $\vec{F}_e = q\vec{E}$. O campo elétrico $\vec{E}$ pode ser estático (campo eletrostático), i.e., sem dependência temporal ou pode depender do tempo (sendo por exemplo a soma de um campo eletrostático com um campo elétrico induzido). Em particular toda carga q_0 induzi, pela **Lei de Coulomb**, um campo eletrostático $\vec{E}(x) = -\text{grad } \psi(x)$ onde $\psi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definido como $\psi(x) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0\|x\|}$ é chamado potencial eletrostático, e ϵ_0 é constante elétrica.

Observação 3.46. Lei de Gauss

A *formulação integral da Lei de Gauss* garante que: o fluxo de uma campo elétrico passando por uma superfície fechada qualquer é proporcional a carga elétrica contida no interior da região delimitada pela superfície. *Mais precisamente: dado uma distribuição continua de cargas elétricas com densidade de carga $\rho(x)$ em uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitada por uma superfície compacta S , i.e, $S = \partial\Omega$, então o campo elétrico $\vec{E}$ gerado pelas cargas é dado por:*

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega} \rho(x) dx = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

Continuação.

onde Q é a carga total de Ω e ϵ_0 é constante elétrica. Assim pela teorema de Gauss temos:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} dx = \int_S \langle \vec{E}, \vec{N} \rangle \operatorname{vol}_S = \int_{\Omega} \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x) dx$$

Visto que a equação acima vale para toda região podemos concluir que:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x) \quad (3.6.2)$$

Podemos também nos perguntar se o argumento acima pode nos dizer algo sobre os campos magnéticos. A grosso modo uma carga teste q em movimento induz uma força chamada força magnética. Mais precisamente, suponha que na vizinhança de x não tenhamos campos elétrico $\vec{E}$, então $\vec{B}(x, t)$ é definido como $\vec{F}(x, \vec{v}, t) = q\vec{v} \times \vec{B}$ onde $\vec{v}$ é a velocidade da partícula de carga teste q . Mais geralmente se na região também tivermos um campo elétrico a força sofrida pela partícula (força eletromagnética) é descrita pela lei de **Lorentz**.

$$\vec{F}(x, \vec{v}, t) = q(\vec{E}(x, t) + \vec{v} \times \vec{B}(x, t)).^1 \quad (3.6.3)$$

Como recordaremos em breve, correntes podem induzir campos magnéticos. Mas eles também são naturalmente induzido por imãs (materiais ferromagnético). Neste caso a grosso modo a disposição diferente dos seus eletrons em movimentos, permite um campo magnético resultante.

Observa-se também que ao dividir um imã em 2 pedaços, cada pedaço continua com polo norte e polo sul, não importa quão pequeno o imã seja. Físicos concluem assim que: *não existe (pelo menos até o presente) carga magnética*. Dito de outra maneira: **não existe monopolos magnético** (em escala macroscópica). Esta lei pode então ser descrita, utilizando o Teorema de Gauss, como no Exemplo 3.46, da seguinte forma:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (3.6.4)$$

onde $\vec{B}$ é campo magnético.

Vamos agora relacionar campos elétricos $\vec{E}(x, t)$ e $\vec{B}(x, t)$ por meio da seguinte lei.

Observação 3.47. Lei de Faraday-Maxwell

A lei de Faraday formulada por Maxwell garante que a circulação de campos elétrico em torno de um caminho fechado é igual ao ritmo de decaimento do

¹Observeq que $\vec{F}$ não é um campo em aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ e sim um campo no fibrado tangente TU .

Continuação.

campo magnético através da superfície limitada pelo caminho. Mais precisamente, considere uma superfície S orientada com bordo C com orientação induzida.

$$\mathcal{V} := \int_C \langle \vec{E}, \vec{T} \rangle \text{vol}_C = -\frac{d}{dt} \int_S \langle \vec{B}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S$$

Utilizando o teorema de Stokes podemos reformular a lei de Faraday como:

$$\int_S \text{Rot} \vec{E} \text{vol}_S = \int_S \langle -\frac{d}{dt} \vec{B}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S$$

A arbitrariedade de S implica:

$$\text{Rot} \vec{E} = -\frac{d}{dt} \vec{B} \quad (3.6.5)$$

A integral de linha $\mathcal{V} = \int_C \langle \vec{E}, \vec{T} \rangle \text{vol}_C$ acima é chamada **voltagem**. Relembremos que a voltagem é relacionada com a corrente elétrica (a grosso modo variação de fluxo de carga por uma seção) via a lei de Ohm. Mais precisamente a **corrente elétrica passando por uma superfície D** é definida como $I = \int_D \langle \vec{J}, \vec{N} \rangle \text{vol}_D$ onde $\vec{J}(x) = \rho(x) \vec{v}(x)$ é vetor corrente densidade de corrente. A **Lei de Ohm** garante que $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ onde σ é chamada condutividade. Quando consideramos um fio cilíndrico com seção D , comprimento l com condutividade homogênea (i.e., σ é constante) podemos conectar estes conceitos re obtendo a clássica Lei de Ohm que aprendemos no colégio. Mais precisamente, como estamos considerando que $\vec{E}$ é constante, perpendicular as seções transversais do fio, temos $\|\vec{E}\| = \frac{1}{l} \mathcal{V}$. Assim

$$I = |D| \|\vec{J}\| = \sigma |D| \|\vec{E}\| = \frac{\sigma |D|}{l} \mathcal{V}$$

Logo

$$\mathcal{V} = RI \text{ onde } R = \left(\frac{l}{\sigma |D|} \right)$$

Tendo recordado a Lei de Ohm e a relação entre voltagem e a corrente elétrica, podemos compreender melhor a relevância da Lei de Faraday a qual garante que a variação de campo magnético passando por um disco, induz uma voltagem. Substituindo a curva fechada por um solenoide, vemos que a variação de um campo elétrico gera corrente no solenoide. A grosso modo este é o princípio para gerar eletricidade em uma usina elétrica. De forma equivalente se tivermos uma corrente,

passando por um solenoide, isto gerará variação campo magnético. Utilizando esta ideia pode-se montar um motor elétrico.

Compreendida a lei de Faraday, é natural nos perguntarmos se existe uma equação recíproca, onde $\vec{E}$ e $\vec{B}$ trocariam de certa forma os seus papéis. Quando $\text{Rot} \vec{J} = 0$, por exemplo quando consideramos uma corrente não alternada atravessando um fio homogêneo, o experimento de Ampère garante que:

$$\int_C \langle \vec{B}, \vec{T} \rangle \text{vol}_C = \mu_0 I = \mu_0 \int_S \langle \vec{J}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S$$

onde μ_0 é constante de permeabilidade. Porém como proposto por Maxwell (e comprovado experimentalmente) por vezes $\text{Rot} \vec{J} \neq 0$ e será necessário acrescentar um termo a mais na equação acima.

Observação 3.48. Ampère-Maxwell

A formulação integral sugerida por Maxwell da equação de Ampère é:

$$\int_C \langle \vec{B}, \vec{T} \rangle \text{vol}_C = \mu_0 \int_S \langle \epsilon_0 \frac{d}{dt} \vec{E} + \vec{J}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S$$

Assim pelo teorema de Stokes temos:

$$\int_S \langle \text{Rot} \vec{B}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S = \int_C \langle \vec{B}, \vec{T} \rangle \text{vol}_C = \mu_0 \int_S \langle \epsilon_0 \frac{d}{dt} \vec{E} + \vec{J}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S$$

A arbitrariedade de S então garante que:

$$\text{Rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\epsilon_0 \frac{d}{dt} \vec{E} + \vec{J} \right) \quad (3.6.6)$$

Podemos agora juntar as Equações (3.6.2), (3.6.4), (3.6.5) e (3.6.6):

Definição 3.49. Equações de Maxwell

Continuação.

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{Rot} \vec{E} = -\frac{d}{dt} \vec{B}$$

$$\operatorname{Rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\epsilon_0 \frac{d}{dt} \vec{E} + \vec{J} \right)$$

onde $\vec{E}$ é campo elétrico, $\vec{B}$ é campo magnético, ϵ_0 é constante elétrica e μ_0 é constante de permeabilidade. As equações acima estão descritas no S.I (sistema Internacional de unidades).

Formas diferenciáveis

Formas diferenciais aparecem na *teoria de integração* (sintetizando e unificando vários resultados tais como teorema de Gauss, Stokes e Green) na descrição de *algumas EDPs*, em *Topologia Algébrica*, na síntese de *princípios de Mecânica e Teoria de Controle*, entre outros tópicos. Neste capítulo iremos introduzir formas diferenciáveis e dar uma ideia da demonstração do teorema de Stokes.

4.1. Motivação

Para fins de motivação, introduziremos nesta seção uma nova linguagem a partir de ferramentas conhecidas de Álgebra Linear e Cálculo. No final veremos como o Teorema de Green tem uma escrita natural usando essa linguagem. Destacamos que definiremos todos os objetos formalmente nas próximas seções e que nesta seção o(a) leitor(a) não precisa ficar muito preocupado com detalhes.

Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto. Para cada $p \in U$, vamos denotar por $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ o referencial de campos ortonormais canônicos e por $\{dx_1, dx_2\}_p$ sua base dual¹. Definimos uma **1-forma** sobre U como sendo uma combinação linear da base dual, ou seja,

$$\eta(p) = f_1(p)dx_1 + f_2(p)dx_2,$$

onde $f_1, f_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves. Assim, para cada $W = w_1\vec{e}_1(p) +$

¹Lembre que o **espaço dual** de um espaço vetorial $\mathbb{V}$ é o espaço vetorial de todos os funcionais lineares sobre $\mathbb{V}$. Além disso, no caso de dimensão finita, a **base dual** $\{dx_i\}_{1 \leq i \leq \dim(\mathbb{V})}$ satisfaz $dx_i(e_j) = \delta_{i,j}$ para todo $1 \leq i, j \leq \dim(\mathbb{V})$.

$w_2 \vec{e}_2(p) \in T_p U$ temos

$$\eta(p)(W) = f_1(p)dx_1(W) + f_2(p)dx_2(W) = f_1(p)w_1 + f_2(p)w_2.$$

Consideremos agora para cada $p \in U$ a aplicação bilinear e anti-simétrica $(dx_1 \wedge dx_2)_p : T_p \mathbb{R}^2 \times T_p \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$(dx_1 \wedge dx_2)_p(W_1, W_2) = \det \begin{bmatrix} dx_1(W_1) & dx_1(W_2) \\ dx_2(W_1) & dx_2(W_2) \end{bmatrix},$$

que mede a área do losango determinado pelos vetores W_1 e W_2 (vide Figura 4.1).
². Analogamente, podemos definir

$$\begin{aligned} (dx_2 \wedge dx_1)_p(W_1, W_2) &= \det \begin{bmatrix} dx_2(W_1) & dx_2(W_2) \\ dx_1(W_1) & dx_1(W_2) \end{bmatrix} \\ &= -(dx_1 \wedge dx_2)_p(W_1, W_2). \end{aligned}$$

Por fim, seguindo a mesma lógica das definições anteriores – e lembrando que o determinante de uma matriz com linhas linearmente dependentes é zero, definimos $dx_i \wedge dx_i = 0$ em U para $i \in \{1, 2\}$.

Tais definições sugerem que podemos estender $\wedge$ a um produto de 1-formas, conhecido como **produto wedge** (ou produto cunha). Para isso vamos pedir que, além das propriedades anteriores, tal produto também seja bilinear em ambos os fatores. Assim, dadas as 1-formas

$$F^\flat = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 \quad \text{e} \quad G^\flat = g_1 dx_1 + g_2 dx_2,$$

onde $f_i : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $g_i : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves, $i \in \{1, 2\}$, temos

$$\begin{aligned} F^\flat \wedge G^\flat &= (f_1 dx_1 + f_2 dx_2) \wedge (g_1 dx_1 + g_2 dx_2) \\ &= (f_1 dx_1) \wedge (g_1 dx_1) + (f_1 dx_1) \wedge (g_2 dx_2) \\ &\quad + (f_2 dx_2) \wedge (g_1 dx_1) + (f_2 dx_2) \wedge (g_2 dx_2) \\ &= f_1 g_1 dx_1 \wedge dx_1 + f_1 g_2 dx_1 \wedge dx_2 + f_2 g_1 dx_2 \wedge dx_1 + f_2 g_2 dx_2 \wedge dx_2 \\ &= (f_1 g_2 - f_2 g_1) dx_1 \wedge dx_2. \end{aligned}$$

Observe que a definição acima equivale a definirmos $F^\flat \wedge G^\flat$ pontualmente por

$$(F^\flat \wedge G^\flat)_p(W_1, W_2) = \det \begin{bmatrix} F^\flat(p)(W_1) & F^\flat(p)(W_2) \\ G^\flat(p)(W_1) & G^\flat(p)(W_2) \end{bmatrix}$$

²Aprendemos em Álgebra Linear que $(dx_1 \wedge dx_2)_p$ é a única aplicação bilinear e anti-simétrica satisfazendo $(dx_1 \wedge dx_2)_p(e_1, e_2) = 1$.

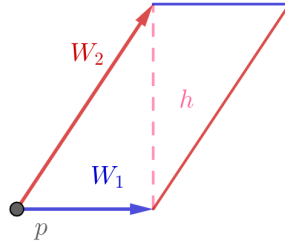


Figura 4.1: $\det \begin{bmatrix} b & a \\ 0 & h \end{bmatrix} = b \cdot h = \text{area}$

Uma aplicação $p \rightarrow f(p)(dx_1 \wedge dx_2)_p$ será chamada **2-forma** em U onde $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave (usualmente chamada de 0-forma).

Um exemplo conhecido de uma 1-forma é a diferencial de uma função $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suave. Ou seja, diferenciando a 0-forma f obtemos a 1-forma $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2$. De forma análoga podemos definir a **diferencial** de uma 1-forma $F^b = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$ como sendo a 2-forma

$$dF^b := df_1 \wedge dx_1 + df_2 \wedge dx_2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} dF^b &= df_1 \wedge dx_1 + df_2 \wedge dx_2 \\ &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \right) \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \right) \wedge dx_2 \\ &= -\frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \text{Rot}(\vec{F}) dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

onde $\vec{F} = f_1 \vec{e}_1 + f_2 \vec{e}_2$ e $\text{rot}(\vec{F}) := \det \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ f_1 & f_2 \end{bmatrix}$.

Consideramos agora uma curva C suave, mergulhada, simples, sem auto-interseção e com orientação anti-horária.

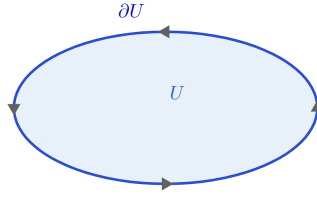


Figura 4.2: Região U e ∂U com orientações compatíveis

Dado uma 1-forma $F^\flat = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$ definimos a integral de $F^\flat$ sobre C como sendo o trabalho do campo $\vec{F}$ ao longo de C^3 , ou seja,

$$\int_C F^\flat := \int_C \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$

Definimos também a integral de uma 2-forma $\eta = h dx_1 \wedge dx_2$ sobre U como sendo a integral dupla de h sobre U , ou seja,

$$\int_U \eta = \int_U h dx_1 dx_2.$$

Suponha agora que C é uma curva fechada e que U é a região interna da curva. Diremos que a orientação (anti-horária) de C induz **uma orientação** em $C = \partial U$ (compatível com orientação canônica de U).

Assim, o clássico teorema de Green:

$$\int_U \text{rot} \vec{F} dx_1 dx_2 = \int_{\partial U} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

pode ser reescrito na linguagem de formas como

$$\int_U dF^\flat = \int_{\partial U} F^\flat.$$

Neste capítulo veremos, no **Teorema de Stokes** (vide Teorema 4.32), como a relação anterior também é válida em variedades sob certas hipóteses.

³Lembre que se $\vec{F}$ representa um campo de forças, então o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ ao deslocar uma partícula ao longo de C é dado por

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_0^1 \langle \vec{F}(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle dt, \quad (4.1.1)$$

onde $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma parametrização de C que respeita a orientação.

4.2. Produto wedge e formas

4.2.1. Produto wedge

Dado um espaço vetorial $\mathbb{V}$, lembremos que um $(0, k)$ -**tensor** τ é simplesmente um k -funcional linear $\tau: \mathbb{V} \times \cdots \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$. O espaço vetorial dos $(0, k)$ tensores – aqui denotado por $T^k(\mathbb{V})$ – admite um **produto tensorial**. Dados $\tau_1 \in T^k(\mathbb{V})$ e $\tau_2 \in T^l(\mathbb{V})$, seu produto tensorial $\tau_1 \otimes \tau_2 \in T^{k+l}(\mathbb{V})$ é definido como

$$(\tau_1 \otimes \tau_2)(W_1, \dots, W_k, W_{k+1}, \dots, W_{k+l}) := \tau_1(W_1, \dots, W_k) \tau_2(W_{k+1}, \dots, W_{k+l}).$$

onde $W_i \in \mathbb{V}$. Um tensor $\tau \in T^k(\mathbb{V})$ é chamado **simétrico** se ele for invariante por permutações, ou seja

$$\tau(W_1, \dots, W_k) = \tau(W_{\sigma(1)}, W_{\sigma(2)}, \dots, W_{\sigma(k)}),$$

para todas permutações σ no grupo de permutações $\mathfrak{S}_k$. Um tensor $\tau \in T^k(\mathbb{V})$ será chamado **anti-simétrico** ou **alternado** se

$$\tau(W_1, \dots, W_k) = \text{sgn}(\sigma) \tau(W_{\sigma(1)}, W_{\sigma(2)}, \dots, W_{\sigma(k)}),$$

$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_k$, onde $\text{sgn}(\sigma)$ denota o sinal da permutação σ . Denotaremos por $\Lambda^k(\mathbb{V})$ o espaço dos k tensores alternados.

Exemplo 4.1.

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial de dimensão m e B uma base de $\mathbb{V}$. Defina

$$\det : \overbrace{\mathbb{V} \times \mathbb{V} \times \cdots \times \mathbb{V}}^{m\text{-vezes}} \rightarrow \mathbb{R}$$

por

$$\det(W_1, W_2, \dots, W_m) = \det \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1m} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m1} & w_{m2} & \cdots & w_{mm} \end{pmatrix},$$

Continuação.

onde w_{ij} é a i -ésima coordenada do vetor W_j na base B . Segue das propriedades dos determinantes que $\det \in \Lambda^m(\mathbb{V})$.

Vamos definir a projeção $\text{Alt}_k: T^k(\mathbb{V}) \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{V})$ como:

$$\text{Alt}_k(\tau)(W_1, \dots, W_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \text{sgn}(\sigma) \tau(W_{\sigma(1)}, W_{\sigma(2)}, \dots, W_{\sigma(k)}),$$

e com tal projeção podemos definir o **produto wedge** (ou **produto cunha**). Dados $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{V})$ e $\eta \in \Lambda^l(\mathbb{V})$ o produto wedge $\omega \wedge \eta \in \Lambda^{k+l}(\mathbb{V})$ é:

$$\omega \wedge \eta := \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}_{(k+l)}(\omega \otimes \eta).$$

Observação 4.2.

Se $\omega_1, \dots, \omega_k \in \Lambda^1(\mathbb{V}) = T^1(\mathbb{V})$ são $(0, 1)$ -tensores, então

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)(W_1, \dots, W_k) = \det \begin{pmatrix} \omega_1(W_1) & \omega_1(W_2) & \dots & \omega_1(W_k) \\ \omega_2(W_1) & \omega_2(W_2) & \dots & \omega_2(W_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_k(W_1) & \omega_k(W_2) & \dots & \omega_k(W_k) \end{pmatrix}$$

Em particular, segue da observação acima (ou direto da definição) que se $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ então

$$\omega_1 \wedge \omega_2(W_1, W_2) = \omega_1(W_1)\omega_2(W_2) - \omega_1(W_2)\omega_2(W_1)$$

Proposição 4.3.

Seja $\mathbb{V}$ espaço vetorial de dimensão m . Para todo $\omega, \xi \in \Lambda^k(\mathbb{V})$, $\eta \in \Lambda^l(\mathbb{V})$, $\theta \in \Lambda^m(\mathbb{V})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

1. $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$;
2. $(\omega + \xi) \wedge \eta = \omega \wedge \eta + \xi \wedge \eta$;
3. $(\lambda\omega) \wedge \eta = \lambda(\omega \wedge \eta)$;
4. $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl}\eta \wedge \omega$.

Além disto, se $\omega_1, \dots, \omega_m$ é uma base de $T^1(\mathbb{V})$, então $\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_r}$, $1 \leq i_1 <$

Continuação.

$\dots < i_r \leq m$, se torna uma base de $\Lambda^r(\mathbb{V})$ e, portanto, $\Lambda^r(\mathbb{V})$ tem dimensão $\binom{m}{r}$. Em particular, $\Lambda^m(\mathbb{V}) \cong \mathbb{R}$.

Note que $\Lambda^m(\mathbb{V}) \cong \mathbb{R}$ implica que $\dim(\Lambda^m(\mathbb{V})) = 1$ e, portanto,

$$\Lambda^m(\mathbb{V}) = \{c \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_m; c \in \mathbb{R}\},$$

onde $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$ é a base dual de uma base de V .

Observação 4.4.

Como consequência do resultado anterior podemos descrever os tensores alternados de $\mathbb{R}^3$:

- (a) para cada $\omega \in T^1(\mathbb{R}^3)$ existe um único vetor $Z \in \mathbb{R}^3$ tal que $\omega(W) = \langle W, Z \rangle$ para todo $W \in \mathbb{R}^3$, o que segue do Teorema de Representação de Riesz. Cabe aqui destacar a dependência do produto interno para associar Z com ω .
- (b) para cada $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ existe um único vetor $Z \in \mathbb{R}^3$ tal que $\omega(W_1, W_2) = \det(Z, W_1, W_2)$ para todo $W_1, W_2 \in \mathbb{R}^3$;
- (c) para cada $\omega \in \Lambda^3(\mathbb{R}^3)$ existe um único $c \in \mathbb{R}$ tal que $\omega(W_1, W_2, W_3) = c \det(W_1, W_2, W_3)$ para todo $W_1, W_2, W_3 \in \mathbb{R}^3$;

4.2.2. Formas diferenciais

Neste ponto estamos interessados em estudar tensores alternados definidos sobre o espaço tangente a uma variedade diferenciável M . Como no caso de campos diferenciáveis, gostaríamos que o tensor alternado varie (suavemente) sobre a variedade. Definimos, assim, os conceitos de campos tensoriais e de formas diferenciais sobre variedades.

Definição 4.5.

Um $(0, k)$ **campo tensorial suave** em uma variedade M é uma aplicação

$$\tau : \overbrace{\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}^{k\text{-vezes}} \rightarrow C^\infty(M)$$

Continuação.

definida por

$$\tau(\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_k)(p) = \tau_p(\vec{X}_1(p), \dots, \vec{X}_k(p)),$$

onde τ_p é um $(0, k)$ -tensor para todo $p \in M$ (ou seja, $\tau_p \in T^k(T_p M)$).

Em outras palavras, um $(0, k)$ campo tensorial suave é uma seção do fibrado tensorial $TM^* \otimes \dots \otimes TM^*$.

Definição 4.6.

Uma **k -forma diferencial** em M é um $(0, k)$ -campo tensorial suave ω em M tal que ω_p é alternado para cada $p \in M$ (ou seja, $\omega_p \in \Lambda^k(T_p M)$). Denotaremos o conjunto das k -formas (diferenciais) em M por $\Omega^k(M)$.

Analogamente, uma k -forma diferencial é uma seção do fibrado dos $(0, k)$ -tensores alternados $\Lambda^k TM^*$.

Podemos agora definir o produto wedge $\wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^l(M) \rightarrow \Omega^{k+l}(M)$ como

$$(\omega \wedge \eta)_p := \omega_p \wedge \eta_p$$

Como consequência da Proposição 4.3 temos que se (U, ψ) é uma carta de M , então $\omega \in \Omega^k(M)$ pode ser descrita localmente como

$$\omega|_U = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \quad (4.2.1)$$

onde, $a_{i_1, \dots, i_k} : U \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves e $\{dx_i\}$ são **1-formas duais** aos campos coordenados $\{\frac{\partial}{\partial x_j}\}$, i.e.,

$$dx_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) (p) = (dx_i)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right) = \delta_{ij}$$

Vemos a seguir todos os exemplos das formas diferenciais em $\mathbb{R}^3$, vide Observação 4.4.

Exemplo 4.7. Formas em $\mathbb{R}^3$

Sejam U aberto em $\mathbb{R}^3$, $\vec{F} \in \mathfrak{X}(U)$ com $\vec{F} = \sum_{i=1}^3 f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $h \in C^\infty(U)$ e $\{dx_i\}$ a base dual dos campos coordenados. Então podemos construir:

Continuação.

- (a) uma 1-forma em U como $\mathbf{g}_F^0(W) = \langle W, \vec{F} \rangle$, ou seja, $\mathbf{g}_F^0 = \sum f_i dx_i$.
- (b) uma 2-forma em U como

$$\begin{aligned}\nu_F(W_1, W_2) &= \det(\vec{F}, W_1, W_2) \\ &= \det \begin{bmatrix} f_1 & w_{11} & w_{12} \\ f_2 & w_{21} & w_{22} \\ f_3 & w_{31} & w_{32} \end{bmatrix},\end{aligned}$$

ou seja, $\nu_F = f_1(dx_2 \wedge dx_3) - f_2(dx_1 \wedge dx_3) + f_3(dx_1 \wedge dx_2)$.

Lembremos que:

$$(dx_2 \wedge dx_3)(W_1, W_2) = \det \begin{bmatrix} dx_2(W_1) & dx_2(W_2) \\ dx_3(W_1) & dx_3(W_2) \end{bmatrix}$$

$$(dx_1 \wedge dx_3)(W_1, W_2) = \det \begin{bmatrix} dx_1(W_1) & dx_1(W_2) \\ dx_3(W_1) & dx_3(W_2) \end{bmatrix}$$

$$(dx_1 \wedge dx_2)(W_1, W_2) = \det \begin{bmatrix} dx_1(W_1) & dx_1(W_2) \\ dx_2(W_1) & dx_2(W_2) \end{bmatrix}$$

- (c) uma 3-forma em U como

$$\begin{aligned}\omega(W_1, W_2, W_3) &= h \det(W_1, W_2, W_3) \\ &= h \det \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix} \\ &= h \det \begin{bmatrix} dx_1(W_1) & dx_1(W_2) & dx_1(W_3) \\ dx_2(W_1) & dx_2(W_2) & dx_2(W_3) \\ dx_3(W_1) & dx_3(W_2) & dx_3(W_3) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

ou seja $\omega = h dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$.

O exercício anterior motiva já fixarmos uma notação

$$\text{vol}_{\mathbb{R}^3} = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \quad (4.2.2)$$

Note que $\text{vol}_{\mathbb{R}^3}(W_1, W_2, W_3)_p$ mede o volume determinado pelo paralelogramo que tem como arestas os vetores $W_i \in T_p\mathbb{R}^3$, quando $\{W_i\}$ tem mesma orientação que a base canônica $\{e_i\} \subset T_p\mathbb{R}^3$.⁴ Discutiremos mais sobre o conceito de volume em variedades (não necessariamente $\mathbb{R}^3$) quando formos introduzir o conceito de orientação em variedades, vide Subseção 4.4.1.

Exercício 4.8.

Sejam U aberto em $\mathbb{R}^3$ e $\xi = \{\vec{\xi}_i\}_{i=1}^3$ um **referencial ortonormal** em U ou seja campos de vetores tais que para cada $x \in U$ temos que $\{\vec{\xi}_i(x)\}_{i=1}^3$ é base ortonormal de $T_x\mathbb{R}^3$. Suponha que ξ tenha mesma orientação do referencial canônico $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^3$, ou seja, para cada $x \in U$, $\{\vec{\xi}_i(x)\}$ e $\{\vec{e}_i(x)\}$ tem mesma orientação em $T_x\mathbb{R}^3$. Considere as 1-formas $\{\theta_i\}_{i=1}^3$ duais a ξ ou seja $\theta_i(\vec{\xi}_j) = \delta_{ij}$. Demonstre que

$$\text{vol}_{\mathbb{R}^3} = \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3.$$

O Exemplo 4.7 também nos motiva a introduzir a notação de **contração**: dado um campo $\vec{F} \in \mathfrak{X}(M)$ e uma k -forma $\omega \in \Omega^k(M)$ definimos a $k-1$ forma (contração de ω por $\vec{F}$) como

$$i_{\vec{F}}\omega(W_1, \dots, W_{k-1}) = \omega(\vec{F}, W_1, \dots, W_{k-1})$$

O próximo exercício ilustra o significado de $i_{\vec{e}_3}\text{vol}_{\mathbb{R}^3} = dx_1 \wedge dx_2$ e mais geralmente $i_{\vec{F}}\text{vol}_{\mathbb{R}^3}$.

Exercício 4.9.

Seja $\vec{N}$ um campo unitário em uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^3$ e a distribuição $\mathcal{H}$ em U ortogonal ao campo $\vec{N}$. Defina para cada $x \in U$ a projeção ortogonal $\pi_x : T_x\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{H}_x$. Dado um ponto $p \in \mathbb{R}^3$ e uma base $\{W_1, W_2, \vec{N}(p)\}$ de $T_p\mathbb{R}^3$, definamos $A := i_{\vec{N}}\text{vol}_{\mathbb{R}^3}(W_1, W_2)$. Verifique que A é a área do paralelogramo com arestas $\pi_p(W_1)$ e $\pi_p(W_2)$ quando a orientação de $\{W_1, W_2, \vec{N}(p)\}$ é a mesma da base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$. Observe que caso

⁴Lembremos que duas bases induzem a mesma orientação se a matriz mudança de base tem determinante positivo.

Continuação.

as orientações sejam diferentes então $i_{\vec{F}} \text{vol}_{\mathbb{R}^3}(W_1, W_2) = -A$, vide Figura 4.3.

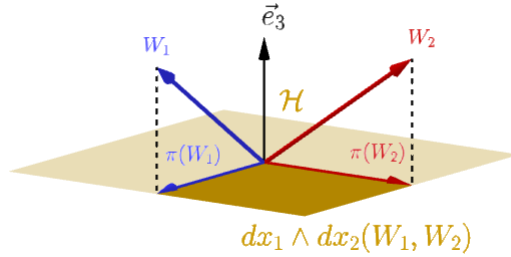


Figura 4.3: ilustra Exercício 4.9

Podemos agora criar uma aplicação linear entre k formas de variedades. Mais precisamente, uma aplicação suave entre variedades, $\phi : M^m \rightarrow N^n$ induz uma aplicação linear $\phi^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ via **pull back** dos tensores induzidos em no espaço tangente, i.e,

$$(\phi^*\omega)_p(W_1, \dots, W_k) := \omega_{\phi(p)}(d\phi_p W_1, \dots, d\phi_p W_k), \quad W_i \in T_p M. \quad (4.2.3)$$

O pullback também preserva o produto wedge, e assim induz um homomorfismo.

Proposição 4.10.

Seja $\phi : M \rightarrow N$ uma aplicação suave entre variedades. Então, para toda $\omega \in \Omega^k(N)$ e $\eta \in \Omega^l(N)$ temos

$$\phi^*(\omega \wedge \eta) = (\phi^*\omega) \wedge (\phi^*\eta).$$

Um dos primeiros exemplos de pullback está relacionado ao trabalho de um campo.

Exercício 4.11.

Dado um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, uma curva parametrizada $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e um campo $\vec{F} \in \mathfrak{X}(U)$ podemos definir: $\mathbf{g}_F^0(\cdot) = \langle \vec{F}, \cdot \rangle$. Verifique que

Continuação.

$$\alpha^* g_F^0 = \langle \vec{F}(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle dt.$$

A próxima proposição será útil quando revisarmos mudança de variáveis (agora utilizando a linguagem de formas)

Proposição 4.12.

Seja $A \in M^{m \times m}(\mathbb{R})$. Se ω é $(0, m)$ -tensor alternado em $\mathbb{R}^m$, então

$$\omega(AW_1, AW_2, \dots, AW_m) = \det(A) \omega(W_1, W_2, \dots, W_m).$$

Em particular se $\phi : U_0 \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U_1 \subset \mathbb{R}^m$ é uma aplicação suave e ω é uma m -forma $f dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_{m-1} \wedge dx_m$, então

$$\phi^* \omega = f \circ \phi \det(d\phi) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_{m-1} \wedge dx_m.$$

Demonstração. Mantendo em mente que $(dx_i)_0$ atua em $\mathbb{R}^m$ e dx_i é uma forma em U vamos passar a utilizar uma única notação afim de facilitar a exposição. Sabemos pela Proposição 4.3 que $\dim \Lambda^m(\mathbb{R}^m) = 1$ e assim existem $b, c \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\omega = b dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m \quad (4.2.4)$$

$$\omega(A(\cdot), \dots, A(\cdot)) = c dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m((\cdot), \dots, (\cdot)) \quad (4.2.5)$$

Equação (4.2.5) implica:

$$\omega(Ae_1, \dots, Ae_m) = c \quad (4.2.6)$$

enquanto (4.2.4) implica

$$\omega(Ae_1, \dots, Ae_m) = b \det A \quad (4.2.7)$$

Assim segue das Equações (4.2.6) e (4.2.7) que $c = b \det A$. Logo pelas Equações (4.2.4) e (4.2.5) concluímos

$$\omega(A(\cdot), \dots, A(\cdot)) = b \det A dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m = \det A \omega.$$

□

Terminamos esta seção com um exercício que será interessante para compreender (localmente) fluxos de campos através de superfícies e que ilustra os conceitos de contração e pullback.

Exercício 4.13.

Sejam $\vec{F} = \sum_{i=1}^3 f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, onde $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves.

- (a) Definindo $\nu_F := i_{\vec{F}} \text{vol}_{\mathbb{R}^3}$, verifique que

$$\nu_F(W_1, W_2)_p = \langle \vec{F}, W_1 \times W_2 \rangle$$

para todo campo $\vec{W}_i \in \mathfrak{X}(U)$.

- (b) Considere um mergulho:

$$\begin{aligned} \varphi : V \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (v_1, v_2) &\longrightarrow (\varphi_1(v_1, v_2), \varphi_2(v_1, v_2), \varphi_3(v_1, v_2)) \end{aligned}$$

Mostre que

$$\varphi^* \nu_F = \left\langle \vec{F} \circ \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial v_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v_2} \right\rangle dv_1 \wedge dv_2.$$

4.3. Derivada exterior

Desejamos nesta seção generalizar a definição de derivada de uma 1-forma apresentada na Seção 4.1 a derivada de uma k -forma sobre uma variedade. Mais precisamente, queremos definir um operador $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ de maneira que, dada uma forma ω descrita em coordenadas locais em uma carta (U, ψ) por (recorde Eq. (4.2.1))

$$\omega|_U = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

tenhamos:

$$d\omega|_U = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} da_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \quad (4.3.1)$$

A existência e unicidade deste operador é garantida na proposição a seguir:

Proposição 4.14.

Existe um único operador $d : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$ atendendo:

- (a) Se $f \in \Omega^0(M)$, então $df \in \Omega^1(M)$ é a diferencial da função $f \in C^\infty(M)$, i.e.,

$$df_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p dx_i.$$

- (b) A composição $\Omega^k(M) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^{k+2}(M)$ é identicamente nula, i.e. $d^2 = 0$;
- (c) $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^j \omega \wedge d\eta$, para todos $\omega \in \Omega^j(M)$ e $\eta \in \Omega^{k-j}(M)$.

O operador caracterizado na proposição anterior é chamado de **derivada exterior**. Além das propriedades descritas nessa proposição, a derivada exterior satisfaz a seguinte propriedade fundamental:

Proposição 4.15.

Dadas duas variedades M e N , e uma aplicação suave $\psi : M \rightarrow N$, temos

$$\psi^* \circ d = d \circ \psi^*.$$

Proposição 4.16.

Dado uma k -forma ω e $k+1$ campos suaves $\vec{X}_0, \dots, \vec{X}_k \in \mathfrak{X}(M)$ temos:

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, \dots, X_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i X_i \bullet \omega(X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_k) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_k), \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

onde $\widehat{X_i}$ denota a omissão daquele elemento X_i .

Em particular se $\omega \in \Omega^1(M)$ temos:

$$d\omega(X_0, X_1) = X_0 \bullet \omega(X_1) - X_1 \bullet \omega(X_0) - \omega([X_0, X_1])$$

O exercício a seguir descreve (a menos de constantes) as equações de Maxwell para o eletromagnetismo (quando $\rho = 0$ e $\vec{J} = 0$) em termos da 2-forma denominada tensor eletromagnético. Ao trabalhar neste exercício, o(a) leitor(a) terá a possibilidade de utilizar as seguintes propriedades: $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$, a Equation (4.3.1) e e que $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$.

Exercício 4.17.

Seja U_0 aberto em $\mathbb{R}^3$ e considere campos não autônomos

$$\vec{E}(t, \cdot) = \sum_{i=1}^3 E_i(t, \cdot) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\vec{B}(t, \cdot) = \sum_{i=1}^3 B_i(t, \cdot) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Defina $U = \mathbb{R} \times U_0$ e $F \in \Omega^2(U)$ como $F([t, x], [\tilde{t}, \tilde{x}]) = [t, x]^t A[t, x]$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Descreva F em termos de dt e dx_i ;

(b) verifique que

$$dF = 0 \Leftrightarrow \begin{aligned} \text{Rot } \vec{E} &= -\frac{d\vec{B}}{dt} \\ \text{div}(\vec{B}) &= 0 \end{aligned}$$

(c) seja $\epsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 0; \\ -1 & \text{se } i = 1, 2, 3. \end{cases}$

e considere o operador linear $*$ $\Omega^2(\mathbb{R}^4) \rightarrow \Omega^2(\mathbb{R}^4)$ definido como

$$*dx_i \wedge dx_j = \epsilon_i \epsilon_j dx_k \wedge dx_l,$$

onde (i, j, k, l) é uma permutação par de $(0, 1, 2, 3)$ e $dt =$

Continuação.

dx_0 . Verifique que:

$$d * F = 0 \Leftrightarrow \begin{aligned} \text{Rot } \vec{B} &= \frac{d \vec{E}}{dt} \\ \text{div}(\vec{E}) &= 0 \end{aligned}$$

Observação 4.18.

Como comentando anteriormente, o exercício acima descreve (a menos de constantes) as equações de Maxwell para o eletromagnetismo, no caso em que a densidade de carga $\rho = 0$ e o vetor $\vec{J} = 0$. Para obter o caso geral (novamente sem nos preocuparmos com as constantes) precisamos apenas considerar a definição mais geral do operador linear $* : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{4-k}(U)$ ^a

$$*(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) = \text{sgn}(i_1, \dots, i_n) \epsilon_{i_1} \cdots \epsilon_{i_p} dx_{i_{p+1}} \cdots \wedge dx_{i_n}$$

Com esta definição temos (com calculos análogos) que:

$$\begin{aligned} * d * F = \hat{J} &\Leftrightarrow \begin{aligned} \text{Rot } \vec{B} &= \vec{J} + \frac{d \vec{E}}{dt} \\ \text{div}(\vec{E}) &= \rho \end{aligned} \end{aligned}$$

onde $\hat{J} = -\rho dx_0 + J_1 dx_1 + J_2 dx_2 + J_3 dx_3$.

^ao operador estrela de Hodge associado a métrica de Lorentz $g_0 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$

A seguir uma proposição importante que permitirá utilizarmos o teorema de Stokes para concluir teoremas de integração de Cálculo III (que envolvem divergente e rotacional).

Proposição 4.19.

Sejam U aberto em $\mathbb{R}^3$ e campo $\vec{F} = \sum_{i=1}^3 f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{X}(U)$. Definamos a 1-forma $\mathbf{g}_F^0 := \langle \vec{F}, (\cdot) \rangle$ Temos então que:

$$(a) \quad d(i_{\vec{F}} \text{vol}_{\mathbb{R}^3}) = \text{div } \vec{F} \text{vol}_{\mathbb{R}^3}.$$

$$(b) \quad d\mathbf{g}_F^0 = i_{\text{rot}\vec{F}} \text{vol}_{\mathbb{R}^3}$$

Demonstração. Recordemos primeiro as propriedades que vamos utilizar, vide Proposições 4.3, 4.14 e Exercício 4.13.

$$(i) \quad dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i,$$

$$(ii) \quad df_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j,$$

$$(iii) \quad i_{\vec{F}} \text{vol}_{\mathbb{R}^3} = f_1 dx_2 \wedge dx_3 - f_2 dx_1 \wedge dx_3 + f_3 dx_1 \wedge dx_2$$

Item (a)

$$\begin{aligned} d(i_{\vec{F}} \text{vol}_{\mathbb{R}^3}) &= df_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - df_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + df_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &\stackrel{(ii)}{=} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_1}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_2 \wedge dx_3 - \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_2}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\ &\quad + \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_3}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &\stackrel{(i)}{=} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\ &\quad + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &\stackrel{(i)}{=} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &= \text{div}(\vec{F}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \end{aligned}$$

Item (b)

$$\begin{aligned}
d\mathbf{g}_F^0 &= \sum_{i=1}^3 df_i \wedge dx_i \\
&\stackrel{(ii)}{=} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \right) \wedge dx_1 \\
&\quad + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3 \right) \wedge dx_2 \\
&\quad + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx_3 \right) \wedge dx_3 \\
&\stackrel{(i)}{=} \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \right) dx_1 \wedge dx_3 \\
&\quad + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 \\
&\stackrel{(iii)}{=} i_{\text{rot}\vec{F}} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3
\end{aligned}$$

□

4.4. Integração e teorema de Stokes

Seja $\omega = f dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_m$, uma m -forma com suporte compacto em $\mathbb{R}^m$.

Defina

$$\int_U \omega := \int_U f dx_1 \dots dx_m.$$

Se $\phi: V \rightarrow U$ é um difeomorfismo entre dois abertos de $\mathbb{R}^m$ que preserva orientação (i.e, tal que $\det D\phi > 0$), então por mudança de variáveis temos:

$$\int_U \omega = \int_V \phi^* \omega. \quad (4.4.1)$$

Como veremos a seguir esta equação será peça fundamental para integração em variedades orientáveis.

4.4.1. Orientação e forma volume

Definição 4.20.

Dizemos que uma m -forma ω em uma variedade M^m é uma **forma volume** em M se ela nunca se anula, ou seja, se para todo $p \in M$ existe uma base $\{e_i\}$ de $T_p M$ tal que $\omega_p(e_1, \dots, e_m) \neq 0$. Se M^m possui uma forma volume dizemos que M^m é uma **variedade orientável** e que é orientada pela escolha da forma volume.

Existe uma forma equivalente de pensarmos em orientabilidade de uma variedade em termos de um atlas compatível com sua estrutura diferencial.

Proposição 4.21.

Uma variedade M é orientável se e somente se M admite um atlas coerentemente orientável $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$, i.e, tal que $\det d(\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}) > 0$.

Podemos estabelecer uma relação de equivalência entre as formas volumes. Dizemos que duas m -formas volumes ω e η são equivalentes se $\omega = f\eta$ com $f > 0$. Neste caso dizemos que ω e η induzem a mesma orientação em M . Caso contrário dizemos que ω e η induzem orientações opostas.

Uma forma volume ω induz uma orientação nos espaços tangentes a M da seguinte forma: para cada $p \in M$, uma base $\{e_i\}$ de $T_p M$ tem uma orientação induzida se $\omega_p(e_1, \dots, e_m) > 0$.

Observe que a 3-forma $\text{vol}_{\mathbb{R}^3} = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ é uma forma volume em $\mathbb{R}^3$. De fato $\text{vol}_{\mathbb{R}^3}(e_1, e_2, e_3) = 1 > 0$ o que implica também que é compatível com a orientação canônica.

Nosso primeiro exemplo de orientação em subvariedade mergulhada é uma curva regular, orientada por um vetor tangente unitário.

Exemplo 4.22. Elemento de comprimento

Seja C uma curva regular (curva mergulhada) em $\mathbb{R}^m$ orientada por um vetor unitário $\vec{T}$ tangente a C . Podemos então definir o **elemento de comprimento** como a 1-forma

$$\text{vol}_C = \mathcal{I}^* \mathbf{g}_T^0 \in \Omega^1(C)$$

onde $\mathcal{I} : C \rightarrow \mathbb{R}^m$ é a inclusão e $\mathbf{g}_T^0 = \langle \vec{T}, \cdot \rangle$. Em particular se $\alpha : (-\delta, \delta) \rightarrow$

Continuação.

C é uma parametrização regular com orientação coerente (i.e., $\vec{T} = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}$) podemos observar que $\alpha^* \text{vol}_C = \|\alpha'\| dt$.

Podemos agora revisar o Exercício 4.11 e examiná-lo de forma intrínseca (independente de parametrização).

Exercício 4.23.

Seja C curva mergulhada, $\mathcal{I} : C \rightarrow \mathbb{R}^m$ inclusão e $\vec{F}$ campo definido em uma vizinhança de C . Suponha que C seja orientada por um vetor unitário $\vec{T}$. Definindo $\mathbf{g}_F^0 = \langle \vec{F}, \cdot \rangle$, verifique que:

$$\mathcal{I}^* \mathbf{g}_F^0 = \langle \vec{F}, \vec{T} \rangle \text{vol}_C$$

onde $\mathbf{g}_F^0 = \langle \vec{F}, \cdot \rangle$.

Nosso próximo exemplo de subvariedade orientada é uma superfície mergulhada com a orientação induzida por um campo normal.

Exemplo 4.24. Elemento de área de uma superfície

Sejam S^2 uma superfície mergulhada em $\mathbb{R}^3$, U é vizinhança de S de $\mathbb{R}^3$ e $\vec{N} \in \mathfrak{X}(U)$ um campo tal que $\vec{N}|_S$ é normal a S e $\|\vec{N}\| = 1$. Então $\vec{N}$ induz uma orientação $\text{vol}_S \in \Omega^2(S)$ chamada **elemento de área** da seguinte forma (vide Figura 4.4):

$$\text{vol}_S = \mathcal{I}^*(i_{\vec{N}} \text{vol}_{\mathbb{R}^3}) \in \Omega^2(S)$$

onde $\mathcal{I} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ é a inclusão. Dito de outra forma, se $W_1, W_2 \in T_p S$

$$\text{vol}_S(W_1, W_2) = \det \begin{bmatrix} N_1 & w_{11} & w_{12} \\ N_2 & w_{21} & w_{22} \\ N_3 & w_{31} & w_{32} \end{bmatrix}$$

Podemos observar também que se $\varphi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ é uma parametrização coerente com orientação (i.e., o vetor $\frac{\partial \varphi}{\partial v_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v_2}$ tem mesmo sentido que o vetor $\vec{N}$) então

$$\varphi^* \text{vol}_S = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial v_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v_2} \right\| dv_1 \wedge dv_2.$$

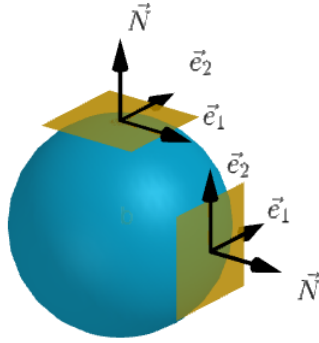


Figura 4.4: ilustrando Exemplo 4.24

Estabelecido intrinsicamente a forma elemento de área podemos revisitar o Exercício 4.13.

Exercício 4.25.

Considere uma superfície mergulhada $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, campo normal unitário $\vec{N} \in \mathfrak{X}(U)$, a aplicação inclusão $\mathcal{I} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ e a 2-forma $\text{vol}_S \in \Omega(S)$ no Exemplo 4.24. Considere um campo $\vec{F}$ na vizinhança U de S . Verifique que:

$$\langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S = \mathcal{I}^*(i_{\vec{F}} \text{vol}_{\mathbb{R}^3})$$

Como vimos na Definição 1.34, dado uma variedade mergulhada M^m mergulhada em $\mathbb{R}^{m+k}$, podemos induzir um produto interno em cada espaço tangente vindo do produto Euclidiano usual. Tal produto interno era chamado de *métrica induzida*. Mais geralmente, como veremos no Capítulo 5, uma variedade pode admitir uma métrica $\mathbf{g}$ (um produto interno em cada espaço tangente que varia suavemente de ponto a ponto) que não precisa vir necessariamente de um ambiente euclidiano. A dupla $(M, \mathbf{g})$ é chamada de **variedade Riemanniana**.

A seguir veremos o conceito de forma volume Riemanniana que generaliza Equação 4.2.2 e o Exemplo 4.24.

Proposição 4.26.

Seja $(M^m, \mathbf{g})$ uma variedade Riemanniana e orientável.

- (a) Então existe uma única m -forma vol_M (**forma volume Riemanniana**) que

Continuação.

induz a orientação de M e tal que $\text{vol}_M(e_1, \dots, e_m)_p = 1$ para toda base $\{e_i\}$ ortonormal de $T_p M$ com orientação de M .

(b) Dado um sistema de coordenadas compatível (U_α, ψ_α) temos que:

$$(\psi_\alpha^{-1})^* \text{vol}_M = \sqrt{\det[g_{i,j}]} dx_1 \cdots dx_n$$

$$\text{onde } g_{i,j} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right).$$

Demonstração. Vamos mostrar o item (a). Seja η uma forma volume em M (que existe pois M é orientável). Note primeiro que dado duas bases ortonormais $\{e_i\}$ e $\{\tilde{e}_i\}$ de $T_p M$ de mesma orientação temos (vide Proposição 4.12)

$$\eta(e_1, \dots, e_m) = \eta(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_m) \quad (4.4.2)$$

Dado um referencial ortonormal local $\{e_i\}$ em U (campos ortonormais suaves em uma vizinhança U) podemos definir $\eta(e_i) = f$ para uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ suave. A equação (4.4.2) garante que f não depende do referencial e da vizinhança U . A forma volume ω é definida então como $\omega = \frac{1}{f}\eta$.

Agora provemos o item (b). Seja $[g_{i,j}] = A\Lambda A^t$ onde Λ é a matriz diagonal com autovalores (positivos). Defina $[E] = A\sqrt{\Lambda^{-1}}A^t$. Sejam $\{e_i\}$ as colunas de $[E]$. Note que $\delta_{i,j} = g(e_i, e_j) = [e_i]^t [g_{i,j}] [e_j]$.

$$\begin{aligned} 1 = \text{vol}_M(e_1, \dots, e_m) &= \text{vol}\left(E \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, E \frac{\partial}{\partial x_m}\right) \\ &= \det E \text{vol}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right) \\ &= \det E f \end{aligned}$$

onde $\text{vol} = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$. Assim $f = \frac{1}{\det E} = \sqrt{[g_{i,j}]}$. $\square$

4.4.2. Integração de formas

Vamos agora definir integração de m -formas com *pequeno suporte* em variedade orientável M^m . Seja $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ um atlas coerente de M e ω uma n -forma com suporte compacto contido em U_α . Podemos então definir:

$$\int_{U_\alpha} \omega := \int_{\psi(U_\alpha)} (\psi^{-1})^* \omega.$$

Observe que se consideramos outra carta (U_β, ψ_β) e acontecer que o suporte ω esteja contido em $U_\beta \cap U_\alpha$, então obtemos o mesmo número. Isto segue da Eq. (4.4.1), da Proposição 4.21 e do fato que $(\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1})^* = (\psi_\alpha^{-1})^* \circ \psi_\beta^*$.

Assim como no caso de integração de funções sobre uma variedade, precisamos do conceito de partição da unidade estabelecido na Definição 3.18 afim de definir a integração de uma m -forma com suporte compacto (não necessariamente pequeno). Lembramos especialmente o Teorema 3.19, que garante que qualquer cobertura $\{U_\alpha\}$ de uma variedade M (orientável ou não) admite uma partição da unidade subordinada, i.e., uma partição que atende $\text{supp } f_\alpha \subset U_\alpha$.

Seja ω uma m -forma com suporte compacto. Denote por $K = \text{supp } \omega$ e considere uma cobertura finita de K por vizinhanças coordenadas U_α . Considere $\{f_\alpha\}$ uma partição da unidade subordinada $\{U_\alpha\}$. Observe que $f_\alpha \omega$ tem suporte compacto contido em U_α e defina

$$\int_M \omega := \sum_\alpha \int_{U_\alpha} f_\alpha \omega.$$

É possível mostrar que esta definição não depende da cobertura ou da partição da unidade. Também nota-se aqui que o fato de K ser compacto é importante, pois, por exemplo, garante que a soma acima é finita.

Uma vez definida a integração de m -formas com suporte compacto podemos generalizar (4.4.1).

Proposição 4.27.

Sejam M^m e N^m variedades orientáveis e $\phi: M \rightarrow N$ um difeomorfismo que preserva orientação. Se ω é uma m -forma com suporte compacto em N , então

$$\int_N \omega = \int_M \phi^* \omega.$$

Vejamos nosso primeiro exemplo de integração ao longo de uma variedade de dimensão 1, i.e., ao longo de uma curva.

Exemplo 4.28. Trabalho

Analogamente ao caso bi-dimensional (vide equação (4.1.1)), se $\vec{F} = \sum_{i=1}^m f_i \vec{e}_i$ representa um campo suave com suporte compacto em $\mathbb{R}^m$, então o **trabalho** realizado pela força $\vec{F}$ ao deslocar uma partícula ao longo de uma curva regular

Continuação.

C orientado por um vetor unitário $\vec{T}$ é dado por

$$\mathcal{T} := \int_C \langle \vec{F}, \vec{T} \rangle \text{vol}_C.$$

Pelo Exercício 4.23, temos $\mathcal{T} = \int_C \nu_F$ para $\nu_F = \mathcal{I}^* \mathbf{g}_F^0 \in \Omega^1(C)$ onde $\mathcal{I} : C \rightarrow \mathbb{R}^m$ é a inclusão e $\mathbf{g}_F^0 = \sum_{i=1}^m f_i dx_i$.

Vejamos agora a integração de uma 2-formas em uma superfície em $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 4.29. Fluxo através de uma superfície

Seja S^2 superfície mergulhada em $\mathbb{R}^3$ orientada por um campo normal unitário $\vec{N}$ definido em uma vizinhança de S . Seja $\vec{F}$ um campo suave com suporte compacto definido em uma vizinhança de S . O **fluxo através da superfície S** é definido por

$$\Phi = \int_S \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \text{vol}_S$$

Se definimos $\nu_F = \mathcal{I}^*(i_{\vec{F}} \text{vol}_{\mathbb{R}^3}) \in \Omega^2(S)$, para a inclusão $\mathcal{I} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ então temos pelo Exercício 4.13 que $\Phi = \int_S \nu_F$.

4.4.3. Variedade com bordo e o Teorema de Stokes

Seja $\alpha : [0, 1] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$ parametrização suave regular. Definindo C como imagem de α e considerando uma função suave $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ sabemos pelo *Teorema Fundamental do Cálculo* que:

$$\int_C df = f(\alpha(1)) - f(\alpha(0))$$

Este é um caso particular do que chamaremos *teorema de Stokes*. Afim de enunciar o teorema de Stokes, precisamos apresentar rapidamente o conceito de variedades com bordo e orientação induzida no bordo.

Definição 4.30.

Uma variedade suave com bordo M^m é um espaço topológico Hausdorff com base enumerável com atlas suave (maximal) $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ formado por conjuntos abertos U_α que são homeomorfos ou ao espaço Euclidiano ou ao semi-

Continuação.

espaço superior $\mathbb{H}^m = \{(x_1, \dots, x_m), x_m \geq 0\}$. O bordo ∂M é o subconjunto de M tal que as parametrizações levam $\partial\mathbb{H}^m$ em ∂M .

É possível verificar que o bordo em particular herda uma estrutura de subvariedade. Importante aqui perceber que quando lidamos com as mudanças $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : U \subset \mathbb{H}^m \rightarrow V \subset \mathbb{H}^m$ devemos pensar em difeomorfismo que admite extensão para aberto em $\mathbb{R}^m$.

Uma forma de construir subvariedades com bordo é dada pelo teorema a seguir, vide Figura 4.5

Teorema 4.31.

Seja M^m variedade (sem bordo) e $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ aplicação suave com $0 \in g(M)$ sendo valor regular. Então $N := g^{-1}[0, \infty)$ é variedade com bordo, sendo que $\partial N = g^{-1}(0)$.

Considere o semi-plano superior $\mathbb{H}^m$ com orientação dada por $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$. A orientação induzida no bordo $\partial\mathbb{H}^m = \{x_m = 0\}$ é $(-1)^m dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{m-1}$. É possível demonstrar que se $\phi : \mathbb{H}^m \rightarrow \mathbb{H}^m$ é um difeomorfismo que preserva orientação (ou seja se estende localmente para difeomorfismos locais em $\mathbb{R}^m$ e tem $\det d\phi > 0$) então sua restrição $\phi|_{\partial\mathbb{H}^m} \rightarrow \partial\mathbb{H}^m$ também preserva orientação (i.e., $\det(D\phi|_{\partial\mathbb{H}^m}) > 0$). Esta observação em particular permite concluir que uma variedade com bordo com atlas coerente tem uma orientação naturalmente induzida em seu bordo. Em particular se ψ é carta deste atlas então $[\partial M]|_{\partial U} = \psi^*[\partial\mathbb{H}^m]$ onde $U \subset M$ é aberto contendo pontos do bordo, vide Figura 4.5

Teorema 4.32. Teorema de Stokes

Seja ω uma $(m-1)$ -forma com suporte compacto em uma variedade orientável M^m , e considere ∂M com a orientação induzida. Então

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Em particular se M for orientável compacta sem bordo então $\int_M d\omega = 0 \forall \omega \in \Omega^{m-1}(M)$.

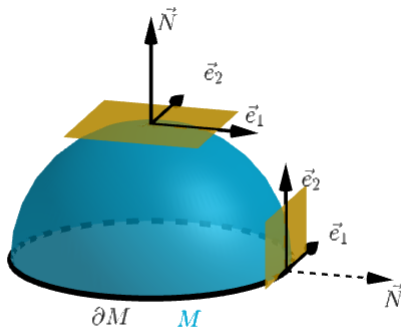


Figura 4.5: Variedade com bordo com orientação induzida. Note em particular que $\widetilde{M} = \mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ e $g : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ função altura, i.e., $g(x) = x_3$. Então $M = g^{-1}[0, \infty)$ é variedade com bordo, ilustrando Teorema 4.31

Demonstração. Consideremos primeiro que o suporte de ω é pequeno ou seja está completamente contido na vizinhança U_α de uma carta, onde $U_\alpha = \mathbb{H}^m$ ou $U_\alpha = \mathbb{R}^m$ e provemos o teorema para esta situação. Por motivos didáticos vamos explicitar a prova deste caso para $m = 2$, deixando para o leitor completar os detalhes para o caso $m > 2$. Ou seja consideramos $\omega = h_1 dx_1 + h_2 dx_2$ e assim $d\omega = (\frac{\partial h_2}{\partial x_1} - \frac{\partial h_1}{\partial x_2}) dx_1 \wedge dx_2$

Caso 1: $U_\alpha = \mathbb{R}^2$. Neste caso, como não temos bordo, desejamos demonstrar que $\int_{\mathbb{R}^2} d\omega = 0$. Vamos supor que o suporte está contido em $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$. Concluimos pelo teorema de Fubinni e pelo teorema fundamental que:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^2} d\omega &= \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} \left(\frac{\partial h_2}{\partial x_1} - \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \\
 &= \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} dx_1 dx_2 - \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} dx_2 dx_1 \\
 &= \int_{b_1}^{b_2} h_2(a_2, x_2) - h_2(a_1, x_2) dx_2 - \int_{a_1}^{a_2} h_1(x_1, b_2) - h_1(x_1, b_1) dx_1 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Caso 2: $U_\alpha = \mathbb{H}^2$. Neste caso teremos que lidar com o bordo e devemos supor

que o suporte de ω está contida em $[a_1, a_2] \times [0, b_2]$. Novamente o teorema de Fubinni e teorema fundamental garantem que:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{H}^2} d\omega &= \int_0^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} \left(\frac{\partial h_2}{\partial x_1} - \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \\
 &= \int_0^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} dx_1 dx_2 - \int_{a_1}^{a_2} \int_0^{b_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} dx_2 dx_1 \\
 &= \int_0^{b_2} h_2(a_2, x_2) - h_2(a_1, x_2) dx_2 - \int_{a_1}^{a_2} h_1(x_1, b_2) - h_1(x_1, 0) dx_1 \\
 &= \int_{a_1}^{a_2} h_1(x_1, 0) dx_1 = \int_{\partial \mathbb{H}^2} \omega
 \end{aligned}$$

Caso geral: Vamos agora supor que o suporte de ω não está contido em uma vizinhança U_α de um sistema de coordenada. Porém é fácil verificar que o suporte de $f_\alpha \omega$ está contido no interior de U_α . Temos então pelos casos descritos acima que

$$\int_M d(f_\alpha \omega) = \int_{U_\alpha} d(f_\alpha \omega) = \int_{\partial U_\alpha} f_\alpha \omega = \int_{\partial M} f_\alpha \omega$$

A equação acima permite concluir que:

$$\begin{aligned}
 \int_M d\omega &= \int_M d\left(\sum_\alpha f_\alpha \omega\right) = \sum_\alpha \int_M d(f_\alpha \omega) \\
 &= \sum_\alpha \int_{\partial M} f_\alpha \omega = \int_{\partial M} \sum_\alpha f_\alpha \omega = \int_{\partial M} \omega.
 \end{aligned}$$

□

Nos corolários a seguir iremos usar as notações dos Exemplos 4.29 e 4.28

Corolário 4.33. Teorema de Gauss clássico

Sejam $M^3 \subset \mathbb{R}^3$ uma variedade orientável (com orientação de $\mathbb{R}^3$) com bordo e $\vec{F}$ campo com suporte compacto definido em uma vizinhança de M . Prove que

$$\int_M \operatorname{div}(\vec{F}) \operatorname{vol}_{\mathbb{R}^3} = \int_S \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \operatorname{vol}_S,$$

Continuação.

onde $\vec{N}$ é campo unitário, ortogonal ao bordo $S = \partial M$ apontando para fora, e S tem orientação induzida por $\vec{N}$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} \int_M \operatorname{div}(\vec{F}) \operatorname{vol}_{\mathbb{R}^3} &\stackrel{(i)}{=} \int_M d(i_{\vec{F}} \operatorname{vol}_{\mathbb{R}^3}) \\ &\stackrel{(ii)}{=} \int_S \mathcal{I}^*(i_{\vec{F}} \operatorname{vol}_{\mathbb{R}^3}) \\ &\stackrel{(iii)}{=} \int_S \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle \operatorname{vol}_S \end{aligned}$$

onde Proposição 4.19 é utilizada na igualdade (i), Teorema 4.32 na igualdade (ii) e Exercício 4.25 na igualdade (iii). □

Corolário 4.34. Teorema de Stokes clássico

Seja $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície mergulhada orientada por um campo normal unitário $\vec{N}$, com bordo $C = \partial S$ com orientação induzida. Dado uma campo $\vec{F}$ de suporte compacto definido em uma vizinhança de S prove que:

$$\int_S \langle \operatorname{rot}(\vec{F}), \vec{N} \rangle \operatorname{vol}_S = \int_C \langle \vec{F}, \vec{T} \rangle \operatorname{vol}_C,$$

onde $\vec{T}$ é campo unitário tangente a C compatível com orientação de C .

Demonstração.

$$\begin{aligned} \int_S \langle \operatorname{rot}(\vec{F}), \vec{N} \rangle \operatorname{vol}_S &\stackrel{(i)}{=} \int_S \mathcal{I}^*(i_{\operatorname{rot}(\vec{F})} \operatorname{vol}_{\mathbb{R}^3}) \\ &\stackrel{(ii)}{=} \int_S \mathcal{I}^*(d\mathbf{g}_F^0) \\ &\stackrel{(iii)}{=} \int_S d(\mathcal{I}^* \mathbf{g}_F^0) \\ &\stackrel{(iv)}{=} \int_C \mathcal{I}^* \mathbf{g}_F^0 \\ &\stackrel{(v)}{=} \int_C \langle \vec{F}, \vec{T} \rangle \operatorname{vol}_C, \end{aligned}$$

onde Exercício 4.25 é utilizado na igualdade (i), Proposição 4.19 na igualdade (ii), Proposição 4.15 na igualdade (iii), Teorema 4.32 na igualdade (iv) e Exercício 4.23 na igualdade (v).

□

4.4.4. (*) Comentários sobre invariantes topológicos

Terminamos esta seção sobre formas com os dois exercícios que destacam como formas podem ser usadas como invariante topológicos, i.e., para identificar espaços que não podem ser difeomorfos um ao outro.

Exercício 4.35.

Considere a 1-forma $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 - \{0, 0\})$ definida como $\omega := \frac{1}{x^2 + y^2}(-ydx + xdy)$.

- (a) verifique que ω é fechada, ou seja $d\omega = 0$,
- (b) verifique que $\int_{S^1} \omega = 2\pi$,
- (c) conclua que ω não é exata, ou seja não existe η tal que $d\eta = \omega$.

Exercício 4.36. **Lema de Poincaré

Dado um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ denotamos $H^k(U)$ o grupo de cohomologia de de Rham, i.e., o conjunto das k -formas fechadas em U (i.e, $d\omega = 0$ onde ω é k -forma em U) quociente pelas formas exatas (i.e., $\omega = d\eta$ onde η é $k - 1$ forma).

1. Sejam

$$\begin{aligned} s : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow (x, 0) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, t) &\longrightarrow x. \end{aligned}$$

Prove que se $\pi^* \circ s^* : H^k(\mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow H^k(\mathbb{R}^{n+1})$ é um isomorfismo então $s^* : H^k(\mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow H^k(\mathbb{R}^n)$ é um isomorfismo.

Continuação.

2. Toda forma em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ pode ser vista como combinação de 2 tipos de formas:

$$(I) \pi^* \phi f(x, t)$$

$$(II) \pi^* \phi f(x, t) dt,$$

onde ϕ é forma em $\mathbb{R}^n$. Seja $K : \Omega^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ operador linear definido da seguinte maneira:

$$(I) K(\pi^* \phi f(x, t)) = 0$$

$$(II) K(\pi^* \phi f(x, t)) = \pi^* \phi \int_0^t f(x, s) ds$$

Prove que $1 - \pi^* s^* = (-1)^{k-1} dK - Kd$.

3. Conclua que

$$H^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} 0 & \text{se } k > 0; \\ \mathbb{R} & \text{se } k = 0. \end{cases}$$

4.5. (*) Geodésicas e uma introdução a mecânica

4.5.1. Estrutura simplética de TM^*

Sejam $TM^* = \cup_p (T_p M)^*$ fibrado cotangente e $\pi : TM^* \rightarrow M$ a projeção canônica.

Definição 4.37.

A variedade TM^* admite uma 1-forma $\theta \in \Omega^1(TM^*)$ (forma tautológica) definida como:

$$\theta(Z_\eta) = \eta(d\pi Z_\eta) \text{ onde } Z_\eta \in T_\eta(TM^*)$$

e uma 2-forma definida como

$$\omega := -d\theta.$$

Continuação.

(TM^*, ω) é uma **variedade simplética**, ou seja uma variedade com uma 2-forma ω fechada e não degenerada.

Notação: Ao longo desta seção denotaremos 0, 1 e 2 formas, bem como seus respectivos pull backs por parametrizações pelos mesmos símbolos, evitando sobrecargas de notações nas apresentações.

Em coordenadas $\psi : U \subset TM^* \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ temos:

$$\begin{aligned}\theta &= \sum_i p_i dq_i \\ \omega &= \sum_i dq_i \wedge dp_i\end{aligned}$$

Em particular: $\omega((p, q), (\tilde{p}, \tilde{q})) = \begin{bmatrix} q & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & Id \\ -Id & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{q} \end{bmatrix}$

Como ω é não degenerada, dada um Hamiltoniano $h : TM^* \rightarrow \mathbb{R}$ existe um único campo $\vec{h}$ (**campo Hamiltoniano**) definido como:

$$\omega(\vec{h}, \cdot) = dh(\cdot)$$

Seja $N = h^{-1}(c)$ hipersuperfície regular. Note que:

- $\vec{h}$ é ortogonal simpléticamente a N ou seja $\omega(\vec{h}, x) = 0, \forall x \in TN$
- $dh(\vec{h}) = 0$ i.e., $\vec{h}$ é tangente a N .

Por outro lado $\dim(N^\omega) = \dim TM^* - \dim(N) = 1$ onde N^ω é o ortogonal simplético. Assim $\vec{h}$ gera a 1-distribuição $N^\omega \subset TN$.

Em coordenadas $\vec{h} = (\frac{\partial h}{\partial p}, -\frac{\partial h}{\partial q})$. Também a **equação Hamiltoniana**

$$\beta'(t) = \vec{h}(\beta(t))$$

pode ser escrita em coordenadas como:

$$\begin{aligned}q'(t) &= \frac{\partial h}{\partial p}(q(t), p(t)) \\ p'(t) &= -\frac{\partial h}{\partial q}(q(t), p(t))\end{aligned}\tag{4.5.1}$$

Visto que $\vec{h}$ gera $N^\omega \subset TN$ para $N = h^{-1}(c)$, as soluções da equação de Hamilton ficam contidas em N ou seja $h(\beta) = ct$.

Observação 4.38.

O fato de solução de equação de Newton $\gamma : I \rightarrow M$ ($m\gamma''(t) = -\nabla U$) ter energia total $E : TM \rightarrow \mathbb{R}$ ($E(v_q) = \frac{m}{2}\|v_q\|^2 + U(q)$) conservada (i.e. $E(\gamma'(t)) = ct$) pode ser entendido também no contexto de geometria simplética. De fato veremos que certos Lagrangianos geram um difeomorfismo $\mathcal{L} : TM \rightarrow TM^*$ e $\beta(t) = \mathcal{L}(\gamma'(t))$ será solução da equação Hamilton de $h : TM^* \rightarrow \mathbb{R}$ onde $h = E \circ \mathcal{L}^{-1}$ (vide Exemplo 4.45).

4.5.2. Relações entre Lagrangianos e Hamiltonianos**Exemplo 4.39. Motivando a linguagem Lagrangiana**

Seja M^n variedade mergulhada em $\mathbb{R}^{n+k}$, o produto Euclidiano de $\mathbb{R}^{n+k}$ induz um produto interno g_0 no fibrado tangente TM e assim podemos medir a distância entre pontos $p, q \in M$ como $d(p, q) = \inf_{\beta} l(\beta)$ para todas β curva (suave por parte) com $\beta(0) = p$ e $\beta(1) = q$, onde $l(\beta) = \int_0^1 \sqrt{g_0(\beta'(t), \beta'(t))} dt$. Podemos nos perguntar se existe uma curva γ que minimiza distância, ou seja que minimiza o funcional $\beta \rightarrow l(\beta)$ para curvas β com $\beta(0) = p$ e $\beta(1) = q$. Este é um exemplo típico do que chamemos um problema variacional e $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $L(\cdot) = \|\cdot\|$ será o Lagrangiano associado ao problema.

Observação 4.40.

É possível provar (teorema de Hopf Rinow) que o problema tem solução quando M é compacta (ou mais geralmente completa em relação a d).

Observação 4.41.

Veremos na Parte II que o problema de minimizar l é equivalente ao problema de minimizar a energia cinética $\beta \rightarrow e(\beta)$ onde $e(\beta) = \frac{1}{2} \int_0^1 \|\beta'\|^2 dt$. Uma das vantagens é que $L(\cdot) = \|\cdot\|^2$ é suave e mais fácil de trabalhar.

Definição 4.42.

Uma curva suave $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ é **solução de Euler Lagrange** associado a um Lagrangiano $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ se $\frac{d}{ds} \delta(\gamma_s)|_{s=0} = 0$ para toda variação de curvas

Continuação.

(suaves por partes) $s \rightarrow \gamma_s$ com $\gamma_s(0) = \gamma(0)$ e $\gamma_s(1) = \gamma(1)$, $\gamma_0 = \gamma$ onde

$$\delta(\gamma_s) = \int_0^1 L(\gamma'_s(t)) dt$$

Aqui uma variação suave por partes de γ é uma aplicação $\psi : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, 1] \rightarrow M$ tal que $\gamma_s = \psi(s, \cdot)$ e $\psi|_{(-\epsilon, \epsilon) \times [t_i, t_{i+1}]}$ é suave (para uma partição de $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$), em particular, o vetor velocidade da variação $V(t) = \frac{\partial}{\partial s} \psi(0, t)$ é contínuo ao longo de γ .

Lema 4.43.

uma curva γ é solução de Euler Lagrange, se e somente se em coordenadas ela atende a equação de Euler Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q}(q(t), q'(t)) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), q'(t)) \right) \quad (4.5.2)$$

Demonstração. Consideremos uma partição tal que $\alpha([-\epsilon, \epsilon] \times [t_i, t_{i+1}])$ esteja contido em uma vizinhança coordenada, denotando em coordenadas $p_s(t)$ tal variação. Seja $V(t) = \frac{\partial}{\partial s} \gamma_s(t)|_{s=0}$ a velocidade da variação e $\tilde{V} = \frac{d}{ds} p_s|_{s=0}$ sua representação em coordenadas.

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \delta(\gamma_s)|_{s=0} &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\partial}{\partial s} L(q_s(t), q'_s(t)) dt \\ &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), q'(t)) \tilde{V}(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), q'(t)) \tilde{V}'(t) dt \\ &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q}(\gamma'(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\gamma'(t)) \right) \right\} \tilde{V}(t) dt \\ &\quad + \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\gamma'(t)) \tilde{V}(t) \right) dt \end{aligned}$$

Teorema fundamental do Cálculo, $V(0) = 0 = V(1)$ e soma telescópica implicam:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\delta(\gamma_s)|_{s=0} &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q}(\gamma'(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\gamma'(t)) \right) \right\} \tilde{V}(t) dt \\
&+ \sum_i \left(\mathcal{L}(\gamma'(t)) V(t) \right) \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} \\
&= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q}(\gamma'(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\gamma'(t)) \right) \right\} \tilde{V}(t) dt
\end{aligned}$$

Utilizando a arbitrariedade da escolha da variação $\gamma_s(t)$, e.g,

$$\tilde{V}(t) = f(t) \left\{ \frac{\partial L}{\partial q}(\gamma'(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\gamma'(t)) \right) \right\}$$

onde $f \geq 0$ é nula fora de $[t_i, t_{i+1}]$, prova-se que Eq. (4.5.2) equivale a $0 = \frac{d}{ds}\delta(\gamma_s)|_{s=0}$ $\square$

Definição 4.44.

A aplicação $\mathcal{L} : TM \rightarrow TM^*$ definida como:

$$\mathcal{L}(v_q)(w_q) = \frac{d}{ds} L(v_q + sw_q)|_{s=0}$$

é chamada *transformada de Legendre*.

Em coordenadas temos:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q})(\cdot) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} dq_i$$

Seja por exemplo $L(v_q) = \frac{m}{2} \|v_q\|^2 - U(q)$. Neste caso:

$$\mathcal{L}(v_q)(w_q) = \frac{d}{ds} \left(\frac{m}{2} \langle v_q + sw_q, v_q + sw_q \rangle - U(q) \right) \Big|_{s=0} = \langle mv_q, w_q \rangle$$

Este Lagrangiano é um exemplo do que chamamos *Lagrangiano hiper-regular*, i.e, Lagrangiano onde $\mathcal{L}$ é um difeomorfismo.

Exemplo 4.45. Equação de Newton em $\mathbb{R}^n$

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ solução da equação de Newton $m\gamma''(t) = -\nabla U(\gamma(t))$. Note que

$$q'_i(t) = \dot{q}_i(t), \quad \dot{q}'_i(t) = -\frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \quad (4.5.3)$$

Assim, pelo Lema 4.43, γ é solução de Euler Lagrange associada a

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \|\dot{q}\|^2 - U(q).$$

Neste exemplo temos:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \sum_i p_i d\dot{q}_i$$

onde $p_i = m\dot{q}_i$. Dado a energia total $E : TM \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$E(q, \dot{q}) := \mathcal{L}(q, \dot{q})(v_q) - L(v_q) = \frac{m}{2} \|\dot{q}\|^2 + U(q),$$

podemos definir o hamiltoniano $h : TM^* \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$h(q, p) := E \circ \mathcal{L}^{-1} = \frac{1}{2m} \|p\|^2 + U(q).$$

Note então que:

$$\vec{h}(q, p) = \left(\frac{\partial h}{\partial p}, -\frac{\partial h}{\partial q} \right) = \left(\frac{p}{m}, -\nabla U \right).$$

Substituindo $p_i = m\dot{q}_i$ na Eq. (4.5.3) temos:

$$q'_i(t) = \frac{p_i}{m}, \quad p'_i(t) = -\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}. \quad (4.5.4)$$

Em outras palavras verificamos que a equação de Euler de L equivale a equação Hamiltoniana, ou seja ilustramos a proposição a seguir.

Proposição 4.46.

Sejam

Continuação.

- $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ uma Lagrangiano hiper-regular.
- $E : TM \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $E(v_q) = \mathcal{L}(v_q)(v_q) - L(v_q)$,
- $h : TM^* \rightarrow \mathbb{R}$ Hamiltoniano definido como $h = E \circ \mathcal{L}^{-1}$

Então $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ é solução de Euler Lagrange de L sse $\alpha = \mathcal{L}(\gamma')$ for solução da equação Hamiltoniana de h .

Demonstração. Dado $\mathcal{L}(q(t), q'(t)) = (q(t), p(t))$ desejamos verificar que $(q(t), q'(t))$ atende Eq. (4.5.2) sse $(q(t), p(t))$ atende Eq. (4.5.1). Para tanto iremos derivar $h(q, p) = E \circ \mathcal{L}^{-1}(q, p)$. Iniciemos o calculo dos termos. Como $L(q, \dot{q}) = (q, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}})$ temos:

$$D\mathcal{L} = \begin{bmatrix} Id & 0 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}} \end{bmatrix} \text{ e } D\mathcal{L}^{-1} = \begin{bmatrix} Id & 0 \\ -\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}}\right)^{-1} \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} & \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}}\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

Visto que $E(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L(q, \dot{q})$

$$\frac{\partial E}{\partial q}(q, \dot{q}) = \dot{q} \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) = \dot{q} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}}$$

Substituindo em: $Dh(q, p) = DE(q, \dot{q})D\mathcal{L}^{-1}(q, p)$ temos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial q} & \frac{\partial h}{\partial p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} & \dot{q} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Id & 0 \\ -\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}}\right)^{-1} \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} & \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}}\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial h}{\partial q}(q(t), p(t)) = -\frac{\partial L}{\partial q}(q(t), q'(t))$$

$$\frac{\partial h}{\partial p}(q(t), p(t)) = q'(t)$$

As Eq. acima implicam que: $(q(t), q'(t))$ atende Eq. (4.5.2) i.e.,

$$\frac{\partial L}{\partial q}(q(t), q'(t)) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), q'(t)) \right)$$

SSE $(q(t), p(t))$ atende Eq. (4.5.1) i.e.,

$$q'(t) = \frac{\partial h}{\partial p}(q(t), p(t))$$

$$p'(t) = -\frac{\partial h}{\partial q}(q(t), p(t))$$

□

4.5.3. Geodésicas e equação de Newton

Dado uma variedade mergulhada M^n em $\mathbb{R}^{n+k}$ vimos anteriormente que dado campo $\vec{Y}$ tangente a M tínhamos uma forma de derivar $\vec{Y}$ em $p \in M$ na direção de um vetor $\vec{X}(p) \in T_p M$ obtendo um vetor ainda em $T_p M$. Tal operação era feita pela conexão Riemanniana

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

$$\nabla_{\vec{X}} \vec{Y}(p) = (D\tilde{Y}(p)\vec{X}(p))^T$$

onde $\tilde{Y}$ é uma extensão local de $\vec{Y}$ e $(\cdot)^T$ é a projeção ortogonal em TM .

O operador ∇ induz um outro operador que age nos campos $t \rightarrow V(t) \in T_{\gamma(t)} M$ ao longo de curvas $t \rightarrow \gamma(t) \in M$ chamado *derivada covariante*:

$$\frac{\nabla}{dt} V(t) = (V'(t))^T$$

Uma curva suave $\gamma : I \rightarrow M$ é chamada *geodésica* se:

$$\frac{\nabla}{dt} \gamma'(t) = (\gamma'(t))^T = 0$$

Visto que $\frac{d}{dt} \|\gamma'(t)\|^2 = 2\langle \frac{\nabla}{dt} \gamma', \gamma' \rangle = 0$, geodésica tem velocidade constante. Mostraremos na Parte II que γ sempre *minimiza localmente distância*. Ela também pode ser vista como uma solução de Euler Lagrange associada de $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $L(v_q) = \frac{1}{2} \|v_q\|^2$ para vetores $v_p \in T_p M$ e $\|v\|^2 = g_0(v, v)$ onde g_0 é a métrica induzida em TM pelo produto Euclidiano de $\mathbb{R}^{n+k}$.

A grosso modo falando poderíamos pensar em uma geodésica como descrevendo uma partícula (de massa $m = 1$) no espaço M sem nenhuma força (do espaço) atuando sobre ela, e assim se movendo da forma a consumir menor energia. Porém o que acontece se nossa particular estiver sobre a influência de um campo de M ?

Seja $U : M \rightarrow \mathbb{R}$ função pontencial (suave) e $\text{grad}U$ gradiente Riemanniano, ou seja $\text{grad}U = (\nabla \tilde{U})^T$ onde $\tilde{U}$ é uma extensão local. Uma curva $\gamma : I \rightarrow M$ atende a equação de Newton associada ao potencial U se:

$$\frac{\nabla}{dt} \gamma'(t) = -\text{grad}U$$

Proposição 4.47.

Uma curva suave $\gamma : I \rightarrow M$ atende a equação de Newton associada ao potencial

Continuação.

U se e somente se é solução de Euler Lagrange de $L(v_q) = \frac{1}{2}g_0(v_q, v_q) - U(q)$.

Demonstração. Considere uma variação $(s, t) \rightarrow \gamma_s(t)$ de $\gamma_0 = \gamma$, $\gamma_s(0) = \gamma(0)$, $\gamma_s(1) = \gamma(1)$ e campo velocidade $V(t) = \frac{\partial}{\partial s}\gamma_s(t)|_{s=0}$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\delta(\gamma_s)|_{s=0} &= \frac{d}{ds} \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} L(\gamma'_s(t)) dt \\ &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \gamma_s(t), \gamma'_s(t) \right\rangle|_{s=0} - \frac{d}{ds} U(\gamma_s(t))|_{s=0} dt \\ &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{d}{dt} V(t), \gamma'(t) \right\rangle - \langle \nabla(U)(\gamma(t)), V(t) \rangle dt \\ &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} -\langle V(t), \gamma''(t) \rangle - \langle V(t), \nabla(U)(\gamma(t)) \rangle dt \\ &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d}{dt} \left(\langle V(t), \gamma'(t) \rangle \right) dt \end{aligned}$$

O resto da demonstração segue os mesmos argumentos da demonstração da Eq. (4.5.2), i.e., aplicar o teorema fundamental do cálculo, soma telescópica e a escolha arbitrária da variação, i.e., do campo velocidade $t \rightarrow V(t) \in T_{\gamma(t)}M$, com $V(0) = V(1) = 0$

□

Veremos a seguir que se $U < c$ então uma curva suave $\gamma : I \rightarrow M$ atendendo a uma equação de Newton associada ao potencial U pode ser vista (a menos de reparametrização) como geodésica da métrica de Jacobi $g = (c - U)g_0$, i.e., solução de Euler Lagrange para o Lagrangiano $L_c(v) = \frac{1}{2}g(v, v)$.

Proposição 4.48.

Seja $U : M \rightarrow \mathbb{R}$ função potencial tal que $U < c$ e $\gamma : I \rightarrow M$ solução de Euler Lagrange de $L(v_q) = \frac{1}{2}g_0(v_q, v_q) - U(q)$ com energia c . Então existe uma reparametrização β de γ que é solução de Euler Lagrange de $L_c(v) = \frac{(c-U)}{2}g_0(v, v)$ com energia 1. Aqui g_0 denota a métrica induzida em TM pela métrica Euclidiana $\mathbb{R}^{m+k}$.

Demonstração. Considere os Hamiltonianos associados L e L_c

$$h(p_q) = \frac{1}{2} \|p\|^2 + U(q)$$

$$h_c(p_q) = \frac{\|p\|^2}{2(c-U(q))}$$

É possível verificar que $N = h^{-1}(c) = h_c^{-1}(1)$ e que c e 1 são valores regulares de h e h_c . Visto que $\vec{h}$ e $\vec{h}_c$ geram o ortogonal simplético $N^\omega \subset TN$ (lembre $\dim N^\omega = 1$), eles são múltiplos um dos outros, i.e., $\vec{h}_c = \lambda \vec{h}$ para uma função suave $\lambda : N \rightarrow \mathbb{R}$.

Seja α tal que $\vec{h}(\alpha(t)) = \alpha'(t)$. Defina $f(t) = \int_0^t \frac{dz}{\lambda \circ \alpha(z)} = s$. Assim $(f^{-1})'(s) = \frac{1}{f'(t)} = \lambda \circ \alpha(t)$. Defina $\beta(s) = \alpha(f^{-1}(s))$. Como $\vec{h}_c(\alpha(t)) = \lambda \circ \alpha(t) \vec{h}(\alpha(t))$ temos:

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= \lambda \circ \alpha(t) \vec{h}(\alpha(t)) \\ &= \vec{h}_c(\alpha(t)) \\ &= \vec{h}_c(\alpha(f^{-1}(s))) \\ &= \vec{h}_c(\beta(s)) \end{aligned}$$

Assim $\pi(\beta(s)) = \pi(\alpha(f^{-1}(s))) = \gamma(f^{-1}(s))$. Ou seja a geodésica $\pi(\beta(s))$ da métrica g é uma reparametrização da solução da eq. de Newton γ . $\square$

4.6. (*) Otimização e o princípio do máximo de Pontryagin

Na Seção 2.7 introduzimos a questão de como poderíamos modelar as possíveis maneiras de um trem ideal (sem atritos) descrito como um ponto na reta, i.e., $t \rightarrow x_1(t) \in \mathbb{R}$, sair da estação $-a = x_1(0)$ e chegar na estação $0 = x_1(t_1)$. Supondo que nosso trem tivesse aceleração $x_1''(t) = u(t)$, onde $u \in [-1, 1]$, passamos a descrever seus possíveis movimentos como composição das curvas integrais dos campos $\vec{X}_u(q) = (q_2, u)$ definidos no espaço *posição* $\times$ *velocidade* $T\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Familiarizados com o conceito de controle geométrico $\{\vec{X}_u\}$, vimos os conceitos de conjuntos alcançáveis $\mathcal{A}(q_0)$, órbitas $\mathcal{O}(q_0)$ e algumas de suas interessantes propriedades.

Nesta seção gostaríamos de introduzir mais um elemento da teoria de controle geométrico, um *funcional custo*, no espaço das funções de controles $t \rightarrow u(t) \in U$. Por exemplo no problema do trem, poderíamos nos perguntar sobre o custo do

tempo de viagem ou o custo de algo que poderia refletir no consumo do combustível (e.g, energia cinética).

Vamos agora fixar as notações, estabelecer as hipóteses que estaremos trabalhando e formular mais precisamente o problema que desejamos abordar.

- $\{\vec{X}_u\}$ será um controle geométrico (definido em todo lugar) em variedade M ;
- $t \rightarrow u(t) \in L^\infty([0, t_1], U)$ onde $U \subset \mathbb{R}^m$ são as **funções de controles** admissíveis;
- dado uma função controle $t \rightarrow u(t)$ denotamos $t \rightarrow q_u$ a solução da E.D.O (q.t.p) do campo (não autônomo) $\vec{X}_{u(t)}$, i.e., $q'_u(t) = \vec{X}_u(q_u(t))$;
- $q \rightarrow \vec{X}_u(q)$ é suave para u fixo;
- $(q, u) \rightarrow \vec{X}_u(q) \in C^0(M \times \bar{U})$;
- $(q, u) \rightarrow \frac{\partial}{\partial q} \vec{X}_u(q) \in C^0(M \times \bar{U})$;
- $\varphi : M \times U \rightarrow \mathbb{R}$ nosso **custo infinitesimal** satisfaz as mesmas condições de regularidade apresentadas acima;
- $J^{t_1}(u) := \int_0^{t_1} \varphi(q_u(t), u(t)) dt$ é o **custo** dentre todos os controles admissíveis.

Nosso objetivo consiste em procurar candidatos para uma solução com dois estados fixos q_0 e q_1 em M e que minimize o custo. Em outras palavras definindo $\Omega = \{q_u \in L^\infty([0, t_1], U); q_u(0) = q_0, q_u(t_1) = q_1\}$ procuramos $\tilde{u} \in \Omega$ que atenda as *condições necessárias* para o problema:

$$J(\tilde{u}) = \inf_{u \in \Omega} J(u) \quad (4.6.1)$$

A solução $t \rightarrow \tilde{u}$ do Problema (4.6.1) é chamada **controle ótima** e $t \rightarrow q_{\tilde{u}}(t)$ é chamada **trajetória ótima**. Poderemos considerar t_1 fixo ou t_1 livre. Por exemplo, no problema do trem, poderíamos otimizar o tempo (t_1 é livre e $\varphi = 1$) ou poderíamos otimizar a eficiência energética (t_1 é fixo e $\varphi = u \cdot v$).

Nossa estratégia para abordar o problema 4.6.1 será criar um novo controle geométrico $\{\hat{X}_u\}_{u \in U}$ em $M \times \mathbb{R}$ como $\hat{X}_u(q, s) = (\vec{X}_u(q), \varphi(q, u))$ A solução $t \rightarrow \hat{q}_u(t)$ de $\hat{q}'_u(t) = \hat{X}_u(\hat{q}_u(t))$ com condição inicial $\hat{q}_u(0) = (q_0, 0)$ é

$$\hat{q}_u(t) = \left(q_u(t), \int_0^t \varphi(q_u(s), u(s)) ds \right)$$

Desejamos agora formular a *condição necessária* para (4.6.1) em termos do conjunto alcançável deste novo controle geométrico. Aproveitemos para revisar nosso conceito de conjunto alcançável, agora dependente de um tempo fixo ou dos tempos até um tempo fixo.

- $\hat{\mathcal{A}}_{q_0}(t) := \{\hat{q}_u(t) | u \in L^\infty([0, t], U)\}$
- $\hat{\mathcal{A}}_{q_0}^t := \cup_{0 \leq \tau \leq t} \hat{\mathcal{A}}_{q_0}(\tau)$
- $\hat{\mathcal{A}}_{q_0} := \cup_{0 \leq \tau < \infty} \hat{\mathcal{A}}_{q_0}(\tau)$

Proposição 4.49.

Se $t \rightarrow \tilde{u}$ é um controle ótimo em $[0, t_1]$, então $\hat{q}_{\tilde{u}}(t_1) \in \partial \hat{\mathcal{A}}_{q_0}(t_1)$

Demonstração. Defina $I_{q_1} = \{(q_1, y), y < J^{t_1}(\tilde{u})\} \subset M \times \mathbb{R}$. Suponha por absurdo que $I_{q_1} \cap \hat{\mathcal{A}}_{q_0}(t_1) \neq \emptyset$. Então existe $t \rightarrow \hat{q}_u(t)$ com $\hat{q}_u(0) = (q_0, 0)$ e $\hat{q}_u(t_1) = (q_1, y_1) \in I_{q_1}$ com $J^{t_1}(u) = y_1 < J^{t_1}(\tilde{u})$ o que seria uma contradição. $\square$

A grosso modo desejamos discutir aqui *condições necessárias* para que $\hat{q}_{\tilde{u}}(t_1) \in \partial \hat{\mathcal{A}}_{q_0}(t_1)$. Tais condições serão apresentadas no Princípio do máximo de Pontryagin (abreviado por PMP), o qual formularemos primeiro de forma geométrica (explicitando o conjunto alcançável) e discutindo a ideia da prova. Em seguida reformularemos PMP como aparece mais comumente em livros de Engenharia, aplicando o critério em alguns exemplos.

Ambas as formulações do PMP utilizarão a linguagem Hamiltoniana, motivo pelo qual escolhemos este tópico para ilustrar um pouco o uso de formas diferenciais em cursos de engenharia. Maiores detalhes podem ser encontrado em Agrachev e Sachkov, onde esta exposição está baseada,⁵

4.6.1. Uma versão geométrica do PMP

Iniciemos fixando a notação adequada. Utilizaremos aqui a estrutura simplética em TN^* apresentada na Seção 4.5.1. Sejam $\{\vec{Y}_u\} \subset \mathfrak{X}(N)$ um sistema de controle e Hamiltoniano $h : TN^* \times U \rightarrow \mathbb{R}$ definida como: $h_u(\lambda) = \lambda(\vec{Y}_u)$. Para um controle admissível $t \rightarrow u(t)$ a trajetória $t \rightarrow q_u(t) \in N$ é a solução de $q'_u(t) = \vec{Y}_{u(t)}(q_u(t))$.

⁵Andrei A. Agrachev, Yuri L. Sachkov *Control Theory from the Geometric Viewpoint* Springer Verlag EMS, volume 87 (2004)

Teorema 4.50. PMP geométrico

Seja $t \rightarrow \tilde{u}(t)$ um controle admissível, com $q_{\tilde{u}}(t_1) \in \partial\mathcal{A}_{q_0}(t_1)$. Então existe uma curva Lipschitz $t \rightarrow \lambda(t) \in T^*N$ tal que:

- (a) $\lambda(t) \neq 0, \pi(\lambda(t)) = q_{\tilde{u}}(t)$
- (b) $\lambda'(t) = \vec{h}_{\tilde{u}}(\lambda(t))$
- (c) $h_{\tilde{u}}(\lambda(t)) = \max_{u \in U} h_u(\lambda(t))$

Observação 4.51.

Utilizando fato que fluxos de campos (não-autônomos) são difeomorfismo, é possível provar que hipótese $q_{\tilde{u}}(t_1) \in \partial\mathcal{A}_{q_0}(t_1)$ implica que:

$$q_{\tilde{u}}(t) \in \partial\mathcal{A}_{q_0}(t), \text{ para } t \in [0, t_1]. \quad (4.6.2)$$

Preparativos para prova do Teorema 4.50

Nosso modesto objetivo nesta subseção é apenas dar os ingredientes necessários para compreender a ideia da prova do PMP. Em particular desejamos entender como o item (c) do Teorema 4.50 pode ser interpretado em termos geométricos e sua relação com a Figura 4.6. Iniciemos discutirmos um pouco mais sobre campos não autônomos, suas curvas integrais e seus fluxos.

Teorema 4.52. Carathéodory

Considere um campo vetorial não autonomo $\vec{V}_t$. Suponha que:

- 1. $t \rightarrow \vec{V}_t(q)$ é mensurável e localmente limitado
- 2. $q \rightarrow \vec{V}_t(q)$ é suave;
- 3. $|\frac{\partial v_i(q,t)}{\partial q}| \leq C_{I,K}$ para $\vec{V}_t(q) = \sum_i v_i(t, q)\xi_i$

Então existe $\varphi : D(X) \subset M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow M$ tal que:

- (a) $t \rightarrow \varphi_{t_0}^t(q)$ é Lipschitz com respeito a t e suave $q \rightarrow \varphi_{t_0}^t(q)$
- (b) $\frac{d\varphi_{t_0}^t}{dt} = \vec{V}_t(\varphi_{t_0}^t(q))$ para quase todo t e $\varphi_{t_0}^{t_0}(q) = q$.

Notação: $\exp \left(\int_0^t V_s ds \right) := \varphi^t$ e $\exp \left(\int_{t_0}^t V_s ds \right) := \varphi_{t_0}^t$

Observação 4.53.

Considere um campo vetorial linear não autônomo $\vec{V}_t$ em $\mathbb{R}^m$, i.e.,

$$\vec{V}_t(q) = \sum_i \left(\sum_j a_{ij}(t) q_j \right) \vec{e}_i$$

onde $t \rightarrow [a_{ij}] = A(t) \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$. Então o fluxo é dado por uma série (de Volterra) i.e., para $0 \leq s_n \leq s_{n-1} \leq s_{n-2} \cdots \leq t$

$$\exp \left(\int_0^t \vec{V}_s ds \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \cdots \int_0^{s_{n-1}} A_{s_n} \cdots A_{s_1} ds_n \cdots ds_1$$

Em particular se A_{s_1} commuta com A_{s_2} então $\exp \left(\int_0^t \vec{V}_s ds \right) = e^{\int_0^t A(s) ds}$ ou seja coincide de fato com a exponencial matricial.

O Lemma (item (b)) a seguir descreve o fluxo da soma de campos (autônomos ou não). A grosso modo uma curva integral da soma de campos $\vec{Z}_s + \vec{W}_s$ é a composição da linha integral de $\vec{Z}_s$ com a linha integral de um outro campo, o qual seria o campo $\vec{W}_s$ sob o efeito do pushforward do fluxo de $\vec{Z}_s$. Em particular como esperado, se os campos comutassem, o fluxo da soma seria apenas a composição dos fluxos.

Lema 4.54.

Definindo $\varphi_z^t := \exp \left(\int_z^t Z_s ds \right)$ e $\varphi^t := \exp \left(\int_0^t Z_s ds \right)$ temos:

- (a) $(\cdot) \bullet \exp \left(\int_0^t Z_s + W_s ds \right) = (\cdot) \bullet \exp \left(\int_0^t \text{Ad}(\varphi^s) W_s ds \right) \bullet \varphi^t$
- (b) $(\cdot) \bullet \exp \left(\int_0^t Z_s + W_s ds \right) = (\cdot) \bullet \varphi^t \bullet \exp \left(\int_0^t (\varphi_s^t)_* W_s ds \right)$

Demonstração. **(a):** Denotando $\phi^t = \exp \left(\int_0^t Z_s + W_s ds \right) = \psi^t \bullet \varphi^t$ temos:

$$\begin{aligned}
(\cdot) \bullet \cancel{\phi^t} \bullet \vec{Z}_t + (\cdot) \bullet \phi^t \bullet \vec{W}_t &= (\cdot) \bullet \phi^t \bullet (\vec{Z}_t + \vec{W}_t) \\
&= (\cdot) \bullet \frac{d}{dt} \phi^t \\
&= (\cdot) \bullet \left(\frac{d}{dt} \psi^t \right) \bullet \varphi^t + (\cdot) \bullet \psi^t \bullet \frac{d}{dt} (\varphi^t) \\
&= (\cdot) \bullet \left(\frac{d}{dt} \psi^t \right) \bullet \varphi^t + \cancel{(\cdot) \bullet \psi^t \bullet (\varphi^t)} \bullet \vec{Z}_s
\end{aligned}$$

Assim $(\cdot) \bullet \phi^t \bullet \vec{W}_t = (\cdot) \bullet \psi^t \bullet \varphi^t \bullet \vec{W}_t = (\cdot) \bullet \left(\frac{d}{dt} \psi^t \right) \bullet \varphi^t$. Logo

$$\begin{aligned}
(\cdot) \bullet \left(\frac{d}{dt} \psi^t \right) &= (\cdot) \bullet \phi^t \bullet \vec{W}_t \bullet \varphi^{-t} \\
&= (\cdot) \bullet \psi^t \bullet \varphi^t \bullet \vec{W}_t \bullet (\varphi^t)^{-1} \\
&= (\cdot) \bullet \psi^t \bullet \text{Ad}(\varphi^t) \vec{W}_t
\end{aligned}$$

o que implica que $\psi^t = \exp \left(\int_0^t \text{Ad}(\varphi^s) \vec{W}_s ds \right)$ terminando a prova do item (a).

(b) Segue do item (a) que:

$$\begin{aligned}
\exp \left(\int_0^t Z_s + W_s ds \right) &= \exp \left(\int_0^t \text{Ad}(\varphi^s) W_s ds \right) \bullet \varphi^t \\
&= \varphi^t \bullet \varphi^{-t} \bullet \exp \left(\int_0^t \text{Ad}(\varphi^s) W_s ds \right) \bullet \varphi^t \\
&\stackrel{(i)}{=} \varphi^t \bullet \exp \left(\int_0^t \text{Ad}(\varphi^{-t}) \text{Ad}(\varphi^s) W_s ds \right) \\
&= \varphi^t \bullet \exp \left(\int_0^t \text{Ad}(\varphi_s^s) W_s ds \right) \\
&= \varphi^t \bullet \exp \left(\int_0^t (\varphi_s^t)_* W_s ds \right)
\end{aligned}$$

A igualdade (i) segue do fato que para campo $\vec{K}_s$:

$$\varphi^{-t} \bullet \exp \left(\int_0^t K_s ds \right) \bullet \varphi^t = \exp \left(\int_0^t \text{Ad}(\varphi^{-t}) K_s ds \right) \quad (4.6.3)$$

Afim de demonstrar a equação acima considere t fixo e defina:

$$\theta^z = \varphi^{-t} \bullet \exp \left(\int_0^z K_s ds \right) \bullet \varphi^t.$$

Então:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dz}\theta^z &= \varphi^{-t} \bullet \frac{d}{dz} \exp \left(\int_0^z K_s ds \right) \bullet \varphi^t \\
 &= \varphi^{-t} \bullet \exp \left(\int_0^z K_s ds \right) \bullet K_z \bullet \varphi^t \\
 &= \varphi^{-t} \bullet \exp \left(\int_0^z K_s ds \right) \bullet \varphi^t \bullet \varphi^{-t} \bullet K_z \bullet \varphi^t \\
 &= \theta^z \bullet \text{Ad}(\varphi^{-t})K_z
 \end{aligned}$$

assim $\varphi^{-t} \bullet \exp \left(\int_0^z K_s ds \right) \bullet \varphi^t = \theta^z = \exp \left(\int_0^z \text{Ad}(\varphi^{-t})K_s ds \right)$ Trocando z por t concluímos a Equação (4.6.3). $\square$

Apresentamos agora o principal ingrediente da prova do PMP. Aplicando o Lema (4.54) ao nosso contexto, definindo $\vec{Z}_s = \vec{Y}_{\tilde{u}(s)}$ e $\vec{W}_s = \vec{Y}_{u(s)} - \vec{Y}_{\tilde{u}(s)}$ temos:

$$q_0 \bullet \exp \left(\int_0^{t_1} Y_{u(s)} ds \right) = q_0 \bullet \exp \left(\int_0^{t_1} Y_{\tilde{u}(s)} ds \right) \bullet \exp \left(\int_0^{t_1} G_{s,u(s)} ds \right) \quad (4.6.4)$$

onde $\vec{G}_{s,u} = (\varphi_s^{t_1})_* (\vec{Y}_u - \vec{Y}_{\tilde{u}(s)})$ para $s \in [0, t_1]$. Vemos a seguir que todos os vetores $\vec{G}_{s,u}(q_1)$ estão de um lado do hiperplano, o qual é o núcleo de um funcional linear $\lambda_1 \in T_{q_1} N^*$, vide Figura 4.6.

Proposição 4.55.

Se $q_1 = q_{\tilde{u}}(t_1) \in \partial \mathcal{A}_{q_0}(t_1)$ então existe $\lambda_1 \in T_{q_1} N^*$ tal que

$$\lambda_1(\vec{G}_{s,u}(q_1)) \leq 0$$

para $s \in S$, onde $S \subset [0, t_1]$ é o conjunto dos pontos de Lebesgue do controle $s \rightarrow \tilde{u}(s)$.^a

^aUm ponto $s \in [0, t_1]$ é chamado ponto de Lebesgue de $\tilde{u}$, se $\lim_{s \rightarrow s_0} \int_{s_0}^s |\tilde{u}(z) - \tilde{u}(s_0)| dz = 0$. Em um ponto de Lebesgue $\int 0^t u(z) dz$ é diferenciável. Além disto $[0, 1] - S$ tem medida nula.

Demonstração. Tal resultado segue direto da seguinte afirmação:

$$T_{q_1} \mathcal{O}_{q_0} = \text{cone}\{\vec{G}_{s,u}(q_1); s \in S, u \in U\} \Rightarrow q_1 \in \text{int}(\mathcal{A}_{q_0}(t_1)) \quad (4.6.5)$$

Vamos apenas discutir aqui a *ideia da prova* de (4.6.5). É possível escolher $0 < s_1 < \dots < s_k \subset S$ e $u_i \in U$ tal que

$$\text{cone}\{\vec{G}_{s_i, u_i}(q_1)\}_{i=1}^k = T_{q_1}\mathcal{O}(q_0) \quad (4.6.6)$$

Escolhamos também $\epsilon > 0$ tal que $[s_i, s_i + \epsilon) \cap [s_j, s_j + \epsilon) = \emptyset$ Para cada $x = (x_1, \dots, x_k) \in [0, \epsilon)^k \subset \mathbb{R}^k$ podemos associar um controle $s \rightarrow u_x(s)$ como:

$$u_x(s) = \begin{cases} u_i & \text{se } s \in [s_i, s_i + \epsilon) \\ \tilde{u}(s) & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Definamos a aplicação $F : [0, \epsilon)^k \rightarrow \mathcal{O}_{q_0}$ como

$$F(x) = \exp\left(\int_0^{t_1} Y_{u_x(s)} ds\right).$$

É possível provar que F é Lipschitz e diferenciável em 0. Pela (4.6.4) e construção de $s \rightarrow u_x(s)$ concluímos:

$$\begin{aligned} F(x) &= q_1 \bullet \exp\left(\int_0^{t_1} G_{s, u_x(s)} ds\right) \\ &= q_1 \bullet \exp\left(\int_{s_1}^{s_1 + \epsilon_1} G_{s, u_1} ds\right) \\ &\quad \bullet \dots \bullet \exp\left(\int_{s_k}^{s_k + \epsilon_k} G_{s, u_k} ds\right) \end{aligned}$$

Não é difícil verificar que $\frac{\partial F}{\partial x_i}(0) = \vec{G}_{s_i, u_i}(q_1)$. Tal fato e a hipótese (4.6.6) permitem concluir que:

$$DF(0)([0, \epsilon)^k) = T_{q_1}\mathcal{O}_{q_0} \quad (4.6.7)$$

Utilizando a Equação (4.6.7) é possível demonstrar que $F(0)$ fica contido no interior da imagem de F o que conclui a ideia da prova de (4.6.5). □

Ideia da prova do Teorema 4.50

Definamos nossa curva $s \rightarrow \lambda_s \in T_{q_{\tilde{u}(s)}}^*N$ como:

$$\lambda_s = \lambda(s) = (\varphi_s^{t_1})^* \lambda_1 \in T_{q_{\tilde{u}(s)}}^*N^*. \quad (4.6.8)$$

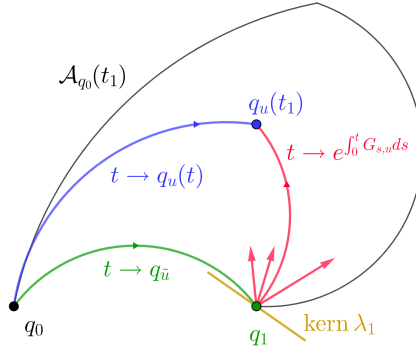


Figura 4.6: A figura ilustra Proposição 4.55 (i.e., $\lambda_1(\vec{G}_{s,u}(q_1)) \leq 0$) e $q_0 \bullet \exp\left(\int_0^{t_1} Y_{u(s)} ds\right) = q_0 \bullet \exp\left(\int_0^{t_1} Y_{\tilde{u}(s)} ds\right) \bullet \exp\left(\int_0^{t_1} G_{s,u(s)} ds\right)$

Utilizando geometria simplética é possível provar que o pullback do fluxo de $\vec{Y}_{\tilde{u}}$ coincide com o fluxo do campo Hamiltoniano associado ao hamiltoniano $h_{\tilde{u}}$, i.e.,

$$\left(\exp\left(\int_t^{t_1} \vec{Y}_{\tilde{u}(s)} ds\right)\right)^* = \exp\left(\int_{t_1}^t \vec{h}_{\tilde{u}(s)} ds\right) \quad (4.6.9)$$

Equações (4.6.8) e (4.6.9) implicam então os item (a) e (b) do PMP.

Nosso objetivo agora é verificar o item (c), i.e.,

$$h_{\tilde{u}}(\lambda(s)) = \max_{u \in U} h_u(\lambda(s)) \quad (4.6.10)$$

onde $h : TN^* \times U \rightarrow \mathbb{R}$ é $h_u(\lambda) = \lambda(\vec{Y}_u)$. Segue da Proposição 4.55 e da linearidade de λ_1 que:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lambda_1(\vec{G}_{s,u}(q_1)) \\ &= \lambda_1(d(\varphi_s^{t_1})\vec{Y}_u \circ (\varphi_s^{t_1})^{-1}(q_1)) - \lambda_1(d(\varphi_s^{t_1})\vec{Y}_{\tilde{u}(s)} \circ (\varphi_s^{t_1})^{-1}(q_1)) \\ &= \lambda_s(\vec{Y}_u \circ (\varphi_s^{t_1})^{-1}(q_1)) - \lambda_s(\vec{Y}_{\tilde{u}(s)} \circ (\varphi_s^{t_1})^{-1}(q_1)) \\ &= \lambda_s(\vec{Y}_u \circ q_{\tilde{u}}(s)) - \lambda_s(\vec{Y}_{\tilde{u}(s)} \circ q_{\tilde{u}}(s)) \\ &= h_u(\lambda(s)) - h_{\tilde{u}}(\lambda(s)) \end{aligned}$$

assim $h_{\tilde{u}}(\lambda(s)) \geq h_u(\lambda(s))$, o que implica a Equação (4.6.10). $\square$

4.6.2. Formulação clássica do PMP (tempo fixo)

Teorema 4.56.

Seja $\{X_u\}_{u \in U}$ um controle geométrico M e $t \rightarrow \tilde{u}(t)$ um controle optimal para o problema do tempo fixo t_1

$$q'_u(t) = X_{u(t)}(q_u(t)); \quad q_u(0) = q_0, q_u(t_1) = q_1$$

$$J(u) = \int_0^{t_1} \varphi(q_u(t), u(t)) dt \rightarrow \min$$

Então existe uma curva $(\lambda(t), c) \neq (0, 0)$, tal que

$$(a) \quad c = 0 \text{ or } c = -1$$

$$(b) \quad \lambda'(t) = \vec{h}_{\tilde{u}, c}(\lambda(t))$$

$$(c) \quad h_{\tilde{u}, c}(\lambda(t)) = \max_{u \in U} h_{u, c}(\lambda(t))$$

$$\text{onde } h_{u, c}(\lambda) = \lambda(X_u) + c\varphi(q, u)$$

Demonstração. Iremos aplicar aqui o PMP geométrico, i.e., Teorema 4.50, a variedade $N := M \times \mathbb{R}$. Note que c deveria aparecer visto que estamos lidando com $(TM \times \mathbb{R})^*$. Afim de garantir que c é não positivo, no lugar de considerar $\hat{X}_u = (X_u, \varphi)$, definamos $Y_{u, v} = (X_u, \varphi + v)$, onde $v \geq 0$ é uma variável extra de controle.

O controle $t \rightarrow (\tilde{u}(t), 0)$ é um minimum de $\hat{J}(u, v) = \int_0^{t_1} (\varphi(q_u, u) + v) dt$ e assim sua solução $\hat{q}_{(\tilde{u}, 0)}$ encontra o bordo do conjunto alcançável $\hat{\mathcal{A}}_{(q_0, 0)}$ (associado a $Y_{u, v}$). Logo podemos aplicar o Teorema 4.50 ao novo controle $\{Y_{u, v}\}$.

O Hamiltoniano $\hat{h}_{u, v} : TM^* \oplus T\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ é

$$\hat{h}_{u, v}(\lambda, a) = \lambda(X_u) + a(\varphi + v).$$

A equação $(\lambda'(t), a'(t)) = \vec{\hat{h}}_{(\tilde{u}, v)}(\lambda(t), a(t))$ torna-se

$$y'(t) = -\frac{\partial \hat{h}}{\partial x} = 0$$

$$x'(t) = \frac{\partial \hat{h}}{\partial y} = \varphi(q_{\tilde{u}}(t)) + v$$

$$\lambda'(t) = \vec{\hat{h}}_{\tilde{u}}(\lambda(t), a(t))$$

onde $h_u(\lambda, a) = \lambda(X_u) + a\varphi$, $\lambda(t) = \sum_i \xi_i(t) dq_i$ e $a(t) = y(t)dx$. A primeira equação já implica que $y(t) = c$.

Afim de prova que a constante $c = y(t)$ é não positiva (onde $a(t) = y(t)dx$), recorde que:

$$\hat{h}_{(\tilde{u}, 0)}(\lambda_t, a(t)) = \max_{v \geq 0, u \in U} \hat{h}_{u, v}(\lambda_t, a(t)) \quad (4.6.11)$$

onde $\hat{h}_{u, v}(\lambda, a) = \lambda(X_u) + a(\varphi + v)$. Substituindo $t \rightarrow (\tilde{u}(t), v)$ no lado direito da Equação (4.6.11) nós concluímos que c é não positivo. Como pode ser verificado na prova do PMP, podemos *rescalonar* λ com um número positivo, e assim podemos escolher $c = -1$ or $c = 0$.

Substituindo $t \rightarrow (u(t), 0)$ no lado direito da Equação (4.6.11) nos provamos:

$$h_{\tilde{u}}(\lambda_t) = \max_{u \in U} h_u(\lambda_t)$$

onde $h_u(\lambda) = \lambda(X_u) + c\varphi$.

□

Exemplo 4.57.

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} u^2(t) dt, \text{ onde } u \in \mathbb{R};$$

$$q_2(t) = \dot{q}_1(t) \quad q_1(0) = x_0 < 0; \quad q_1(t_1) = 0.$$

$$\dot{q}_2(t) = u(t); \quad q_2(0) = 0, \quad q_2(t_1) = 0$$

Desejamos encontrar candidatos para minimizar J , para o tempo fixo t_1 .

O Hamiltoniano é:

$$\begin{aligned} h_u(\lambda) &= \lambda(X_u) + c\varphi \\ &= \lambda(q_2, u) + c\frac{u^2}{2} \\ &= \xi_1 q_2 + \xi_2 u + c\frac{u^2}{2} \end{aligned}$$

$$h_u(\lambda) = h_u((q_1, q_2), (\xi_1, \xi_2)) = \xi_1 q_2 + \xi_2 u + c\frac{u^2}{2}, \text{ com } c = 0 \text{ ou}$$

Continuação.

$c = -1$. A equação Hamiltoniana $\lambda'(t) = \vec{h}_{\tilde{u}}(\lambda(t))$ torna-se:

$$\dot{\xi}_1(t) = -\frac{\partial h_u}{\partial q_1} = 0$$

$$\dot{\xi}_2(t) = -\frac{\partial h_u}{\partial q_2} = -\xi_1(t)$$

$$\dot{q}_1(t) = \frac{\partial h_u}{\partial \xi_1} = q_2(t)$$

$$\dot{q}_2(t) = \frac{\partial h_u}{\partial \xi_2} = \tilde{u}(t)$$

Destas equações já podemos concluir que $\xi_1(t) = \xi$ (i.e., é constante).

Caso abnormal: $c = 0$. Visto que $(\lambda, c) \neq (0, 0)$ e ξ_1 é constante, inferimos que ξ_2 não poderia ser zero. O princípio de maximalidade do PMP

$$\begin{aligned} \xi_1(t)q_2(t) + \tilde{u}\xi_2 &= h_{\tilde{u}}(\lambda(t)) \\ &= \max_{u \in \mathbb{R}} h_u(\lambda(t)) \\ &= \max_{u \in \mathbb{R}} (\xi_1(t)q_2(t) + u\xi_2(t)) \end{aligned}$$

e isto não pode acontecer.

Caso normal: $c = -1$. O Hamiltoniano é $h_u((q_1, q_2), (\xi_1, \xi_2)) = \xi_1 q_2 + \xi_2 u - \frac{u^2}{2}$. Pela maximalidade do PMP $\frac{\partial h_{\tilde{u}}}{\partial u}(\lambda(t)) = 0$ e assim $\xi_2(t) = \tilde{u}(t)$. Substituindo isto nas equações Hamiltonianas:

$$\dot{\xi}_1(t) = -\frac{\partial h_u}{\partial q_1} = 0$$

$$\dot{\xi}_2(t) = -\frac{\partial h_u}{\partial q_2} = -\xi_1(t)$$

inferimos que $\tilde{u}(t) = \alpha t + \beta$ com α, β sendo constante.

Agora vamos determinar o candidato $t \rightarrow q_{\tilde{u}}$.

Nós sabemos que: $h_u((q_1, q_2), (\xi_1, \xi_2)) = \xi_1 q_2 + \xi_2 u - \frac{u^2}{2}$ and $\xi_2(t) =$

Continuação.

$\tilde{u}(t) = \alpha t + \beta$. Substituindo nas equações Hamiltoniana

$$\dot{\xi}_1(t) = -\frac{\partial h_u}{\partial q_1} = 0$$

$$\dot{\xi}_2(t) = -\frac{\partial h_u}{\partial q_2} = -\xi_1(t)$$

$$\dot{q}_1(t) = \frac{\partial h_u}{\partial \xi_1} = q_2(t)$$

$$\dot{q}_2(t) = \frac{\partial h_u}{\partial \xi_2} = \tilde{u}(t)$$

concluimos

$$q_1(t) = \frac{2x_0}{t_1^3}t^3 - \frac{3x_0}{t_1^2}t^2 + x_0$$

$$\tilde{u}(t) = \frac{12x_0}{t_1^3}t - \frac{6x_0}{t_1^2}$$

Antes de passar para a próxima versão do PMP, vamos comentar sobre um modelo de trem um pouco mais realista do que o utilizado em nossa discussão motivadora e apresentar (sem desenvolver os detalhes) candidato natural utilizado em engenharia para minimizar gasto de energia. Para maiores detalhes vide: ⁶

Observação 4.58. Minimizando energia cinética

Consideremo o problema de achar um candidato para minimizar J , para um tempo

6

(HP) P.G. Howlett and P.J. Pudney, *Energy-Efficient Train Control*, Advances in Industrial Control, Springer (1995)

(PUI) G.Popa, C Udriște, I Țevy *Train Control Problem* U.P.B. Sci. Bull., Series A, Vol. 82, Iss. 3, (2020)

Continuação.

fixo t_1 .

$$J(u) = \int_0^T u_+(t)v(t) dt, \text{ onde } u_+ = \frac{u + |u|}{2};$$

$$v'(t) = u - r(v(t)); \quad x(0) = 0; x(t_1) = x_1.$$

$$r(v) = a + bv + cv^2; a, b, c > 0$$

$$v \geq 0; v(0) = 0, v(t_1) = 0$$

$$u \in [-1, 1];$$

Hamiltoniano é $h_u(q, \xi) = -u_+q_2 + \xi_1q_2 + \xi_2(u - r(q_2))$ e nos casos em que h_u seja suave $\lambda'(t) = \vec{h}_{\tilde{u}}(\lambda(t))$ torna-se:

$$\dot{\xi}_1(t) = -\frac{\partial h_u}{\partial q_1} = 0$$

$$\dot{\xi}_2(t) = -\frac{\partial h_u}{\partial q_2} = -u_+ - \xi_1(t) + \xi_2r'(q_2(t))$$

$$\dot{q}_1(t) = \frac{\partial h_u}{\partial \xi_1} = q_2(t)$$

$$\dot{q}_2(t) = \frac{\partial h_u}{\partial \xi_2} = \tilde{u}(t)$$

Estudando em vários casos conclui-se que:

- (1) $\xi_2(t) > q_2(t)$, então $u = 1$ (**aceleração máxima**) no intervalo $[0, T_1]$
- (2) $\xi_2 = q_2$ para $t \in [T_1, T_2]$ quando $q_2(t) = q_2(T_1)$, (**velocidade de cruzeiro**)
- (3) $0 < \xi_2(t) < q_2(t)$ para $t \in [T_2, T_3]$ e $\xi_2(T_3) = 0$ (**diminuição**)
- (4) $\xi_2(t) < 0$ for $t \in [T_3, T]$ and $q_2(T) = 0$ (**parada total**) $\square$

4.6.3. PMP e otimização do tempo

Teorema 4.59.

Seja $\{\vec{X}_u\}_{u \in U}$ um controle geométrico em M e $t \rightarrow \tilde{u}(t)$ uma função de controle

Continuação.

ótima para o problema de otimização de tempo t_1 , i.e.,

$$q'_u(t) = \vec{X}_{u(t)}(q_u(t)); \quad q_u(0) = q_0, q_u(t_1) = q_1$$

$$J(u) = \int_0^{t_1} 1 dt \rightarrow \min$$

Então existe uma curva $\lambda(t) \neq 0$, tal que:

- (a) $h_{\tilde{u}}(\lambda(t)) = c \geq 0$
- (b) $\lambda'(t) = \vec{h}_{\tilde{u}}(\lambda(t))$
- (c) $h_{\tilde{u}}(\lambda(t)) = \max_{u \in U} h_u(\lambda(t))$

onde $h_u(\lambda) = \lambda(\vec{X}_u)$

Para demonstrar o teorema acima utiliza-se argumento semelhante ao do Teorema 4.56 ou seja considera-se em $N = M \times \mathbb{R}$ o sistema de controle geométrico $\{Y_{\hat{u}} = (X_u, 1 + v)\}$, $\hat{u} = (u, v)$ com $v \geq 0$, aplicando a adaptação geométrica a seguir:

Proposição 4.60. PMP geométrico para tempo livre

Seja $t \rightarrow \tilde{u}(t)$ um controle admissível com $q_{\tilde{u}}(t_1) \in \partial(\cup_{|t-t_1| < \delta} \mathcal{A}_{q_0}(t))$ para algum t_1 e $\delta \in [0, t_1]$.

Then there exists a Lipschitz curve $t \rightarrow \lambda(t) \in T^*N$ so that:

- (a) $\lambda(t) \neq 0, \pi(\lambda(t)) = q_{\tilde{u}(t)}$
- (b) $\lambda'(t) = \vec{h}_{\tilde{u}}(\lambda(t))$
- (c) $h_{\tilde{u}}(\lambda(t)) = \max_{u \in U} h_u(\lambda(t))$
- (d) $h_{\tilde{u}}(\lambda(t)) \geq 0$.

Por sua vez a proposição acima segue como corolário do Teorema 4.50 após aplica-lo ao novo sistema $\{Z_{\hat{u},w} = wY_{\hat{u}}\}$, o qual descreve reparametrizações de soluções de $\vec{Y}_{\hat{u}}$ i.e., $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($\theta'(t) > 0$) e $\frac{d}{dt}q_{\hat{u}}(\theta(t)) = \theta'(t)Y_{\hat{u} \circ \theta}(q_{\hat{u}}(\theta(t)))$

Exemplo 4.61.

Continuação.

$$\begin{aligned}
 J(u) &= \frac{1}{2} \int_0^{t_1} 1 \, dt, \text{ where } u \in [-1, 1]; \\
 q_2(t) &= \dot{q}_1(t) \quad q_1(0) = x_0 < 0; \quad q_1(t_1) = 0. \\
 \dot{q}_2(t) &= u(t); \quad q_2(0) = 0, \quad q_2(t_1) = 0
 \end{aligned}$$

Nós desejamos achar um candidato que minimize J , i.e., minimize o tempo t_1

O Hamiltoniano é:

$$\begin{aligned}
 h_u(\lambda) &= \lambda(X_u) \\
 &= \lambda(q_2, u) \\
 &= \xi_1 q_2 + \xi_2 u
 \end{aligned}$$

$h_u(\lambda) = h_u((q_1, q_2), (\xi_1, \xi_2)) = \xi_1 q_2 + \xi_2 u$. A equação $\lambda'(t) = \vec{h}_{\tilde{u}}(\lambda(t))$ torna-se:

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_1(t) &= -\frac{\partial h_u}{\partial q_1} = 0 \\
 \dot{\xi}_2(t) &= -\frac{\partial h_u}{\partial q_2} = -\xi_1(t) \\
 \dot{q}_1(t) &= \frac{\partial h_u}{\partial \xi_1} = q_2(t) \\
 \dot{q}_2(t) &= \frac{\partial h_u}{\partial \xi_2} = \tilde{u}(t)
 \end{aligned}$$

Desta equação podemos concluir que $\xi_1(t) = c_1$ (i.e., é constante) e assim $\xi_2(t) = -c_1 t + c_0$. A hipótese $\lambda(t) \neq 0$, então implica que $\xi_2 \neq 0$

O princípio de maximalidade de PMP

$$\begin{aligned}
 \xi_1(t) \cancel{q_2(t)} + \tilde{u} \xi_2 &= h_{\tilde{u}}(\lambda(t)) \\
 &= \max_{u \in [-1, 1]} h_u(\lambda(t)) \\
 &= \max_{u \in [-1, 1]} (\xi_1(t) \cancel{q_2(t)} + u \xi_2(t))
 \end{aligned}$$

Dai concluímos $\tilde{u}(t) = \text{sgn } \xi_2(t) = \text{sgn } (-c_1 t + c_0)$ e assim $h_{\tilde{u}}(\lambda(t)) = \xi_1(t) q_2(t) + |\xi_2(t)|$, o que implica que a suavidade de $h_{\tilde{u}}$ (e das equações

Continuação.

Hamiltonianos) depende $\tilde{u}(t) = \text{sgn } \xi_2(t)$

$$\dot{q}_1(t) = \frac{\partial h_u}{\partial \xi_1} = q_2(t)$$

$$\dot{q}_2(t) = \frac{\partial h_u}{\partial \xi_2} = \tilde{u}(t)$$

Nós concluímos que $q_1(t) = \pm \frac{t^2}{2} + q_2(0)t + q_1(0)$ e $q_2(t) = \pm t + q_2(0)$.

Assim $q_1(t) = \pm \frac{q_2^2(t)}{2} + c_3$ Isto sugere **vários casos possíveis**:

Caso 1: sem troca Nosso problema $q_2(0) = 0$ e $q_1(t_1) = 0$ com $q_2(t_1) = 0$ não está neste caso.

Caso 2: com troca t_s

Caso 2.1: $q_2(0) < q_2(t_s)$

$$q_1(t) = \begin{cases} \frac{q_2^2(t)}{2} - \frac{q_2^2(t_s)}{2} + q_1(t_s) & t \leq t_s \\ -\frac{q_2^2(t)}{2} & t_s \geq t \end{cases}$$

Caso 2.2: $q_2(0) > q_2(t_s)$ Nosso problema não está neste caso.

Caso 2.1 otimiza o tempo (isto segue do PMP junto com teorema de Filippov)

Parte III

Geometria Rieman- niana

Conexão e geodésicas

Na Seção 1.9.2, inspirados no conceito de gradiente Riemanniano (i.e., gradiente intrínseco) e afim de compreender o conceito de Hessiano Riemanniano, introduzimos o conceito de Conexão Riemanniana de uma superfície mergulhada em $\mathbb{R}^3$ (recorde Definição 1.109). Posteriormente, na Seção 4.5.3 o conceito de geodésica (curvas de aceleração intrínseca nula) foi introduzido. Neste capítulo tais conceitos serão revistos e aprofundados.

Esperamos ao longo deste capítulo e do próximo introduzir o(a) leitor(a) ao belo mundo da Geometria Riemanniana.

5.1. Métricas e variedades Riemannianas

Vimos anteriormente que uma variedade M^m em um espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{m+k}$ admite uma métrica induzida $\mathbf{g}_0$, vindo do produto Euclidiano em $\mathbb{R}^{m+k}$, recorde Definição 1.34 e Exemplo 1.35. Apesar de sua utilidade, como veremos em breve, por vezes poderemos estar interessados em outras maneiras de ter um produtor interno $\mathbf{g}_x$ associado a cada espaço tangente $T_x M$.

Chamaremos de **métrica** em M uma aplicação que a cada ponto $x \in M$ associa um produto interno $\mathbf{g}_x$ de $T_x M$. Em Geometria Diferencial estaremos pedindo também que tal métrica $x \rightarrow \mathbf{g}_x$ seja **suave**. Uma forma sofisticada de dizer que tal aplicação é suave, seria dizer que *é uma seção suave do fibrado de 2-tensores simétricos positivos definidos em TM* . Uma forma mais pedestre de explicar isto, pode ser via parametrizações.

Nesta seção estaremos discutindo propriedades básicas das métricas e alguns exemplos de variedades Riemannianas (variedades com uma métrica).

5.1.1. Definições básicas

Lembremos que dado um ponto $p_0 \in M$, temos uma parametrização $\varphi : V \rightarrow U \subset M$ para p_0 contido em U . Seja $\frac{\partial}{\partial x_i} = (\varphi)_* \vec{e}_i$ campos (coordenados) em U . Com isto em mente dizemos que uma aplicação $x \rightarrow \mathbf{g}_x$ é uma **métrica suave** se as funções $x \rightarrow \mathbf{g}_{ij} = \mathbf{g}(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$ são suaves em U , para todo U .

Uma variedade M com uma métrica suave $\mathbf{g}$ é chamado **variedade Riemanniana** $(M, \mathbf{g})$.

Observação 5.1.

Toda variedade M^m admite métrica Riemanniana $\mathbf{g}$. De fato, sejam $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$ um atlas de M e $\mathbf{g}^0$ métrica Euclidiana de $\mathbb{R}^m$. Definamos $\mathbf{g}_\alpha := \psi_\alpha^* \mathbf{g}^0$. Por fim seja $\{\rho_\alpha\}$ uma partição da unidade subordinada a $\{U_\alpha\}$ e definamos $\mathbf{g} := \sum_\alpha \rho_\alpha \mathbf{g}_\alpha$.

O conceito de métrica nos permite introduzir de forma natural conceitos como comprimento de curva e distância. Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow (M, \mathbf{g})$ uma curva C^1 por partes, i.e., existe uma partição $a = t_1 < \dots < t_n = b$ tal que $\alpha|_{(t_{i-1}, t_i)}$ é C^1 . O **comprimento da curva** de α é definido como

$$\mathbf{l}(\alpha) := \sum_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\mathbf{g}(\alpha'(t), \alpha'(t))} dt$$

A **distância entre 2 pontos** p e q de M é definida como

$$d(p, q) = \inf_{\alpha \in \Omega_{p,q}} \mathbf{l}(\alpha)$$

onde $\Omega_{p,q}$ é o conjunto das curvas C^1 por partes $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$. É possível mostrar que $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e de fato uma função distância. Temos assim que (M, d) é um espaço métrico.

Uma vez que temos o conceito de função distância, podemos dizer que uma curva $\alpha : I \rightarrow M$ **minimiza distância** se para todo $t_0 \in I$ existe um ϵ tal que $d(\gamma(t_0), \gamma(t_0 + \epsilon)) = \mathbf{l}(\alpha|_{[t_0, t_0 + \epsilon]})$. Veremos em breve que tais curvas são justamente as assim chamadas geodésicas, curvas de "aceleração intrínseca nula" (i.e., derivada covariante nula).

Podemos agora ilustrar alguns conceitos recordando um exemplo.

Exemplo 5.2.

Sejam M uma superfície mergulhada em $\mathbb{R}^3$ e f função definida em vizinhança contendo M tal que $f < c$ para uma certa constante positiva. Podemos então definir $\mathbf{g} = (c - f)\mathbf{g}_0$, a qual chamamos **métrica de Jacobi**.

Tal métrica é relevante para compreender partículas presas em M sob efeito de um campo conservativo $-\nabla f$. Mais precisamente seja $\alpha : I \rightarrow M$ uma curva atendendo a **equação de Newton (intrínseca)** $(\alpha''(t))^\perp = -\text{grad } f$. Verificamos na Seção 4.5.3 que uma reparametrização de α é uma geodésica com respeito a $\mathbf{g}$ ou seja β minimizará localmente distância dada por $\mathbf{g}$. Em outras palavras, uma partícula presa em uma superfície sob efeito de um campo conservativo $-\nabla f$ percorre um caminho que localmente é o menor caminho possível, mas não com respeito a distância induzida por $\mathbf{g}_0$ e sim com respeito a uma distância que também leva em consideração o potencial f .

Definição 5.3.

Um difeomorfismo $F : (M^m, \mathbf{g}^M) \rightarrow (N^m, \mathbf{g}^N)$ entre variedades Riemannianas é chamado **isometria** se $dF_x : (T_x M, \mathbf{g}_x^M) \rightarrow (T_{F(x)} N, \mathbf{g}_{F(x)}^N)$ é isometria para todo $x \in M$.

Em outras palavras uma isometria entre variedades preserva métrica e assim objetos definidos com métrica.

Exercício 5.4.

Seja $F : (M, \mathbf{g}) \rightarrow (M, \mathbf{g})$ uma isometria de uma variedade Riemanniana $(M, \mathbf{g})$. Prove que F preserva distância, ou seja $d(F(x), F(y)) = d(x, y)$ para todo $x, y \in M$.

Afim de ilustrar o conceito de isometria, apresentemos a seguir o plano hiperbólico, espaço introduzindo por vários matemáticos, dentre eles Lobashevsky. O plano hiperbólico é um análogo do espaço Euclidiano, onde postulado Euclidiano sobre paralelas (quinto postulado) deixa de valer. Ou seja *podemos encontrar uma linha (curva que minimiza caminho) γ e um ponto p não contido em γ tal por p passa mais de que uma "linha" paralela a γ , ou seja que não encontra γ* . Planos hiperbólicos e mais geralmente espaços hiperbólicos são protótipos dos espaços de curvatura negativa.

Exemplo 5.5.

Definamos $\mathbb{H}^2 = \{z = x + yi \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ com métrica $g = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$ como sendo **modelo hiperbólico do semi-plano superior (semi-plano de Poincaré)**. Para $ad - bc = 1$ e $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ definamos:

$$F : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$$

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

Afirmamos que F é uma isometria. Apresentemos a seguir os passos da demonstração desta afirmação (deixando para o(a) leitor(a) preencher os detalhes).

Passo 1: Usando $ad - bc = 1$ prova-se que $\text{Im}(F(z)) = \frac{\text{Im}(z)}{|cz+d|^2}$.

Passo 2: $\frac{d}{dt}(F \circ \alpha) = \frac{dF}{dz}(\alpha(t))\alpha'(t)$ para $t \rightarrow \alpha(t) = x(t) + iy(t)$ por variável complexa.

Passo 3: Usando $ad - bc = 1$ e variável complexa temos $\frac{dF}{dz} = \frac{1}{(cz+d)^2}$.

Passo 4: Utilizando os passos anteriores concluímos:

$$\begin{aligned} \|DF\alpha'(t)\| &= \frac{\left|\frac{d}{dt}F(\alpha(t))\right|}{\text{Im}(F(\alpha(t)))} \\ &= \frac{|\alpha'(t)|}{|c\alpha(t) + d|^2} \frac{|c\alpha(t) + d|^2}{\text{Im}(\alpha(t))} \\ &= \|\alpha'(t)\|. \end{aligned}$$

Tais isometrias F são de fato as isometrias que preservam orientação em $\mathbb{H}^2$.

Por outro lado é possível verificar (vide Proposição 5.101) que o segmento de reta $\{yi \in \mathbb{C}, y > 0\}$ é geodésica.

Combinando nosso conhecimento de F e que o segmento vertical é geodésica, é possível gerar todas as geodésicas de $\mathbb{H}^2$: elas são os círculos com centro em $\partial\mathbb{H}^2$ e retas verticais, em particular verificando que o quinto postulado Euclidiano não é mais válido, vide Figura 5.1

O modelo acima pode ser generalizado para o **modelo do semi-espço hiperbó-**

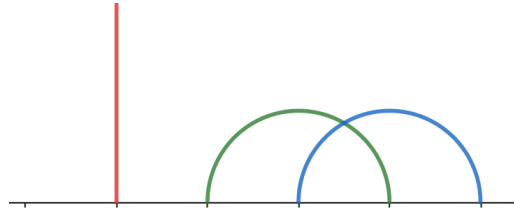


Figura 5.1: três geodésicas do plano hiperbólico, ilustrando Exemplo 5.5

lico $\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 > 0\}$ com métrica $\mathbf{g}_1 = \sum_{i=1}^n \frac{dx_i^2}{x_1}$. O exercício a seguir destaca que tal modelo é isométrico à dois outros modelos: o *hiperboloide no espaço de Minkowski* e o *disco de Poincaré*.

Exercício 5.6. * Modelos do espaço hiperbólico

Neste problema iremos ver as diferentes representações do espaço hiperbólico.

- O **espaço de Minkowski** é definido como $\mathbb{R}^{n+1}$ com a forma quadrática $\langle x, x \rangle = +x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2$. Considere $\mathbb{M}^{n+1}$ a subvariedade de $\mathbb{R}^{n+1}$ definida como: $\mathbb{M}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \langle x, x \rangle = -1, x_{n+1} > 0\}$. Verifique que a forma quadrática $+dx_1^2 + \cdots + dx_n^2 - dx_{n+1}^2$ restrita a $\mathbb{M}^n$ é uma métrica Riemanniana $\mathbf{g}_2$. Tal hipersuperfície com métrica $\mathbf{g}_2$ será chamado **modelo do hiperboloide no espaço de Minkowski**.
- O **modelo do disco de Poincaré** é definido como $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| < 1\}$ com a métrica $\mathbf{g}_3 := 4 \sum_{i=1}^n \frac{dx_i^2}{(1-|x|^2)^2}$. Seja F a *pseudo-inversão* com polo $s = (-1, 0, \dots, 0)$ definida por $F(x) = s - \frac{2(x-s)}{\langle x-s, x-s \rangle}$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a forma quadrática definida no Item (a). Mostre que f é isometria entre $\mathbb{M}^n$ e $\mathbb{D}^n$.
- Seja G a inversão no $\mathbb{R}^n$ definida como $G(x) := s + \frac{2(x-s)}{|x-s|^2}$, com polo $s = (-1, 0, \dots, 0)$. Mostre que G é uma isometria entre o disco de Poincaré $\mathbb{D}^n$ e o modelo do semi-espaço de Poincaré $\mathbb{H}^n$.

Sugestão Consulte e.g. Gallot, Hulin, Lafontaine (Seção 2.A, página 56,57) e Carmo (Capítulo 8, página 196,197).

Para futuras referencias, denotaremos os três modelos pela letra $\mathbb{H}^n$, destacando o tipo de modelo quando for adequado.

5.1.2. Métricas em grupos de Lie e espaços quocientes de ações isométricas

Desejamos aqui listar algumas propriedades de grupos de Lie e ações isométricas (objetos que vimos rapidamente em capítulos anteriores) e destacar exemplos de métricas Riemannianas associadas a estes objetos, vide Proposição 5.16 e Proposição 5.32. Provas dos resultados aqui listados podem ser encontrados e.g, em [AB15].

Grupos de Lie

Definição 5.7.

- (a) Uma variedade G é chamada **grupo de Lie** se G é um grupo e as operações

$$\begin{aligned} G \times G \ni (x, y) &\rightarrow xy \in G \\ G \ni x &\rightarrow x^{-1} \in G \end{aligned}$$

são suaves. Observe que a definição equivale a dizer que G é um grupo e a operação $G \times G \ni (x, y) \rightarrow xy^{-1} \in G$ é suave.

- (b) Um subgrupo H de G é um **um subgrupo de Lie** se H é variedade imersa (sem auto-interseções) e $H \times H \ni (x, y) \rightarrow xy^{-1} \in H$ é suave.

Um dos primeiros resultados da teoria de grupos de Lie nos fornece uma ferramenta útil para obter exemplos de grupos e subgrupos de Lie.

Teorema 5.8.

Seja G um grupo de Lie e H um subgrupo fechado. Então H é um subgrupo de Lie de G mergulhado.

Exercício 5.9.

Mostre que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, $\mathcal{O}(n)$ e $\mathrm{U}(n)$ são grupos de Lie.

SUGESTÃO: Mostre diretamente que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ e $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ são grupos de Lie. Depois mostre que $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, $\mathcal{O}(n)$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, e $\mathrm{U}(n)$ são subgrupos

Continuação.

fechados de $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ e $\mathbb{GL}(n, \mathbb{C})$ e use o resultado acima.

Recordemos agora que a cada grupo de Lie existe uma álgebra de Lie associada. Um campo $\vec{X} \in \mathfrak{X}(G)$ é chamado **campo invariante a esquerda** se $\vec{X} = dL_g \vec{X}$ onde $L_g : G \ni a \rightarrow ga \in G$ é a multiplicação a esquerda. É possível mostrar que tais campos de fato são suaves. Segue da definição que um campo invariante a esquerda é determinado por seu valor no espaço tangente $T_e G$, i.e., $\vec{X}(g) = dL_g X(e)$. Assim chegamos a conclusão que o módulo dos campos invariantes a esquerda, denotado aqui por $\mathfrak{g}$, é um espaço vetorial com a dimensão do grupo de Lie G . Também é possível mostrar que $\mathfrak{g}$ é fechado pelo colchete de campos de vetores, ou seja o colchete de dois campos invariantes a esquerda é um campo invariante a esquerda.

Definição 5.10.

Seja $\mathfrak{g}$ o módulo dos campos invariantes a esquerda do grupo de Lie G . Então $\mathfrak{g}$ dotado do colchete de campos é uma álgebra de Lie chamada **álgebra de Lie do grupo de Lie G** .

Observação 5.11.

Como $\vec{X}(g) = dL_g X(e)$ frequentemente estaremos identificando o campo $\vec{X}$ com o vetor $X(e) \in T_e G$. Também podemos dotar $T_e G$ com o produto de Lie $[V_1, V_2] := [\vec{X}_1, \vec{X}_2]_e$ onde $\vec{X}_i(g) = dL_g V_i$ e $V_i \in T_e G$ e provar que $T_e G$ com tal produto de Lie é isomorfo (admite uma bijeção linear que preserva produto de Lie) a $\mathfrak{g}$ com o colchete de campos.

Um outro conceito relevante em grupos de Lie é o da *exponencial de Lie*. Seja $\vec{X} \in \mathfrak{g}$. Então é possível mostrar que existe uma única curva integral $\lambda_X : \mathbb{R} \rightarrow G$ do campo $\vec{X}$. Ou seja $\lambda'_X(t) = \vec{X}(\lambda_X(t))$ e $\lambda_X(0) = e$. A **exponencial de Lie** é definida então como

$$\exp(X) = \lambda_X(1).$$

A seguir algumas propriedades da aplicação exponencial de Lie.

1. $\exp(tX) = \lambda_X(t)$
2. $\exp(-tX) = (\exp(tX))^{-1}$
3. $\exp(tX + sX) = \exp(tX) \exp(sX)$

4. $\exp : T_e G \rightarrow G$ é suave e $d(\exp)_0 = id$

Como podemos perceber tais propriedades são as mesmas da aplicação exponencial de matrizes. De fato quando G é um grupo de matrizes estas duas aplicações exponenciais coincidem.

Exercício 5.12.

Seja G é um subgrupo de Lie de $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$. Mostre que a aplicação exponencial de G coincide com a exponencial de matrizes.

SUGESTÃO: Defina $\varphi(t) := \exp(tX)$. Usando o fato que φ é um homomorfismo de Lie a 1-parametro (ou seja $\varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t)$), conclua que φ é solução da E.D.O, $\varphi'(t) = \varphi'(0)\varphi(t)$ com $\varphi(0) = Id$. Segue então da teoria de E.D.O que $e^{tX} = \exp(tX)$.

Aceitando algumas propriedades da aplicação exponencial e a representação adjunta, podemos determinar explicitamente a algebra de Lie de grupos de Lie matriciais.

Exercício 5.13.

Sejam G subgrupo de Lie de $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ e $X, Y \in \mathfrak{g}$. Verifique:

1. $dL_g X = gX$ e $dR_g X = Xg$.
2. $\text{Ad}(g)Y := \frac{d}{dt}(g \exp(tY)g^{-1})|_{t=0} = gYg^{-1}$.
3. Usando (sem demonstrar) o fato que $\frac{d}{dt}\text{Ad}(\exp(tX))Y|_{t=0} = [X, Y]$ mostre que $[X, Y] = XY - YX$ (comutador de matrizes).

Também é conveniente destacar o próximo resultado sobre quociente entre grupos de Lie que será útil no estudo de órbitas de ações isométricas.

Teorema 5.14.

Seja H um subgrupo fechado de um grupo de Lie G . Então G/H admite uma única estrutura diferenciável tal que $\pi : G \rightarrow G/H$ é aplicação suave. Além disto se H é normal G/H é grupo de Lie e π é um homomorfismo de Lie, i.e., um homomorfismo suave entre grupos de Lie.

Por fim vamos considerar algumas métricas nos grupos de Lie.

Seja $R_g : G \ni x \rightarrow xg \in G$ a multiplicação a direita. Uma métrica $\mathbf{g}$ em um grupo de Lie G é **invariante a direita** (respectivamente **invariante a esquerda**) se R_g (respectivamente L_g) é isometria da métrica $\mathbf{g}$ para todo elemento g do grupo. Note que todo grupo de Lie admite uma métrica invariante a direita. De fato uma tal métrica pode ser definida como

$$\mathbf{g}_h(V, W) := \langle d(R_h)^{-1}V, d(R_h)^{-1}W \rangle$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno qualquer em $T_e G$. De forma analoga, pode-se demonstrar que existe uma n -forma invariante a direita, ou seja $R_h^* \omega = \omega$.

Exercício 5.15.

Considere $\mathfrak{so}(n) = T_e \mathbb{SO}(n)$ com produto interno definido como

$$\langle X, Y \rangle_e = \text{tr} XY^t$$

onde $X, Y \in \mathfrak{so}(n)$. Defina uma métrica em $\mathbb{SO}(n)$ como

$$\mathbf{g}(\tilde{X}, \tilde{Y})_g := \langle dR_{g^{-1}}\tilde{X}, dR_{g^{-1}}\tilde{Y} \rangle.$$

Conclua que tal métrica é bi-invariante, ou seja L_g e R_g são isometrias para todo $g \in \mathbb{SO}(n)$.

Vale apenas destacar que nem todo grupo admite uma métrica **bi-invariante** (i.e., que seja invariante a direita e a esquerda ao mesmo tempo) e.g., $\mathbb{SL}(2, \mathbb{R})$. Porém como vemos a seguir se o grupo de Lie for compacto, de fato tal métrica existirá.

Proposição 5.16.

Seja G um grupo de Lie compacto. Então G admite uma **métrica bi-invariante** $\mathbf{g}^G$.

Demonstração. Seja ω uma forma volume invariante a direita em G e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ uma métrica invariante a direita qualquer.

Defina para todo $X, Y \in T_x G$,

$$\mathbf{g}_x^G(X, Y) = \int_G \langle dL_g X, dL_g Y \rangle_{gx} \omega.$$

Primeiro afirmarmos que $\mathbf{g}^G$ é invariante a esquerda. De fato,

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{hx}^G(dL_h X, dL_h Y) &= \int_G \langle dL_g(dL_h X), dL_g(dL_h Y) \rangle_{g(hx)} \omega \\ &= \int_G \langle dL_{gh} X, dL_{gh} Y \rangle_{(gh)x} \omega. \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

Fixe $X, Y \in T_x G$ e defina $f(g) = \langle dL_g X, dL_g Y \rangle_{gx}$. Então

$$\begin{aligned}
 \int_G \langle dL_{gh} X, dL_{gh} Y \rangle_{(gh)x} \omega &= \int_G f(gh) \omega \\
 &= \int_G R_h^*(f\omega) \\
 &= \int_G f\omega \\
 &= \int_G \langle dL_g X, dL_g Y \rangle_{gx} \omega \\
 &= \mathbf{g}_x^G(X, Y).
 \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

Das Equações (5.1.1) e (5.1.2), segue que $\mathbf{g}^G$ é invariante a esquerda.

Verificamos agora que $\mathbf{g}^G$ é invariante a direita.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{g}_{xh}^G(dR_h X, dR_h Y) &= \int_G \langle dL_g(dR_h X), dL_g(dR_h Y) \rangle_{g(xh)} \omega \\
 &= \int_G \langle dR_h dL_g X, dR_h dL_g Y \rangle_{(gx)h} \omega \\
 &= \int_G \langle dL_g X, dL_g Y \rangle_{gx} \omega \\
 &= \mathbf{g}_x^G(X, Y). \quad \square
 \end{aligned}$$

Ações Isométricas

Uma vez compreendido o exemplo de métrica bi-invariante em grupos de Lie compacto, veremos a seguir espaços quocientes M/G , onde G é um subgrupos fechado de isometrias de uma variedade Riemanniana $(M, \mathbf{g})$ e apresentaremos métricas naturais nestes espaços, vide Proposição 5.32.

Iniciemos apresentando algumas definições e resultados mais gerais sobre ações próprias.

Definição 5.17.

Sejam G um grupo de Lie, M uma variedade. Uma aplicação $\mu : G \times M \rightarrow M$ é chamada **ação a esquerda** se

$$(a) \quad \mu(g_1, \mu(g_2, x)) = \mu(g_1 g_2, x)$$

Continuação.

$$(b) \mu(e, x) = x.$$

Vale aqui definição análoga para ação a direita. Por vezes, pode ser conveniente denotar $\mu(g, x)$ simplesmente por $g \cdot x$.

Um exemplo simples de uma ação (a esquerda) é dado por um grupo fechado $G \subset \mathbb{GL}(n)$ agindo em $M = \mathbb{R}^n$ via multiplicação matricial, i.e., consideremos $\mu : G \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ onde $\mu(g, v) = gv$. Outro exemplo comum são as ações dada por fluxos de campos completos. Mais precisamente, considere um campo $\vec{X} \in \mathfrak{X}(M)$ em uma variedade M e suponha que seu fluxo $\varphi_t = e^{tX}$ esteja definido para todo tempo t . Então podemos definir $\mu : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ como $\mu(t, x) = \varphi_t(x)$. Em particular neste último exemplo a curva integral do campo passando por x é um exemplo do que chamamos órbita passando por x .

Definição 5.18.

Uma **órbita passando por x** é definida como sendo o conjunto

$$G(x) := \{\mu(g, x) \mid \forall g \in G\}.$$

As órbitas particionam o espaço, sendo que o conjunto das órbitas é chamado **espaço de órbitas** e é denotado por:

$$M/G = \{G(x) \mid \forall x \in M\}.$$

Outro conceito relevante é a definição de **grupos de isotropia** G_x de $x \in M$.

$$G_x := \{g \mid \mu(g, x) = x\}.$$

Exemplo 5.19.

- (a) Sejam $G = \mathbb{SO}(3)$, $M = \mathbb{R}^3$ e ação matricial $\mu : \mathbb{SO}(3) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, i.e., $\mu(g, v) = gv$. Então se $x \neq (0, 0, 0)$ temos que a órbita $G(x)$ é esfera de raio $\|x\|$ e a isotropia associada a x é $G_x = \mathbb{SO}(2)$. Caso $x = (0, 0, 0)$ então $G(x) = \{(0, 0, 0)\}$ e a isotropia $G_{(0,0,0)} = \mathbb{SO}(3)$. Note também que neste exemplo $M/G = [0, \infty)$
- (b) Seja M^2 superfície mergulhada em $\mathbb{R}^3$ invariante por rotação no eixo x_3 , ou seja, uma superfície de rotação. Então a rotação induz uma ação $S^1 \times M \rightarrow M$ sendo que a curva geratriz (contida no plano

Continuação.

$\{(0, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_2 \geq 0\}$ se torna o espaço de órbitas M/G . As órbitas são círculos, os “paralelos” da superfície de revolução. A isotrofia para todo ponto que não é um “polo” i.e., que não está no eixo x_3 é trivial.

- (c) Sejam $G = S^1 \times \mathbb{R}$, $M = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ e considere a ação $\mu((s, t), (z, l)) = (s \cdot z, t + l)$. Neste caso as órbitas são ou cilindros (se $x \neq (0, 0, 0)$) ou o eixo x_3 (se $x = (0, 0, 0)$) sendo que as isotropias nestes casos são ou triviais ou o S^1 respectivamente. O espaço de órbitas então é o semi-plano $M/G = \{(x_1, x_2, x_3), x_1 = 0, x_2 \geq 0\}$.

Observe que nos exemplos acima as órbitas sempre são subvariedades mergulhadas. Esta é uma das propriedades interessantes da assim chamada ação própria, a qual generaliza ação de grupos compactos.

Definição 5.20. Ação própria

Uma ação $\mu : G \times M \rightarrow M$ é **uma ação própria** se a aplicação $G \times M \ni (g, x) \rightarrow (\mu(g, x), x) \in M \times M$ é própria, ou seja se a pré-imagem de conjuntos compactos é compacto.

Observação 5.21.

É possível mostrar que uma ação é própria se e somente se para toda sequência $\{x_n\}$ em M e $\mu(g_n, x_n)$ em M tal que $x_n \rightarrow x$ e $\mu(g_n, x_n) \rightarrow y$ pudermos concluir que existe uma subsequência $\{g_{n_i}\}$ convergente em G .

Segue direto da definição que todo grupo compacto G age sempre propriamente em variedades. A seguir um outro exemplo de ação própria. Lembremos que uma ação é **livre** se nenhum $\mu_g(\cdot) := \mu(g, \cdot)$ fixa pontos quando g diferente da identidade.

Exercício 5.22.

Seja H subgrupo fechado de um grupo de Lie G . Mostre que a ação $G \times H \rightarrow G$ definida como $g \cdot h := gh$ é uma ação a direita, livre, própria.

Teorema 5.23.

Sejam $\mu : G \times M \rightarrow M$ ação e $\mu^x : G \rightarrow M$ definida como $\mu^x(g) = \mu(g, x)$. Então

- (a) $\tilde{\mu}^x : G/G_x \rightarrow G(x) \subset M$ é uma imersão sem auto-interseções, onde $\tilde{\mu}^x$ é a única função tal que $\tilde{\mu}^x \circ \pi = \mu^x$ e $\pi : G \rightarrow G/G_x$ é a projeção canônica.
- (b) Se a ação for própria então $\tilde{\mu}^x$ é um mergulho. Em particular $G(x)$ é variedade mergulhada.

Exercício 5.24.

Verifique que $\mathbb{S}^n = \mathbb{SO}(n+1)/\mathbb{SO}(n)$.

Ações próprias estão relacionadas com ações de grupos fechados de isometria. Antes de explorar esta relação, apresentamos o teorema a seguir devido a Meyers-Steenrod.

Teorema 5.25.

Seja M uma variedade Riemanniana e denote por $Iso(M)$ o grupo de isometrias de M . Então todo subgrupo fechado na topologia da convergência compacta é um grupo de Lie. Em particular $Iso(M)$ é grupo de Lie. Além disto se M for compacta, $Iso(M)$ é compacta.

Teorema 5.26.

Seja $G \subset Iso(M)$ subgrupo fechado. Então a ação $\mu : G \times M \rightarrow M$ definida como $\mu(g, x) = g(x)$ é uma ação própria.

Observação 5.27.

É possível também mostrar um resultado recíproco. Ou seja, para toda ação própria $\mu : G \times M \rightarrow M$ existe uma métrica em M tal que $\mu(G, \cdot)$ se torna um subgrupo fechado de isometrias.

Teorema 5.28.

Seja $\mu : G \times M \rightarrow M$ ação livre e própria. Então M/G tem estrutura de variedade e $\pi : M \rightarrow M/G$ é submersão. Além disto para todo $x \in M/G$ e $y \in \pi^{-1}(x)$ existe aplicação suave $S : U \rightarrow M$ (seção local) tal que $S(x) = y$ e $\pi \circ S = Id$.

Exemplo 5.29.

Considere a esfera $\mathbb{S}^{2n+1} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2}, |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 1\}$ e $\mu : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{S}^{2n+1}$ definida como $\mu(g, z) = (g \cdot z_1, \dots, g \cdot z_{n+1})$. Então $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ (espaço projetivo complexo) é variedade e $\pi : \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ é submersão.

Exercício 5.30.

Verifique os difeomorfismos abaixo:

$$(a) \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{SO}(n+1)/S(\mathbb{O}(n) \times \mathbb{O}(1)).$$

$$(b) \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{SU}(n+1)/S(\mathbb{U}(1) \times \mathbb{U}(n)).$$

SUGESTÃO: Para mostrar por exemplo que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{SO}(n+1)/S(\mathbb{O}(n) \times \mathbb{O}(1))$, note que a ação de $\mathbb{SO}(n+1)$ na esfera $\mathbb{S}^n$ induz uma ação em $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ (visto que ação de matriz comuta com a ação por multiplicação por escalar).

Considere agora as hipóteses do Teorema 5.28. Desejamos dar uma métrica a M/G de forma que $\pi : M \rightarrow M/G$ se torne uma submersão Riemanniana.

Definição 5.31.

Uma submersão $\pi : (M, \mathbf{g}^M) \rightarrow (B, \mathbf{g}^B)$ é uma **submersão Riemanniana** se para qualquer $p \in M$ a derivada $d\pi_p : \mathcal{H}_p \rightarrow T_{\pi(p)}B$ é isometria, onde $\mathcal{H}_p$ é o espaço normal à pre-imagem $\pi^{-1}(\pi(p))$.

Proposição 5.32.

Sejam $(M, \mathbf{g}^M)$ variedade Riemanniana e G subgrupo fechado de isometrias de $Is(M)$. Suponha que a ação $\mu : G \times M \rightarrow M$ definida como $\mu(g, x) = g(x)$ é livre. Então existe uma única métrica $\mathbf{g}^{M/G}$ em M/G tal que $\pi : M \rightarrow M/G$

Continuação.

é uma submersão Riemanniana.

Demonstração. Seja $\mathcal{H}$ a distribuição normal as órbitas. Observe que tal distribuição é suave. Observe também que, dado um vetor $V_q \in T_q(M/G)$, existe um único vetor $\tilde{V}_p \in \mathcal{H}_p$ tal que $D\pi_p \tilde{V}_p = V_q$, onde $p \in \pi^{-1}(q)$. Podemos então definir a métrica como

$$\mathbf{g}_q^{M/G}(V_1, V_2) = \mathbf{g}_p^M(\tilde{V}_1, \tilde{V}_2).$$

Devemos verificar primeiro que $\mathbf{g}^{M/G}$ está bem definida. Note que como $\mu^g(\cdot) = g(\cdot)$ é isometria, sua derivada leva $\mathcal{H}_p$ em $\mathcal{H}_{g(p)}$. Assim se $\tilde{V} \in \mathcal{H}_p$ temos que $D\mu^g \tilde{V} \in \mathcal{H}_{g(p)}$. Por outro lado sabemos que $\pi = \pi \circ \mu^g$. Assim $D\pi \circ D\mu^g \tilde{V} = D\pi \tilde{V}$. Tais fatos permitem então concluir que $\mathbf{g}^{M/G}$ está bem definida.

Para mostrar que $\mathbf{g}^{M/G}$ é suave defina $P_x : T_x M \rightarrow \mathcal{H}_x$ como projeção ortogonal e note que P_x depende suavemente de x . Seja $S : U \rightarrow M$ uma seção local. Então

$$\mathbf{g}_y^{M/G}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right) = \mathbf{g}_{S(y)}^M(P_x d(S)_y \frac{\partial}{\partial y_i}, P_x d(S)_y \frac{\partial}{\partial y_j})$$

e o lado direito depende suavemente de y .

□

Observação 5.33.

Visto que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$, segue da proposição acima que a submersão $\pi : \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ induz uma métrica Riemanniana em $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Tal métrica é chamada de métrica de **Fubini-Study**.

Exercício 5.34.

Considere:

1. G um grupo de Lie com métrica bi-invariante $\mathbf{g}^G$ (e.g, um grupo de Lie compacto);
2. H um subgrupo fechado de G (e assim grupo de Lie);
3. $\mathbf{g}^{G/H}$ métrica Riemanniana definida na variedade G/H pela Proposição 5.32;
4. $\tau_g : G/H \rightarrow G/H$ a translação no quociente, i.e., $\tau_g(x) = gxH$.

Continuação.

Verifique que para cada $g \in G$, temos que $\tau_g : G/H \rightarrow G/H$ é uma isometria, concluindo então que $(G/H, \mathbf{g}^{G/H})$ é uma **variedade Riemanniana homogênea**, i.e., para todo $x, y \in G/H$ existe uma isometria φ tal que $\varphi(x) = y$.

SUGESTÃO: Seja $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g} = T_e G$ o subespaço (não precisa ser subálgebra de Lie) normal a subálgebra de Lie $\mathfrak{h} = T_e H$ com respeito a métrica bi-invariante $\mathbf{g}^G$. Defina a distribuição $g \rightarrow \mathcal{D}(g) = dL_g \mathfrak{m} \subset T_g G$. Verifique que tal distribuição é de fato a distribuição normal às órbitas da ação a direita $\mu : G \times H \rightarrow G$ definida como $\mu(g, h) = gh$.

Observação 5.35. Espaço simétrico

*Exemplos centrais de espaços homogêneos em Geometria Riemanniana são os assim chamados espaços simétricos. Uma variedade Riemanniana $(M, \mathbf{g})$ é chamada **espaço simétrico** se para cada $p \in M$ existe uma isometria, $\sigma_p : M \rightarrow M$ tal que $\sigma_p(p) = p$ e com $d(\sigma_p)_p : T_p M \rightarrow T_p M$ atendendo $d\sigma_p = -Id$, vide [IT] e [Jost].*

Terminamos esta seção considerando ações próprias discretas.

Definição 5.36.

Uma aplicação $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ é um **recobrimento** se:

- (a) π é suave e sobrejetora;
- (b) para qualquer $p \in M$ existe uma vizinhança U de p tal que $\pi^{-1}(U) = \cup_i V_i$ onde V_i são abertos disjuntos e $\pi|_{V_i} : V_i \rightarrow U$ é difeomorfismo.

Sabemos que toda variedade M admite recobrimento $\widetilde{M}$ tal que $\widetilde{M}$ é simplesmente conexo. $\widetilde{M}$ é chamado **recobrimento universal** de M . Note que se $(M, \mathbf{g})$ é variedade Riemanniana com métrica $\mathbf{g}$ então podemos definir uma métrica $\tilde{\mathbf{g}} := \pi^* \mathbf{g}$ em $\widetilde{M}$ e com esta métrica a aplicação recobrimento se torna uma isometria local. Neste caso dizemos que $(\widetilde{M}, \tilde{\mathbf{g}})$ é um recobrimento Riemanniano de M .

Segue então do Teorema 5.28 que se G um grupo discreto, i.e., com topologia discreta agindo livre e propriamente em M , então $\pi : M \rightarrow M/G$ é recobrimento.

Exercício 5.37.

Seja $\{a_i\}$ uma base de $\mathbb{R}^n$. Um lattice Γ associado a esta base é o conjunto de todos os vetores $\sum k_j a_j$ para $k_j \in \mathbb{Z}$. Identificando Γ com o subgrupo de translações podemos fornecer ao quociente $\mathbb{R}^n/\Gamma$ estrutura de variedade.

- (a) Mostre que existe um difeomorfismo $\pi : \mathbb{R}^n/\Gamma \rightarrow T^n$.
- (b) Seja $\mathbf{g}_\Gamma$ métrica definida em T^n tal que $\pi : \mathbb{R}^n/\Gamma \rightarrow T^n$ é isometria. Mostre que $\mathbf{g}_\Gamma$ e $\mathbf{g}_{\tilde{\Gamma}}$ definidas em T^n são isométricas se e somente se existe uma isometria em $\mathbb{R}^n$ que envia o lattice Γ no lattice $\tilde{\Gamma}$.

5.1.3. (*) Métrica de um sistema mecânico interligado

Nesta seção opcional iremos apresentar uma métrica que descreverá a energia cinética de um corpo (no plano ou $\mathbb{R}^3$) com centro de massa que se desloca no espaço, sendo que o corpo pode também girar em torno do seu centro de massa.

Energia cinética vista como métrica (semi) Riemanniana

Considere uma região B (contida no plano $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ ou espaço $\mathbb{R}^3$), a qual modela um sólido, com uma medida μ (e.g, forma volume, i.e, $d\mu = \text{vol}$), a qual modela sua densidade. Considere a variedade $\mathbb{SO}(3) \times \mathbb{R}^3$, a qual modela todas as configurações possíveis do nosso sólido.

Uma curva $t \rightarrow \alpha(t) = (Q(t), R(t)) \in \mathbb{SO}(3) \times \mathbb{R}^3$, descreve um (possível) movimento deste sólido em seu espaço de configuração. A função $t \rightarrow R(t)$ descreve a translação do centro de massa com respeito a um referencial fixo (o referencial canônico na origem); e a função $t \rightarrow Q(t)$ mede a rotação do sólido em torno do seu centro de massa. Podemos então associar a esta curva α uma **energia cinética** definida como

$$EK_\alpha(t) = \frac{1}{2} \int_B \|\dot{Q}(t)x + \dot{R}(t)\|^2 d\mu. \quad (5.1.3)$$

Nosso objetivo aqui é definir uma métrica **g semi-Riemanniana** (i.e, simétrica, não negativa definida) em $\mathbb{SO}(3) \times \mathbb{R}^3$ que atenda a seguinte propriedade:

$$\mathbf{g}(\alpha'(0), \alpha'(0)) = 2KE_\alpha(0). \quad (5.1.4)$$

Para isto precisamos introduzir alguns conceitos.

1. $KE_{trans}(t) := \frac{1}{2}\mu(B)\|\dot{R}(t)\|^2$ a **energia cinética de translação**;

2. $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_e \text{SO}(3)$ definido como $\psi(\xi) = A_\xi := \begin{bmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{bmatrix}$
3. $I_c(v) = - \int_B A_x A_x(v) d\mu_x$ **tensor de inércia (em torno do centor de massa)**, vide Lemma 5.38 abaixo para maiores detalhes;
4. $Z(t) = \psi^{-1}(Q^t(t)\dot{Q}(t))$;
5. $KE_{rot}(t) = \frac{1}{2} \langle I_c Z(t), Z(t) \rangle$, **energia cinética de rotação**.

Antes de seguirmos torna-se necessário fazermos alguns comentários sobre o tensor de inércia.

Lema 5.38.

O tensor de inércia $I_c(v) = - \int_B A_x A_x(v) d\mu_x$ é uma aplicação linear simétrica com auto-valores não negativos, os quais são chamados **inércias principais**.

Demonstração. Utilizando que A_x é anti-simétrica temos:

$$\begin{aligned} \langle I_c v, u \rangle &= - \int_B \langle A_x A_x v, u \rangle d\mu_x \\ &= \int_B \langle A_x v, A_x u \rangle d\mu_x. \end{aligned}$$

Substituindo u por v já podemos concluir que: $\langle I_c v, v \rangle \geq 0$ (o que implicará que as inércias principais serão não negativos). Usando novamente que A_x é anti-simétrica inferimos:

$$\begin{aligned} \int_B \langle A_x v, A_x u \rangle d\mu_x &= - \int_B \langle v, A_x A_x u \rangle d\mu_x \\ &= \langle v, I_c u \rangle \end{aligned}$$

ou seja concluímos que I_c é simétrica, terminando assim a demonstração. $\square$

Proposição 5.39.

$$KE_\alpha(t) = KE_{trans}(t) + KE_{rot}(t).$$

Demonstração. Notemos primeiro que:

$$\begin{aligned} KE_\alpha(t) &= \frac{1}{2} \int_B \|\dot{R}(t)\|^2 d\mu \\ &\quad + \int_B \langle \dot{R}(t), \dot{Q}(t)x \rangle d\mu \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_B \|\dot{Q}(t)x\|^2 d\mu. \end{aligned}$$

Observemos agora cada um dos três termos acima separadamente. O primeiro é o mais simples. De fato:

$$\frac{1}{2} \int_B \|\dot{R}(t)\|^2 d\mu = \frac{1}{2} \mu(B) \|\dot{R}(t)\|^2 = KE_{trans}(t). \quad (5.1.5)$$

Afirmamos que o segundo termo é zero, i.e.,

$$\int_B \langle \dot{R}(t), \dot{Q}(t)x \rangle d\mu = 0. \quad (5.1.6)$$

Para tanto note que, por hipótese, nosso tensor de inércia é referente ao centro de massa e assim $\int_B x d\mu = 0$. Logo, para todo v fixo temos

$$0 = \langle v, \int_B x d\mu \rangle = \int_B \langle v, x \rangle d\mu.$$

Assim $\int_B \langle \dot{R}(t), \dot{Q}(t)x \rangle d\mu = \int_B \langle \dot{Q}(t)^t \dot{R}(t), x \rangle d\mu = 0$, o que termina a prova da Eq. (5.1.6). Por fim afirmamos que

$$\frac{1}{2} \int_B \|\dot{Q}(t)x\|^2 d\mu = \frac{1}{2} \langle I_c Z(t), Z(t) \rangle = KE_{rot}(t). \quad (5.1.7)$$

Afim de provar esta equação, recordemos a relação da aplicação ψ com o produto vetorial, i.e.,

$$A_v u = v \times u = -u \times v = -A_u v, \quad (5.1.8)$$

e recordemos também a definição de $Z(t)$ i.e.,

$$A_{Z(t)} = \psi(Z(t)) = Q^t(t) \dot{Q}(t) \quad (5.1.9)$$

Utilizando as Equações (5.1.8), (5.1.9) e o fato de que A_v é anti-simétrico temos:

$$\begin{aligned}
 \langle I_c Z(t), Z(t) \rangle &= - \int_B \langle A_x A_x Z(t), Z(t) \rangle d\mu \\
 &= \int_B \langle A_x Z(t), A_x Z(t) \rangle d\mu \\
 &\stackrel{(5.1.8)}{=} \int_B \langle A_{Z(t)} x, A_{Z(t)} x \rangle d\mu \\
 &\stackrel{(5.1.9)}{=} \int_B \langle Q^t(t) \dot{Q}(t) x, Q^t(t) \dot{Q}(t) x \rangle d\mu \\
 &= \int_B \langle \dot{Q}(t) x, \dot{Q}(t) x \rangle d\mu
 \end{aligned}$$

O que termina a prova da Eq.(5.1.7). As Equações (5.1.5), (5.1.6) e (5.1.7) implicam a proposição. $\square$

A Proposição 5.39 implica a Equação (5.1.4), uma vez que a métrica semi-Riemanniana $\mathbf{g}$ seja definida da forma abaixo.

Definição 5.40.

Para $V_i = (X_i, Y_i) \in T_Q \mathbb{SO}(3) \times T_p \mathbb{R}^3$ definimos:

$$\begin{aligned}
 KE_{trans}(V_1, V_2) &= \frac{1}{2} \mu(B) \langle Y_1, Y_2 \rangle \\
 KE_{rot}(V_1, V_2) &= \frac{1}{2} \langle I_c \psi^{-1}(Q^t X_1), \psi^{-1}(Q^t X_2) \rangle \\
 \mathbf{g}_{(Q,p)}(V_1, V_2) &= 2KE_{trans}(V_1, V_2) + 2KE_{rot}(V_1, V_2)
 \end{aligned}$$

De forma análoga, dados vários sólidos $(B_1, \mu_1) \cdots (B_n, \mu_n)$, temos para cada (B_i, μ_i) uma forma não negativa $\mathbf{g}_i$. Definimos a métrica (semi) Riemanniana como

$$\mathbf{g} = \sum_i \mathbf{g}_i$$

Dado um sistema mecânico interligado M mergulhado no sistema mecânico livre $(\mathbb{SO}(3) \times \mathbb{R}^3) \times \cdots \times (\mathbb{SO}(3) \times \mathbb{R}^3)$ a métrica em M é a métrica induzida, i.e., $i^* \mathbf{g}$. Em vários casos clássicos tal métrica semi-Riemanniana é de fato uma métrica Riemanniana (i.e., não é degenerada).

Energia cinética do braço robótico

Consideremos agora braço robótico com $r_i = \frac{l_i}{2}$, vide Exemplo 1.2 e Observação 1.4. Consideremos a parametrização

$$\begin{aligned}\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow M \subset (\mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R}^3) \times (\mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R}^3) \\ (\theta_1, \theta_2) &\mapsto \left((Q(\theta_1), R_1(\theta_1)), (Q(\theta_2), R_2(\theta_1, \theta_2)) \right)\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}R_1(\theta_1) &= \frac{l_1}{2} Q(\theta_1) e_1 \\ R_2(\theta_1, \theta_2) &= l_1 Q(\theta_1) e_1 + \frac{l_2}{2} Q(\theta_2) e_1 \\ Q(\theta) &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

e calculemos $d\varphi$, verificando que de fato φ é uma imersão.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} \dot{Q}(\theta_1) \\ \frac{l_1}{2} \dot{Q}(\theta_1) e_1 \\ 0 \\ l_1 \dot{Q}(\theta_1) e_1 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{Q}(\theta_2) \\ \frac{l_2}{2} \dot{Q}(\theta_2) e_1 \end{bmatrix}$$

Observemos que e_3 é auto-vetor dos dois tensores de inércia I_{c_i} (um referente ao braço e outro ao anti-braço). Notemos também que $\psi^{-1}(\dot{Q}(0)) = e_3$. Juntando tais observações com a propriedade do fluxo (i.e., $\dot{Q}(t) = Q(t)\dot{Q}(0)$) concluímos que:

$$\langle I_{c_i} \psi^{-1} Q^t(\theta_i) \dot{Q}(\theta_i), \psi^{-1} Q^t(\theta_i) \dot{Q}(\theta_i) \rangle = \langle I_{c_i} e_3, e_3 \rangle = \lambda_i,$$

onde λ_i é o auto-valor associado ao auto vetor e_3 dos tensores de inércia I_{c_i} ($i = 1, 2$). Assim

$$\varphi^* K E_{rot} = \varphi^* K E_{rot}^1 + \varphi^* K E_{rot}^2 = \frac{\lambda_1}{2} d\theta_1 \otimes d\theta_1 + \frac{\lambda_2}{2} d\theta_2 \otimes d\theta_2.$$

O calculo de $\varphi^* K E_{trans} = \varphi^* K E_{trans}^1 + \varphi^* K E_{trans}^2$ segue de forma mais direta.

$$\begin{aligned}\varphi^* K E_{trans} &= \frac{m_1 l_1^2 + 4m_2 l_1^2}{8} d\theta_1 \otimes d\theta_1 + \frac{1}{8} l_2^2 m_2 d\theta_2 \otimes d\theta_2 \\ &\quad + \frac{1}{4} l_1 l_2 m \cos(\theta_2 - \theta_1) (d\theta_1 \otimes d\theta_2 + d\theta_2 \otimes d\theta_1)\end{aligned}$$

Juntamos as duas equações e utilizando a Definição 5.40 concluímos:

$$\varphi^* \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \frac{1}{4}(m_1 + 4m_2)l_1^2 & \frac{m_2}{2}l_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{m_2}{2}l_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & \lambda_2 + \frac{1}{4}m_2l_2^2 \end{bmatrix}.$$

Para maiores discussões tais como outros sistemas mecânicos interligados, e várias de suas propriedades vide [BL04].

5.2. Conexão Riemanniana e o transporte paralelo

Definição 5.41.

Seja $(M, \mathbf{g})$ variedade Riemanniana. Uma **conexão Riemanniana** (ou conexão de Levi-Civita) associada a métrica $\mathbf{g}$ é uma aplicação $\mathbb{R}$ -bilinear

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

que atende para qualquer $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$:

- (a) $\nabla_{f\vec{X}}\vec{Y} = f\nabla_{\vec{X}}\vec{Y}$
- (b) $\nabla_{\vec{X}}f\vec{Y} = f\nabla_{\vec{X}}\vec{Y} + (\vec{X} \bullet f)\vec{Y}$
- (c) $\vec{X} \bullet \mathbf{g}(\vec{Y}, \vec{Z}) = \mathbf{g}(\nabla_{\vec{X}}\vec{Y}, \vec{Z}) + \mathbf{g}(\vec{Y}, \nabla_{\vec{X}}\vec{Z})$ (compatível com a métrica).
- (d) $\nabla_{\vec{X}}\vec{Y} - \nabla_{\vec{Y}}\vec{X} = [\vec{X}, \vec{Y}]$ (simétrica ou livre de torção)

Proposição 5.42.

Seja $(M, \mathbf{g})$ uma variedade Riemanniana. Então existe uma única conexão Riemanniana em TM . Tal conexão é dada pela **fórmula de Koszul** abaixo:

$$\begin{aligned} 2\mathbf{g}(\nabla_{\vec{Y}}\vec{X}, \vec{Z}) &= \vec{X} \bullet \mathbf{g}(\vec{Y}, \vec{Z}) - \vec{Z} \bullet \mathbf{g}(\vec{X}, \vec{Y}) + \vec{Y} \bullet \mathbf{g}(\vec{Z}, \vec{X}) \\ &\quad - \mathbf{g}([\vec{X}, \vec{Y}], \vec{Z}) - \mathbf{g}([\vec{X}, \vec{Z}], \vec{Y}) - \mathbf{g}([\vec{Y}, \vec{Z}], \vec{X}). \end{aligned}$$

Demonstração. Suponha que a conexão Riemanniana existe. Então temos pela compatibilidade com a métrica que:

$$\vec{X} \bullet \mathbf{g}(\vec{Y}, \vec{Z}) = \mathbf{g}(\nabla_{\vec{X}}\vec{Y}, \vec{Z}) + \mathbf{g}(\vec{Y}, \nabla_{\vec{X}}\vec{Z})$$

$$\begin{aligned}\vec{Z} \bullet g(\vec{X}, \vec{Y}) &= g(\nabla_{\vec{Z}} \vec{X}, \vec{Y}) + g(\vec{X}, \nabla_{\vec{Z}} \vec{Y}) \\ \vec{Y} \bullet g(\vec{Z}, \vec{X}) &= g(\nabla_{\vec{Y}} \vec{Z}, \vec{X}) + g(\vec{Z}, \nabla_{\vec{Y}} \vec{X})\end{aligned}$$

As equações acima e o fato da conexão ser livre de torção implicam que:

$$\begin{aligned}\vec{X} \bullet g(\vec{Y}, \vec{Z}) - \vec{Z} \bullet g(\vec{X}, \vec{Y}) + \vec{Y} \bullet g(\vec{Z}, \vec{X}) &= 2g(\nabla_{\vec{Y}} \vec{X}, \vec{Z}) + g([\vec{X}, \vec{Y}], \vec{Z}) \\ &+ g([\vec{X}, \vec{Z}], \vec{Y}) + g([\vec{Y}, \vec{Z}], \vec{X}),\end{aligned}$$

a qual por sua vez implica a fórmula de Koszul. Por fim, pode-se verificar que a fórmula de Koszul define uma conexão Riemanniana. $\square$

Exemplo 5.43.

Dado um campo $\vec{V} = \sum_{i=1}^m v_i \vec{e}_i$ (vide equação 1.3.1), vamos definir a **derivada Euclidiana do campo** $\vec{V}$ na direção de um vetor W (com pé em p), como

$$D_W \vec{V}_p = \sum_{i=1}^m dv_i(W) \vec{e}_i.$$

Proposição 5.44.

Seja M^m variedade mergulhada em $\mathbb{R}^{m+k}$. Dado $p \in M$ defina $\pi_p : T_p \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow T_p M$ como projeção ortogonal no espaço tangente $T_p M$ de um vetor com pé em $p \in M$ (não necessariamente tangente a variedade M). Defina o operador conexão tangente como $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ onde

$$(\nabla_X \vec{Y})_p = \pi_p((D_X \vec{Y})_p).$$

Este operador é de fato a conexão Riemanniana associada a métrica induzida

Demonstração. É fácil verificar que é $\mathbb{R}$ -bilinear. Então basta verificar os itens da Definição 5.41. Como ela é única, então será a conexão da métrica induzida.

(a)

$$\begin{aligned}(\nabla_{fX} \vec{Y})_p &= \pi_p((D_{fX} \vec{Y})_p) \\ &= \pi_p(f(p)(D_X \vec{Y})_p) \\ &= f(p)\pi_p((D_X \vec{Y})_p) \\ &= f(p)(\nabla_X \vec{Y})_p.\end{aligned}$$

(b) Como $Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\pi(p)(Y) = Y$, logo

$$\begin{aligned} (\nabla_{\vec{X}} f \vec{Y})_p &= \pi(p)(D_{\vec{X}} f \vec{Y})_p \\ &= \pi(p)(f D_{\vec{X}} \vec{Y} + \vec{X}(f) \vec{Y})_p \\ &= f(p) \pi(p)(D_{\vec{X}} \vec{Y})_p + \vec{X}(f)_p \pi(p)(\vec{Y}) \\ &= f(p)(\nabla_{\vec{X}} \vec{Y})_p + (\vec{X} \bullet f) \vec{Y}_p. \end{aligned}$$

(c) Seja $p \in M$ e $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ uma curva em M tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = X$. Sejam $\tilde{Y}$ e $\tilde{Z}$ extensões de Y e Z a $\mathbb{R}^{m+k}$. Temos

$$\begin{aligned} \vec{X} \bullet \mathbf{g}(\vec{Y}, \vec{Z}) &= \frac{d}{dt} \mathbf{g}(Y_\alpha(t), Z_\alpha(t)) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \langle \tilde{Y}_\alpha(t), \tilde{Z}_\alpha(t) \rangle \Big|_{t=0} \\ &= \langle D_{\alpha'(t)} \tilde{Y}_\alpha(t), \tilde{Z}_\alpha(t) \rangle \Big|_{t=0} + \langle \tilde{Y}_\alpha(t), D_{\alpha'(t)} \tilde{Z}_\alpha(t) \rangle \Big|_{t=0} \\ &= \langle \nabla_{\alpha'(t)} Y_\alpha(t), Z_\alpha(t) \rangle \Big|_{t=0} + \langle Y_\alpha(t), \nabla_{\alpha'(t)} Z_\alpha(t) \rangle \Big|_{t=0} \\ &= \mathbf{g}(\nabla_{\alpha'(t)} Y_\alpha(t), Z_\alpha(t)) \Big|_{t=0} + \mathbf{g}(Y_\alpha(t), \nabla_{\alpha'(t)} Z_\alpha(t)) \Big|_{t=0} \\ &= \mathbf{g}(\nabla_{\vec{X}} \vec{Y}, \vec{Z}) + \mathbf{g}(\vec{Y}, \nabla_{\vec{X}} \vec{Z}). \end{aligned}$$

(d) Para resolver o item (d) iremos assumir o seguinte fato:

$$D_{\vec{X}} \vec{Y} - D_{\vec{Y}} \vec{X} =: [\vec{X}, \vec{Y}] \in \mathfrak{X}(M), \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Assim sendo, temos:

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{X}} \vec{Y} - \nabla_{\vec{Y}} \vec{X} &= \pi_p((D_{\vec{X}} \vec{Y})_p) - \pi_p((D_{\vec{Y}} \vec{X})_p) \\ &= \pi_p((D_{\vec{X}} \vec{Y})_p - (D_{\vec{Y}} \vec{X})_p) \\ &= \pi_p([\vec{X}, \vec{Y}]) \\ &= [\vec{X}, \vec{Y}], \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do fato suposto.

□

Exercício 5.45.

Seja G um grupo de Lie com métrica bi-invariante $\mathbf{g}$ e com conexão Riemanniana associada $\nabla : \mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(G) \rightarrow \mathfrak{X}(G)$. Sejam $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ campos invariantes a esquerda. Prove que:

$$(a) \quad \mathbf{g}([\vec{X}, \vec{Y}], \vec{Z}) = -\mathbf{g}(\vec{Y}, [\vec{X}, \vec{Z}])$$

$$(b) \quad \nabla_{\vec{X}} \vec{Y} = \frac{1}{2}[\vec{X}, \vec{Y}].$$

Sugestão: Para o item (a) pode-se usar $\frac{d}{dt} \text{Ad}(\exp^{tX}) \vec{Y}|_{t=0} = [\vec{X}, \vec{Y}]$ onde $\text{Ad}(e^{tX}) = dL_{e^{tX}} \circ dR_{e^{-tX}}$. O item (b) pode ser demonstrado utilizando a fórmula de Koszul.

Exercício 5.46.

Sejam $(\widetilde{M}^m, \widetilde{\mathbf{g}})$ e $(M^m, \mathbf{g})$ variedades Riemannianas e $\widetilde{\nabla}$ e ∇ suas conexões Riemannianas. Seja $F : (\widetilde{M}, \widetilde{\mathbf{g}}) \rightarrow (M, \mathbf{g})$ isometria. Mostre que

$$dF_p \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}_1} \widetilde{X}_2 = (\nabla_{\widetilde{X}_1} \widetilde{X}_2)_{F(p)},$$

onde $\widetilde{X}_i = F_* \widetilde{X}_i$, ou seja $\widetilde{X}_i \circ F = dF \widetilde{X}_i$ para $\widetilde{X}_i \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$.

Sugestão: Utilize o fato que $[\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2] \circ F = dF[\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2]$ e a equação de Koszul.

O exercício acima pode ser generalizado para submersões Riemannianas, com as devidas mudanças.

Observação 5.47.

Seja $\pi : (\widetilde{M}, \widetilde{\mathbf{g}}) \rightarrow (M, \mathbf{g})$ uma submersão Riemanniana e $\widetilde{\nabla}$ e ∇ as conexões Riemannianas de $\widetilde{M}$ e M respectivamente. Sejam $\vec{X}_i \in \mathfrak{X}(M)$ e $\widetilde{X}_i \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$ seus levantamentos horizontais, ou seja $\vec{X}_i = \pi_* \widetilde{X}_i$ e $\widetilde{X}_i(x) \in \mathcal{H}(x)$, para todo $x \in \widetilde{M}$, onde a distribuição $\mathcal{H}$ corresponde ao espaço normal das fibras de π . Seguindo a prova do exercício acima pode-se verificar que:

$$\widetilde{\mathbf{g}}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}_i} \widetilde{X}_j, \widetilde{X}_k) = \mathbf{g}(\nabla_{\vec{X}_i} \vec{X}_j, \vec{X}_k).$$

Vamos agora descrever nossa conexão Riemanniana utilizando coordenadas:

Seja U uma vizinhança coordenada de $p \in M$ e $\{\xi_i\}$ referenciais de $TM|_U$, e.g, $\xi_j(p) = \frac{\partial}{\partial x_j} := d\psi^{-1}(e_j)$ onde $\psi : (U) \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ é um sistema de coordenadas.

Suponha $\vec{W} = \sum_i w_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $\vec{V} = \sum_j v_j \xi_j$ Temos então que

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{W}} \vec{V} &= \nabla_{\vec{W}} \sum_j v_j \xi_j \\ &= \sum_j (\vec{W} \bullet v_j) \xi_j + \sum_j v_j \nabla_{\vec{W}} \xi_j \\ &= \sum_k (\vec{W} \bullet v_k) \xi_k + \sum_{i,j} v_j w_i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \xi_j. \end{aligned}$$

A equação acima então implica que

$$\nabla_{\vec{W}} \vec{V} = \sum_k \{(\vec{W} \bullet v_k) + \sum_{i,j} w_i v_j \Gamma_{i,j}^k\} \xi_k \quad (5.2.1)$$

onde a função $\Gamma_{i,j}^k$ é chamada **símbolo de Cristoffel** e é definida como

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \xi_j = \sum_k \Gamma_{i,j}^k \xi_k \quad (5.2.2)$$

Observação 5.48.

É importante observar que a fórmula acima garante que $(\nabla_{\vec{W}} \vec{V})_p$ depende apenas do vetor $W(p)$ e não do campo $\vec{W}$.

Exercício 5.49.

Sejam M superfície mergulhada em $\mathbb{R}^3$, ∇ a conexão Riemanniana associada a métrica induzida g e Γ_{ij} os símbolos de Cristofell associados a uma parametrização $\varphi : |U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset M$ Verifique as igualdades a seguir (as quais garantem que Γ_{ij} podem ser obtidas diretamente da métrica g , ou seja que ∇

Continuação.

pode ser definido em termos de g).

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 g_{11} + \Gamma_{11}^2 g_{12} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u_1} g_{11} \\ \Gamma_{11}^1 g_{12} + \Gamma_{11}^2 g_{22} &= \frac{\partial}{\partial u_1} g_{12} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u_2} g_{11} \\ \Gamma_{12}^1 g_{11} + \Gamma_{12}^2 g_{12} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u_2} g_{11} \\ \Gamma_{12}^1 g_{12} + \Gamma_{12}^2 g_{22} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u_1} g_{22} \\ \Gamma_{22}^1 g_{11} + \Gamma_{22}^2 g_{12} &= \frac{\partial}{\partial u_2} g_{12} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u_1} g_{22} \\ \Gamma_{22}^1 g_{12} + \Gamma_{22}^2 g_{22} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u_2} g_{22}\end{aligned}$$

Exercício 5.50.

Seja $\varphi(t, \theta) = (r(t) \cos(\theta), r(t) \sin(\theta), h(t))$ parametrização de superfície de revolução M^2 em $\mathbb{R}^3$. Suponha que $(h'(t))^2 + (r'(t))^2 = 1$. Verifique que os símbolos de Cristofell associada a φ são:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= 0, & \Gamma_{11}^2 &= -r(t)r'(t) \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{r'(t)}{r(t)}, & \Gamma_{12}^2 &= 0 \\ \Gamma_{22}^1 &= 0, & \Gamma_{22}^2 &= 0\end{aligned}$$

Observação 5.51.

Utilizando a fórmula de Koszul é possível concluir:

$$\Gamma_{i,j}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{\partial g_{j,k}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{k,i}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{i,j}}{\partial x_k} \right) g^{k,m}$$

onde (g^{ij}) é a matriz inversa de $(g_{i,j})$ e $\Gamma_{i,j}^k$ são os símbolos de Cristoffel.

A equação (5.2.1) admite uma **formulação matricial**.

$$\nabla_W \vec{V} = D_W \vec{V} + A(W) \vec{V} \quad (5.2.3)$$

onde $D_W \vec{V}$ é a derivada de campos em $\mathbb{R}^n$ e $A(\cdot)$ é a matriz de 1-formas definida como

$$a_{k,j}(\cdot) := \sum_i \Gamma_{i,j}^k dx_i, \quad (5.2.4)$$

onde $dx_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{ij}$ i.e., fixo p temos que os funcionais lineares $dx_i : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ são os duais dos vetores $(\frac{\partial}{\partial x_j}(p))$

Observação 5.52.

A equação (5.2.3) implica que o espaço de conexões é um **espaço afim**. De fato dado duas conexões $D + A$ e $D + \tilde{A}$ podemos definir a soma destes vetores com pé como $D + A + \tilde{A}$ e a multiplicação por $\lambda \in \mathbb{R}$ como $D + \lambda A$. Por este motivo, um operador que atende (a) e (b) da Definição 5.41 é chamado **conexão afim**.

Conexão nos permite derivar campos tangentes a uma variedade. Mas se tivermos um campo $t \rightarrow V(t)$ que está apenas definido ao longo de uma curva $t \rightarrow \alpha(t)$, como derivar? Lembrando que se a curva não for mergulhada não necessariamente um campo ao longo de uma curva se estende para um campo em M ou seja $V(t)$ não precisa ser $\tilde{V} \circ \alpha(t)$ para $\tilde{V} \in \mathfrak{X}(M)$. Assim a resposta a esta pergunta **não é** simplesmente dizer restrinja a conexão ao longo da curva. Felizmente como veremos na proposição a seguir, de fato a questão não é complicada.

Proposição 5.53.

Sejam ∇ a conexão Riemanniana de (M, g) e $\alpha : I \rightarrow M$ uma curva suave por partes. Denote $\Gamma(\alpha^* TM)$ o espaço dos campos vetoriais ao longo da curva α . Então existe um único operador $\frac{\nabla}{dt} : \Gamma(\alpha^* TM) \rightarrow \Gamma(\alpha^* TM)$ tal que

- (a) $\frac{\nabla}{dt}(V + W) = \frac{\nabla}{dt}V + \frac{\nabla}{dt}W$
- (b) $\frac{\nabla}{dt}(fV) = f'V + f\frac{\nabla}{dt}V$ para $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ suave.
- (c) Se $\tilde{V} \in \Gamma(E)$ e $V(t) := \tilde{V}(\alpha(t))$ então $\frac{\nabla}{dt}V = \nabla_{\alpha'} \tilde{V}$

Demonstração. Se $\frac{\nabla}{dt}$ atende a propriedade (c) então ela deve se descrever em coordenadas como:

$$\left(\frac{\nabla}{dt}V\right)(t) = \sum_k \{v'_k(t) + \sum_{i,j} x'_i(t) v_j(t) \Gamma_{i,j}^k \circ \alpha(t)\} \xi_k \circ \alpha(t)$$

Onde $V(t) = \sum_k v_k(t) \xi_k \circ \alpha(t)$ e $\alpha'(t) = \sum_i x'_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} \circ \alpha(t)$. Em outras palavras

$$\frac{\nabla V}{dt} = \frac{DV}{dt} + A(\alpha'(t))V(t).$$

Também é claro que a equação acima atende (a) e (b) e assim temos a existência local. A unicidade local e existência local garantem então a existência e unicidade global. $\square$

Munidos com o conceito de derivada covariante podemos introduzir o conceito de paralelismo. Um campo $t \rightarrow V(t) \in T_{\alpha(t)}M$ ao longo de uma curva α é chamado **paralelo** se $\frac{\nabla}{dt}V(t) = 0$ para todo t .

Proposição 5.54.

Sejam ∇ a conexão Riemanniana de (M, g) e $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ uma curva suave por partes. Seja $V \in T_{\alpha(a)}$. Então existe um único campo $V \in \Gamma(\alpha^*TM)$ paralelo tal que $V(a) = V$.

Demonstração. Considere uma partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ tal que a curva restrita $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$ está contida em uma vizinhança coordenada. Vamos provar primeiro o resultado para cada uma destas curvas. Como vimos na demonstração da Proposição 5.53, em uma vizinhança coordenada, $\frac{\nabla}{dt}V = 0$ equivale a

$$0 = \sum_k \{v'_k(t) + \sum_{i,j} x'_i(t) v_j(t) \Gamma_{i,j}^k \circ \alpha(t)\} \quad (5.2.5)$$

Tal E.D.O tem uma única solução $\sum_j v_j(t) \xi_j \circ \alpha(t)$ em $[t_i, t_{i+1}]$ que coincide em t_i com um certo vetor dado $V \in E_{\alpha(t_i)}$ e isto demonstra o resultado para $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$. Pela unicidade das soluções, as soluções coincide nas interseções das vizinhanças coordenadas e isto permite estender a solução para todo $[a, b]$. $\square$

Com as hipóteses da proposição acima o vetor $V(b) \in T_{\alpha(b)}M$ é chamado **transporte paralelo** do vetor $V \in T_{\alpha(a)}M$ e denotado por

$$\mathcal{P}_\alpha V := V(b).$$

Observação 5.55.

Com um transporte paralelo podemos **conectar** as fibras $T_{\alpha(a)}M$ com $T_{\alpha(b)}M$, daí

Continuação.

o nome conexão. É importante observar que em geral o transporte paralelo depende do caminho, vide Exercício 5.57.

Exercício 5.56.

Seja (M, g) variedade Riemanniana com conexão Riemanniana ∇ . Seja $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ curva suave por partes. Demonstre que o transporte paralelo ao longo de α induz isometria entre $T_{\alpha(0)}M$ e $T_{\alpha(1)}M$.

Exercício 5.57.

Sejam M superfície mergulhada em $\mathbb{R}^3$ e ∇ conexão Riemanniana associada a métrica induzida. Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica com velocidade 1 ou seja $\frac{\nabla}{dt}\gamma'(t) = 0$ (ou seja pedaço de grande círculo). Dado $e_2 \in T_{\gamma(0)}M$ unitário com $g(e_2(0), \gamma'(0)) = c$.

- Defina $t \rightarrow e_2(t)$ campo paralelo ao longo de γ com $e_2(0) = e_2$. Verifique que $g(e_2(t), \gamma'(t)) = c$ para todo t ,
- Seja $\mathbb{S}^2$ esfera com métrica canônica (i.e, induzida de $\mathbb{R}^3$) Verifique que, dado $X \in T_p\mathbb{S}^2$ e $Y \in T_p\mathbb{S}^2$, existe caminho (suave por partes) com com $Y = \mathcal{P}_\alpha X$, vide Figura 5.2.

Observação 5.58. Conexão em fibrado vetorial

Aqui é o momento adequado para destacarmos ao leitor, que muito do que discutimos até agora poderia ser feito *mutatis mutandis* (com exceção do item (d) da definição da conexão Riemanniana e da unicidade da conexão) para um fibrado vetorial $\mathbb{R}^k \rightarrow E \rightarrow B$ que admita uma métrica nas fibras (frequentemente chamamos isto de fibrado euclidiano). Por exemplo poderíamos considerar uma variedade mergulhada M^m em um espaço euclidiano, mas no lugar de considerar a conexão tangente (derivar no ambiente e projetar no espaço tangente) poderíamos considerar a conexão normal (derivar no ambiente e projetar no espaços normais) do fibrado normal $E = \nu(M) = \cup_x \nu_x M$, onde $\nu_x M$ denota os vetores normais a $T_x M$. Mais precisamente poderíamos definir $\nabla^\nu : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ como

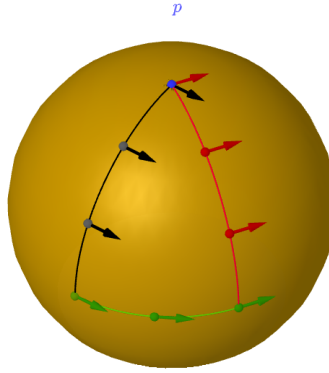


Figura 5.2: ilustrando Exercício 5.57

Continuação.

$\nabla_X^\nu \xi = (D_X \xi)^\nu$ A métrica fibras do fibrado normal são simplesmente a restrição da métrica aos vetores normais de sua variedade mergulhada. Assim conexão, derivada covariante, transporte paralelo que preserva métrica nas fibras, podem ser feitos. De fato uma das razões para denotarmos ξ_i no lugar de nossos vetores coordenados (quando consideramos a conexão Riemanniana) é já deixar a notação correta para esta generalização direta. O que não conseguimos generalizar neste contexto mais geral seria a unicidade da conexão (adaptada a métrica), justamente por não podermos falar mais no conceito livre de torção (que deixa de fazer sentido). O leitor que se sente mais confiante com a linguagem de fibrado vetorial pode tentar rever as provas levando em consideração esta observação.

Observação 5.59. Conexão pull-back

A derivada covariante ao longo de uma curva é na verdade a conexão pull-back no fibrado pullback $\alpha^*(E)$, conceito que discutimos rapidamente na observação a seguir. Seja (E^{m+k}, M^m, π) uma fibrado vetorial com conexão afim ∇ . Seja $\varphi : B \rightarrow M$ uma aplicação suave entre uma variedade B e a variedade M . O espaço total do fibrado pull-back é definido como

$$\varphi^*E := \{(p, V) \in M \times E \mid \varphi(p) = \pi(V)\}$$

(E, B, π_1) se torna então um fibrado vetorial, onde a projeção $\pi_1 : \varphi^*E \rightarrow B$ é definida como $\pi_1(p, V) = p$. Observe também que $\varphi \circ \pi_1 = \pi \circ \tilde{\varphi}$ onde

Continuação.

$\tilde{\varphi} : \varphi^*E \rightarrow E$ é definido como $\tilde{\varphi}(p, V) = V$.

De forma análoga a prova da Proposição 5.53 é possível mostrar que existe uma única conexão $\varphi^*\nabla$ em φ^*E tal que

$$(\varphi^*\nabla)_W V \circ \varphi = \nabla_{dF(W)} V$$

onde $V \in \Gamma(E)$ e $W \in \mathfrak{X}(M)$.

Observação 5.60. Grupo de Holonomia

Dado um ponto p de uma variedade M (base de um fibrado E^{m+k} com conexão ∇) e uma curva fechada $\alpha : [0, 1] \rightarrow M^m$ (i.e. $\alpha(0) = \alpha(1)$) o transporte paralelo $\mathcal{P}_\alpha : E_p \rightarrow E_p$ induz um isomorfismo entre as fibras de E_p . O grupo gerado por tais isomorfismo é chamado **grupo de Holonomia** de p e denotado por Hol_p .

- O **teorema de Ambrose-Singer** garante que o grupo de Holonomia Hol_p de uma conexão ∇ em um fibrado (E, M, π) é de fato um grupo de Lie.
- Quando consideramos a conexão Riemanniana em uma variedade simplesmente conexa, compacta (ou mais geralmente completa) a decomposição da representação da componente conexa $Hol(p)^0 \times (T_p M = V_0 \oplus \cdots \oplus V_k) \rightarrow (T_p M = V_0 \oplus \cdots \oplus V_k)$ implica a decomposição do próprio M ou seja $M = M_0 \times \cdots \times M_k$.
- No caso em que a conexão é Riemanniana, o grupo de Holonomia passa a desempenhar um papel importante na classificação de variedades. O celebrado **teorema de Berger** garante que se o grupo de holonomia de uma variedade Riemanniana (irreduzível) não agir de forma transitiva em $T_p^1 M = \{v \in T_p M, \|v\| = 1\}$ então M será um espaço localmente simétrico.

Aqui vale apenas ressaltar que um espaço M é chamado **localmente simétrico** se para qualquer $p \in M$ existe uma isometria $\sigma_p : B_\epsilon(p) \rightarrow B_\epsilon(p)$ que reverte toda geodésica γ saindo de p i.e., $\gamma(0) = p$ ou seja $\sigma_p \circ \gamma(t) = \gamma(-t)$. Por outro lado os espaços simétricos (que recobrem os espaços localmente simétricos) são classificados. Assim sendo o conhecimento da ação do grupo de Hol_p pode determinar completamente uma variedade M se M for simplesmente conexa irreduzível e o grupo não agir transitivamente na esfera unitária $T_p M^1$.

5.3. Conexão e métrica de Sasaki em TM

Nesta seção veremos como conexão Riemanniana $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ induzirá uma distribuição $\mathcal{H}$ em TM e construiremos uma métrica $\tilde{\mathbf{g}}$ (a assim chamada métrica de Sasaki) tal que $\pi : (TM, \tilde{\mathbf{g}}) \rightarrow (M, \mathbf{g})$ tornar-se-a uma submersão Riemanniana, sendo $\mathcal{H}$ sua distribuição horizontal.

Observação 5.61.

Levando em consideração a Observação 5.58 a mesma construção vale para fibrado Euclidiano $(E, (M, \mathbf{g}), \pi)$ com métrica $\mathbf{h}$ nas fibras e conexão

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$$

compatível com a métrica $\mathbf{h}$.

Ao longo desta seção, vamos denotar $E = TM$ e $\mathbf{h}$ a métrica $\mathbf{g}$ restrita as fibras de E . Tal escolha leva não só em consideração a observação acima, mas evita também sobrecarga de notações.

Dado um vetor ξ_p de E e uma curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ podemos fazer seu transporte paralelo ao longo de α e assim induzir um **levantamento** de α passando por ξ_p . Mais precisamente podemos definir $t \rightarrow \tilde{\alpha}(t) = \mathcal{P}_{\alpha_t} \xi_p$ onde $\alpha_t = \alpha|_{[0, t]}$. Se considerarmos todos os vetores velocidades $\tilde{\alpha}'(0)$, ou seja os vetores velocidades de todos os transportes paralelos de ξ_p ao longo de todas curvas α saindo de p , teremos então um conjunto $\mathcal{H}_{\xi_p} \subset T_{\xi_p} E$.

Lema 5.62.

Seja $\mathcal{H}_{\xi_p} \subset T_{\xi_p} E$ o conjunto construído acima, i.e.,

$$\mathcal{H}_{\xi_p} = \left\{ \frac{d}{dt} \mathcal{P}_{\alpha_t} \xi_p \Big|_{t=0}; \text{ para todo } \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M \right\}.$$

- (a) $\mathcal{H}_{\xi_p}$ é um subespaço com $\dim \mathcal{H}_{\xi_p} = \dim T_p M$;
- (b) $\xi_p \rightarrow \mathcal{H}_{\xi_p}$ é uma distribuição suave de E , chamada **conexão linear**;

Continuação.

(c) $\mathcal{H}$ é invariante por homotetia, ou seja definindo a homotetica $h_\lambda(v) : E \rightarrow E$ como $h_\lambda(v) = \lambda v$ temos que $\mathcal{H}_{h_\lambda(v)} = dh_\lambda \mathcal{H}_v$.^a

^aDe fato é possível mostrar que o reverso também é verdade, i.e., que uma distribuição invariante por homotetia sempre induz uma conexão afim no fibrado E .

Demonstração. Nossa discussão será local, então iremos considerar aqui um ponto $p_0 \in M$, uma vizinhança U de p_0 e uma trivialização $\tilde{\psi} : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times E_{p_0}$. Via tal trivialização $\tilde{\psi}$ podemos identificar $T_{\xi_p}E$ com $(T_p U \times E_{p_0})_{(p, \xi)}$. Dado tais identificações podemos definir uma aplicação $\Theta : (\mathbb{R}^m \times \pi^{-1}(U)) \rightarrow TE$

$$\Theta\left(\sum_i v_i e_i, \xi_p\right) = \left(\sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p), -A\left(\sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p)\right)\xi\right)_{(p, \xi)}. \quad (5.3.1)$$

(a) Observe primeiro que $\mathcal{H}_{\xi_p} = \Theta(\mathbb{R}^m, \xi_p)$ e $\Theta(\cdot, \xi_p) : \mathbb{R}^m \rightarrow T_{\xi_p}E$ é uma aplicação linear e assim $\mathcal{H}_{\xi_p}$ é subespaço vetorial de $T_{\xi_p}E$.

(b) Para verificar que $\mathcal{H}$ é uma distribuição (suave), basta observar que os campos

$$\xi_p \rightarrow \delta_i(\xi_p) = \Theta\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \xi_p\right) \in \mathfrak{X}(E)$$

formam uma base de $\mathcal{H}$.

(c) Por fim, segue da Eq. (5.3.1) que $\mathcal{H}$ é invariante por homotetia. □

Podemos agora dotar E de uma métrica $\tilde{\mathbf{g}}$ a ser construída utilizando o fato de $T_{\xi_p}E = \mathcal{H}_{\xi_p} \oplus T_{\xi_p}E_p$

Definição 5.63. Métrica de Sasaki

- Visto que $d\pi : \mathcal{H} \rightarrow TM$ é um isomorfismo, definimos uma métrica em $\mathcal{H}$ via o pullback, i.e., $\tilde{\mathbf{g}}|_{\mathcal{H}} = (d\pi|_{\mathcal{H}})^{-1} \mathbf{g}$.
- A métrica $\tilde{\mathbf{g}}$ restrita a $T_{\xi_p}E_p$ é definida como métrica $\mathbf{h}$.
- Decretamos $\mathcal{H}_{\xi_p}$ e $T_{\xi_p}E_p$ como sendo ortogonais.

Utilizando a propriedade que a distribuição $\mathcal{H}$ é homotética, o(a) leitor(a) pode resolver o exercício a seguir.

Exercício 5.64.

Verifique que $\pi : (E, \tilde{\mathbf{g}}) \rightarrow (M, \mathbf{g})$ é uma submersão Riemanniana.

Observação 5.65. (*)

A projeção $C_{\xi_p} : T_{\xi_p}(E) \rightarrow T_{\xi_p}E_p$ dada pela decomposição

$$T_{\xi_p}E = \mathcal{H}_{\xi_p} \oplus T_{\xi_p}E_p$$

pode ser vista em termos da conexão ∇ . Em outras palavras:

$$C_p(\tilde{\alpha}'(0)) = \frac{\nabla}{dt} Z(0)$$

onde $t \rightarrow \tilde{\alpha}(t)$ é o campo $t \rightarrow Z(t)$ ao longo de uma curva $t \rightarrow \alpha(t)$.

Por fim, observemos a existência de uma folheação (singular) $\tilde{\mathcal{F}}$ em E que descreve a holonomia.

Observação 5.66. (*) Folheação de holonomia

Consideremos todos campos $\tilde{X}_u$ em M e seus levantamentos $\tilde{X}_u$ em E com respeito aos transporte paralelos, i.e., campos com fluxos $e^{t\tilde{X}} = \mathcal{P}_{e^{tX}}$. As órbitas dos campos $\tilde{X}_u$ determinam uma folheação singular $\tilde{\mathcal{F}} = \{\tilde{L}\}$ (recorde Teorema 2.65) chamada **folheação (singular) de holonomia**. Segue da definição que a distribuição $\mathcal{H}$ é tangente as folhas, i.e., $\mathcal{H} \subset T\tilde{L}$, (mas frequentemente não é igual) e que $E_p \cap \tilde{L}_{\xi_p} = \text{Hol}_p(\xi_p)$. Assim:

$$T_{\xi_p}\tilde{L}_{\xi_p} = \mathcal{H}_{\xi_p} \oplus \text{Hol}_p^0(\xi_p). \quad (5.3.2)$$

Considerando a métrica de Sasaki $\tilde{\mathbf{g}}$ é possível verificar que as folhas da folheação singular de Holonomia $\tilde{\mathcal{F}}$ são localmente equidistante, i.e., que $\tilde{\mathcal{F}}$ é uma **folheação Riemanniana singular**.

5.4. (*) Transporte paralelo e o teorema de Ambrose Singer

Nesta seção opcional desejamos aproveitar o argumento apresentado na Observação 5.66 para dar uma ideia da prova do teorema de Ambrose Singer (ou pelo menos

parte dele) que enunciamos na Observação 5.60. Para tanto precisaremos do conceito de *fibrado de referenciais ortonormais* de um fibrado Euclidiano $\mathbb{R}^k \rightarrow E \rightarrow M$ com métricas $\mathbf{h}$ nas fibras, métrica $\mathbf{g}$ na base M e com conexão compatível com métrica $\mathbf{h}$ tal como foi considerado na seção anterior.

Iniciemos então nossa construção fixando uma fibra E_p , definimos o conjunto $O(E_p)$ como o **conjunto de todos os referenciais ortonormais** $\hat{\xi}_p = \{\xi_i\}$ de E_p . Cada referencial $\hat{\xi}_p$ induz uma aplicação linear $\hat{\xi}_p : \mathbb{R}^k \rightarrow E_p$ definida em termos da base canônica $\{e_i\}$ como $\hat{\xi}_p(e_i) = \xi_i$.

Visto que a toda matriz ortogonal $g \in \mathbb{O}(k)$ pode ser considerada a representação matricial (na base canônica) de uma aplicação linear isométrica $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$, podemos compor a aplicação linear $\hat{\xi}_p$ com a isometria g e definir uma ação a direita $\mu : O(E_p) \times \mathbb{O}(k) \rightarrow O(E_p)$ como $\mu(\hat{\xi}_p g) = \hat{\xi}_p \circ g \in O(E_p)$. Tal ação é **livre** (i.e., as isotropias são triviais) e **transitiva**, ou seja dado 2 referenciais $\hat{\eta}_p$ e $\hat{\xi}_p$ existe (um único) $g \in \mathbb{O}(k)$ tal que $\hat{\eta}_p = \hat{\xi}_p \circ g$. Visto que a ação é livre e transitiva, $\mu(\hat{\xi}_p, \cdot) : \mathbb{O}(k) \rightarrow O(E_p)$ se torna uma bijeção, i.e, podemos identificar a **fibra** $O(E_p)$ com o grupo de Lie das matrizes ortogonais $\mathbb{O}(k)$. Vamos agora "juntar" todas estas fibras em um único espaço. Definimos o **fibrado de referenciais ortonormais** como sendo o conjunto:

$$O(E) = \cup_{p \in M} O(E_p).$$

É possível demonstrar que:

Proposição 5.67.

- $O(E)$ é variedade suave;
- a ação $\mu : O(E) \times \mathbb{O}(k) \rightarrow O(E)$ definida como $\mu(\hat{\xi}_p, g) = \hat{\xi}_p \circ g$ é suave e livre;
- a projeção $\hat{\pi} : O(E) \rightarrow M$ definida como $\hat{\pi}(\hat{\xi}_p) = p$ é submersão suave;
- para cada $p_0 \in M$ existe uma vizinhança U de p_0 e um difeomorfismo $\hat{\psi} : \hat{\pi}^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{O}(k)$ tal que $\hat{\pi} = \pi_1 \circ \hat{\psi}$ onde $\pi_1(x, v) = x$.

Também, de forma análoga a seção anterior, temos que a conexão $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ induz, via o transporte paralelo, uma distribuição $\hat{\mathcal{H}}$ em $O(E)$. De fato considere uma curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ e defina $\alpha_t = \alpha|_{[0, t]}$. Dado um referencial $\hat{\xi}_p = \{\xi_i\}_{i=1}^k$ podemos definir uma curva de referenciais como:

$$t \rightarrow \hat{\alpha}(t) = \mathcal{P}_{\alpha_t} \hat{\xi}_p := \{\mathcal{P}_{\alpha_t} \xi_i\}_{i=1}^k \in O(E).$$

Denotamos $\widehat{\mathcal{H}}_{\hat{\xi}_p} \subset T_{\hat{\xi}_p} O(E)$ como o espaço de todos os vetores velocidades $\hat{\alpha}'(0)$ para todas as curvas $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$. É possível provar que

- $\widehat{\mathcal{H}}_{\hat{\xi}_p} \subset T_{\hat{\xi}_p} O(E)$ é subespaço vetorial;
- $\hat{\xi}_p \rightarrow \widehat{\mathcal{H}}_{\hat{\xi}_p}$ é distribuição suave em $O(E)$;
- $\widehat{\mathcal{H}}$ é invariante pelos difeomorfismos $\mu^g := \mu(\cdot, g)$, i.e., $d\mu^g \widehat{\mathcal{H}}_{\hat{\xi}_p} = \widehat{\mathcal{H}}_{\mu(\hat{\xi}_p, g)}$.

Teorema 5.68. Ambrose-Singer

Seja fibrado Euclidiano $(E, (M, \mathbf{g}), \pi)$ com métrica $\mathbf{h}$ nas fibras e conexão $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ compatível com a métrica $\mathbf{h}$. Então $Hol_p(E)$ é um grupo de Lie.

Demonstração. Notemos primeiro que, de forma análoga a Observação 5.66, o transporte paralelo associado a conexão ∇ induz uma folheação singular $\widehat{\mathcal{F}}$ em $O(E)$. Mais precisamente, dado o controle geométrico maximal $\{\vec{X}\} = \mathfrak{X}(M)$, podemos considerar o controle geométrico levantado $\{\widehat{X}\}$ de $O(E)$, i.e., cujos fluxos são $\mathcal{P}_{etX} = e^{t\widehat{X}}$. Seja $\widehat{\mathcal{F}} = \{\widehat{L}\}$ a folheação (singular) cujas folhas são as órbitas associadas ao controle geométrico $\{\widehat{X}\}$, vide Teorema 2.65. Por construção,

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\hat{\xi}_p} \subset T_{\hat{\xi}_p} \widehat{L}_{\hat{\xi}_p}, \quad (5.4.1)$$

mas em geral o espaço tangente das folhas tem dimensão maior do que $\dim M = \dim \widehat{\mathcal{H}}$. A Equação (5.4.1) também garante que as interseções das folhas de $\widehat{\mathcal{F}}$ com a fibra $O(E_p)$ são subvariedades imersas, vide Corolário 2.57.

Consideremos agora o subgrupo $H := Hol_p(E_p)$ do grupo compacto de isometrias $K = Iso(E_p)$, o qual é um grupo de Lie isomorfo ao grupo de Lie $\mathbb{O}(k)$. Vamos definir a ação a esquerda e livre $\kappa : K \times O(E_p) \rightarrow O(E_p)$ como $\kappa(g, \hat{\xi}_p) = g \cdot \hat{\xi}_p$. Não é difícil verificar que, por construção:

$$O(E_p) \cap \widehat{L}_{\hat{\xi}_p} = H(\hat{\xi}_p). \quad (5.4.2)$$

Temos assim que a órbita $H(\hat{\xi}_p)$ é folha da folheação induzida $O(E_p) \cap \widehat{\mathcal{F}}$.

Visto que as folhas de $\widehat{\mathcal{F}}$ são μ -invariantes (a direita) concluímos que $O(E_p) \cap \widehat{\mathcal{F}}$ é uma folheação regular de $O(E_p)$, i.e., todas folhas tem mesma dimensão. Uma curiosidade é que de fato toda as folhas de $\widehat{\mathcal{F}}$ tem mesma dimensão (visto que os

grupos de holonomia de pontos diferentes são conjugadas) porém não precisaremos disto nesta demonstração, bastará considerar a folheação regular $O(E_p) \cap \hat{\mathcal{F}}$.

Definindo o difeomorfismo $\psi : O(E_p) \rightarrow K$ como a inversa de $\kappa(\cdot, \hat{\xi}_p) : K \rightarrow O(E_p)$, concluímos que o subgrupo $H = \psi(H(\hat{\xi}_p))$ é folha de uma folheação regular no grupo de Lie K .

Tal fato implica que a aplicação produto $H \times H \rightarrow H$ definida como $(h_1, h_2) \rightarrow h_1 h_2$ e a aplicação inversa $H \rightarrow H$ definida como $h \rightarrow h^{-1}$ são suaves. De fato, isto sempre será verdade para um subgrupo H que é variedade fracamente mergulhada de um grupo de Lie K ; cf [AB15, Capítulo 1].

□

5.5. Conexão e alguns objetos de análise

Como comentado na introdução deste capítulo, conexões permitiram definir intrinsicamente gradiente e Hessiano em variedades mergulhadas em espaços Euclidianos (vide Seção 1.9.2). Revisaremos aqui tais conceitos no caso geral de conexão Riemanniana em variedades abstratas e deduziremos algumas propriedades úteis. Antes porém apresentamos um lema técnico útil para as contas.

Lema 5.69. Referencial geodésico

Seja $(M, \mathbf{g})$ uma variedade Riemanniana. Dado um ponto $p \in M$, existe uma vizinhança U tal que toda base ortonormal $\xi_p = \{(\xi_i)_p\}$ de $T_p M$ admite uma extensão para um referencial suave $\xi = \{\xi_i\}$ em U que é paralelo no ponto p , i.e., $(\nabla_{(\cdot)} \xi_i)_p = 0$.

Demonstração. Fixo um ponto $p \in M$ considere um sistema de coordenadas $\psi : U \subset M \rightarrow B_\epsilon(0) \subset \mathbb{R}^m$. Dado $x \in U$ então existe um único $v = \psi(x)$. Podemos então definir o vetor $\xi_i(x)$ como o transporte paralelo de $(\xi_i)_p \in T_p M$ ao longo da curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow U$ definida como $\alpha(t) = \psi^{-1}(tv)$. Visto que o transporte paralelo preserva ortogonalidade o referencial assim definido é ortonormal. A suavidade do referencial seguirá então da suavidade com respeito as condições iniciais da E.D.O associada ao transporte paralelo. □

Fundamental destacar que somente no ponto p temos que a conexão do referencial é zero. Como comentaremos mais tarde $(\nabla_{(\cdot)} \xi_i)_x = 0, \forall x \in U$ será equivalente a curvatura ser nula.

Observação 5.70. (*)

Dado um fibrado Euclidiano $(\mathbb{R}^k, E, (M, \mathbf{g}))$ com uma conexão ∇ compatível com a métrica $\mathbf{h}$ das fibras, podemos generalizar a construção do referencial geodésico. Assim dado um ponto p existe uma vizinhança U e um referencial local ortonormal $\hat{\xi}(x) = \{\xi_i(x)\}_{i=1}^k$ com $(\nabla_{(\cdot)} \xi_i)_p = 0$. Temos então que $\hat{\xi} : U \rightarrow O(E)$ é uma aplicação suave que pode ser vista como parametrizado de gráfico, ou seja dado a trivialização $\hat{\psi} : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times O(k)$ (vide da Proposição 5.67) temos que $\hat{\psi} \circ \hat{\xi}(x) = (x, h(x))$. Pela definição da distribuição $\hat{\mathcal{H}}$ em $O(E)$, o subespaço $\hat{\mathcal{H}}_{\hat{\xi}(p)} \subset T_{\hat{\xi}(p)} O(E)$ é tangente a imagem da seção local $\hat{\xi}$ ou seja $\hat{\mathcal{H}}_{\hat{\xi}(p)} = T_{\hat{\xi}(p)} S$ para $S = \hat{\xi}(U)$. Em geral, a distribuição $\hat{\mathcal{H}}$ não precisa ser tangente a outros pontos da subvariedade S . De fato, como voltaremos a comentar, isto será verdade se e somente se, o transporte paralelo independe do caminho (o que será equivalente a $R = 0$).

5.5.1. Gradiente e Hessiano

Inspirados no que vimos sobre gradiente Riemanniano em variedades mergulhadas no espaço Euclidiano, dado uma variedade Riemanniana $(M, \mathbf{g})$ definimos **vetor gradiente** ∇f de um função suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$df(\cdot) = \mathbf{g}(\nabla f, \cdot). \quad (5.5.1)$$

Tal como no caso Euclidiano, a equação acima garante que o *gradiente indica o sentido de maior crescimento da função*. Alternativamente podemos definir o gradiente utilizando a linguagem de Mecânica. Seja $L(v) = \frac{1}{2} \mathbf{g}(v, v)$ o Lagrangiano $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ energia cinética, temos que a transformada de Legendre $\mathcal{L} : TM \rightarrow T^*M$ é definida como

$$\mathcal{L}(v_p)(w_p) = \frac{d}{ds} \mathcal{L}(v_p + sw_p)|_{s=0} = \mathbf{g}(v_p, w_p).$$

Assim segue da definição na equação Eq.(5.5.1) que

$$\nabla f = \mathcal{L}^{-1}(df). \quad (5.5.2)$$

Exercício 5.71.

Considere um referencial ortonormal $\xi = \{\xi_i\}$ em uma vizinhança de $p \in M$. Verifique:

$$(a) \quad \nabla f = \sum_i (\xi_i \cdot f) \xi_i$$

Continuação.

$$(b) \quad df = \sum_i (\xi_i \cdot f) \theta_i \text{ onde } \theta_i(\cdot) = g(\xi_i, \cdot)$$

Também, inspirados na discussão sobre variedades mergulhadas em espaços Euclidianos, dado uma variedade Riemanniana (M, g) definimos o **Hessiano** de uma função suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$\text{Hess } f(X, Y) = g(\nabla_X \nabla f, Y). \quad (5.5.3)$$

Utilizando por exemplo o Lemma 5.69 o(a) leitor(a) poderá resolver o exercício a seguir:

Exercício 5.72.

Verifique que $\text{Hess } f_p$ é aplicação bilinear simétrica.

A observação a seguir destaca a relação entre Hessiano de f com sua derivada segunda.

Observação 5.73.

Dado uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ a sua derivada primeira é $F = df : TM \rightarrow \mathbb{R}$ e a **derivada segunda de f** é $dF_{v_p} : T_{v_p}(TM) \rightarrow \mathbb{R}$. Sejam $w_p \in T_p M$ e $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ curva suave com $\alpha'(0) = w_p$. Considere $t \rightarrow \hat{\alpha}(t)$ o transporte paralelo ao longo de $\alpha_t = \alpha|_{[0,t]}$, i.e., $\hat{\alpha}(t) = \mathcal{P}_{\alpha_t} v_p$. Temos então que $\hat{w}_{v_p} = \hat{\alpha}'(0) \in \mathcal{H}_{v_p}$ é vetor tal que $d\pi_{v_p} \hat{w}_{v_p} = w_p$. Visto que $\frac{\nabla}{dt} \hat{\alpha} = 0$, temos:

$$\begin{aligned} dF_{v_p}(\hat{w}) &= \frac{d}{dt} F \circ \hat{\alpha}(t)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} df \hat{\alpha} \\ &= \frac{d}{dt} g(\nabla f \circ \alpha(t), \hat{\alpha})|_{t=0} \\ &= g(\nabla_w \nabla f(p), v_p) + g(\nabla f(p), \frac{\nabla}{dt} \hat{\alpha}) \\ &= \text{Hess } f(p)(w_p, v_p). \end{aligned}$$

5.5.2. Divergente e Laplaciano

Definamos agora o operador divergente $\operatorname{div} : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ como operador que leva $X \in \mathfrak{X}(M)$ ao traço de ∇X ou seja:

$$\operatorname{div} X_p = \sum_i g(\nabla_{e_i} X, e_i) \quad (5.5.4)$$

onde $\{e_i\}$ é base ortonormal de $T_p M$. O divergente de um campo mede a grosso modo, como ilustra o Exercício 5.76, a variação do volume de M ao longo do fluxo do campo X . Antes porém precisamos de algumas ferramentas, uma delas vista já na [Parte 1](#).

Exercício 5.74.

Considere um referencial ortonormal $\xi = \{\xi_i\}$ em uma vizinhança de $p \in M$ atendendo propriedade do Lema 5.69. Seja $X = \sum_i a_i \xi_i$. Verifique:

$$\operatorname{div} X(p) = \sum_i \xi_i \cdot a_i(p)$$

Lema 5.75.

Sejam M^m variedade Riemanniana ($\dim M = m$) orientável, ν forma volume e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Então:

$$d(i_X \nu) = \operatorname{div} X \nu \quad (5.5.5)$$

Demonstração. Considere um referencial ortonormal $\xi = \{\xi_i\}$ em uma vizinhança de $p \in M$ atendendo propriedade do Lema 5.69. Sejam θ_i base dual de ξ_j , ou seja $\theta_i(\cdot) = g(\xi_i, \cdot)$. Então $\nu = \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_m$. Seja $X = \sum_i a_i \xi_i$. Assim

$$i_X \nu = \sum_i a_i i_{\xi_i} \nu = \sum_i (-1)^{i+1} a_i \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_{i-1} \wedge \theta_{i+1} \wedge \cdots \wedge \theta_m \quad (5.5.6)$$

Visto que $\nabla_{\xi_i} \xi_j(p) = 0$ temos $[\xi_j, \xi_k](p) = \nabla_{\xi_j} \xi_k(p) - \nabla_{\xi_k} \xi_j(p) = 0$ e assim

$$d\theta_i(\xi_j, \xi_k) = \xi_j \cdot \theta_i(\xi_k) - \xi_k \cdot \theta_i(\xi_j) - \theta_i([\xi_j, \xi_k]) = 0 \quad (5.5.7)$$

Temos então pela Eq.(5.5.6) que:

$$\begin{aligned}
 d(i_X \nu)(p) &= \sum_i (\xi_i \cdot a_i) \nu(p) \\
 &+ \sum_i (-1)^{i+1} a_i d(\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_{i-1} \wedge \theta_{i+1} \wedge \cdots \wedge \theta_m)(p) \\
 &\stackrel{(5.5.7)}{=} \sum_i (\xi_i \cdot a_i) \nu(p) \\
 &= \operatorname{div} X \nu(p)
 \end{aligned}$$

□

Exercício 5.76.

Sejam (M, g) variedade Riemanniana, um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ com $X(p) \neq 0$. Seja $(t, x_1, \dots, x_{m-1})$ um sistema de coordenada com $\frac{\partial}{\partial t} = X$ e forma volume $\nu = |g| dt \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge x_{m-1}$. Verifique:

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial}{\partial t} \ln(|g|) = \frac{1}{|g|} \frac{d}{dt} |g|$$

Por fim podemos definir um dos operadores mais naturais em geometria. Dado $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definimos o Laplaciano $\Delta : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ como

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f \quad (5.5.8)$$

Segue então que Δf mede a grosso modo, a variação do volume de M ao longo do fluxo do gradiente (o qual por sua vez indica o sentido de maior crescimento da função). Existe uma ampla literatura apenas voltada para o papel do Laplaciano em modelagens e equações diferenciais parciais, bem como o significado e propriedades do seu espectro. Não faremos isto aqui pois foge um pouco dos objetivos deste livro. Mas pelo menos utilizemos nossas definições e lemas para ver o clássico Teorema 5.78. Antes porém precisaremos de um exercício (que inclui a formula de Green).

Exercício 5.77.

Considere um referencial ortonormal $\xi = \{\xi_i\}$ em uma vizinhança de $p \in M$ atendendo propriedade do Lema 5.69. Verifique:

$$1. \quad \Delta f(p) = \sum_i (\xi_i \cdot \xi_i \cdot f)(p)$$

Continuação.

$$2. \Delta(fg) = g \Delta f + f \Delta g + 2g(\nabla f, \nabla g)$$

Teorema 5.78.

Seja (M, g) variedade compacta orientável com forma volume ν . Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ suave tal que $\Delta f \geq 0$. Então f é constante, em particular funções harmônicas ($\nabla f = 0$) em variedade compacta é constante.

Demonstração. Observe que se $\Delta f \geq 0$ então $\Delta f = 0$. De fato note que

$$\int_M \Delta f \nu = \int_M \operatorname{div} \nabla f \nu = \int_M d(i_{\nabla f} \nu) = \int_{\partial M} i_{\nabla f} \nu = 0$$

visto que $\Delta f \geq 0$, concluímos que $\Delta f = 0$. Utilizando novamente teorema de Stokes (vide (**)) e o Exercício 5.77 (vide (*)) temos

$$\int_M 2g(\nabla f, \nabla f) \stackrel{(*)}{=} \int_M \Delta f^2 \nu \stackrel{(**)}{=} 0$$

Concluímos que $g(\nabla f, \nabla f) = 0$, i.e., $\nabla f = 0$. Como M é conexo, fixo $p \in M$ e dado $x \in M$, existe uma curva suave $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = x$. Então $\frac{d}{dt} f \circ \alpha(t) = g(\nabla f(\alpha(t)), \alpha'(t)) = 0$ ou seja $f \circ \alpha$ é constante, em particular $f(p) = f(x)$. $\square$

5.6. Geodésicas

No espaço Euclidiano as curvas de aceleração zero são justamente as curvas que minimizam distâncias. Assim um candidato natural para curvas que minimizam *localmente distâncias* em uma variedade Riemanniana (M, g) serão as curvas de aceleração nula. Nesta seção iremos rever a definição de geodésica e discutir propriedades básicas, incluindo que geodésicas minimizam localmente caminhos.

5.6.1. Propriedades básicas**Definição 5.79.**

Continuação.

Uma curva suave $\gamma : (-a, a) \rightarrow (M, g)$ é chamada **geodésica** se

$$\frac{\nabla}{dt}\gamma'(t) = 0, \forall t \in (-a, a).$$

Observe que se $\gamma : I \rightarrow (M, g)$ é geodésica, então $\|\gamma'(t)\|$ é constante. De fato $\frac{d}{dt}(g(\gamma'(t), \gamma'(t))) = 2g(\frac{\nabla}{dt}\gamma'(t), \gamma'(t)) = 0$. Segue então que se γ é geodésica, $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = c(b-a)$ onde $c = \|\gamma'(t)\|$.

Exercício 5.80.

Seja M^m subvariedade mergulhada em $\mathbb{R}^{m+k}$. Dado uma curva $\gamma : I \rightarrow M$ verifique que γ é geodésica se e somente se γ'' é perpendicular a M . Conclua que segmentos dos grandes círculos da esfera $\mathbb{S}^m$ são geodésicas.

Exercício 5.81.

Seja M uma superfície mergulhada de revolução em $\mathbb{R}^3$, onde g é métrica induzida. Demonstre que sua curva geratriz é geodésica de M .

Observação 5.82.

Segmentos de grandes círculos na esfera não necessariamente minimizam distâncias. Por exemplo, se $\alpha : [0, \frac{3\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{S}^m$ é uma geodésica com velocidade unitária e $L(\alpha) = \frac{3\pi}{2}$. Por outro lado, se consideramos um outro segmento do mesmo grande círculo, $\beta : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{S}^m$ com $\alpha(0) = \beta(0)$ e $\alpha(\frac{3\pi}{2}) = \beta(\pi/2)$ temos que $L(\beta) = \frac{\pi}{2} < L(\alpha)$. Ou seja, geodésicas não minimizam (grandes) distâncias, mas como veremos em breve sempre minimizam distâncias localmente.

Exercício 5.83.

Seja G um grupo de Lie com métrica bi-invariante. Verifique que: $t \rightarrow \gamma(t) = g \exp(tV)$ é a única geodésica com $\gamma(0) = g$ e $\gamma'(0) = dL_g V$.

Sugestão: Utilize os seguintes ingredientes: (i) fórmula do Exercício 5.45, (ii) definição na Seção 5.1.2 da aplicação exponencial de Lie $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$.

A seguir um clássico resultado relacionando geodésicas e submersões Riemannianas. Para maiores detalhes sobre submersões Riemannianas e seu papel central em Geometria Riemanniana vide [GW] e para suas aplicações em Robótica vide e.g., [Alt].

Exercício 5.84.

5.47 Seja $\pi : (\tilde{M}, \tilde{\mathbf{g}}) \rightarrow (M, \mathbf{g})$ uma submersão Riemanniana. Demonstre que dado uma geodésica $t \rightarrow \gamma_v$ em $(M, \mathbf{g})$ e um vetor normal $\tilde{v}$ as fibras, existe uma única geodésica horizontal $t \rightarrow \tilde{\gamma}_{\tilde{v}}(t)$ (i.e., $\tilde{\gamma}_{\tilde{v}}$ é ortogonal as fibras) com $\gamma'(0)_{\tilde{v}} = \tilde{v}$ que projeta em $t \rightarrow \gamma_v(t)$, i.e., $\pi \circ \tilde{\gamma}_{\tilde{v}}(t) = \gamma_v(t)$.

Sugestão: Utilize os seguintes ingredientes: (i) γ é localmente uma curva integral de um campo geodésico $\vec{X}$, i.e., $\nabla_{\vec{X}} \vec{X} = 0$ e $\vec{X} \circ \gamma = \gamma'(t)$ (o que pode ser demonstrado usando a estrutura de E.D.O discutida a seguir), (ii) fato que se $\vec{X} = \pi_* \tilde{X}$ então $[\tilde{X}, \tilde{Z}]$ é tangente as fibras, quando $\tilde{Z}$ é tangente as fibras (o que pode ser provado utilizando coordenadas), (iii) fórmula da Observação 5.47.

Em coordenadas $\frac{\nabla}{dt} \gamma'(t) = 0$ equivale, a seguinte EDO de segunda ordem.

$$0 = \ddot{x}_k(t) + \sum_{ij} \dot{x}_i(t) \dot{x}_j(t) \Gamma_{ij}^k(x(t)), \quad \forall k \quad (5.6.1)$$

Notemos que podemos transformar a E.D.O de segunda ordem (5.6.1) em uma E.D.O de primeira ordem em $TM = \cup_{x \in M} T_x M$. Mais precisamente, dado um sistema de coordenadas $\psi(v_p) = (q_1(p), \dots, q_m(p), \dot{q}_1(v_p), \dots, \dot{q}_m(v_p))$ de TM podemos definir um campo local $\vec{G} \in \mathfrak{X}(TM)$ como:

$$\vec{G}(p, v) = \sum_{k=1}^m v_k \frac{\partial}{\partial q_k} + \sum_{k=1}^m f_k(p, v) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \quad (5.6.2)$$

onde

$$f_k(p, v) = - \sum_{ij} v_i v_j \Gamma_{ij}^k(p).$$

Tal campo $\vec{G}$ é chamado **spray geodésico** e seu fluxo $t \rightarrow e^{tG}$ o **fluxo geodésico**.

Seja $\tilde{\gamma}_{v_p}(t) = e^{tG}(v_p)$ a curva integral ou seja: $\tilde{\gamma}'_{v_p}(t) = \vec{G} \circ \tilde{\gamma}_{v_p}(t)$ com $\tilde{\gamma}_{v_p}(0) = v_p$. Note então que dado a projeção canônica $\pi : TM \rightarrow M$ dada por $\pi(v_p) = p$ temos que $\gamma_{v_p}(t) = \pi \tilde{\gamma}_{v_p}(t)$ é única geodésica $\gamma_{v_p} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ com $\gamma_{v_p}(0) = p$ e $\gamma'_{v_p}(0) = v_p$.

O spray geodésico $\vec{G} \in \mathfrak{X}(TM)$ admite uma definição intrínseca e sem coordenadas.

Definição 5.85.

Seja $\mathcal{H}$ a conexão linear definida na Seção 5.3. O **spray geodésico** $\vec{G} \in \mathfrak{X}(TM)$ pode ser definido como:

$$\vec{G}(v_p) = \tilde{v}_p \in \mathcal{H}_{v_p}$$

onde $\tilde{v}_p$ é o levantamento horizontal via $\mathcal{H}$ ou seja $d\pi(\tilde{v}_p) = v_p$ para a projeção canônica $\pi : TM \rightarrow M$ definida como $\pi(v_p) = p$.

Observação 5.86.

Um campo $\vec{F} \in \mathfrak{X}(TM)$ é chamado um **spray** se:

$$(a) d\pi_{v_p}(\vec{F}(v_p)) = v_p \in T_p M; \quad (b) dh_\lambda(\vec{F}(v_p)) = \frac{1}{\lambda} \vec{F} \circ h_\lambda(v_p).$$

onde $h_\lambda : TM \rightarrow TM$ é **homotetia**, i.e., $h_\lambda(v_p) = \lambda v_p$ Um campo $\vec{F}$ é um spray se e somente se em coordenadas do TM tivermos:

$$\vec{F}(p, v) = \sum_{k=1}^m v_k \frac{\partial}{\partial q_k} + \sum_{k=1}^m f_k(p, v) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}$$

onde $f_k(p, \lambda v) = \lambda^2 f_k(p, v)$

Definindo $\varphi_t(v_p) = \pi(e^{tG} v_p)$ podemos resumir a discussão anterior na proposição a seguir.

Proposição 5.87.

Dado $p \in M$ existe uma vizinhança U de p em M , números $\delta, \epsilon > 0$ e uma aplicação $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times \mathcal{U} \rightarrow M$ com $\mathcal{U} := \{V_q \in TM, q \in U, \|V_q\| < \delta\}$ tal que $\gamma_{v_p}(\cdot) = \varphi(\cdot, V_q)$ é a única geodésica com $\gamma'_{v_p}(0) = \frac{d}{dt} \varphi(t, V_q)|_{t=0} = V_q$ e $\varphi(0, V_q) = q$.

Em geral reparemetrizar uma solução γ de uma E.D.O de segunda ordem, mesmo que seja por constantes i.e $\beta(t) = \gamma(ct)$, não dará uma nova solução da E.D.O. Porém a equação (5.6.1) tem um formato muito especial (i.e., a propriedade de ser spray) e assim temos o resultado a seguir.

Proposição 5.88.

Seja $\gamma_{v_q}(\cdot) = \varphi(\cdot, V_q)$ geodésica definida em $(-\epsilon, \epsilon)$. Seja $a > 0$ então:

- (a) A geodésica $t \rightarrow \gamma_{av_q}(t) = \varphi(t, aV_q)$ está definida em $(-\frac{\epsilon}{a}, \frac{\epsilon}{a})$
- (b) $\gamma_{av_q}(t) = \varphi(t, aV_q) = \varphi(at, V_q) = \gamma_{v_q}(at)$.

Demonstração. Note que o item (b) implica o item (a). Visto que $\frac{d}{dt}\varphi(at, V_q)|_{t=0} = aV_q$ basta mostrar que $t \rightarrow \varphi(at, V_q)$ é geodésica. Isto segue do fato que em coordenadas $y(t) = x(at)$ atende a equação (5.6.1). $\square$

As duas proposições acima então implicam que:

Proposição 5.89.

Dado $p \in M$ existe uma vizinhança U de p em M , um número $\delta > 0$ e uma aplicação $\varphi : (-2, 2) \times \mathcal{U} \rightarrow M$ com $\mathcal{U} := \{v_q \in TM, q \in U, \|v_q\| < \delta\}$ tal que $\varphi(\cdot, v_q)$ é a única geodésica com $\frac{d}{dt}\varphi(t, v_q)|_{t=0} = v_q$ e $\varphi(0, v_q) = q$.

Definição 5.90.

Podemos definir agora a **aplicação exponencial** como

$$\begin{aligned} \exp_q : B_\delta(0) \subset T_q M &\rightarrow M \\ V_q &\rightarrow \varphi(1, V_q) \end{aligned}$$

Observação 5.91.

Visto que $\varphi(1, V_q) = \varphi(\|V_q\|, \frac{V_q}{\|V_q\|})$ temos que $\exp_q(V)$ é o ponto em M obtido percorrendo um comprimento $\|V_q\|$ ao longo da imagem da geodésica que sai de q com velocidade $\frac{V_q}{\|V_q\|}$.

Proposição 5.92.

Seja $q \in M$. Então $d(\exp_q)_0 = Id$ e assim sendo existe um $\epsilon > 0$ tal que $\exp_q : B_\epsilon(0) \rightarrow M$ é um difeomorfismo sobre um aberto em M .

Demonstração.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \exp_q(tV)|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \varphi(1, tV_q)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \varphi(t, V_q)|_{t=0} \\ &= V_q\end{aligned}$$

e assim $d(\exp_q)_0$ é a identidade. O resto da proposição segue do teorema da função inversa. $\square$

Tal vizinhança B_ϵ será chamada de **vizinhança normal**.

Exercício 5.93.

Dado um grupo de Lie com métrica bi-invariante, conclua (utilizando Exercício 5.83) que a exponencial Riemanniana (na identidade) $\exp_e : T_e G \rightarrow G$ coincide com a exponencial de Lie $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$. Em particular conclua que dado um grupo de Lie matricial com métrica bi-invariante, temos que a exponencial de matriz coincide com a exponencial Riemanniana (na identidade).

5.6.2. Lemas de Gauss e propriedades minimizantes

Iniciemos esta seção com um lema útil (vide demonstração em [Car]) o qual será utilizado em mais de um momento. A grosso modo falando, o lema afirma que a conexão pull back da conexão Riemanniana ∇ via uma aplicação $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow M$ "herda" a propriedade de ∇ ser livre de torção.

Lema 5.94.

Seja $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow M$ aplicação suave. Então

$$\frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}.$$

O lema de Gauss a seguir garante que geodésicas radiais são ortogonais as esferas normais.

Teorema 5.95. Lema de Gauss

Seja $B_{\tilde{\delta}}(0)$ uma bola em $T_q M$ tal que a restrição da exponencial $\exp_q : B_{\tilde{\delta}}(0) \rightarrow M$ está bem definida. Sejam $\mathbb{S}_{\delta}^{n-1}$ a esfera contida em $B_{\tilde{\delta}}(0)$ com $\delta < \tilde{\delta}$ e $v :$

Continuação.

$(-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{S}_\delta^{n-1}$ curva suave. Defina $f(s, t) = \exp_q(tv(s))$. Então

$$\mathbf{g}\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) = 0.$$

Demonstração. Observe primeiro que

$$\mathbf{g}\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)_{f(s,t)} = \mathbf{g}(d(\exp_q)_{tv(s)}tv'(s), d(\exp_q)_{tv(s)}v(s)).$$

Podemos então concluir que:

$$\mathbf{g}\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)_{f(s,0)} = 0.$$

Assim para demonstrar o lema de Gauss é suficiente verificar que a derivada em relação a t da função $\mathbf{g}\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)_{f(s,t)}$ é zero para todo t .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{g}\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) &= \mathbf{g}\left(\frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) + \mathbf{g}\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t}\right) \\ &= \mathbf{g}\left(\frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) \\ &= \mathbf{g}\left(\frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{g}\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \|v(s)\|^2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade deve-se ao fato de $f(s, \cdot)$ ser geodésica, a terceira igualdade deve-se ao Lema 5.94 e a última igualdade deve-se ao fato de $v(\cdot)$ ser uma curva contida em uma esfera. $\square$

O lema de Gauss nos permite demonstrar que geodésicas minimizam localmente caminhos. Mais precisamente temos a seguinte proposição.

Proposição 5.96.

Seja $B_\delta(q)$ uma bola normal. Defina $\alpha : [0, 1] \rightarrow B_\delta(0)$ como $\alpha(t) = \exp_q(tv)$ com $\|v\| < \delta$. Seja $\beta : [0, 1] \rightarrow M$ curva suave por partes tal que $\alpha(0) = \beta(0)$

Continuação.

e $\alpha(1) = \beta(1)$. Então

$$1(\alpha) \leq 1(\beta).$$

Se a igualdade vale, então as imagens de α e β coincidem.

Demonstração. Vamos primeiro considerar o caso em que $\beta([0, 1]) \subset B_\delta(q)$.

Podemos supor sem perda de generalidade que $\beta(t) \neq q$ para $t > 0$.

Seja $\tilde{\beta} := (\exp_q|_{B_\delta(0)})^{-1} \circ \beta$. Defina as seguintes funções suaves por partes:

$$\begin{aligned} f : [0, \delta) \times \mathbb{S}_1^{n-1} \ni (R, V) &\rightarrow \exp_q(RV) \in B_\delta(q) \\ r : [0, 1] \ni t &\rightarrow \|\tilde{\beta}(t)\| \in [0, \delta) \\ v : (0, 1] \ni t &\rightarrow \frac{\tilde{\beta}(t)}{\|\tilde{\beta}(t)\|} \in \mathbb{S}_1^{n-1} \end{aligned}$$

Observe que $\beta(t) = f(r(t), v(t))$. Temos então pelo lema de Gauss que:

$$\begin{aligned} \int_\epsilon^1 \|\beta'(t)\| dt &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\beta'(t)\| dt \\ &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{(r'(t))^2 + \mathbf{g}\left(\frac{\partial f}{\partial V} v'(t), \frac{\partial f}{\partial V} v'(t)\right)} dt \\ &\geq \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} |r'(t)| dt \\ &\geq \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} r'(t) dt \\ &= r(1) - r(\epsilon) \end{aligned}$$

Logo $1(\beta) \geq r(1) = 1(\alpha)$. Note que se as igualdades são satisfeitas então as imagens de α e β coincidem.

Por fim vamos considerar o caso em que $\beta([0, 1])$ não está completamente contido em $B_\delta(q)$. Seja t_1 o primeiro tempo tal que $\beta(t_1)$ está na fronteira da bola. Então temos pela discussão anterior:

$$1(\beta) > 1(\beta|_{[0, t_1]}) \geq \delta > 1(\alpha).$$

□

5.6.3. Vizinhança normal convexa

A Proposição 5.96 pode ser melhorada como comentamos no teorema a seguir.

Teorema 5.97. Vizinhança convexa

Seja $(M, \mathbf{g})$ variedade Riemanniana. Então para cada $q \in M$ existem números $\delta > 0, \epsilon > 0$ tal que as seguintes afirmações são válidas.

- (a) Para qualquer $p \in B_\epsilon(q)$ temos $\exp_p|_{B_\delta(0)}$ é um difeomorfismo e que $B_\epsilon(q) \subset \exp_p(B_\delta(0))$.
- (b) Para cada 2 pontos p_1 e p_2 em $B_\epsilon(q)$ existe um único segmento minimizante de geodésica ligando p_1 a p_2 .
- (c) O segmento (do item (b)) fica contido em $B_\epsilon(q)$ e depende suavemente dos pontos inicial e final.

Exercício 5.98.

Utilizando a Proposição 5.96, demonstre que o item (a) implica o item (b) no teorema da vizinhança convexa, enunciado acima.

Demonstração. (*) A demonstração deste interessante teorema é opcional. Sugerimos para o(a) leitor(a) iniciante, pular a demonstração e seguir para aplicações. A prova que apresentamos a seguir é baseada no clássico [Car].

Para demonstrar o teorema precisaremos dos dois lemas abaixo.

Lema 5.99.

Para cada $q \in M$ existe um $c > 0$ com a seguinte propriedade: Se $r < c$ e $\alpha : [-a, a] \rightarrow M$ é geodésica tangente a $B_r(q)$ em $\alpha(0)$ então $\alpha(t) \notin B_r(q)$ para t pequeno.

Demonstração. Seja $\widetilde{W}$ uma vizinhança normal de q . Pela Proposição 5.88 podemos encontrar uma vizinhança $W \subset \widetilde{W}$ de q e um número ϵ tal que $\varphi((-\epsilon, \epsilon), T^1W) \subset \widetilde{W}$ onde φ é a projeção do fluxo geodésico em M e T^1W o fibrado unitário sobre W . Defina $\varphi^0(t, V_x) := \exp_q^{-1}(\varphi(t, V_x))$ e aplicação $H : (-\epsilon, \epsilon) \times T^1W \rightarrow \mathbb{R}$ como $H(t, V_x) := \|\varphi^0(t, V_x)\|^2$. Ou seja H mede a distância ao quadrado de $\varphi(t, V_x)$ a q .

Note que

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial t} &= 2\left\langle \frac{\partial \varphi^0}{\partial t}, \varphi^0 \right\rangle \\ \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} &= 2\left\langle \frac{\partial^2 \varphi^0}{\partial^2 t}, \varphi^0 \right\rangle + 2\left\langle \frac{\partial \varphi^0}{\partial t}, \frac{\partial \varphi^0}{\partial t} \right\rangle\end{aligned}$$

Logo $\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}(0, V_q) = 2$ e assim podemos encontrar $c > 0$ pequeno tal que

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}(0, V_x) > 0 \quad (5.6.3)$$

para $x \in B_c(q)$ e $V_x \in T^1(B_c(q))$.

Observe que se $p \in S_r(q)$ com $r < c$ e $\gamma(t, V_p)$ é uma geodésica tangente em $S_r(q)$ no ponto p então pelo lema de Gauss temos:

$$\frac{\partial H}{\partial t}(0, V_p) = 0. \quad (5.6.4)$$

Equações (5.6.3) (5.6.4) implicam que $h(t) := H(t, V_p)$ tem mínimo em $t = 0$ e assim que $\varphi^0(t, V_p)$ fica fora de $B_r(0)$ e logo $\varphi(t, V_p)$ fica fora de $B_r(q)$ para t pequeno diferente de zero. $\square$

Lema 5.100.

Existem $\delta < \frac{\epsilon}{2}$ e $\epsilon < \delta$ tal que para todo $p \in B_\epsilon(q)$

1. $\exp_p|_{B_\delta(0)}$ é difeomorfismo
2. $B_\epsilon(q) \subset \exp_p(B_\delta(0))$

Demonstração. Considere a aplicação $F : \mathcal{U} \subset TM \rightarrow M \times M$ definida como $F(V_p) = (p, \exp_p(V_p))$, onde $\pi(\mathcal{U})$ é uma vizinhança de q . Utilizando a Proposição 5.92 pode-se verificar que $dF_{(q,0)}$ é invertível. Desta forma reduzindo $\mathcal{U}$ podemos garantir que $F|_{\mathcal{U}}$ é um difeomorfismo. Observe que $F(T_p M \cap \mathcal{U}) \subset p \times M$ e que $F|_{T_p M \cap \mathcal{U}}$ é um difeomorfismo. Assim sendo para terminar a prova do lema basta encontrar $\epsilon < \delta$ e $\delta < \frac{\epsilon}{2}$ tal que $B_\epsilon(q) \subset \exp_p(B_\delta(0))$ para todo $p \in B_\epsilon(q)$. Reduza c tal que $B_{\frac{\epsilon}{4}}(q) \times B_{\frac{\epsilon}{4}}(q) \subset F(\mathcal{U})$. Levando em conta que $F(p, 0) = (p, p)$ pode-se verificar que $\delta < \frac{2}{3}(\frac{\epsilon}{4})$ e $\epsilon < \frac{\delta}{4}$ atendem as propriedades desejadas. $\square$

Vamos agora demonstrar o teorema. O item (a) segue direto do Lema 5.100. Este lema também garante que qualquer 2 pontos em $B_\epsilon(q)$ podem ser ligados por um único segmento de geodésica que depende suavemente dos pontos inicial e final. Devemos então provar que este segmento fica contido na bola $B_\epsilon(q)$.

Seja $\alpha : [0, 1] \rightarrow B_\epsilon(q)$ segmento de geodésica com $\alpha(0)$ e $\alpha(1)$ contidos em $B_\epsilon(q)$. Note que $L(\alpha) < \delta$. Suponha por absurdo que o segmento de geodésica não fica completamente contido na bola. Então existe um t_0 tal que

$$c > 2\delta > r_0 := d(\alpha(t_0), q) = \sup_{t \in [0, 1]} (d(\alpha(t), q)).$$

Note α é tangente a $B_{r_0}(q)$ no ponto $\alpha(t_0)$ o que contraria então o Lema 5.99. $\square$

5.6.4. Algumas aplicações do teorema de vizinhança convexa

Vamos apresentar uma boa aplicação deste relevante teorema.

Proposição 5.101.

Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow (M, \mathbf{g})$ curva suave por partes tal que $d(\gamma(0), \gamma(1)) = \mathbf{l}(\alpha)$. Então γ é imagem de uma geodésica.

Demonstração. Observe primeiro que para cada $t \in [0, 1]$ existe um intervalo I_t tal que $\gamma(I_t)$ está contida em uma bola normal convexa.

Afirmamos que $\gamma(I_t)$ é imagem de um segmento de geodésica. De fato seja $I_t = [a, b]$ então como $\gamma(I_t)$ está contida em uma bola normal convexa então existe um único segmento de geodésica α ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$ tal que $\mathbf{l}(\alpha) = d(\gamma(a), \gamma(b))$. Suponha por absurdo que $\gamma(I_t)$ seja diferente de α . Então defina a concatenação $\beta = \gamma_{[a, b]} * \alpha * \gamma_{[0, a]}$. Note que $\beta(0) = \gamma(0)$, $\beta(1) = \gamma(1)$ e $L(\beta) < L(\alpha)$ o que contraria a definição de γ .

Seja $I_{t_i}^0$ uma cobertura finita do intervalo compacto $[0, 1]$ tais que $\gamma(I_{t_i})$ está em uma bola normal convexa. Se $s \in I_{t_i}^0 \cap I_{t_{i+1}}^0$ então considere um intervalo I_s^0 tal que $I_s^0 \subset I_{t_i}^0 \cap I_{t_{i+1}}^0$ e tal que $\gamma(I_s)$ esta contida em uma bola normal convexa. Como vimos acima $\gamma(I_s)$ é um segmento de geodesica contido nos segmentos de geodésicas $\gamma(I_{t_i})$ e $\gamma(I_{t_{i+1}})$. Logo por EDO os segmentos de geodésicas $\gamma(I_{t_i})$ e $\gamma(I_{t_{i+1}})$ ficam contidos em um segmento de geodésica maior e isto termina a prova. $\square$

A seguir iremos discutir mais uma interessante aplicação do teorema de bola normal (convexa). No teorema abaixo damos uma ideia da demonstração do teorema de Hopf-Rinow para o caso compacto usando apenas o conceito de bola normal e um argumento chamado *encurtamento* o qual é útil no estudo de geodésicas em particular das geodésicas fechadas.

Teorema 5.102.

Suponha que $(M, \mathbf{g})$ é variedade Riemanniana compacta. Então:

- (a) para todo $q \in M$ a aplicação exponencial $\exp_q : T_q M \rightarrow M$ está bem definida, i.e., M é **geodesicamente completo**.
- (b) dados q e p em M , existe um segmento de geodésica $\gamma : [0, R] \rightarrow M$ (parametrizado por comprimento de arco) ligando q a p (i.e., $\gamma(0) = q$ e $\gamma(R) = p$) que realiza distância, i.e., $l(\gamma) = R = d(q, p)$.

Demonstração. Afim de provar o (a), aceitemos que a Equação 5.6.1 garante a existência de um campo (chamado campo geodésico) consideremos o fluxo geodésico $\vec{G} \in \mathfrak{X}(TM)$ e lembremos que as projeção de suas curvas integrais coincidem com as geodésicas em M . Agora podemos restringir $\vec{G}$ ao fibrado tangente unitário $T^1(M) := \{V_x \in T_x M, \|V_x\| = 1\}_{x \in M}$. Ao aplicar o resultado que afirma que todo campo suave definido em variedade compacta gera um grupo a 1 parametro de difeomorfismos podemos concluir que o fluxo de $\vec{G}$ restrito $T^1(M)$ é completo (i.e, está definido para todo tempo) e assim projetando em M concluimos que M é geodesicamente completo.

Vamos agora dar ideia da prova do item (b). Como M é compacta podemos considerar uma cobertura finita de bolas B_{δ_i} que são vizinhanças normais convexas (vide Teorema 5.97). A esta cobertura considere δ o **número de Lebesgue** associado a ela, ou seja se $d(x, y) < \delta$ então $x, y \in B_{\delta_i}$ para algum i . Sejam $R = d(q, p)$ e $0 < t_1 < t_2 \cdots < t_{m-1} = R$ uma partição tal que $\Delta t_i := (t_i - t_{i-1}) < \frac{\delta}{4}$.

Considere uma sequencia de curvas $\tilde{\gamma}_n : [0, b_n] \rightarrow M$ parametrizadas por comprimento de arco tal que $L(\tilde{\gamma}_n)$ converge a R com $\tilde{\gamma}_n(0) = q$ e $\tilde{\gamma}_n(b_n) = p$. Considere $N > N_0$ tal que $R \leq L(\tilde{\gamma}_n) < R + \epsilon_0$ onde $\epsilon_0 < \frac{\delta}{8}$. Em particular observe que $b_n < R + \epsilon_0$ Defina $t_m^n := b_n$ (sendo que $t_{m-1} \leq t_m$).

Finalmente defina γ_n como a curva composta por união de segmentos de geodésicas ligando $x_n^{i-1} := \tilde{\gamma}_n(t_{i-1})$ com $x_n^i := \tilde{\gamma}_n(t_i)$. De fato a escolha de Δt_i garante que existe uma única geodésica ligando tais pontos. Chamaremos γ_n o **encurtamento de $\tilde{\gamma}_n$** . Visto que M é compacta, passando por uma subsequencia (que continuaremos a denotar por $\{x_n^i\}_n$) podemos garantir que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^i = x^i$.

Novamente a escolha de Δt_i e propriedade do número de Lebesgue δ garante que existe um único segmento de geodésica ligando x^{i-1} e x^i . Vamos denotar por γ a curva que é a união destes segmentos de geodésicas. Note que $\gamma_n|_{[t_{i-1}, t_i]}$ converge para $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$. Visto que $\mathbf{l}(\gamma_n)$ converge para R concluímos que $\mathbf{l}(\gamma) = R$. Logo pela Proposição 5.101 concluímos que γ é a geodésica minimizante ligando q a p . $\square$

Exercício 5.103. *

Seja M variedade Riemanniana compacta não simplesmente conexa. Demonstre que por cada q existe um loop geodésico, i.e., uma geodésica $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = \gamma(1)$, porém $\gamma'(0)$ não precisa ser igual a $\gamma'(1)$.

A técnica de encurtamento discutida no Teorema 5.102 pode ser refinada e fornecer uma ferramenta para provar o clássico teorema a seguir.

Teorema 5.104.

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta. Então M admite uma **geodésica fechada não trivial** $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$, i.e., $\gamma'(0) \neq \gamma'(1)$.

Demonstração. Iremos aqui apenas dar uma *ideia da demonstração* que pode ser encontrada por completa no livro [Jost], no qual baseamos a discussão a seguir.

Seja $\beta : [0, 1] \rightarrow M$ uma curva fechada (i.e., $\beta(0) = \beta(1)$) em uma variedade compacta M . Considere 2 partições τ_i e t_i definidas da seguinte forma, $\tau_0 = \tau_k - 1 < t_0 = 0 < \tau_1 < t_1 < \tau_2 < t_2 \cdots < \tau_k < t_k = 1$ com Δt_i e $\Delta \tau_i$ pequenos o suficiente (onde a estimativa é feita adequadamente usando cobertura de bolas convexas e o número de Lebesgue). Aplicando o processo de encurtamento a curva fechada β (referente a partição t_i) discutido na demonstração acima, obtemos uma curva fechada γ_1 união de segmentos de geodésicas. Agora usando o encurtamento (referente a partição τ_i) a curva γ_1 obtemos uma nova curva fechada união de segmentos de geodésicas. Vamos denota-la por γ . Criamos então um processo que chamaremos **duplo-encurtamento** $\mathcal{P}(\beta) = \gamma$. É possível demonstrar que as curvas fechadas união de segmentos de geodésicas $\mathcal{P}^n(\beta)$ converge para uma geodésica fechada γ , que em princípio poderia ser um ponto. Então surge a questão de como garantir que γ não é trivial. Podemos então pensar em 2 casos. O primeiro mais simples onde $\pi_1(M)$ é não trivial. Neste caso poderíamos ter começado com uma curva fechada β que não é homotópica a um ponto e aplicarmos o processo duplo a esta curva. Temos assim neste caso que γ é uma geodésica fechada não trivial,

pois γ e β estão na mesma classe de homotopia que não fixa extremos e β não pode ser deformada a um ponto. Finalmente considere o caso em que M é simplesmente conexo. Sabe-se por topologia algébrica que pelo menos um dos grupos de homotopia $\pi_k(M)$ é não trivial. Considere uma aplicação $\psi : \mathbb{S}^k \rightarrow M$ não homotópica a um ponto. Aplicando duplo encurtamento a cada um dos paralelos concluímos que deve existir uma geodésica fechada, pois caso contrário a esfera seria homotópica a um disco, que por sua vez é homotópico a um ponto.

Convém destacar que ideias semelhantes também podem ser utilizadas para classes de espaços de folhas que são orbifolds, vide [AJ]. $\square$

5.7. Teorema de Hopf Rinow

Como discutido anteriormente, uma variedade Riemanniana $(M, \mathbf{g})$ se torna um espaço métrico se consideramos a função distancia induzida por $\mathbf{g}$. Claramente M é um espaço métrico completo (i.e., toda sequência de Cauchy converge) quando M é variedade compacta.

Como vemos no exercício a seguir uma outra classe de variedades completas são os *espaços homogêneos*, os quais incluem espaços Euclidianos, espaços hiberbólicos, grupos de Lie com métrica invariante a esquerda e espaços simétricos.

Exercício 5.105.

Seja M uma variedade Riemanniana homogênea, i.e., dado x e y em M existe uma isometria $g \in \text{Iso}(M)$ tal que $g(x) = y$. Mostre que M é um espaço métrico completo.

Como vimos no item (a) do Teorema 5.102 se M é compacta, ela é *geodesicamente completa* ou seja a aplicação $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ é bem definida, para todo $p \in M$.

O teorema de Hopf Rinow enunciado e demonstrado a seguir garante que os dois conceitos de completude são equivalentes. Assim sendo chamaremos M de **variedade completa** se um dos conceitos (geodesicamente completa ou completa como espaço métrico) for atendido. O teorema também garantirá que 2 pontos em uma variedade completa sempre serão ligados por uma geodésica minimizante, generalizando assim o item (b) do Teorema 5.102.

Teorema 5.106.

Continuação.

Seja M variedade Riemanniana.

(a) As condições abaixo são equivalentes:

- (a1) Existe um ponto $p \in M$ tal que $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ está bem definida;
- (a2) os fechados limitados de M são compactos,
- (a3) M é completa como espaço métrico;
- (a4) M é geodésicamente completa;

(b) Suponha que uma das condições acima seja satisfeita. Então dado $p, q \in M$ existe uma geodésica γ minimizante ligando p a q , i.e., $L(\gamma) = d(p, q)$

Demonstração. (*) A demonstração a seguir é baseada no clássico [Car]. Sugerimos para o(a) leitor(a) iniciante, focar no enunciado do teorema e apenas nas ideias da demonstração.

(a1) $\Rightarrow$ (b): Vamos primeiro provar que (a1) implica (b) ou seja que se existe um $p \in M$ onde a aplicação $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ está bem definida então dado qualquer $q \in M$ existe uma geodésica parametrizada por comprimento de arco $\gamma : [0, R] \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(R) = q$ onde $R = d(p, q)$. Este será o coração da prova do teorema de Hopf Rinow.

Seja $B_\delta(p)$ uma bola normal. Como a função $x \rightarrow d(x, q)$ restrita $\partial B_\delta(p)$ é contínua, ela admite um mínimo $x_0 \in \partial B_\delta(p)$. Seja $v \in T_p^1 M$ tal que $\exp_p(\delta v) = x_0$ e defina $t \rightarrow \gamma(t) = \exp_p(tv)$. Nosso objetivo é mostrar que $\gamma(R) = q$. Definamos o conjunto $\mathcal{A} \subset [\delta, R]$ como:

$$\mathcal{A} = \{s \in [\delta, R], \text{ tal que } \forall t \in [\delta, s] \ d(\gamma(t), q) = R - t\} \quad (5.7.1)$$

Note que:

- $\mathcal{A} \neq \emptyset$, pois $\delta \in \mathcal{A}$ (vide argumento da Eq. (5.7.2) abaixo);
- $\sup \mathcal{A} \in \mathcal{A}$ pois a função distancia é contínua.

Devemos mostrar que $\sup \mathcal{A} = R$ e para tanto basta mostrar que se $\tilde{s} \in \mathcal{A}$ então existe $\tilde{\delta}$ tal que $\tilde{s} + \tilde{\delta} \in \mathcal{A}$.

Afirmção 1: Seja $\tilde{\delta}$ tal que $B_{\tilde{\delta}}(\gamma(\tilde{s}))$ é bola normal e $\tilde{x} \in \partial B_{\tilde{\delta}}(\gamma(\tilde{s}))$ tal que $d(\tilde{x}, q) = \inf d(x, q)|_{x \in \partial B_{\tilde{\delta}}(\gamma(\tilde{s}))}$. Então $\tilde{x} = \gamma(\tilde{s} + \tilde{\delta})$.

Como veremos abaixo, a ideia da prova da Afirmação 1 será provar que se β é a geodésica ligando $\gamma(\tilde{s})$ a $\tilde{x}$, então a curva concatenada $\beta * \gamma|_{[0, \tilde{s}]}$ minimizará a distância $d(p, \tilde{x})$ o que implicará que ela de fato é uma geodésica (em particular não quebrada). Vamos agora aos detalhes da prova da Afirmação 1.

Observe primeiro que:

$$d(\gamma(\tilde{s}), q) = \tilde{\delta} + d(\tilde{x}, q). \quad (5.7.2)$$

De fato se $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ é uma curva com $\alpha(0) = \gamma(\tilde{s})$, $\alpha(1) = q$ e $\alpha(1/2) \in \partial B_{\tilde{\delta}}(\gamma(\tilde{s}))$ temos que $L(\alpha) \geq \tilde{\delta} + d(\tilde{x}, q)$ o que implica (tomando o infimum sobre as curvas α) que $d(\gamma(\tilde{s}), q) \geq \tilde{\delta} + d(\tilde{x}, q)$. Por outro lado pela desigualdade triangular $d(\gamma(\tilde{s}), q) \leq \tilde{\delta} + d(\tilde{x}, q)$ e assim concluímos Eq. (5.7.2).

Da definição do conjunto $\mathcal{A}$, recorde eq. (5.7.1), temos

$$d(\gamma(\tilde{s}), q) = R - \tilde{s} \quad (5.7.3)$$

Assim pela desigualdade triangular, e equações (5.7.2) e (5.7.3) temos

$$\begin{aligned} d(p, \tilde{x}) &\geq d(p, q) - d(\tilde{x}, q) \\ &\geq R - (R - \tilde{s} - \tilde{\delta}) \\ &= \tilde{s} + \tilde{\delta} \end{aligned}$$

Da equação acima concluímos que $d(p, \tilde{x}) \geq \tilde{s} + \tilde{\delta}$. Por outro lado a curva concatenada $\beta * \gamma|_{[0, \tilde{s}]}$ tem comprimento $\tilde{s} + \tilde{\delta}$. Assim concluímos pela Proposição 5.101 que a curva concatenada $\beta * \gamma|_{[0, \tilde{s}]}$ é uma geodésica e em particular que $\tilde{x} = \gamma(\tilde{s} + \tilde{\delta})$, terminando a prova da Afirmação 1.

Por fim para demonstrar que $\tilde{s} + \tilde{\delta} \in \mathcal{A}$, e assim terminar a demonstração do $(a1) \Rightarrow (b)$, basta aplicar eq. (5.7.2) e (5.7.3) concluindo que:

$$\begin{aligned} d(\gamma(\tilde{s} + \tilde{\delta}), q) &= d(\tilde{x}, q) \\ &= d(\gamma(\tilde{s}), q) - \tilde{\delta} \\ &= R - \tilde{s} - \tilde{\delta} \\ &= R - (\tilde{s} + \tilde{\delta}) \end{aligned}$$

$(a1) \Rightarrow (a2)$: Seja $K \subset M$ um conjunto fechado e limitado. Então existe um R tal que $K \subset B_R(p)$. Por outro lado como (a1) implica (b) sabemos que $B_R(p) \subset \exp_p(B_R(0))$. Logo $K \subset \exp_p(B_R(0))$, ou seja temos um conjunto fechado limitado contido em um compacto, logo K é compacto.

(a2) $\Rightarrow$ (a3): Seja $\{x_m\}$ uma sequência de Cauchy. Então dado R existe um N_0 tal que para todo $m > N_0$ temos $x_m \in \overline{B_R(x_{N_0})}$, ou seja a sequência $\{x_m\}_{m>N_0}$ fica contida (pelo item (a2)) em um compacto, assim possuiu uma subsequência convergente. Uma sequência de Cauchy que admite subsequência convergente, também converge. Assim provamos que M é um espaço métrico completo.

(a3) $\Rightarrow$ (a4): Seja $\gamma : [0, a) \rightarrow M$ segmento de geodésica parametrizada por comprimento de arco. Desejamos mostrar que α pode ser estendida para $[0, a + \tilde{\delta})$, para algum $\tilde{\delta}$. Considere uma sequência $\{s_n\}$ tal que $s_n \rightarrow a$. Temos então

$$\begin{aligned} \epsilon > |s_n - s_m| &= \int_{s_m}^{s_n} \|\alpha'(t)\| dt \\ &\geq d(\gamma(s_n), \gamma(s_m)) \end{aligned}$$

Assim $\{\gamma(s_m)\}$ é uma sequência de Cauchy e como M é completo, ela tem que convergir para um ponto $p \in M$. Seja $B_\delta(p)$ uma bola normal convexa, e escolha N_0 tal que se $m > N_0$ então $\gamma(s_m) \in B_{\delta/3}(p)$ e $a - s_m < \delta/3$. Concluimos pelo teorema da vizinhança convexa (Teorema 5.97) que o segmento de geodésica pode ser estendido para $[0, a + \delta/3)$ e que que fato $\gamma(a) = p$.

(a4) $\Rightarrow$ (a1) claramente e isto termina a demonstração do teorema. $\square$

Terminamos esta seção com um resultado simpático que será útil para teorema de Hadamard.

Proposição 5.107.

Seja $F : \widetilde{M} \rightarrow M$ uma isometria local. Suponha que $\widetilde{M}$ é completa. Então F é um recobrimento isométrico.

Demonstração. Seja $p_\alpha \in F^{-1}(p)$. Observe que como F é uma isometria local então leva geodésica em geodésica. Mais precisamente

$$F(\exp_{p_\alpha}(tv)) = \exp_p(tdF_{p_\alpha}v), \forall t. \quad (5.7.4)$$

A equação acima e o item (a) do Teorema 5.106 implicam que M é variedade completa. O item (b) do Teorema 5.106 e a Eq. (5.7.4) implicam que F é sobrejetora.

Seja δ tal que $B_\delta(p)$ é vizinhança normal convexa.

Afirmção 1: $F : B_\delta(p_\alpha) \rightarrow B_\delta(p)$ é uma isometria.

Vamos provar a afirmação 1 acima. Primeio observe que dado $\tilde{x} \in B_\delta(p_\alpha)$ existe pelo menos um segmento de geodésica $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow M$ de comprimento menor do que δ tal que $\tilde{\gamma}(0) = p_\alpha$ e $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{x}$ (visto que $\widetilde{M}$ é completa). Assim sendo pela Eq. (5.7.4) concluímos que $F(\tilde{\gamma}(1)) \in B_\delta(p)$ e assim que $F(B_\delta(p_\alpha)) \subset B_\delta(p)$. Por outro lado dado um $x \in B_\delta(p)$ existe um único $v \in T_p M$ tal que $x = \exp_p(v)$. Defina v_α tal que $dF_{p_\alpha} v_\alpha = v$. Assim pela Eq. (5.7.4) $F(\exp_{p_\alpha}(v_\alpha)) = \exp_p(v) = x$ concluindo que $F(B_\delta(p_\alpha)) \supset B_\delta(p)$. Temos assim que $F(B_\delta(p_\alpha)) = B_\delta(p)$. Vamos agora provar que $F : B_\delta(p_\alpha) \rightarrow B_\delta(p)$ é injetora. Vamos considerar 2 pontos $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in B_\delta(p_\alpha)$ e suponhas que $F(\tilde{x}_1) = F(\tilde{x}_2)$. Existe pelo menos 2 segmentos de geodésicas $\tilde{\gamma}_i$ ligando p_α a $\tilde{x}_i$ com comprimento menor a δ . Pela Eq. (5.7.4) temos $F \circ \tilde{\gamma}_1$ e $F \circ \tilde{\gamma}_2$ são geodésicas (de comprimento menor que δ) ligando p a $F(\tilde{x}_1) = F(\tilde{x}_2)$. Como a vizinhança é normal temos que $F \circ \tilde{\gamma}_1 = F \circ \tilde{\gamma}_2$ o que implica que $\tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}_2$ e assim que $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$ concluindo assim que $F : B_\delta(p_\alpha) \rightarrow B_\delta(p)$ é injetora terminando a prova da Afirmação 1.

Afirmação 2: $B_\delta(p_\alpha) \cap B_\delta(p_\beta) = \emptyset$ se $\alpha \neq \beta$

Suponha que $\tilde{x} \in B_\delta(p_\alpha) \cap B_\delta(p_\beta)$. Seja $\tilde{\alpha}_i : [0, 1] \rightarrow M$ segmento de geodésica com $\tilde{\alpha}_i = p_i$ e $\tilde{\alpha}_i(1) = \tilde{x}$. Assim pela Eq. (5.7.4) as geodésicas $F \circ \tilde{\alpha}_i$ são segmentos de geodésicas que ligam p a x em $B_\delta(p)$ e assim temos $F \circ \tilde{\alpha}_\alpha = F \circ \tilde{\alpha}_\beta$ o que contraria o fato de F ser um difeomorfismo local, terminando a afirmação 2. As afirmações 1 e 2 terminam a prova do lema. $\square$

5.8. (*) Fluxo geodésico e forma simplética

Nesta seção opcional estudaremos as relações entre o fluxo geodésico e as estrutura simplética e de contato induzidas pela métrica de Sasaki. Esta seção será baseada no livro [Pat, Capítulo 1].

Seja $\tilde{g}$ métrica de Sasaki em TM , vide Definição 5.63. Lembremos em particular que a conexão Riemanniana induz uma distribuição $\mathcal{H}$ na variedade TM e assim temos a decomposição $T_{v_p} TM = \mathcal{H}_{v_p} \oplus T_{v_p} T_p M$. Ao longo desta seção, a dupla $(X, Y)_{v_p}$ significará que $X \in \mathcal{H}_{v_p}$ e $Y \in T_{v_p} T_p M$. Lembremos também que pela Observação 5.65 a projeção $C_{v_p} : T_{v_p}(TM) \rightarrow T_{v_p} T_p M$ é descrita como $C_p \tilde{\alpha}'(0) = \frac{\nabla}{dt} Z(0)$ onde $t \rightarrow \tilde{\alpha}$ é um campo $t \rightarrow Z(t)$ ao longo de uma curva

$t \rightarrow \alpha(t)$. Por fim considere **estrutura quase complexa** $J_{v_p} : T_{v_p}TM \rightarrow T_{v_p}TM$ definida como $J_{v_p}(\xi_h, \xi_v) = (-\xi_v, \xi_h)$. Podemos agora introduzir nossa forma simplética em TM .

Definição 5.108.

Sejam J e C aplicações definidas acima e $\pi : TM \rightarrow M$ a projeção canônica. A **forma simplética** em TM é definida como:

$$\omega_{v_p}(\xi, \eta) = \tilde{g}(J_{v_p}\xi, \eta) = g(d\pi_{v_p}(\xi), C_{v_p}(\eta)) - g(C_{v_p}(\xi), d\pi_{v_p}(\eta)).$$

É possível verificar que $\omega \in \Omega^2(TM)$ é de fato não degenerada (vide Exercício 5.111) Definamos a seguir a 1-forma $\theta \in \Omega^1(TM)$ cuja diferenciação será $-\omega$. Isto em particular implicará que ω é uma 2 forma fechada.

Definição 5.109.

Seja $\vec{G} \in \mathfrak{X}(TM)$ o spray geodésico. Então:

$$\theta(\xi_{v_p}) = \tilde{g}(\vec{G}(v_p), \xi_{v_p}) = g(d_{v_p}\pi(\xi), v_p)$$

é nossa 1-forma em TM .

Proposição 5.110.

Sejam ω e θ definidas acima. Então:

$$\omega = -d\theta.$$

Demonstração. Seja $\tilde{\nabla}$ conexão Riemanniana da métrica de Sasaki $\tilde{g}$. Afirmamos primeiro que:

$$\tilde{\nabla}_\eta \vec{G}(v_p) \in \mathcal{V}_{v_p} := T_{v_p}T_pM \quad (5.8.1)$$

para todo $\eta \in \mathcal{H}_{v_p}$. Afim de verificar tal equação, considere $\{\vec{E}_1, \dots, \vec{E}_n\}$ um referencial totalmente geodésico em vizinhança de p em M , vide Lema 5.69. Seja $X_i \in \mathfrak{X}(TM)$ levantamento horizontal de $\vec{E}_i$. Visto que $\{X_i(v_p)\}$ é base de $\mathcal{H}(v_p)$, para demonstrar Eq (5.8.1) basta verificar que $\tilde{\nabla}_{X_j} \vec{G}(v_p) \in \mathcal{V}_{v_p}$ o que será verificado a seguir na (5.8.2).

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{X_j} \vec{G} &= \sum_i \tilde{\nabla}_{X_j} (\tilde{\mathbf{g}}(X_i, \vec{G}) X_i) \\
&= \sum_i X_j \bullet (\tilde{\mathbf{g}}(X_i, \vec{G})) X_i \\
&\quad + \sum_i \tilde{\mathbf{g}}(X_i, \vec{G}) \tilde{\nabla}_{X_j} X_i
\end{aligned}$$

Observemos que o primeiro termo é nulo. De fato, seja $t \rightarrow Z_j(t)$ o transporte paralelo de v_p ao longo da geodésica γ_j partindo de p com $\gamma_j'(0) = E_j(p)$ temos que

$$X_j \bullet (\tilde{\mathbf{g}}(X_i, \vec{G}))(v_p) = \frac{d}{dt} (\mathbf{g}(E_i \circ \gamma_j(t), Z_j(t)))|_{t=0} = \mathbf{g}(\nabla_{E_j} E_i(p), v_p) = 0.$$

Utilizando Observação 5.47 e Lema 5.69 temos $\tilde{\nabla}_{X_j} X_i(v_p) = (\tilde{\nabla}_{X_j} X_i)^\nu(v_p)$. Concluimos assim a equação

$$\tilde{\nabla}_{X_j} \vec{G}(v_p) = \sum_i \tilde{\mathbf{g}}(X_i, \vec{G}) (\tilde{\nabla}_{X_j} X_i)^\nu(v_p) \in \mathcal{V}_{v_p} \quad (5.8.2)$$

a qual implica, como havíamos comentado, a Eq (5.8.1).

Por outro lado temos:

$$\begin{aligned}
d\theta(\xi_1, \xi_2) &= \xi_1 \bullet \theta(\xi_2) - \xi_2 \bullet \theta(\xi_1) - \theta([\xi_1, \xi_2]) \\
&= \xi_1 \bullet \tilde{\mathbf{g}}(\xi_2, \vec{G}) - \xi_2 \bullet \tilde{\mathbf{g}}(\xi_1, \vec{G}) \\
&\quad - \tilde{\mathbf{g}}([\xi_1, \xi_2], \vec{G})
\end{aligned}$$

Assim sendo:

$$d\theta(\xi_1, \xi_2) = \tilde{\mathbf{g}}(\xi_2, \tilde{\nabla}_{\xi_1} \vec{G}) - \tilde{\mathbf{g}}(\xi_1, \tilde{\nabla}_{\xi_2} \vec{G}) \quad (5.8.3)$$

Das equações Eq.(5.8.1) e Eq (5.8.3) concluímos que:

$$d\theta|_{\mathcal{H}_{v_p} \times \mathcal{H}_{v_p}} = 0.$$

Seja $Y_i(v_p) = J_{v_p}(X_i(v_p))$ Assim $\{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n\}$ é um referencial ortonormal adaptado de $T_{v_p} TM$. Visto que $[Y_i, Y_j]$ é vertical (uma vez que os 2 são tangentes a uma fibra) concluímos que

$$d\theta|_{\mathcal{V}_{v_p} \times \mathcal{V}_{v_p}} = 0$$

Assim para terminar a demonstração devemos provar que:

$$d\theta_{v_p}(X_i, Y_j) = -\omega_{v_p}(X_i, Y_j) \quad (5.8.4)$$

De um lado utilizando o fato que $[X_i, Y_j](v_p) \in \mathcal{V}_{v_p}$ e $\theta(Y_j) = 0$ temos:

$$\begin{aligned} d\theta_{v_p}(X_i, Y_j) &= -Y_j \bullet \theta(X_i)_{v_p} \\ &= -Y_j \bullet \tilde{\mathbf{g}}(X_i, \vec{G})_{v_p} \\ &= -\frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{g}}(X_i, \vec{G})_{(tE_j(p)+v_p)}|_{t=0} \\ &= -\frac{d}{dt} \mathbf{g}(E_i(p), tE_j(p) + v_p)|_{t=0} \\ &= -\delta_{ij}. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\omega_{v_p}(X_i, Y_j) = \tilde{\mathbf{g}}(J_{v_p} X_i, Y_j) = \tilde{\mathbf{g}}(Y_i, Y_j) = \delta_{ij}.$$

As duas equações acima implicam então Eq. (5.8.4) terminando a demonstração. $\square$

Exercício 5.111.

Verifique que

$$\frac{1}{n!} \omega^n = \frac{1}{n!} \underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_n$$

é forma volume Riemanniana de TM associada a métrica de Sasaki $\tilde{\mathbf{g}}$.

Sugestão: Descreva ω em termos das 1-formas duais dos campos $\{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n\}$ definidos na demonstração da Proposição 5.110,

Vamos agora verificar que o spray geodésico é um campo Hamiltoniano.

Proposição 5.112.

Seja $H : TM \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $H(v_p) = \frac{1}{2} \mathbf{g}(v, v)$. Então o spray geodésico $G \in \mathfrak{X}(TM)$ coincide com o campo Hamiltoniano associado a H ou seja

$$dH = i_{\vec{G}} \omega.$$

Demonstração. Dado $\xi \in T_{v_p}TM$, considere uma curva $\tilde{\alpha} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow TM$ com $\tilde{\alpha}'(0) = \xi$. Então $\tilde{\alpha}(t) = Z(t)_{\alpha(t)}$. Assim

$$\begin{aligned} dH_{v_p}(\xi) &= \frac{\partial}{\partial t} H(\tilde{\alpha}(t))|_{t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} g(Z(t), Z(t))|_{t=0} \\ &= g(\nabla_{\alpha'(0)} Z(0), Z(0)) \\ &= g(C_{v_p} \xi, v) \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} \Omega_{v_p}(\vec{G}(v_p), \xi) &= g(d\pi_{v_p}(\vec{G}(v_p)), C_{v_p}(\xi)) \\ &= g(v, C_{v_p}(\xi)) \end{aligned}$$

Concluimos então que $dH_{v_p}(\xi) = \omega_{v_p}(\vec{G}(v_p), \xi)$ como desejado. $\square$

Visto que o fluxo de qualquer campo Hamiltoniano é um symplectomorfismo, ou seja preserva ω , segue do Exercício 5.111 e Proposição 5.112 que:

Corolário 5.113.

O fluxo geodésico preserva a forma volume associada a métrica de Sasaki.

Vamos agora restringir o spray geodésico $\vec{G}$ ao fibrado unitário e compreender melhor sua relação com a estrutura de contato lá existente.

Definição 5.114.

Uma 1-forma η em uma variedade N orientável de dimensão $(2n-1)$ é chamada **forma de contato** se a $(2n-1)$ -forma $\eta \wedge (d\eta)^{n-1}$ é uma forma volume, i.e., nunca se anula. (N, η) é chamada **variedade de contato**. Dado η existe um único campo vetorial X (chamado **campo de Reeb**) tal que

$$i_X \eta = 1, \quad i_X d\eta = 0.$$

Observação 5.115.

A fórmula mágica de Cartan ($L_X \omega = i_X d\omega + di_X \omega$) garante então que $L_X \eta = 0$

Continuação.

e $L_X d\eta = 0$ o que implica que campo de Reeb preserva o volume $\eta \wedge (d\eta)^{n-1}$.

Proposição 5.110 e Definição 5.109 implicam então que

Corolário 5.116.

θ restrita ao fibrado unitário $T^1M = H^{-1}(2)$ é uma forma de contato e o spray geodésico $\vec{G}$ é o campo de Reeb desta estrutura de contato.

Utilizando mesma ideia por tras do Exercício 5.111 e Observação 5.115 é possível demonstrar que:

Exercício 5.117.

$c\theta \wedge (d\theta)^{n-1}$ é forma volume da métrica de Sasaki restrita a $T^1M = H^{-1}(2)$ e tal volume é preservado pelo spray geodésico $\vec{G}$. Aqui c é -1 ou 1 de acordo com a dimensão de M .

Vamos agora aplicar tais propriedades estudadas para um resultado básico de dinâmica.

Definição 5.118.

Seja $\vec{G}$ um campo completo em uma variedade N (e.,g quando N é compacto). Dizemos que $\vec{G}$ é **Poisson estável** se para todo $p \in N$ existe uma vizinhança B de p tal que para todo t_0 existe um $s > t_0$ e um ponto $x \in B$ tal que $e^{sG}(x) \in B$. Em outras palavras $e^{sG}(B) \cap B \neq \emptyset$.

Teorema 5.119.

Seja N uma variedade orientável compacta, ω uma n -forma volume e $\vec{G}$ um campo em N . Suponha que fluxo $x \rightarrow e^{tG}(x)$ preserva o volume. Então $\vec{G}$ é Poisson estável.

Demonstração. Suponha por absurdo que dado um $p \in N$ exista uma bola aberta $B = B_r(p)$ tal que: existe um t_0 tal que para todo $t > t_0$ tenhamos

$$e^{tG}(B) \cap B = \emptyset \quad (5.8.5)$$

Existe então um número natural $N > t_0$ e definindo uma sequencia $t_m := N + m$ concluímos da Eq. (5.8.5) que:

$$e^{(t_m+n)G}(B) \cap e^{nG}(B) = \emptyset \quad (5.8.6)$$

Assim temos que

- $\{e^{t_m G}(B)\}$ coleção de abertos disjuntos;
- $\text{vol}(B) = \text{vol}(e^{t_m G}(B))$ onde $\text{vol}(V) = \int_V \omega$.

Porém isto contraria o fato do volume de N ser finito, visto que N é compacto. $\square$

O Exercício 5.117 e o Teorema 5.119 implicam:

Corolário 5.120.

Seja $\vec{G}$ o spray geodésico restrito ao fibrado unitário $N = T^1 M$ de uma variedade compacta M . Então $\vec{G}$ é Poisson estável.

Terminamos esta seção relacionando a 1-forma θ com a forma tautológica θ^τ no fibrado cotangente TM^* definida como $\theta^\tau(\xi_\eta) = \eta(d\pi\xi_\eta)$ onde $\pi : TM^* \rightarrow M$ a projeção canônica (lembre Parte 1).

Proposição 5.121.

Seja $\mathcal{L} : TM \rightarrow TM^*$ a transformada de Legendre associada a $H = \frac{1}{2}\mathbf{g}$, ou seja $\mathcal{L}(v_p) = \mathbf{g}(v_p, \cdot)$. Então $\theta = \mathcal{L}^*\theta^\tau$.

Demonstração. Seja $t \rightarrow \tilde{\beta}(t)$ uma curva suave em TM com $\tilde{\beta}(0) = v_p$ e β sua projeção em M . Temos então que $\delta(t) := \mathcal{L}(\tilde{\beta}(t)) = \mathbf{g}(\tilde{\beta}(t), \cdot)$. Note que a projeção de δ também é a curva β , i.e., $\beta = \pi(\delta)$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^*\theta^\tau(\tilde{\beta}'(0)) &= \theta^\tau(d\mathcal{L}\tilde{\beta}'(0)) \\
 &= \theta^\tau\left(\frac{d}{dt}\mathcal{L} \circ \tilde{\beta}(t)\Big|_{t=0}\right) \\
 &= \theta^\tau\left(\frac{d}{dt}\delta(t)\Big|_{t=0}\right) \\
 &= \delta(0)\left(d\pi\frac{d}{dt}\delta(t)\Big|_{t=0}\right) \\
 &= \delta(0)\left(\frac{d}{dt}\pi \circ \delta(t)\Big|_{t=0}\right) \\
 &= \mathbf{g}\left(\tilde{\beta}(0), \left(\frac{d}{dt}\pi\delta(t)\Big|_{t=0}\right)\right) \\
 &= \mathbf{g}(v_p, \beta'(0)) \\
 &= \tilde{\mathbf{g}}(\vec{G}(v_p), \tilde{\beta}'(0)) \\
 &= \theta(\tilde{\beta}'(0)).
 \end{aligned}$$

A arbitrariedade na escolha de $\tilde{\beta}$ termina a prova.

□

6

Curvatura

Neste capítulo continuamos a introduzir o(a) leitor(a) a área de Geometria Riemanniana, aprofundando nossa discussão sobre curvatura, generalizando a discussão introduzida na Seção 1.7.

6.1. Tensor curvatura e curvatura seccional

Iniciemos definindo um operador em campos tangentes a M .

Definição 6.1.

Seja $(M, \mathbf{g})$ variedade Riemanniana com conexão Riemanniana ∇ . Definimos o operador curvatura como:

$$\begin{aligned} R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}) &\rightarrow R(X, Y)Z \end{aligned}$$

onde

$$R(X, Y)Z := \nabla_{[\vec{X}, \vec{Y}]} \vec{Z} - \nabla_{\vec{X}} \nabla_{\vec{Y}} \vec{Z} + \nabla_{\vec{Y}} \nabla_{\vec{X}} \vec{Z}.$$

Por meio de cálculos diretos, é possível verificar o resultado a seguir.

Proposição 6.2.

Sejam $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \in \mathfrak{X}(M)$, e $f, g, h \in C^\infty(M)$ Então:

(a) R é $\mathbb{R}$ -trilinear,

Continuação.

- (b) $R(X, Y) = -R(Y, X)$,
- (c) $R(fX, gY)hZ = fghR(X, Y)Z$.
- (d) $g(R(X, Y)Z, T) + g(R(Y, Z)X, T) + g(R(Z, X)Y, T) = 0$,
- (e) $g(R(X, Y)Z, T) = -g(R(X, Y)T, Z)$
- (f) $g(R(X, Y)Z, T) = g(R(Z, T)X, Y)$

Os itens (a), (b), (c) acima garantem então que R_p depende apenas dos vetores $\vec{X}(p)$, $\vec{Y}(p)$ e $\vec{Z}(p)$ e não dos campos $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$. Assim R é um $(1, 3)$ tensor, i.e., $R_p : T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$ é 3-linear. R é assim de fato um tensor. Justamente como tensor iremos frequentemente apenas denotar $R(X, Y, Z)$ no lugar de $R(\vec{X}, \vec{Y})\vec{Z}$ para destacar esta propriedade de que no ponto p só precisamos dos vetores e não dos campos.

Item (f) garante que o **operador de Jacobi** $R_{v_p} : T_p M \rightarrow T_p M$ definido como $R_{v_p}(\cdot) := R(v_p, \cdot)v_p$ é uma transformação linear simétrica. Em particular, R_{v_p} admite uma base de auto-vetores, ortonormais a v_p .

Observação 6.3.

Dado um fibrado vetorial $\mathbb{R}^k \rightarrow E \rightarrow M$ com uma conexão $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ podemos generalizar a Definição 6.1 e definir o tensor curvatura R associada a ∇ como:

$$\begin{aligned} R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) &\rightarrow \Gamma(E) \\ (\vec{X}, \vec{Y}, \xi) &\rightarrow R(X, Y)\xi \end{aligned}$$

onde

$$R(X, Y)\xi := \nabla_{[\vec{X}, \vec{Y}]} \xi - \nabla_{\vec{X}} \nabla_{\vec{Y}} \xi + \nabla_{\vec{Y}} \nabla_{\vec{X}} \xi.$$

Neste caso as propriedades (a), (b), (c) da Proposição 6.2 continuam valendo e tal como antes observa-se que R é de fato um $(1, 3)$ tensor. Além disto se o fibrado E é Euclidiano (i.e, existe uma métrica $\mathbf{h}$ nas fibras e ∇ é compatível a $\mathbf{h}$) então a propriedade (e) pode ser reformulada como: $\mathbf{h}(R(X, Y)\xi, \eta) = -\mathbf{h}(R(X, Y)\eta, \xi)$ ou seja $R(X, Y)_p$ é anti-simétrica ou seja está contida na álgebra de Lie de $\text{Iso}(E_p)$. Mais do que isto, como comentaremos mais tarde, $R(X, Y)_p$ está contida na álgebra de Lie do grupo de Holonomia $\text{Hol}_p(E)$, o qual é um subgrupo de $\text{Iso}(E_p)$, como vimos na Seção 5.4.

Vamos agora adiantar algumas interpretações do tensor R .

- Segue direto da definição que se o tensor curvatura é nulo então $\nabla \frac{\partial}{\partial x_i}$ comuta com $\nabla \frac{\partial}{\partial x_j}$.
- Como veremos na Seção 6.3, o operador de Jacobi $R_{\gamma'_0(t)}$ também ajuda a medir *quão rápido geodésicas* $t \rightarrow \gamma_s(t)$ *saindo do mesmo ponto* $p_0 = \gamma_s(0)$ *se afastam*.
- Tensor curvatura mede quanto o transporte paralelo depende de caminhos curtos (vide Teorema 6.79), em particular, se $R = 0$ então o transporte paralelo *independe de caminhos contráteis* (vide Proposição 6.8 e Teorema 6.77).
- Veremos ainda neste capítulo, como consequência de uma versão local do teorema de Gauss Bonnet, uma relação entre curvatura seccional (a ser definida abaixo) e triângulos geodésicos em superfícies (vide Exercício 6.73).

Definição 6.4.

Seja $\sigma \subset T_p M$ um subespaço bi-dimensional e $X, Y \in \sigma$ vetores linearmente independente. Então definimos a **curvatura seccional** em σ como:

$$K(X, Y) := \frac{g(R(X, Y)X, Y)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}$$

De fato é possível mostrar que $K(X, Y)$ é o mesmo para qualquer outra base de σ . Também é possível mostrar que tendo todas as curvaturas seccionais de todos os subespaços bi-dimensionais de $T_p M$ então pode-se reconstruir o tensor R_p .

A próxima proposição é um resultado útil sobre tensor curvatura de espaço de curvatura constante.

Proposição 6.5.

(M, g) tem curvaturas seccionais constantes iguais a K_0 se e somente se

$$g(R(X, Y)Z, T) = K_0(g(X, Z)g(Y, T) - g(X, T)g(Y, Z))$$

Também será útil considerar a curvatura de uma conexão pullback via uma aplicação suave, ou seja:

Proposição 6.6.

Seja $\varphi : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow M$ uma aplicação suave e $V \in \Gamma(\varphi^*TM)$ então:

$$\frac{\nabla}{\partial t} \frac{\nabla}{\partial s} V - \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\nabla}{\partial t} V = R\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)V$$

Terminamos esta seção com um exercício central para termos nossa primeira interpretação sobre o significado de $R = 0$.

Exercício 6.7.

Considere o referencial geodésico local $\{\xi_i\}$ definido em uma vizinhança U de p com $\nabla_{(\cdot)}\xi_i(p) = 0$, vide Lema 5.69. Suponha que o transporte paralelo independa de caminhos contráteis. Prove então que $\nabla_{(\cdot)}\xi_i(x) = 0, \forall x \in U$ (**referencial local paralelo**). Conclua que R é identicamente zero e assim $K = 0$.

Como veremos posteriormente, se $K = 0$ então M é recoberto isométricamente pelo espaço Euclidiano (vide Teorema 6.45) e assim o transporte paralelo em M independe de caminhos contráteis. Ou seja concluímos a proposição a seguir.

Proposição 6.8.

Seja $(M, \mathbf{g})$ variedade Riemanniana. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) $K = 0$ ou seja curvatura seccional sempre é nula;
- (b) transporte paralelo em M independe de caminhos contráteis.

O Exercício 6.7 pode também ser generalizado para fibrados Euclidianos.

Proposição 6.9. (*)

Considere um fibrado Euclidiano $\mathbb{R}^k \rightarrow E \rightarrow (M, \mathbf{g})$ com métrica nas fibras $\mathbf{h}$ e conexão ∇ $\mathbf{h}$ -compatível. Seja $O(E)$ o fibrado referencial ortonormal e $\hat{\mathcal{H}}$ a distribuição em $O(E)$ induzida pela conexão ∇ , vide Seção 5.4. Temos então que as seguintes afirmações são equivalentes.

- (a) transporte paralelo independe de caminhos contráteis;
- (b) para cada ponto $p \in M$ existe uma vizinhança U e um referencial local $\hat{\xi} = \{\xi_i\} : U \rightarrow O(E)$ com $\nabla_{(\cdot)}\xi_i(x) = 0, \forall x \in U$, i.e., **referencial**

Continuação.

local paralelo;

(c) a distribuição $\widehat{\mathcal{H}}$ em $O(E)$ é integrável.

Observação 6.10.

Suponha que a distribuição $\widehat{\mathcal{H}}$ em $O(E)$ seja integrável e seja $\widehat{\mathcal{F}}$ a folheação associada a esta distribuição, i.e., $T\widehat{\mathcal{F}} = \widehat{\mathcal{H}}$. Afirmamos que neste caso, fixo uma folha $\widehat{L}_{\xi_p} \in \widehat{\mathcal{F}}$, a aplicação $\hat{\pi} : \widehat{L}_{\xi_p} \rightarrow M$ é um recobrimento, onde $\hat{\pi} : O(E) \rightarrow M$ é a projeção canônica.

Demonstração. A solução do Exercício 6.7 pode ser aplicada diretamente para verificar que (a) implica (b).

Vamos agora supor a afirmação (b), i.e., que $\widehat{\xi}$ é referencial localmente paralelo. A construção de $\widehat{\mathcal{H}}$ apresentada na Seção 5.4 implica que $\widehat{\mathcal{H}}_{\widehat{\xi}(x)} = T_{\widehat{\xi}(x)}P$ onde $P = \widehat{\xi}(U)$ ou seja a imagem de $\widehat{\xi}$ é um gráfico que é tangente a distribuição $\widehat{\mathcal{H}}$. Considerando a ação a direita $\mu : O(E) \times \mathbb{O}(k) \rightarrow O(E)$ e lembrando que a distribuição $\widehat{\mathcal{H}}$ é invariante por esta ação, vemos que os gráficos $\mu(P, g)$ também são tangentes a distribuição $\widehat{\mathcal{H}}$. Concluimos que a distribuição $\widehat{\mathcal{H}}$ é integrável em $\pi^{-1}(U)$. A arbitrariedade na escolha de p então implica que $\widehat{\mathcal{H}}$ é integrável, ou seja provamos que (b) implica (c).

Vamos agora supor que o item (c) é válido e provar a afirmação da Observação 6.10. Note que, como a distribuição $\widehat{\mathcal{H}}$ é invariante pela ação a direita $\mu : O(E) \times \mathbb{O}(k) \rightarrow O(E)$, a folheação $\widehat{\mathcal{F}}$ também é invariante pela ação, i.e., a ação leva folha em folha. Como a distribuição $\widehat{\mathcal{H}}$ é transversal as fibras do fibrado $O(E)$, dado um $p \in M$ podemos achar uma vizinhança U de p e um aberto P_{ξ_p} da folha $\widehat{L}_{\xi_p}$ que é gráfico sobre U . Visto que a folheação é invariante pela ação μ , todas as folhas da folheação $\hat{\pi}^{-1}(U) \cap \widehat{\mathcal{F}}$ também são gráfico sobre U . Concluimos que $\pi^{-1}(U) \cap \widehat{L}_{\xi_p}$ é uma união disjuntas de abertos $U_\alpha \subset \widehat{L}_{\xi_p}$ e que $\hat{\pi} : U_\alpha \rightarrow U$ são difeomorfismo. Logo $\hat{\pi} : \widehat{L}_{\xi_p} \rightarrow M$ é um recobrimento, terminando assim a prova da Observação 6.10. Esta observação por sua vez implica o item (a). $\square$

6.2. Equação de Gauss e o teorema Egregium de Gauss

Nesta seção vamos supor que M^m está mergulhada em uma variedade Riemanniana $(\tilde{M}^{m+k}, \tilde{\mathbf{g}})$ sendo $\mathbf{g}$ a métrica induzida por $\tilde{\mathbf{g}}$. Para evitar sobrecarga de notação iremos denotar as duas métricas simplesmente por $\mathbf{g}$.

6.2.1. Segunda forma

Vamos rever algumas ideias apresentadas na Seção 1.7 agora neste contexto um pouco mais geral.

A relação entre a conexão do ambiente $\tilde{\nabla}$ e a conexão tangente ∇ é descrita pelo tensor $B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ definido a seguir.

Definição 6.11. Tensor Segunda Forma

$$B(X, Y) = \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} - \nabla_X Y$$

onde $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ são extensões de X e Y .

Proposição 6.12.

- (a) B é bem definido (não depende das extensões)
- (b) B é $(1, 2)$ tensor simétrico.

Demonstração. O item (a) e o fato de B ser um $(1, 2)$ tensor pode ser demonstrado utilizando referencial adaptado e o fato de

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} = D_X \tilde{Y} + \tilde{A}(X) \tilde{Y}.$$

Para demonstrar que B é simétrico note

$$\begin{aligned} B(X, Y) &= \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} - \nabla_X Y \\ &= \tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{X} + [\tilde{X}, \tilde{Y}] \\ &\quad - (\nabla_Y X + [X, Y]) \\ &= B(Y, X). \end{aligned}$$

□

Por vezes também será conveniente tratar o $(1, 2)$ tensor B acima, como o $(0, 3)$ tensor abaixo.

Definição 6.13. Segunda forma

$$\Pi_\eta(X, Y) = \mathbf{g}(B(X, Y), \eta)$$

onde X, Y são tangentes a M e η é um vetor normal.

Visto que B é simétrico, podemos então definir um operador simétrico (em relação ao produto $\mathbf{g}$) $\mathcal{S}_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ via o tensor segunda forma:

Definição 6.14. Operador forma

$$\mathbf{g}(\mathcal{S}_\eta X, Y) = \Pi_\eta(X, Y)$$

O significado geométrico do operador forma pode ser compreendido mais claramente na proposição a seguir. Em particular para hipersuperfícies no espaço Euclidiano pode ser interpretado como *uma forma de medir quão rápido o vetor normal unitário varia, ou seja quão rápido uma hipersuperfície "curva". Em particular se o operador forma for sempre zero a hipersuperfície será um hiperespaço.*

Proposição 6.15.

Seja $\eta \in \nu_p(M)$ e $\tilde{\eta}$ uma extensão de η em uma vizinhança de p em $\widetilde{M}$. Então

$$\mathcal{S}_\eta(X) = -\pi(\tilde{\nabla}_X \tilde{\eta})$$

onde $\pi : T_p \widetilde{M} \rightarrow T_p M$ é a projeção ortogonal e $X \in T_p M$

Demonstração. Seja $Y \in T_p M$ um vetor qualquer fixo e $\tilde{Y}$ uma extensão deste vetor. Observe primeiro que como $\mathbf{g}(\eta, Y) = 0$ temos, após derivar por X , que $\mathbf{g}(\tilde{\nabla}_X \tilde{Y}, \tilde{\eta}) = -\mathbf{g}(\tilde{Y}, \tilde{\nabla}_X \tilde{\eta})$ e assim

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathcal{S}_\eta X, Y) &= \mathbf{g}(\tilde{\nabla}_X \tilde{Y} - \nabla_X Y, \tilde{\eta}) \\ &= \mathbf{g}(\tilde{\nabla}_X \tilde{Y}, \tilde{\eta}) \\ &= \mathbf{g}(Y, -\tilde{\nabla}_X \tilde{\eta}) \end{aligned}$$

A equação acima e a arbitrariedade da escolha do vetor Y conclue a prova da proposição. $\square$

Observação 6.16.

Natural nos perguntarmos o que significa B e S_η serem zero. Dizemos que M é totalmente geodésica em p se $B_p = 0$. Mais geralmente M é **totalmente geodésica** se $B_p = 0$ para todo $p \in M$. Exemplos de subvariedades totalmente geodésicas:

- M é subespaço vetorial de $\widetilde{M} = \mathbb{R}^{m+k}$;
- V um subespaço de $\mathbb{R}^{m+1}$, defina $M := V \cap \mathbb{S}^m$ e $\widetilde{M} = \mathbb{S}^m$;
- M sendo subgrupo fechado de um grupo de Lie $\widetilde{M}$ com métrica bi-invariante.

Uma vez estabelecidos alguns exemplos onde S_η são nulas, é natural considerarmos casos onde tais operadores simétricos não são nulos e assim somos levados a considerar seus auto-valores e tentarmos entender o significado destes.

Definição 6.17.

Seja η vetor normal unitário de M . Os autovalores λ_i do operador forma $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ são chamados **curvaturas principais**. Frequentemente os auto-vetores são chamados direções principais e os auto-espaço E_λ associados a uma curvatura principal λ de auto-espaço principal.

Uma interpretação geométrica das curvaturas principais já foi apresentada na Seção 1.7. Em particular, observamos que toda superfície é aproximada ou por um paraboloide elíptico ou por um paraboloide hiperbólico se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ ou se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$. O produto $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ em p era então chamado de **Curvatura de Gauss** e como ficará claro abaixo (teorema Egregium de Gauss), tal curvatura coincide de fato com a curvatura seccional $K(p)$.

O próximo exercício fornece mais uma interessante interpretação sobre as curvaturas principais, agora destacando o significado de $\frac{1}{\lambda_i}$, as assim chamadas **distâncias focais** que a grosso modo medem lugares onde superfícies paralelas “focalizam”.

Exercício 6.18.

Seja M uma superfície mergulhada em $\widetilde{M} = \mathbb{R}^3$ e ξ vetor normal unitário a M . Defina $\eta_{r\xi} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ como $\eta_{r\xi}(x) = x + r\xi$

Continuação.

- (a) Sejam e_1 e e_2 direções principais em $T_p M$ com curvaturas principais λ_1 e λ_2 . Verifique que $d\eta_{r\xi}e_i = (1 - r\lambda_i)e_i$
- (b) Conclua que se $r \neq \frac{1}{\lambda_i}$ em vizinhança $\tilde{U}$ de p , então existe vizinhança $U \subset \tilde{U}$ de p tal que $\eta_{r\xi}(U)$ é superfície mergulhada.

6.2.2. Equação de Gauss

Chegamos agora ao resultado principal desta seção que relaciona curvatura intrínseca, curvatura do ambiente e segunda forma.

Teorema 6.19. Eq. de Gauss

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)X, Y) - g(\tilde{R}(X, Y)X, Y) &= g(B(X, X), B(Y, Y)) \\ &\quad - g(B(X, Y), B(Y, X)) \end{aligned}$$

onde X, Y são tangentes a M .

Demonstração. Seja $\{e_\beta\}$ referencial ortonormal a M definido em uma vizinhança de $p \in M$. Ou seja para todo $x \in M$ próximo a p , temos que $\{e_\beta(x)\}$ é base de $\nu_x(M) := TM_x^\perp$. Temos então que $B(X, Y) = \sum_{\beta} g(\tilde{\nabla}_X Y, e_\beta) e_\beta$. Estamos aqui usando a notação $\tilde{\nabla}_X Y$ para denotar $\tilde{\nabla}_X \tilde{Y}$ onde $\tilde{Y}$ é extensão de Y próximo a p . Logo

$$\tilde{\nabla}_Y X = \nabla_Y X + \sum_{\beta} g(\tilde{\nabla}_Y X, e_\beta) e_\beta$$

Uma vez que $g(e_\beta, Y) = 0$ temos que:

$$\begin{aligned} g(\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y X, Y) &= g(\tilde{\nabla}_X \nabla_Y X, Y) \\ &\quad + \sum_{\beta} g(\tilde{\nabla}_Y X, e_\beta) g(\tilde{\nabla}_X e_\beta, Y) \\ &= g(\nabla_X \nabla_Y X, Y) \\ &\quad - \sum_{\beta} g(\nabla_Y X, e_\beta) g(e_\beta, \tilde{\nabla}_X Y) \end{aligned}$$

e assim concluímos:

$$g(\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y X, Y) = g(\nabla_X \nabla_Y X, Y) - g(B(X, Y), B(Y, X)). \quad (6.2.1)$$

De forma análoga obtemos

$$g(\tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X X, Y) = g(\nabla_Y \nabla_X X, Y) - g(B(X, X), B(Y, Y)). \quad (6.2.2)$$

Por fim note que:

$$g(\tilde{\nabla}_{[X,Y]} X, Y) = g(\nabla_{[X,Y]} X, Y). \quad (6.2.3)$$

As eq. (6.2.1), (6.2.2) e (6.2.3) implicam a Equação de Gauss.

□

A equação de Gauss nos permite algumas conclusões diretas. Em particular no item (b) do exercício abaixo vemos o celebrado **teorema Egregium de Gauss**, que observa que a curvatura seccional de uma superfície em $\mathbb{R}^3$ (que é definido intrinsicamente) pode ser calculada como o produto das curvaturas principais (que é calculado extrinsicamente).

Exercício 6.20. Teorema Egregium

Seja M hipersuperfície de $(\tilde{M}, \tilde{g})$.

- (a) Verifique que $K(e_1, e_2) - \tilde{K}(e_1, e_2) = \lambda_1 \lambda_2$ onde e_1, e_2 são direções principais de $T_p M$ associadas as curvaturas principais λ_1 e λ_2 .
- (b) Conclua que se $\tilde{M} = \mathbb{R}^3$ com métrica Euclidiana, então a curvatura seccional da superfície M é $K(p) = \lambda_1 \lambda_2$.

6.2.3. (*) Segunda forma e o vetor curvatura média

Na seção 1.8 apresentamos o conceito de curvatura média de uma superfície mergulhada em $\mathbb{R}^3$. Aproveitamos aqui para generalizar tal definição e dar uma interpretação geométrica dela.

Definição 6.21.

Seja L^m subvariedade mergulhada de $(M^{m+k}, \tilde{g})$. O vetor curvatura média no ponto $p \in L$ é definido como:

$$H(p) = \text{tr} B_p = \sum_{i=1}^k (\text{tr} S_{\xi_i}) \xi_i,$$

Continuação.

onde $\{\xi_i\}_{i=1}^k$ é um referencial ortonormal do espaço normal $\nu_p L$.

Proposição 6.22.

Seja L^m subvariedade mergulhada de $(M^{m+k}, \tilde{\mathbf{g}})$ e $\Psi : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U \subset L$ parametrização com $\bar{U}$ compacto. Considere $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi|_{M \setminus U} = 0$ e $0 < \varphi|_U \leq 1$. Defina:

- $F : (-\delta, \delta) \times W \rightarrow M$ como $F(t, x) := \exp_x(t\xi)$, onde W compacto com $\bar{U} \subset W$ e δ é escolhido para F ser imersão injetora;
- $\hat{\Psi} : (-\delta, \delta) \times V \rightarrow M$ como $\hat{\Psi}(t, x) := F(t\varphi(x), \Psi(x))$;
- $g_{i,j}^t := \mathbf{g}(d\Psi^t e_i, d\Psi^t e_j)$ onde $\Psi^t(x) = \hat{\Psi}(t, x)$.

Então:

$$(a) \quad -m\mathbf{g}(H, \varphi \xi) = \frac{\frac{d}{dt} \sqrt{|g_{i,j}^t|}|_{t=0}}{\sqrt{|g_{i,j}^0|}}$$

$$(b) \quad \frac{d}{dt} \text{Vol}(\Psi^t(V))|_{t=0} = -m \int_U \mathbf{g}(H, \varphi \xi) \omega$$

onde H é o vetor curvatura média e $\omega := \text{vol}_M$ é a forma volume (com orientação induzida por Ψ .)

Demonstração. Considere a subvariedade $N := F((-\epsilon, \epsilon), W)$ com a métrica induzida $\mathbf{g}$. A subvariedade U então se torna uma hipersuperfície em N . Ao longo desta prova o ambiente de U será sempre N (em particular U é hipersuperfície de N) e o sistema de coordenadas que iremos considerar será $\hat{\psi}^{-1}$. Neste sistema de coordenadas a forma volume $\hat{\omega} := \text{vol}_N$ (com respeito a $\mathbf{g}$) se escreve como

$$\hat{\omega} = \sqrt{|g_{i,j}|} dt \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$$

e assim temos:

$$i_{\frac{\partial}{\partial t}} \hat{\omega} = \sqrt{|g_{i,j}|} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m.$$

Por outro lado, pelo Lema 5.75

$$d(i_{\frac{\partial}{\partial t}} \hat{\omega}) = \text{div}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \hat{\omega}.$$

As equações acima nos permite concluir que:

$$\operatorname{div}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\sqrt{|g_{i,j}|}}{\sqrt{|g_{i,j}|}}. \quad (6.2.4)$$

Também é possível verificar que

$$\frac{\frac{d}{dt}\sqrt{|g_{i,j}|}}{\sqrt{|g_{i,j}|}}(0, x) = \frac{\frac{d}{dt}\sqrt{|g_{i,j}^t|}|_{t=0}}{\sqrt{|g_{i,j}^0|}}. \quad (6.2.5)$$

De fato a equação acima pode ser obtida usando o cálculo de determinantes via co-fatores e as observações abaixo:

1. $g_{0,i}(0, x) = 0$ onde $g_{0,i} = \mathbf{g}(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_i})$,
2. $g_{i,j}(t, x) = g_{i,j}^t$ para $i, j \geq 1$,
3. $g_{0,0} = \|\frac{\partial}{\partial t}\|^2$ e $\frac{\partial}{\partial t}g_{0,0} = 0$

Finalmente utilizando o fato que $t \rightarrow \psi(t, x)$ são geodésicas de tamanho $\|\varphi(x)\|$ temos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(0, x) &= \sum_{i=1}^m \mathbf{g}(\nabla_{e_i} \frac{\partial}{\partial t}, e_i) \\ &+ \mathbf{g}(\nabla_{\xi} \frac{\partial}{\partial t}, \xi) \\ &= -\varphi \operatorname{tr} \mathcal{S}_{\xi} \\ &= -m \varphi \mathbf{g}(H, \xi), \end{aligned}$$

e assim inferimos:

$$\operatorname{div}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(0, x) = -m \mathbf{g}(H, \varphi \xi). \quad (6.2.6)$$

Equações (6.2.4), (6.2.5) e (6.2.6) implicam o item (a).

Por fim o item (b) pode ser provado usando o item (a) como vemos a seguir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \operatorname{Vol}(\Psi^t(V))|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \left(\int_V \sqrt{|g_{i,j}^t|} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m \right)|_{t=0} \\ &= \int_V \frac{d}{dt} (\sqrt{|g_{i,j}^t|})|_{t=0} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m \\ &= -m \int_U \mathbf{g}(H, \varphi \xi) \omega. \end{aligned}$$

□

A grosso modo falando, o resultado acima garante que o vetor curvatura média aponta para direção de decrescimento do volume de uma subvariedade, se considerarmos que ela faz parte de uma família de imersões. Isto nos motiva a considerar a seguinte definição:

Definição 6.23.

Dado uma imersão $\varphi_0 : L_0 \rightarrow M$, uma família de imersões $\varphi_t : L \rightarrow M$ com $t \in [0, T)$ é chamada solução do **fluxo de curvatura média** se atendem:

$$\frac{d}{dt}\varphi_t = H(t) \quad (6.2.7)$$

onde $H(t)$ é o vetor curvatura média de $L(t) = \varphi_t(L_0)$

Achar uma família de tais imersões para tempos que não sejam próximos a $t = 0$ e compreender se estas imersões de alguma forma "convergem" para alguma subvariedade (que então teria chance de ser uma subvariedade com curvatura média zero, ou seja *mínima*) é em geral um problema complexo que ainda é um tópico ativo de pesquisa.

Porém quando $L = G(p)$ é uma órbita (principal) de uma ação isométrica $\mu : G \times M \rightarrow M$, então é possível explicar este fenômeno mais facilmente. Antes de mais nada, a curvatura média é G invariante, ou seja é *básica*. Também pode-se provar que para t próximo a zero, $L_t = \varphi_t(L_0)$ é ainda uma órbita, ou seja o fluxo de curvatura média leva órbita em órbita. Isto já sugere que possamos pensar na convergência como pontos no espaço de órbitas.

Teorema 6.24. [AR],[ACG]

Seja G um subgrupo fechado de isometrias de uma variedade completa (M, g) e considere a ação isométrica $\mu : G \times M \rightarrow M$ definida como $\mu(g, x) = g(x)$. Seja $L = G(p)$ uma órbita principal, ou seja que é descrita como pré imagem de uma submersão $\pi : \text{Tub}_\epsilon(G(p)) \rightarrow S$ onde todas as pré imagem $\pi^{-1}(x)$ são órbitas da ação. Então temos:

- (a) Dado uma órbita singular $G(q)$, existe uma vizinhança tubular $\text{Tub}_\epsilon(G(q))$ tal que se $G(p)$ estiver contida nesta vizinhança, então $T < \infty$ e o fluxo de curvatura média converge dentro desta vizinhança para alguma órbita singular.
- (b) Se M/G é compacto e se $T < \infty$ então o fluxo de curvatura média sempre

Continuação.

converge para uma órbita singular, mesmo que $G(p)$ não esteja perto de uma órbita singular.

(c) A convergência em (a) e (b) são do tipo I ou seja:

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \|B_t\|_\infty^2 (T - t) < \infty.$$

6.3. Curvatura e Campos de Jacobi

6.3.1. Propriedades básicas

Seja $\gamma : I \rightarrow (M, \mathbf{g})$ geodésica em uma variedade Riemanniana M com dimensão m . Um campo suave J ao longo de γ é chamado **campo de Jacobi** se ele atende a **equação de Jacobi**:

$$\frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} J + R_{\gamma'(t)} J(t) = 0. \quad (6.3.1)$$

onde $R_{\gamma'(t)}(\cdot) = R(\gamma', \cdot)\gamma'$ é o operador de Jacobi. Como vemos a seguir todo vetor velocidade de uma variação por geodésica é um campo de Jacobi.

Proposição 6.25.

Seja $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \rightarrow M$ uma aplicação suave tal que $t \rightarrow \gamma_s(t) = f(s, t)$ é geodésica para todo $s \in (-\epsilon, \epsilon)$. Então $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$ é campo de Jacobi ao longo da geodésica $t \rightarrow \gamma(t) = \gamma_0 = f(0, t)$.

Demonstração. A prova é um cálculo direto, aceitando que o tensor curvatura restrito a variação (o que formalmente é chamado **pullback da curvatura** via f) não terá o termo de colchete, vide Proposição 6.6.

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} J &= \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial s} \\ &= \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \frac{\nabla}{ds} \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} - R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right) \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= -R(\gamma', J)\gamma' \end{aligned}$$

□

Veremos na Proposição 6.27 que o resultado recíproco também será verdadeiro ou seja todo campo de Jacobi pode ser obtido por variações por geodésicas. Antes porém, vamos descrever um campo de Jacobi em termos de um referencial paralelo e observar que ele de fato atende uma EDO e extrair algumas conclusões simples de tal equação diferencial.

Sejam J um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica γ e $t \rightarrow \{e_i(t)\}_{i=0\dots m-1}$ um referencial ortonormal paralelo ao longo de γ onde $e_0 := \gamma' / \|\gamma'\|$. Neste caso para

$$J(t) = \sum_{i=0}^{m-1} f_i(t) e_i(t)$$

temos

$$\frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} J = \sum_{i=0}^{m-1} f_i''(t) e_i(t).$$

Concluimos então que a equação de Jacobi pode ser escrita como

$$f_i''(t) + \sum_j f_j \mathbf{g}(e_i, R(\gamma'(t), e_j) \gamma'(t)) = 0, \forall i. \quad (6.3.2)$$

Em termos matriciais temos

$$[J(t)]'' + [R(t)][J(t)] = 0, \quad (6.3.3)$$

onde $[J(t)] = [f_i(t)]$ e $[R(t)] = [r_{ij}(t)]$ com $r_{ij}(t) = \mathbf{g}(e_i, R(\gamma'(t), e_j) \gamma'(t))$, i.e., $[J(t)]$ e $[R(t)]$ são, respectivamente, representações matriciais de J e $R_{\gamma'}$ na base $\{e_i\}$. Note que $r_{ij}(t) = r_{ji}(t)$ e $r_{0j}(t) = r_{0j}(t) = 0$.

As equações acima nos permite inferir algumas conclusões imediatas sobre campos de Jacobi as quais resumimos na proposição a seguir.

Proposição 6.26. (a) Se $V, W \in T_{\gamma(0)}M$ então existe um único campo de Jacobi J ao longo da geodésica $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ tal que $J(0) = V$ e $\frac{\nabla}{dt} J(0) = W$.

(b) Existem $2m$ campos de Jacobi linearmente independentes.

(c) γ' e $t\gamma'$ são campos de Jacobi, os quais são soluções de $f_0'' = 0$

(d) Existem $2(m-1)$ campos de Jacobi perpendicular à γ (não necessariamente ortogonais entre si).

Continuação.

$$(e) \quad g(J, \gamma') = t g(J'(0), \gamma') + g(J(0), \gamma'(0))$$

Demonstração. Os itens (a),(b),(c) são imediatos. O item (d) segue da equação (6.3.3) levando em conta que $r_{0j} = r_{j0} = 0$. Para verificar o item (e) basta observar que

$$\begin{aligned} g(J, \gamma') &= \|\gamma'\| f_0 \\ &= \|\gamma'\| (t f'_0(0) + f_0(0)) \\ &= \|\gamma'\| \left(t g(J'(0), \frac{\gamma'(0)}{\|\gamma'(0)\|}) + g(J(0), \frac{\gamma'(0)}{\|\gamma'(0)\|}) \right). \end{aligned}$$

□

Podemos agora mostrar que todo campo de Jacobi é vetor velocidade de uma variação por geodésicas.

Proposição 6.27.

Seja J um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$. Considere uma curva $\beta : (-1, 1) \rightarrow W$ com $\beta'(0) = J(0)$, um campo $s \rightarrow V(s)$ ao longo de β com $V(0) = \gamma'(0)$ e $\frac{\nabla}{ds} V(0) = \frac{\nabla}{dt} J(0)$. Suponha que a variação $f(s, t) := \exp_{\beta(s)}(tV(s))$ está bem definida. Então $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$.

Demonstração. Observe que $\frac{\partial f}{\partial s}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial s}(s, 0)|_{s=0} = \beta'(0) = J(0)$. Devemos verificar que $\frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial s}(0, 0) = \frac{\nabla}{dt} J(0)$ e o resultado seguirá pela Proposição 6.25 e pela unicidade de EDO. Para tanto basta observar que

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial s}(0, 0) &= \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial f}{\partial t}(0, 0) \\ &= \frac{\nabla}{ds} (d(\exp_{\beta(s)})_0 V(s))|_{s=0} \\ &= \frac{\nabla}{ds} (V(s))|_{s=0} \\ &= \frac{\nabla}{dt} J(0). \end{aligned}$$

□

Observação 6.28.

É fácil achar uma curva β tal que $\beta'(0) = J(0)$. Sejam $s \rightarrow X(s)$ e $s \rightarrow Y(s)$ os campos paralelos ao longo de β com $X(0) = \gamma'(0)$ e $Y(0) = \frac{\nabla}{dt} J(0)$. O

Continuação.

campo $s \rightarrow V(s)$ pode então ser definido como $V(s) := X(s) + sY(s)$. Se a aplicação $\exp$ está sempre bem definida, e.g., M completa, então f está bem definida. Caso contrário, pode-se proceder da seguinte forma. Primeiro verifica-se que f está certamente bem definida para intervalos pequenos de s e t . Depois, grudando variações f_i ao longo de γ podemos construir a desejada variação f .

É conveniente considerar o caso particular de campos de Jacobi com $J(0) = 0$.

Corolário 6.29.

Suponha que $\exp_p : B_\delta(0) \rightarrow M$ está bem definida e seja $B := \exp_p(B_\delta(0))$. Seja J um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica $\gamma \subset B$ com condições iniciais $J(0) = 0$ e $\frac{\nabla}{dt}J(0) = W$. Então

$$J(t) = d(\exp_p)_{t\gamma'(0)}tW.$$

Demonstração. Basta considerar na demonstração anterior a curva $\beta(s) = p$ e um campo $V(s) = \sum_i a_i(s)e_i(p)$ com $V(0) = \gamma'(0)$ e $V'(0) = W$. Observe que

$$\frac{\nabla}{ds}V(0) = V'(0) = \sum_i a'_i(0)e_i(p).$$

O resultado segue observando que

$$\frac{\partial f}{\partial s}(0, t) = d(\exp_p)_{tV(0)}tV'(0).$$

□

Observação 6.30.

Por vezes é conveniente reescrever o corolário acima em termos de variações. Mais precisamente se J é um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica γ com $J(0) = 0$ e $W = \frac{\nabla}{dt}J(0)$ então $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$ onde $f(s, t) = \exp_p(tV(s))$ e $V : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow T_pM$ é curva com $V'(0) = W$ e $V(0) = \gamma'(0)$.

Consideraremos agora campos de Jacobi em espaços de curvatura constante.

Proposição 6.31.

Sejam $(M, \mathbf{g})$ variedade Riemanniana com curvaturas seccionais constantes K e $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ geodésica com vetor velocidade 1. Então o campo de Jacobi J ao longo de γ com condições iniciais $J(0) = 0$ e $\frac{\nabla}{dt} J(0) = w$ para w perpendicular a $\gamma'(0)$ é $J(t) = c_K(t)w(t)$ onde $w(\cdot)$ é o transporte paralelo de w ao longo de γ e c_K é a função definida como

$$c_K(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}} & \text{para } K > 0 \\ t & \text{para } K = 0 \\ \frac{\sinh(t\sqrt{-K})}{\sqrt{-K}} & \text{para } K < 0. \end{cases}$$

Demonstração. Considere o campo $\tilde{J}(t) := c_K(t)w(t)$. Sabemos pela Proposição 6.5 que

$$\mathbf{g}(R(\gamma', \tilde{J})\gamma', e_i) = K\mathbf{g}(\tilde{J}, e_i).$$

Assim

$$R(\gamma', \tilde{J})\gamma' = K\tilde{J}.$$

Logo o campo $\tilde{J}$ atende a equação de Jacobi, ou seja

$$\frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} \tilde{J} + K\tilde{J} = 0.$$

O resultado segue da unicidade das soluções da equação de Jacobi, dado condições iniciais. □

Temos então o seguinte corolário.

Corolário 6.32.

Seja M variedade Riemanniana com curvatura constante K . Suponha que $\exp_p : B_\delta(0) \rightarrow M$ está bem definida. Seja $f(s, t) = \exp_p(tv(s))$ onde $v : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{S}_1^{n-1} \subset T_p M$ é curva com $\|V'(0)\| = 1$ e $|t| < \delta$. Então $\|J(t)\| = |c_K|$ onde c_K foi definido na proposição anterior e $J(t) := \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$.

O resultado acima destaca a relação entre curvatura seccional constante K e quão rápido geodésicas que partem do mesmo ponto se afastam. Por meio da fórmula de Taylor, podemos salvar parte desta interpretação, pelo menos para tempos pequenos.

Observação 6.33. Fórmula de Taylor

Caso M não possuía curvaturas seccionais constante, ainda sim podemos ter uma estimativa de $\|J\|$. De fato sejam f e J definidos como no corolário anterior. Então:

$$\|J(t)\|^2 = t^2 - \frac{1}{3}K(p, \sigma)t^4 + O(t^4)$$

$$\|J(t)\| = t - \frac{1}{6}K(p, \sigma)t^3 + O(t^3)$$

onde σ é o espaço bi-dimensional gerado por $V(0)$ e $V'(0)$.

A seguir utilizamos nosso conhecimento sobre campos de Jacobi em espaços de curvatura constante para descrever a métrica $\mathbf{g}$ em termos de coordenadas geodésicas polares. Em particular concluímos que *duas variedades Riemannianas com mesma dimensão e mesmas curvaturas seccionais constantes iguais a constante c são localmente isométricas*.

Proposição 6.34.

Sejam $(M^m, \mathbf{g})$ variedade Riemanniana com curvaturas seccionais constantes K e $\psi : (0, \delta) \times \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow B_\delta(p)$ **parametrização geodésica polar**, i.e., $\psi(r, v) := \exp_p(rAv)$ onde $A : (\mathbb{R}^m, \mathbf{g}_0) \rightarrow (T_p M, \mathbf{g}_p)$ é isometria linear. Então a métrica $\mathbf{g}$ em **coordenadas geodésicas polares** (i.e., $\psi^* \mathbf{g}$) é $dr^2 + (c_k(r))^2 ds^2$ onde ds^2 é a métrica canônica da esfera $\mathbb{S}^{m-1}$ e a função c_K foi definida na Proposição 6.31.

Demonstração. Seja $\{e_i\} \subset T_v \mathbb{S}^{m-1}$ referencial ortonormal. Pelo Corolário 6.29

$$\begin{aligned} J_i(r) &:= d(\exp_p)_{rAv} r A e_i \\ &= d\psi_{(r,v)}(0, e_i), \end{aligned}$$

é campo de Jacobi ao longo da geodésica $r \rightarrow \exp_p(rAv)$. Utilizando Proposição 6.31 podemos verificar que

$$\mathbf{g}(J_i, J_j) = \delta_{i,j} c_K^2. \quad (6.3.4)$$

Por fim defina

$$\begin{aligned} J_0(r) &:= d(\exp_p)_{rAv} Av \\ &= d\psi_{(r,v)}(1, 0) \end{aligned}$$

e utilizando o Lema de Gauss concluímos que

$$\mathbf{g}(J_0, J_i) = 0. \quad (6.3.5)$$

O resultado então seguirá das equações (6.3.4) e (6.3.5). $\square$

Vamos terminar esta seção observando que campos de Jacobi podem também ser descritos em termos do fluxo do spray geodésico $x \rightarrow \varphi_t(x) = e^{tG}$ e métrica de Sasaki, recorde Seção 5.8 e Definição 5.63.

Observação 6.35. (*)

Consideremos aqui as notações da Seção 5.8. Considere $(s, t) \rightarrow f(s, t)$ uma variação por geodésicas tal que $J(t) = \frac{\partial}{\partial s} f(0, t)$ e $f(s, t) = \exp_{\beta(s)}(t\xi(s))$ para uma curva $s \rightarrow \beta(s)$ com $\beta(0) = q = \gamma(0)$ e $s \rightarrow \xi(s)$ um campo unitário ao longo de β . Assim $s \rightarrow \xi(s) =: \tilde{\beta}(s)$ pode ser visto como uma curva no fibrado tangente TM . Considere $\tilde{f}(s, t)$ a variação definida como $\tilde{f}(s, t) = \varphi_t(\tilde{\beta}(s))$. Claramente $(s, t) \rightarrow f(s, t) = \pi \circ \tilde{f}(s, t)$. Temos então:

$$d(\varphi_t)(\tilde{\beta}'(0)) = (J(t), J'(t)) \quad (6.3.6)$$

De fato Eq. (6.3.6) segue da definição da métrica de Sasaki, da definição de $\tilde{f}$ e da conta a seguir: $J'(t) = \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial s}(0, t) = \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial f}{\partial t}(0, t) = \mathbf{C} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial s}(0, t)$.

6.3.2. Isometrias locais e Teorema de Cartan

Seja $F : (\tilde{M}^m, \tilde{\mathbf{g}}) \rightarrow (M^m, \mathbf{g})$ uma isometria local. Reduzindo δ temos que $F : \tilde{B} \rightarrow B$ é uma isometria, onde $\tilde{B} = B_\delta(p)$ e $B = B_\delta(q)$ são bolas normais de p e $q = F(p)$. Visto que isometria leva geodésica em geodésica temos que: $F \circ \exp_p|_{B_\delta(0)} = \exp_{F(p)} dF_p|_{B_\delta(0)}$ e assim concluímos que:

$$F|_{\tilde{B}} = \exp_{F(p)} \circ dF_p \circ (\exp_p|_{B_\delta(0)})^{-1}.$$

A equação acima motiva então a seguinte pergunta. Suponha que $A : T_p \tilde{M} \rightarrow T_q M$ é uma isometria entre espaços tangentes e $\tilde{B} = B_\delta(p)$ e $B = B_\delta(q)$ são bolas normais. Quando a aplicação definida como

$$H = \exp_q \circ A \circ (\exp_p|_{B_\delta(0)})^{-1} \quad (6.3.7)$$

é uma isometria?

Seguirá como corolário direto do Teorema 6.36 abaixo que H é isometria:

- se $\widetilde{M}^2$ e M^2 são superfícies e H preserve curvatura seccional;
- se $\widetilde{M}^m$ e M^m tem mesma curvatura seccional constante $K = c$.

Teorema 6.36. Teorema de Cartan

Sejam $(\widetilde{M}^m, \widetilde{\mathbf{g}})$ e $(M^m, \mathbf{g})$ variedades Riemannianas e $A : T_p \widetilde{M} \rightarrow T_q M$ uma isometria entre espaços tangentes, $\widetilde{B} = B_\delta(p)$ e $B = B_\delta(q)$ são bolas normais em $\widetilde{M}$ e M respectivamente. Defina $H : \widetilde{B} \rightarrow B$ pela equação

$$H = \exp_q \circ A \circ (\exp_p|_{B_\delta(0)})^{-1}.$$

Sejam

- (i) $\widetilde{\mathcal{P}} : T_p \widetilde{M} \times \widetilde{B} \rightarrow T\widetilde{B}$ a aplicação onde $\widetilde{\mathcal{P}}(\tilde{v}, \tilde{x})$ é o transporte paralelo de $\tilde{v}$ ao longo da única geodésica unitária $\tilde{\gamma}_{\tilde{p}}^{\tilde{x}}$ que liga p a $\tilde{x}$, i.e., $\widetilde{\mathcal{P}}(\tilde{v}, \tilde{x}) = \mathcal{P}_{\tilde{\gamma}_{\tilde{p}}^{\tilde{x}}} \tilde{v}$;
- (ii) $\mathcal{P} : T_q M \times B \rightarrow TB$ a aplicação onde $\mathcal{P}(v, x)$ é o transporte paralelo de v ao longo da única geodésica unitária γ_q^x que liga q a x , i.e., $\mathcal{P}(v, x) = \mathcal{P}_{\gamma_q^x} v$;
- (iii) $A \times H : (T_p \widetilde{M} \times \widetilde{B}) \rightarrow (T_q M \times B)$ aplicação definida como $A \times H(v, \tilde{x}) = (Av, H(\tilde{x}))$;
- (iv) $\phi : T\widetilde{B} \rightarrow TB$ a aplicação definida como $\mathcal{P} \circ A \times H \circ \mathcal{P}^{-1}$

Suponha que

$$\widetilde{\mathbf{g}}(\widetilde{R}(X, Y)Z, W) = \mathbf{g}(R(\phi(X), \phi(Y))\phi(Z), \phi(W))$$

Então $H : \widetilde{B} \rightarrow B$ é uma isometria e $dH_p = A$.

Demonstração. Nosso objetivo é demonstrar que

$$\widetilde{\mathbf{g}}(V, V)_{\tilde{x}} = \mathbf{g}(dH_{\tilde{x}}V, dH_{\tilde{x}}V) \quad (6.3.8)$$

para todo $\tilde{x} \in \widetilde{B} = B_\delta(p)$ e $V \in T_{\tilde{x}} \widetilde{M}$.

Defina $\tilde{f}(s, t) = \exp_p(tv(s))$ tal que $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial s}(0, r) = V_{\tilde{x}}$ e $f = H \circ \tilde{f}$ e observe que

$$f(s, t) = \exp_q(tA(v(s))) \quad (6.3.9)$$

Assim a Eq. (6.3.8) equivale a

$$\widetilde{\mathbf{g}}\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial s}(0, r), \frac{\partial \tilde{f}}{\partial s}(0, r)\right) = \mathbf{g}\left(\frac{\partial f}{\partial s}(0, r), \frac{\partial f}{\partial s}(0, r)\right) \quad (6.3.10)$$

Sejam $\{\tilde{e}_i\}$ uma base ortonormal de $T_p\widetilde{M}$, $t \rightarrow \tilde{e}_i(t)$ o transporte paralelo destes vetores ao longo de $\tilde{\gamma} = \tilde{f}(0, \cdot)$, $e_i = A\tilde{e}_i$ e $t \rightarrow e_i(t)$ o transporte paralelo de e_i ao longo de $\gamma = f(0, \cdot)$. Observe que

$$e_i(t) = \phi\tilde{e}_i(t) \quad (6.3.11)$$

Visto que $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial s}(0, t) = \sum_i \tilde{y}_i(t)\tilde{e}_i(t)$ é campo de Jacobi temos que

$$\tilde{y}_i''(t) + \sum_j \tilde{\mathbf{g}}(\tilde{R}(\tilde{\gamma}', \tilde{e}_j)\tilde{\gamma}', \tilde{e}_i)\tilde{y}_j(t) = 0$$

De forma análoga $\frac{\partial f}{\partial s}(0, t) = \sum_i y_i(t)e_i(t)$ é campo de Jacobi com

$$y_i''(t) + \sum_j \mathbf{g}(R(\gamma', e_j)\gamma', e_i)y_j(t) = 0$$

A Eq. (6.3.11) e a hipótese do teorema garantem que:

$$\tilde{\mathbf{g}}(\tilde{R}(\tilde{\gamma}', \tilde{e}_j)\tilde{\gamma}', \tilde{e}_i) = \mathbf{g}(R(\gamma', e_j)\gamma', e_i)$$

Concluimos então que:

Afirmção 1: y_i e $\tilde{y}_i$ atendem a mesma E.D.O de segunda ordem.

Por outro lado

$$\tilde{y}_i(0) = y_i(0) = 0. \quad (6.3.12)$$

Eq. (6.3.9) garante que:

$$\begin{aligned} \sum_i y_i'(0)e_i &= \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}(0, 0) \\ &= Av'(0) \\ &= \sum_i v_i'(0)A\tilde{e}_i \\ &= \sum_i v_i'(0)e_i(0) \\ &= \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial s}(0, 0) \\ &= \sum_i \tilde{y}_i'(0)\tilde{e}_i \end{aligned}$$

e assim concluímos que:

$$y'_i(0) = v'_i(0) = \tilde{y}'_i(0). \quad (6.3.13)$$

A Afirmação 1, Eq. (6.3.12) e Eq. (6.3.13) implicam que $y_i(t) = \tilde{y}_i(t)$ o que implica a Eq. (6.3.10) e isto termina a demonstração. $\square$

6.3.3. Pontos conjugados e teorema de Hadamard

Vários resultados que vimos anteriormente nesta seção, partem do pressuposto que estamos em uma vizinhança normal, ou seja que $\exp_p : B_\delta(0) \rightarrow B_\delta(p)$ é um difeomorfismo. Nesta subseção estamos interessando em discutir rapidamente quando a aplicação $\exp_p : B_\delta(0) \subset T_p M \rightarrow M$ *falha em ser um difeomorfismo local*, ou seja dado $v \in T_p M$ (eventualmente longe do $0 \in T_p M$) a aplicação $\exp_p : B_\delta(0) \subset T_p M \rightarrow M$ falha em ser difeomorfismo em uma vizinhança de v .

Seja $\alpha : [0, a] \rightarrow (M^m, \mathbf{g})$ geodésica. O ponto $\alpha(t_0)$ é **conjugado** a $\alpha(0)$ ao longo de α se existe um campo de Jacobi J ao longo de α com $J(0) = 0 = J(t_0)$. O número máximo de campos linearmente independentes com esta propriedade é chamado **multiplicidade** de $\alpha(t_0)$.

Exemplo 6.37.

Seja $\alpha : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{S}_1^m$ geodésica, i.e., um segmento de um grande círculo, com $\alpha(0) = p$ e $\alpha(\pi) = -p$. Então $\alpha(\pi)$ é ponto conjugado a $\alpha(0)$ com multiplicidade $m - 1$.

Exercício 6.38.

Seja α geodésica em uma variedade Riemanniana M^m . Verifique

- (a) $\alpha(t_0)$ é ponto conjugado a $\alpha(0)$ se e somente se $\alpha(0)$ é conjugado a $\alpha(t_0)$
- (b) A multiplicidade de um ponto conjugado é no máximo $m - 1$

SUGESTÃO: Para o item (b) utilize a Proposição 6.26

Proposição 6.39.

Sejam $\exp_p : B_\delta(0) \rightarrow M$ bem definida, $t \rightarrow \alpha(t) := \exp_p(tV_0)$ com $|t| < \delta$

Continuação.

e $\|V_0\| = 1$. Então $\alpha(t_0)$ é conjugado a $\alpha(0)$ com multiplicidade k se e somente se $\dim(\ker d(\exp_p)_{t_0 V_0}) = k$.

Demonstração. Basta observar que as afirmações abaixo são todas equivalentes.

1. $J_1, \dots, J_k$ são campos de Jacobi linearmente independentes com $J_i(0) = J_i(t_0) = 0$.
2. $J_i(t) = d(\exp_p)_{tV_0}(tW_i)$ com W_i linearmente independentes e $J_i(t_0) = 0$, onde $1 \leq i \leq k$.
3. W_i são linearmente independentes e $W_i \in \ker d(\exp_p)_{t_0 V_0}$, onde $1 \leq i \leq k$.

□

Proposição 6.40.

Seja $\alpha : [0, a] \rightarrow (M^m, \mathbf{g})$ uma geodésica. Suponha que $\alpha(a)$ não é conjugado a $\alpha(0)$ ao longo α . Então dado $X \in T_{\alpha(0)}M$ e $Y \in T_{\alpha(a)}M$ existe um único campo de Jacobi ao longo de α tal que $J(0) = X$ e $J(a) = Y$.

Demonstração. Seja $\mathcal{J}_{0,a}$ o espaço dos campos de Jacobi com $J(0) = 0$. Defina a aplicação $A : \mathcal{J}_{0,a} \rightarrow T_{\alpha(a)}M$ como $A(J) := J(a)$. Claramente A é aplicação linear. Como $\alpha(a)$ não é ponto conjugado, concluímos que A é injetora. Como os espaços vetoriais $\mathcal{J}_{0,a}$ e $T_{\alpha(a)}M$ tem dimensão m concluímos que A é um isomorfismo. Este fato implica então que existe um campo J_1 com $J_1(0) = 0$ e $J_1(a) = Y$. Por raciocínio análogo obtemos um campo de Jacobi J_2 com $J_2(0) = X$ e $J_2(a) = 0$. Por fim defina $J = J_1 + J_2$. A unicidade segue do fato de $\alpha(a)$ não ser ponto conjugado a $\alpha(0)$. □

O teorema a seguir (cuja prova é baseada em [Car]) garante que dado $p \in M$ nunca existe pontos conjugados a p se a curvatura seccional K é não positiva.

Teorema 6.41. Teorema de Hadamard

Seja $(M, \mathbf{g})$ variedade Riemanniana completa com curvatura seccional $K \leq 0$. Então $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ é um recobrimento. Em particular se M for simplesmente conexa então $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ se torna um difeomorfismo.

Afim de demonstrar este resultado precisamos da Proposição 5.107 e do próximo lema.

Lema 6.42.

Suponha que M seja variedade completa com $K \leq 0$. Então para qualquer $p \in M$ a aplicação $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ é um difeomorfismo local.

Demonstração. Dado $v \in T_p M$ desejamos demonstrar que $\exp_p$ é um difeomorfismo em uma vizinhança de v . Sejam $t \rightarrow \gamma(t) = \exp_p(tv)$ e a variação $f(s, t) = \exp_p(tv(s))$ onde $s \rightarrow v(s)$ é curva em $T_p M$ com $v(0) = v$. Visto que $K \leq 0$ note que:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} (g(J(t), J(t))) &= 2g(J'', J) + 2g(J', J') \\ &= g(-2R(\gamma', J)\gamma', J) + 2g(J', J') \\ &\geq 2g(J', J'). \end{aligned}$$

Integrando a equação acima e utilizando o fato que $\frac{d}{dt}g(J, J)(0) = 2g(J'(0), J(0)) = 0$ (pois $J(0) = 0$) temos

$$\frac{d}{dt}g(J, J)(t) \geq 2 \int_0^t g(J'(s), J'(s))ds > 0, \quad \forall t > 0$$

Integrando a equação mais uma vez e utilizando o fato que $J(0) = 0$, concluímos que

$$g(J, J)(t) > 0, \quad \forall t > 0$$

o que implica, pela Proposição 6.39, que $\exp$ é um difeo local em vizinhança de v . $\square$

Prova do Teorema 6.41: Pelo Lema 6.42 temos que $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ é um difeomorfismo local e pelo teorema de Hopf Rinow é uma aplicação sobrejetora. Defina a métrica $\tilde{g} := (\exp_p)^*g$ em $T_p M$. Com tal métrica $\exp_p : (T_p M, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$ se torna uma isometria local. Note também que as retas saindo do ponto $0 \in T_p M$ são geodésicas de $(T_p M, \tilde{g})$ e assim, pelo Teorema de Hopf-Rinow $(T_p M, \tilde{g})$ é variedade completa. Podemos então aplicar o a Proposição 5.107 para concluir que $\exp_p : (T_p M, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$ é recobrimento isométrico. Em particular se M for simplesmente conexa $\exp_p : (T_p M, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$ se torna uma isometria. $\square$

Exercício 6.43.

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana simplesmente conexa, completa com $K \leq 0$. Mostre que dados $p, q \in M$ existe uma única geodésica ligando p a

Continuação.

q .

6.3.4. Recobrimento isométrico e curvatura constante

Nesta subseção vamos aplicar o Teorema de Cartan e Teorema de Hadamard demonstrados anteriormente para descrever o recobrimento isométrico de variedades com curvatura constante.

Iniciamos com um lema que caracteriza isometrias locais.

Lema 6.44.

Seja $F_i : \widetilde{M} \rightarrow M$ isometrias locais com $i = 1, 2$ entre uma variedade Riemanniana conexa $\widetilde{M}$ e uma variedade Riemanniana M . Suponha que existe um $p_0 \in \widetilde{M}$ tal que $F_1(p_0) = F_2(p_0)$ e tal que $d(F_1)_{p_0} = d(F_2)_{p_0}$. Então $F_1 = F_2$.

Demonstração. Dado $p \in M$. Seja δ tal que $F_i|_{B_\delta(p)}$ é uma isometria. Suponha que $F_1(p) = F_2(p)$ e tal que $d(F_1)_p = d(F_2)_p$. Observemos que

$$F_1|_{B_\delta(p)} = F_2|_{B_\delta(p)}. \quad (6.3.14)$$

De fato, observe que $F_1(B_\delta(p)) = B_\delta(F(p)) = F_2(B_\delta(p))$. Podemos então definir $\varphi = (F_2|_{B_\delta(p)})^{-1} \circ (F_1|_{B_\delta(p)})$ e assim temos que $\varphi(p) = p$ e $d\varphi_p = Id$. Visto que φ é isometria concluímos

$$\begin{aligned} \varphi &= \exp_{\varphi(p)} \circ d\varphi \circ (\exp_p|_{B_\delta(p)})^{-1} \\ &= \exp_{\varphi(p)} \circ Id \circ (\exp_p|_{B_\delta(p)})^{-1} \\ &= Id \end{aligned}$$

o que implica a eq. (6.3.14).

Fixo p_0 para cada $x \in M$ seja α a curva com $\alpha(0) = p_0$ e $\alpha(1) = x$ e defina $A = \{t \in [0, 1], F_1(\alpha(t)) = F_2(\alpha(t)) \mid dF_1(\alpha(t)) = dF_2(\alpha(t))\}$. Este conjunto é não vazio e fechado pela hipótese e eq. (6.3.14). Também a eq. (6.3.14) e conexidade garantem que $A = [0, 1]$ e que F_1 e F_2 coincidem em uma vizinhança de x . $\square$

Teorema 6.45.

Seja M variedade Riemanniana completa com curvatura seccional constante $c \in$

Continuação.

$\{-1, 0, 1\}$. Então M é recoberta isometricamente por $M(c)$ (espaço forma) onde:

$$M(c) = \begin{cases} \mathbb{H}^m & \text{se } c = -1, \\ \mathbb{R}^m & \text{se } c = 0, \\ \mathbb{S}^m & \text{se } c = 1. \end{cases}$$

Demonstração. Seja $\widetilde{M}$ o recobrimento universal Riemanniano de M ou seja $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ é o recobrimento universal e dotamos $\widetilde{M}$ com a métrica π^*g .

Consideremos primeiro $c = 0, -1$. Defina $F : M(c) \rightarrow \widetilde{M}$ como $F(x) = \exp_{\tilde{p}} A \exp_p^{-1}$ onde $A : T_p M(c) \rightarrow T_{\tilde{p}} \widetilde{M}$ é isometria linear.

Como $M(c)$ e $\widetilde{M}$ são completas, temos pelo teorema de Hadamard (vide Teorema 6.41) que F é bem definida e é um difeomorfismo. Pelo Teorema 6.36 F é uma isometria.

Vamos agora supor que $c = 1$. Sejam $p, -p \in \mathbb{S}^m$. Defina $F : \mathbb{S}^m \setminus \{-p\} \rightarrow \widetilde{M}$ como $F(x) = \exp_{\tilde{p}} A \exp_p^{-1}$ onde $A : T_p M(c) \rightarrow T_{\tilde{p}} \widetilde{M}$ é isometria linear.

Considere agora $q \in \mathbb{S}^m$ tal que $q \neq p$ e $q \neq -p$. Vamos definir então $\widehat{F} : \mathbb{S}^m \setminus \{-q\} \rightarrow \widetilde{M}$ como $\widehat{F}(x) = \exp_{F(q)} \circ dF_q \circ \exp_q^{-1}$. Novamente pelo Teorema 6.36 $\widehat{F}$ é uma isometria local. Note que $\widehat{F}(q) = F(q)$ e que $d\widehat{F}_q = dF_q$. Assim pelo Lema 6.44 temos que $\widehat{F}|_W = F|_W$ onde $W = \mathbb{S}^m \setminus \{-p, -q\}$. Podemos então definir a isometria local $G : \mathbb{S}^m \rightarrow \widetilde{M}$ como

$$G(x) = \begin{cases} F(x) & \text{se } x \in \mathbb{S}^m \setminus \{-p\}; \\ \widehat{F}(x) & \text{se } x \in \mathbb{S}^m \setminus \{-q\} \end{cases}$$

Como G é isometria local e $\mathbb{S}^m$ é completo concluímos (e.g usando Lemma 5.107) que G é um recobrimento isométrico e assim como $\widetilde{M}$ e simplesmente conexo concluímos que $M(c)$ e $\widetilde{M}$ são isométricos. □

Observe que, como frequentemente fazemos, estamos acima supondo que M tem dimensão maior ou igual a 2.

Exercício 6.46.

Seja M variedade Riemanniana completa com curvatura sectional K constante $c \in \{-1, 0, 1\}$. Verifique que M é isométrica a $M(c)/\pi_1(M)$ onde $\pi_1(M)$ é o grupo fundamental de M .

6.4. Energia de curvas e Teorema de Bonnet Myers

Nesta seção veremos o Teorema de Bonnet Myers (vide Teorema 6.60) que implicará como corolário que *se existe uma constante $c > 0$ tal que $K > c$ então M é compacta e seu grupo fundamental é finito*. Para demonstrar tal teorema, estudaremos a variação de energia de curvas em uma variedade completa $(M, \mathbf{g})$, vendo geodésicas como pontos críticos do funcional energia (tal como feito na Seção 4.5) e considerando a derivada segunda do funcional energia de curvas.

6.4.1. Funcional Energia

Definição 6.47.

Seja $\alpha : [0, a] \rightarrow (M, \mathbf{g})$ uma curva suave por partes. Uma função $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \rightarrow M$ continua é chamada **variação** de α se

- (a) $f(0, t) = \alpha(t), \forall t \in [0, a]$,
- (b) existe uma partição $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k+1} = a$ de $[0, a]$ tal que $f|_{(-\epsilon, \epsilon) \times [t_i, t_{i+1}]}$ é suave, i.e., se estende a uma função suave definida em um aberto de $(-\epsilon, \epsilon) \times [t_i, t_{i+1}]$.

Uma variação f de α é chamada **própria** se $f(s, 0) = \alpha(0)$ e $f(s, a) = \alpha(a)$ para todo s . O vetor **velocidade da variação** f é $\frac{\partial f}{\partial s}$.

Lema 6.48.

Seja V um campo suave por partes ao longo de uma curva suave por partes $\alpha : [0, a] \rightarrow M$. Então existe uma variação f de α com $V(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$. Além disto se $V(0) = 0 = V(a)$ a variação f pode ser escolhida como variação própria.

Demonstração. No caso da variedade ser completa (o qual vamos considerar sempre nesta seção) a variação pode ser definida como

$$f(s, t) = \exp_{\alpha(s)}(sV(t))$$

Caso M não seja completa, pode-se cobrir α por um numero finito de vizinhanças e com isto é possível reduzir ϵ se necessário. Deixamos aqui os detalhes para o leitor. $\square$

Definição 6.49.

A energia de uma variação f de uma curva $\alpha : [0, a] \rightarrow M$ é definida como

$$E_f(s) = \int_0^a \left\| \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) \right\|^2 dt$$

Observação 6.50.

Utilizando a desigualdade de Schwarz ($\langle f, g \rangle \leq \|f\| \|g\|$) temos:

$$1(\alpha)^2 = \left(\int_0^a \|\alpha'(t)\| dt \right)^2 \leq \int_0^a 1 dt \int_0^a \|\alpha'(t)\|^2 dt$$

Concluimos assim que

$$1^2(\alpha) \leq aE(\alpha)$$

e igualdade ocorre se e somente se $\|\alpha'(t)\|$ é constante.

Proposição 6.51.

Sejam $p, q \in M$ e $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica minimizante ligando p a q . Então para qualquer curva $\beta : [0, a] \rightarrow M$ ligando p e q temos $E(\gamma) \leq E(\beta)$ e vale a igualdade se e somente se β for geodésica minimizante.

Demonstração. Como $\|\gamma'\|$ é constante, temos pela Observação 6.50 que

$$aE(\gamma) = 1^2(\gamma) \leq 1^2(\beta) \leq aE(\beta)$$

Se β é uma geodésica minimizante, temos por definição que a primeira desigualdade acima é uma igualdade. Visto que geodésicas tem velocidade constante, a Observação 6.50 garante que a segunda também é uma igualdade.

Agora suponha que $E(\gamma) = E(\beta)$ então temos pela expressão acima que $1^2(\gamma) = 1^2(\beta)$. Tal fato e Proposição 5.101 garante que β é imagem de uma geodésica minimizante. Como $1^2(\beta) = aE(\beta)$ concluimos da Observação 6.50 que β tem velocidade constante e assim é de fato uma geodésica. $\square$

A recíproca é validada quando M é variedade completa.

Exercício 6.52.

Seja M variedade completa e $\alpha : [0, a] \rightarrow M$ curva suave com velocidade constante. Suponha que para qualquer curva $\beta : [0, a] \rightarrow M$ ligando p e q temos $E(\alpha) \leq E(\beta)$. Então α é uma geodésica minizante.

Exercício 6.53. Primeira variação de energia

Sejam $\alpha : [0, a] \rightarrow M$ curva suave por partes, $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \rightarrow M$ uma variação de α , $E_f(s)$ a energia da variação, e $V(t) := \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$. Então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{ds} E_f(s) &= \sum_{i=0}^k \mathbf{g} \left(\frac{\partial f}{\partial s}(s, t), \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) \right) \Big|_{t_i^+}^{t_{i+1}^-} \\ &\quad - \sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{g} \left(\frac{\partial f}{\partial s}(s, t), \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) \right) dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{ds} E_f(0) &= - \sum_{j=1}^k \mathbf{g} \left(V(t_j), \alpha'(t_j^+) - \alpha'(t_j^-) \right) \\ &\quad + \mathbf{g} \left(V(a), \alpha'(a) \right) - \mathbf{g} \left(V(0), \alpha'(0) \right) \\ &\quad - \sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{g} \left(V(t), \frac{\nabla}{dt} \alpha'(t) \right) dt. \end{aligned}$$

Proposição 6.54.

Seja $(M, \mathbf{g})$ variedade Riemanniana completa. Uma curva diferenciável por partes $\alpha : [0, a] \rightarrow M$ é uma geodésica se e somente se para toda variação própria f de α temos $\frac{d}{ds} E_f(0) = 0$.

Demonstração. Se α é geodésica então $\alpha'(t_j^-) = \alpha'(t_j^+)$ e $\frac{\nabla}{dt} \alpha' = 0$. Além disto se f é própria, então $V(0) = V(a) = 0$. Assim substituindo na equação do Exercício 6.53 temos que $\frac{d}{ds} E_f(0) = 0$.

Suponha agora que $\frac{d}{ds} E_f(0) = 0$ para qualquer variação própria f da curva α . Seja $h : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^+$ função suave por partes com $h(t_j) = 0$ para qualquer j e

$h|(t_j, t_{j+1}) > 0$. Defina $V(t) = h(t) \frac{\nabla}{dt} \alpha'(t)$ e seja f uma variação com velocidade V (vide Lema 6.48). Temos então pelo Exercício 6.53 que:

$$\sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} h(t) \mathbf{g} \left(\frac{\nabla}{dt} \alpha'(t), \frac{\nabla}{dt} \alpha'(t) \right) dt = \frac{1}{2} E'_f(0) = 0$$

o que implica que α é geodésica por partes. Considere agora um outro campo $\tilde{V}$ tal que $\tilde{V}(t_j) = \alpha'(t_j^+) - \alpha'(t_j^-)$ e $V(0) = 0 = V(a)$. Considere uma variação $\tilde{f}$ que tenha $\tilde{V}$ como vetor velocidade. Usando o fato já demonstrado que α é geodésica por partes junto com Exercício 6.53 temos que:

$$0 = E'_{\tilde{f}}(0) = - \sum_{i=1}^k \|\alpha'(t_j^+) - \alpha'(t_j^-)\|^2.$$

Logo $\alpha'(t_j^+) = \alpha'(t_j^-)$. Como α é geodésica por partes, concluímos por E.D.O que α é geodésica. □

Exercício 6.55. Segunda variação de energia

Sejam $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ geodésica, $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \rightarrow M$ uma variação de γ , $E_f(s)$ a energia da variação, e $V(t) := \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$. Então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} E_f(0) &= \mathbf{g} \left(\frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial s}(0, a), \gamma'(a) \right) - \mathbf{g} \left(\frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial s}(0, 0), \gamma'(0) \right) \\ &+ \sum_{i=0}^k \mathbf{g} \left(V(t), \frac{\nabla}{dt} V(t) \right) \Big|_{t_i^+}^{t_{i+1}^-} \\ &- \sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{g} \left(\frac{\nabla^2}{dt^2} V(t) + R(\gamma'(t), V(t)) \gamma'(t), V(t) \right) dt \end{aligned}$$

ou de forma equivalente

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} E_f(0) &= \mathbf{g} \left(\frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial s}(0, a), \gamma'(a) \right) - \mathbf{g} \left(\frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial s}(0, 0), \gamma'(0) \right) \\ &+ I_a(V, V) \end{aligned}$$

onde I_a é a forma do índice, i.e.,

Continuação.

$$I_a(V, W) := \int_0^a g\left(\frac{\nabla}{dt}V(t), \frac{\nabla}{dt}W(t)\right) - g\left(R(\gamma'(t), V(t))\gamma'(t), W(t)\right) dt$$

6.4.2. Teorema do Índice e geodésica minimizante

Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ geodésica. Defina $\nu(0, a)$ como o espaço vetorial formado pelos campos vetoriais diferenciáveis por parte ao longo de γ , perpendiculares a γ e tal que $V(0) = 0 = V(a)$.

A forma do Índice I_a definida no Exercício 6.55 restrita a $\nu(0, a)$ é bilinear e simétrica. O **índice** da forma I_a restrita a $\nu(0, a)$ é a dimensão máxima de um subespaço de $\nu(0, a)$ tal que $\nu(0, a)$ é negativa definida. A **nulidade** de I_a é a dimensão máxima do subespaço W de $\nu(0, a)$ tal que se $w \in W$ temos $I_a(w, v) = 0, \forall v \in \nu(0, a)$. O espaço W é chamado **espaço nulo**. Dizemos que I_a é degenerada se $W \neq \{0\}$.

O teorema a seguir, chamado de *Teorema de Índice de Morse*, relaciona o índice de I_a com os pontos conjugados ao longo de uma geodésica, vide demonstração em [Car] para a formulação abaixo e [BC64] para formulação mais geral em termos de pontos focais.

Aqui desejamos apenas enunciar uma de suas versões e obter uma aplicação simples porém interessante.

Teorema 6.56.

O índice de I_a é finito e é igual ao número de pontos $\gamma(t)$ com $0 < t < a$ conjugados a $\gamma(0)$, cada um contando sua multiplicidade.

Corolário 6.57.

Os pontos conjugados ao longo de uma geodésica são isolados.

Corolário 6.58.

Se $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ é geodésica minimizante, então $\gamma(t)$ não é conjugado a $\gamma(0)$ para $0 < t < a$.

Demonstração. Suponha por absurdo que existe $\gamma(t_0)$ conjugado a $\gamma(0)$ tal que $0 < t_0 < a$. Sabemos então pelo Teorema 6.56 que existe um campo $V \in \nu(0, a)$ com

$$I_a(V, V) < 0. \quad (6.4.1)$$

Visto que $V(0) = 0 = V(a)$ podemos encontrar uma variação própria f que tal que $\frac{\partial f}{\partial s}(0, t) = V(t)$ recorde Lema 6.48. Assim pelo Exercício 6.55 temos

$$E_f''(0) = 2I_a(V, V). \quad (6.4.2)$$

Como γ é uma geodésica temos pelo Exercício 6.53 que

$$E_f'(0) = 0. \quad (6.4.3)$$

Eq. (6.4.1), (6.4.2), (6.4.3) implicam que existe um s pequeno tal que

$$E_f(s) < E_f(0). \quad (6.4.4)$$

A eq. (6.4.4), a hipótese de γ ser minimizante contrariam a Proposição 6.51 tomando $t \rightarrow \beta(t) = f(s, t)$. □

Observação 6.59. cut locus

Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow (M, \mathbf{g})$ geodésica unitária (i.e., com $\|\gamma'\| = 1$). Defina $A = \{t \in [0, \infty), d(\gamma(0), \gamma(t)) = t\}$. Se $t_0 = \sup A < \infty$ então $\gamma(t_0)$ é chamado **ponto mínimo** ao longo de γ . É possível então mostrar que se $\gamma(t_0)$ é ponto mínimo de $p = \gamma(0)$ (ao longo de γ) então:

- (a) ou $\gamma(t_0)$ é o primeiro ponto conjugado de $\gamma(0)$ ao longo de γ ,
- (b) ou existe uma geodésica β com $\|\beta'\| = 1$, $\beta(0) = p$ e $\beta(t_0) = \gamma(t_0)$.

O conjunto de todos os pontos mínimos de p (ao longo de todas geodésicas γ com $\gamma(0) = p$) é chamado **cut locus**. É sabido que se $\text{cut}(p)$ é o cut locus de p então $M \setminus \text{cut}(p)$ é homeomorfo a um aberto de $T_p M$, vide [Car].

6.4.3. Teorema de Bonnet Myers

O tensor de Ricci é definido como

$$\text{Ric}(X, Y)_p = \text{tr } \mathbf{g}(R(X, \cdot)Y, \cdot).$$

Em um sistema de coordenadas apropriado (coordenadas harmônicas) é possível aproximar Ric pelo Laplaciano da métrica, vide [Pet, p.305].

Existem classes relevantes de variedades Riemannianas que possuem curvatura de Ricci com propriedades interessantes. Podemos citar por exemplo as **variedades de Einstein** cujas as métricas atendem a propriedade $\mathbf{g} = \lambda \text{Ric}$, para uma constante λ . Dentre tais variedades estão todos os *espaços simétricos* (vide [IT]) que são classificados como:

- *tipo compacto*, se $\lambda > 0$;
- *tipo não compacto*, se $\lambda < 0$;
- *flat* se $\lambda = 0$ (cujos únicos exemplos irredutíveis são S^1 e $\mathbb{R}$)

A razão pela qual espaço simétrico de tipo compacto tem este nome, segue do teorema a seguir, cuja demonstração apresentada é baseada em [Car].

Teorema 6.60.

Seja $(M, \mathbf{g})$ variedade completa de dimensão m . Suponha que existe $r > 0$ tal que:

$$\text{Ric}(X)_p := \frac{\text{Ric}(X, X)}{m-1} \geq \frac{1}{r^2} > 0$$

para todo $p \in M$ e para todo $X \in T_p M$ com $\|X\| = 1$. Então:

- (a) A variedade M é compacta com diâmetro menor ou igual a πr .
- (b) O recobrimento universal de M é compacto e assim $\pi_1(M)$ é finito.

Demonstração. (a) Sejam $p, q \in M$. Como M é completa, existe geodésica $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ com $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$ tal que $d(p, q) = \mathbf{l}(\gamma)$. Para demonstrar o item (a) bastará demonstrar que o comprimento $\mathbf{l}(\gamma)$ é sempre menor ou igual a πr . De fato isto implicará que $M \subset \overline{B_{\pi r}(p)}$. Como M é completa isto implica que M é compacta (vide Teorema de Hopf Rinow, Teorema 5.106). Isto também implicará (pela definição de diâmetro) que $\text{diam}(M) \leq \pi r$.

Vamos então supor por absurdo que existe uma $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ minimizante tal que $\pi r < l := \mathbf{l}(\gamma)$. Sejam $t \rightarrow e_i(t)$ ($i = 1 \cdots m-1$) uma base ortonormal paralela ao longo de γ e defina $e_n(t) := \frac{1}{l} \gamma'(t)$. Defina $V_j(t) = \sin(t\pi) e_j(t)$ com $1 \leq j \leq m-1$. Observe que $V_j(0) = 0 = V_j(1)$. Seja f_j uma variação própria com $\frac{\partial f_j}{\partial s}(0, t) = V_j(t)$, vide Lemma 6.48.

Substituindo V_j no Exercício 6.55, utilizando o fato de e_j ser paralelo e que f_j é suave e própria concluímos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}E''_{f_j}(0) &= -\sum_0^1 \mathbf{g}\left(V_j, \frac{\nabla^2}{dt}V + R(\gamma', V)\gamma'\right)dt \\
&= \int_0^1 \sin^2(t\pi)\pi^2 - l^2 \sin^2(t\pi)\mathbf{g}\left(R(e_m, e_j)e_m, e_j\right)dt \\
&= \int_0^1 \sin^2(t\pi)(\pi^2 - l^2 K(e_m, e_j))dt
\end{aligned}$$

Assim

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m-1} E''_{f_j}(0) = (m-1) \int_0^1 \sin^2(t\pi)(\pi^2 - l^2 \text{Ric}(e_m))dt. \quad (6.4.5)$$

Por hipótese $\text{Ric}(e_m) \geq \frac{1}{r^2} > 0$ e por suposição $l^2 \geq \pi^2 r^2$. Temos assim que $l^2 \text{Ric}(e_m) > \pi^2 r^2 \text{Ric}(e_m) \geq \pi^2$ e assim

$$0 > \pi^2 - l^2 \text{Ric}(e_m) \quad (6.4.6)$$

Substituindo eq. (6.4.6) na eq. (6.4.5) temos

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m-1} E''_{f_j}(0) < 0$$

Assim existe um j_0 tal que

$$E''_{f_{j_0}}(0) < 0$$

Visto que $E'_{f_j}(0) = 0$ (vide Exercício 6.53) concluímos que existe s pequeno tal que $E_{f_j}(s) < E_{f_j}(0)$ o que contraria Proposição 6.51. Logo $\pi r \geq l := \mathbf{l}(\gamma)$ concluindo a prova do item (a).

(b) Considere o recobrimento universal Riemanniano $\pi : (\widetilde{M}, \widetilde{\mathbf{g}}) \rightarrow (M, \mathbf{g})$, i.e, π é o recobrimento universal e $\widetilde{\mathbf{g}} := \pi^* \mathbf{g}$. Então temos também para $\widetilde{M}$ que $\text{Ric}(X) \geq \frac{1}{r^2} > 0$ e assim pelo item (a) concluímos que $\widetilde{M}$ é compacto o que implica que $\pi_1(M)$ é finito.

□

Observação 6.61.

Não basta no enunciado do teorema que $\text{Ric}(X) > 0$ para que M seja compacto, como indica o exemplo do parabolóide em $\mathbb{R}^3$, o qual não é compacto.

Observação 6.62.

Quando M é a esfera de raio r então a estimativa é atingida. Mais ainda, seguirá do **teorema de Cheng** que se a estimativa inferior for atingida, i.e., se $\text{Ric}(X) = \frac{1}{r^2}$ então M será isométrica a esfera de raio r , vide [Pet].

Exercício 6.63.

Seja G um grupo de Lie que admite métrica bi-invariante e defina forma de Killing como:

$$\Phi(X, Y) := \text{tr}(\text{ad}(X) \circ \text{ad}(Y))$$

onde $\text{ad}(X)Y := [X, Y]$. O grupo (álgebra de Lie) é chamado semi-simples se Φ é não degenerada. É possível mostrar que se $\mathfrak{g}$ é semi-simples e Φ é negativa definida então $-\Phi$ é métrica bi-invariante.

- (a) Mostre que $\text{Ric}(X, Y) = -\frac{1}{4}\Phi(X, Y)$ para $X, Y \in \mathfrak{g}$. Em particular conclua que Ric não depende da métrica bi-invariante.
- (b) Suponha que G seja semi-simples e a forma de Killing seja negativa definida. Conclua que G é compacto.

6.5. Formas de conexão e curvatura

6.5.1. Conexão afim

Seja (E, M, π) fibrado vetorial, $\{\xi_i\}$ referencial local e ∇ uma conexão afim em E . A conexão afim pode então ser vista como um operador $\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$ que atende

$$\nabla(f\xi) = df \otimes \xi + f\nabla\xi$$

Podemos agora definir as **1-formas de conexão** $\omega_{i,j}$ como

$$\nabla(\cdot)\xi_i = \sum \omega_{ij}(\cdot) \otimes \xi_j \quad (6.5.1)$$

Observe que a matriz de 1-formas A definida na Eq. (5.2.3) é a matriz $[\omega_{i,j}]^t$, ou seja a transposta da matriz de 1-formas $\omega := [\omega_{i,j}]$.

Proposição 6.64. Transformação de gauge

Seja $\{\tilde{\xi}_i\}$ outro referencial. Sejam $[b_{i,j}]$ e $[\tilde{\omega}_{i,j}]$ matrizes tais que: $\tilde{\xi}_i = \sum_j b_{ij}\xi_j$
 $\nabla\tilde{\xi}_i = \sum_j \tilde{\omega}_{ij} \otimes \tilde{\xi}_j$ Então

$$\tilde{\omega} = [db]b^{-1} + b\omega b^{-1}.$$

Demonstração. A prova será um calculo simples se utilizarmos a notação de produto tensorial de matrizes. Vamos rapidamente recordar esta linguagem em um caso de baixa dimensão. Suponha que $E_p = \mathbb{R}^2$. A matriz b se torna então uma matriz 2×2 e $\{\xi_i\}_{i=1}^2$ $\{\tilde{\xi}_i\}_{i=1}^2$ se tornam base de $\mathbb{R}^2$. Vamos denotar $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ e $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)$ os vetores em $\mathbb{R}^4$. Por fim dado a matriz 2×2 Id podemos definir então o produto tensorial como a matriz 4×4 abaixo:

$$b \otimes \text{Id} := \begin{bmatrix} b_{1,1}\text{Id} & b_{1,2}\text{Id} \\ b_{2,1}\text{Id} & b_{2,2}\text{Id} \end{bmatrix}$$

Por fim vamos denotar $\llbracket b \rrbracket := b \otimes \text{Id}$. Com estas notações temos:

- (i) $\tilde{\xi} = \llbracket b \rrbracket \xi$
- (ii) $\nabla \xi = \llbracket \omega \rrbracket \xi$.
- (iii) $\nabla \tilde{\xi} = \llbracket \tilde{\omega} \rrbracket \tilde{\xi}$.

Também não é difícil de verificar que dado 2 matrizes a, c então

- (iv) $\llbracket a \rrbracket \llbracket c \rrbracket = \llbracket ac \rrbracket$,
- (v) $\llbracket a \rrbracket \xi = \llbracket c \rrbracket \xi$ implica que $a = c$.

Uma vez estabelecido esta notação, vamos aos cálculos. Da regra de derivação temos:

$$\nabla \tilde{\xi}_i = \sum_j db_{ij} \otimes \xi_j + \sum_j b_{ij} \nabla \xi_j \quad (6.5.2)$$

Logo com a notação estabelecida acima temos:

$$\begin{aligned}
 \llbracket \tilde{w} \rrbracket \tilde{\xi} &\stackrel{(iii)}{=} \nabla \tilde{\xi} \\
 &\stackrel{(6.5.2)}{=} \llbracket db \rrbracket \xi + \llbracket b \rrbracket \nabla \xi \\
 &\stackrel{(ii)}{=} \llbracket db \rrbracket \xi + \llbracket b \rrbracket \llbracket \omega \rrbracket \xi \\
 &\stackrel{(i)}{=} \llbracket db \rrbracket \llbracket b \rrbracket^{-1} \tilde{\xi} + \llbracket b \rrbracket \llbracket \omega \rrbracket \llbracket b \rrbracket^{-1} \tilde{\xi} \\
 &\stackrel{(iv)}{=} \llbracket dbb^{-1} \rrbracket \tilde{\xi} + \llbracket b\omega b^{-1} \rrbracket \tilde{\xi}.
 \end{aligned}$$

Assim $\llbracket \tilde{w} \rrbracket \tilde{\xi} = (\llbracket dbb^{-1} \rrbracket + \llbracket b\omega b^{-1} \rrbracket) \tilde{\xi}$. Concluimos por (v) que

$$\tilde{w} = dbb^{-1} + b\omega b^{-1}.$$

□

Podemos também expressar o tensor R em termos de 2-formas $\Omega_{i,j}$ chamadas **2-formas de curvatura** as quais são definidas abaixo.

$$R(\cdot, \cdot) \xi_i := \sum_j \Omega_{ij}(\cdot, \cdot) \otimes \xi_j. \quad (6.5.3)$$

Vamos a seguir demonstrar a assim chamada equação de curvatura, a qual relacionará a matriz de curvatura $\Omega := [\Omega_{ij}]$ com a matriz de conexão $\omega = [\omega_{i,j}]$. Para tanto vamos precisar recordar o lema a seguir.

Lema 6.65.

Seja η uma p forma. Então

$$\begin{aligned}
 d\eta(X_0, \dots, X_p) &= \sum_i (-1)^i X_i \cdot \eta(X_0, X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_p) \\
 &= \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \eta([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_p)
 \end{aligned}$$

Onde $\widehat{X_i}$ significa que este termo não está presente. Em particular se η for uma 1-forma temos:

$$d\eta(X, Y) = X \cdot \eta(Y) - Y \cdot \eta(X) - \eta([X, Y]).$$

Teorema 6.66. Equação de curvatura

$$-\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 -\sum_j \Omega_{ij}(X, Y) \otimes \xi_j &= -R(X, Y)\xi_i \\
 &= \nabla_X \nabla_Y \xi_i - \nabla_Y \nabla_X \xi_i - \nabla_{[X, Y]}\xi_i \\
 &= \nabla_X \left(\sum_j \omega_{ij}(Y) \otimes \xi_j \right) - \nabla_Y \left(\sum_j \omega_{ij}(X) \otimes \xi_j \right) \\
 &\quad - \sum_j \omega_{ij}([X, Y]) \otimes \xi_j \\
 &= \sum_j (X \cdot \omega_{ij}(Y) - Y \cdot \omega_{ij}(X) - \omega_{ij}([X, Y])) \otimes \xi_j \\
 &\quad + \sum_{jk} (\omega_{ij}(Y)\omega_{jk}(X) - \omega_{ij}(X)\omega_{jk}(Y)) \otimes \xi_k \\
 &= \sum_j d\omega_{ij}(X, Y) \otimes \xi_j - \sum_{i,j} \omega_{il} \wedge \omega_{lj}(X, Y) \otimes \xi_j
 \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do lema anterior. $\square$

6.5.2. Conexão Riemanniana

Consideremos agora (M, g) uma variedade Riemanniana e seja ∇ a conexão Riemanniana associada.

Proposição 6.67. Equações de estrutura

Sejam $\{e_i\}$ um referencial ortonormal local definido em uma vizinhança U , θ_i as suas 1-formas duais, i.e, $\theta_i(e_j) = \delta_{ij}$, e ω_{ij} as 1-formas de conexão em relação ao referencial $\{e_i\}$. Então:

- (a) $\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$ (compatível com a métrica)
- (b) $d\theta_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \theta_j = \sum_j \theta_j \wedge \omega_{ji}$ (livre de torção).

Demonstração. (a) Pela compatibilidade da métrica temos:

$$\begin{aligned} 0 = X \cdot g(e_i, e_j) &= g(\nabla_X e_i, e_j) + g(e_i, \nabla_X e_j) \\ &= g\left(\sum_k \omega_{ik}(X) \otimes e_k, e_j\right) + g\left(e_i, \sum_k \omega_{jk}(X) \otimes e_k\right) \\ &= \omega_{ij}(X) + \omega_{ji}(X). \end{aligned}$$

(b) Como a métrica é livre de torsão temos:

$$\begin{aligned} [e_i, e_j] &= \nabla_{e_i} e_j - \nabla_{e_j} e_i \\ &= \sum_k (\omega_{jk}(e_i) - \omega_{ik}(e_j)) e_k. \end{aligned}$$

A equação acima e o Lema 6.65 implicam

$$\begin{aligned} -d\theta_k(e_i, e_j) &= \theta_k([e_i, e_j]) \\ &= \omega_{jk}(e_i) - \omega_{ik}(e_j) \\ &= -\sum_s \theta_s \wedge \omega_{sk}(e_i, e_j) \end{aligned}$$

□

Ilustremos a utilidade das equações de estrutura acima em alguns exercícios clássicos.

Exercício 6.68.

Considere um referencial ortonormal local ξ_1, ξ_2 de uma superfície M^2 . Verifique que:

$$-\Omega_{12} = d\omega_{12} \quad (6.5.4)$$

Solução: Lembremos que $-\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega$, e que pelas equações de estrutura $\omega_{11} = \omega_{22} = 0$ e $\omega_{12} = -\omega_{21}$. Assim:

$$-\begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & d\omega_{12} \\ -d\omega_{12} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} \\ -\omega_{12} & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} \\ -\omega_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

Da equação acima concluímos $-\Omega_{12} = d\omega_{12}$ como desejado. □

Exercício 6.69.

Seja M aberto de $\mathbb{R}^2$. Suponha que $\theta_1 = A(x, y)dx$ e $\theta_2 = B(x, y)dy$. Verifique que:

Continuação.

$$(a) \omega_{12} = \frac{-A_y}{B} dx + \frac{B_x}{A} dy \text{ onde } A_y := \frac{\partial A}{\partial y} \text{ e } B_x := \frac{\partial B}{\partial x}$$

$$(b) K = \frac{-1}{AB} \left(\left(\frac{A_y}{B} \right)_y + \left(\frac{B_x}{A} \right)_x \right)$$

$$(c) K = -1 \text{ quando } M \text{ é o semi-plano hiperbólico } \mathbb{H}^2.$$

Solução: Verifiquemos (a) utilizando as equações de estrutura e a dimensão 2.

$$\omega_{12} = p dx + q dy; \omega_{11} = \omega_{22} = 0, \omega_{12} = -\omega_{21}$$

$$d\theta_1 = \omega_{12} \wedge \theta_2; d\theta_2 = \theta_1 \wedge \omega_{12}$$

$$d\theta_1 = -A_y dx \wedge dy; d\theta_2 = B_x dx \wedge dy$$

Das equações acima podemos concluir:

$$-A_y dx \wedge dy = d\theta_1 = \omega_{12} \wedge \theta_2 = p B dx \wedge dy$$

e assim deduzimos: $p = \frac{-A_y}{B}$. De forma análoga:

$$B_x dx \wedge dy = d\theta_2 = \theta_1 \wedge \omega_{12} = A q dx \wedge dy$$

o que nos permite concluir que $q = \frac{B_x}{A}$ terminando assim a resolução do item (a).

A demonstração do item (b) segue do Exercício 6.68 e o item (a). Mais precisamente observe que: $\xi_1 = (\frac{1}{A}, 0)$, $\xi_2 = (0, \frac{1}{B})$. Assim

$$\begin{aligned} K &= \Omega(\xi_1, \xi_2) \\ &= -d\omega_{12}(\xi_1, \xi_2) = -1 \left(\left(\frac{A_y}{B} \right)_y + \left(\frac{B_x}{A} \right)_x \right) dx \wedge dy(\xi_1, \xi_2) \\ &= \frac{-1}{AB} \left(\left(\frac{A_y}{B} \right)_y + \left(\frac{B_x}{A} \right)_x \right) dx \wedge dy(e_1, e_2) \end{aligned}$$

Para a verificação do item (c) bata lembrar que a métrica hiperbólica é $A = \frac{1}{y}$ e $B = \frac{1}{y}$. Substituindo $A_y = -1y^{-2}$ e $A_{yy} = 2y^{-3}$ no Item (b) concluímos $K = -1 \square$

Agora utilizando o Exercício 6.69 o leitor pode verificar sem grandes problemas o exercício a seguir.

Exercício 6.70.

Seja M uma superfície de revolução em $\mathbb{R}^3$ e uma parametrização $\psi(t, \theta) = (r(t) \cos(\theta), r(t) \sin(\theta), h(t))$ onde a curva geratriz $t \rightarrow (r(t), 0, h(t))$ está parametrizada por comprimento de arco.

- (a) Mostre a curvatura seccional $K \circ \psi(t, \theta) = \frac{-r''(t)}{r(t)}$.
- (b) Mostre que a curvatura seccional da esfera $\mathbb{S}^2$ é $K = 1$
- (c) Seja $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2)^2 + x_3^2 = 1\}$. Calcule $K(3, 0, 0)$ e $K(1, 0, 0)$ e conclua que o toro M tem pontos com curvatura seccional positiva e outros com curvatura seccional negativa.

Observação 6.71.

Concluimos esta subseção apresentando algumas fórmulas uteis.

$$\Omega_{ij} = \sum_{k < l} R_{k,l,i,j} \theta_k \wedge \theta_l$$

onde $R_{k,l,i,j} := g(R(e_k, e_l)e_i, e_j) = \Omega_{ij}(e_k, e_l)$ ou como $R_{klij} = -R_{lkij}$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k,l} R_{k,l,i,j} \theta_k \wedge \theta_l$$

Definindo $R_{ij} = \sum_k R_{ikjk}$ temos que a seguinte descrição local do tensor de Ricci e da curvatura escalar:

$$Ric = \sum_{ij} R_{ij} \theta_i \otimes \theta_j$$

$$Scal = \sum_i R_{ii}$$

Por fim, se M tem curvatura constante K temos

$$\Omega_{ij} = K \theta_i \wedge \theta_j$$

6.6. Versão local do Teorema de Gauss Bonnet

Veremos nesta seção uma versão local do teorema de Gauss Bonnet, Teorema 6.72, o qual já permitirá uma interpretação de curvatura em termos da soma de ângulos internos de triângulos geodésicos, vide Exercício 6.73. A demonstração a seguir, a qual é baseada em [Kuh], é composta por três ingredientes: Eq.(6.5.4) (recorde Exercício 6.68), teorema de Stokes (vide Teorema 4.32) e a equação do giro do vetor tangente de uma curva fechada i.e., Eq.(6.6.3).

Teorema 6.72.

Sejam M variedade Riemanniana de dimensão dois, $F : U \rightarrow F(U) \subset M$ parametrização onde U é homomorfo a um disco e $\partial F(U)$ é curva suave por partes, com número finito de quinas, sendo θ_i os ângulos externos. Temos então:

$$\int_{F(U)} K dA + \int_{\partial F(U)} k_g dl + \left(\sum_i \theta_i \right) = 2\pi.$$

Aqui k_g é a **curvatura geodésica**, ou seja dado um referencial ortonormal e_1, e_2 ao longo de $\partial F(U)$ onde e_1 é tangente a $\partial F(D)$ e e_2 ortogonal a $\partial F(D)$ e apontando para o interior de $F(U)$ definimos $k_g = \langle \nabla_{e_1} e_1, e_2 \rangle$.

Demonstração. Podemos supor sem perda de generalidade (compondo com um difeomorfismo em espaços Euclidianos) que ∂U é tangente as retas $\{x_2 = c\}$ em apenas um número finito de pontos. Considere uma parametrização $\alpha : [a, b] \rightarrow \partial F(U)$ com $\alpha'(t) = e_1(t)$. Após passar por um refinamento temos uma partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_j < t_{j+1} < \dots < t_k = b$ tal que para $t \in (t_j, t_{j+1})$ o ponto $\alpha(t)$ não é ponto de quina e o vetor $F^{-1}(\alpha)'(t)$ não é tangente as retas $\{x_2 = c\}$. Seja um referencial ortonormal ξ_1, ξ_2 em aberto contendo $F(U)$ com $\xi_1 = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\|\frac{\partial F}{\partial x_1}\|}$ e ξ_2 é tal que $\{\xi_i(t) = \xi_i \circ \alpha(t)\}$ tenha mesma orientação com $\{e_i(t)\}$. Temos então que:

$$\begin{aligned} e_1(t) &= \cos(\vartheta(t))\xi_1(t) + \sin(\vartheta(t))\xi_2(t) \\ e_2(t) &= -\sin(\vartheta(t))\xi_1(t) + \cos(\vartheta(t))\xi_2(t) \end{aligned} \quad (6.6.1)$$

onde $\vartheta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Fácil verificar que:

$$\begin{aligned}\xi_1(t) &= \cos(\varphi(t))e_1(t) - \sin(\varphi(t))e_2(t) \\ \xi_2(t) &= \sin(\varphi(t))e_1(t) + \cos(\varphi(t))e_2(t)\end{aligned}\quad (6.6.2)$$

Aceitemos (sem demonstração) o lema de giro de e_1 ou seja

$$2\pi - \left(\sum_i \theta_i\right) = \int_a^b \frac{d\vartheta}{dt} dt = \sum_i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t_i+\epsilon}^{t_{i+1}-\epsilon} \frac{d\vartheta}{dt} dt \quad (6.6.3)$$

Substituindo $\frac{d}{dt}\langle e_1, \xi_1 \rangle = -\sin(\varphi(t))\frac{d\varphi}{dt}$ em Eq.(6.6.3) temos:

$$\begin{aligned}2\pi - \left(\sum_i \theta_i\right) &= \sum_j \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t_j+\epsilon}^{t_{j+1}-\epsilon} \frac{-1}{\sin(\vartheta(t))} \frac{d}{dt} \langle e_1, \xi_1 \rangle dt \\ &= \sum_j \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t_j+\epsilon}^{t_{j+1}-\epsilon} \frac{-1}{\sin(\vartheta(t))} \left\langle \frac{\nabla}{dt} e_1, \xi_1 \right\rangle dt \\ &\quad + \sum_j \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t_j+\epsilon}^{t_{j+1}-\epsilon} \frac{-1}{\sin(\vartheta(t))} \langle e_1, \frac{\nabla}{dt} \xi_1 \rangle dt \\ &\stackrel{(6.6.2)}{=} \sum_j \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t_j+\epsilon}^{t_{j+1}-\epsilon} \frac{-\cos(\vartheta(t))}{\sin(\vartheta(t))} \left\langle \frac{\nabla}{dt} e_1, e_1(t) \right\rangle dt \\ &\quad + \sum_j \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t_j+\epsilon}^{t_{j+1}-\epsilon} \frac{\sin(\vartheta(t))}{\sin(\vartheta(t))} \left\langle \frac{\nabla}{dt} e_1, e_2(t) \right\rangle dt \\ &\quad + \sum_j \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t_j+\epsilon}^{t_{j+1}-\epsilon} \frac{-1}{\sin(\vartheta(t))} \langle e_1, \frac{\nabla}{dt} \xi_1 \rangle dt \\ &\stackrel{(6.6.1)}{=} \sum_j \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t_j+\epsilon}^{t_{j+1}-\epsilon} k_g \circ \alpha(t) dt \\ &\quad + \sum_j \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t_j+\epsilon}^{t_{j+1}-\epsilon} \frac{-\cos(\vartheta(t))}{\sin(\vartheta(t))} \langle \xi_1(t), \frac{\nabla}{dt} \xi_1 \rangle dt \\ &\quad + \sum_j \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t_j+\epsilon}^{t_{j+1}-\epsilon} \frac{-\sin(\vartheta(t))}{\sin(\vartheta(t))} \langle \xi_2(t), \frac{\nabla}{dt} \xi_1 \rangle dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\partial F(U)} k_g dl + \int_{\partial F(U)} -\omega_{12} \\
&\stackrel{(*)}{=} \int_{\partial F(U)} k_g dl + \int_{F(U)} -d\omega_{12} \\
&\stackrel{(6.5.4)}{=} \int_{\partial F(U)} k_g dl + \int_{F(U)} \Omega_{12}
\end{aligned}$$

onde na igualdade (*) foi utilizado o teorema de Stokes. $\square$

Agora já podemos dar uma interpretação interessante da curvatura em termos de triângulos, pelo menos para superfícies.

Exercício 6.73.

Sejam M variedade Riemanniana de dimensão dois, $F : U \rightarrow F(U) \subset M$ parametrização onde U é homomorfo a um disco e $\partial F(U)$ é um triângulo geodésico, ou seja composta por 3 segmentos de geodésicas (i.e, $\nabla_{e_1} e_1 = 0$). Sejam $\{\varphi_i\}_{i=1\dots 3}$ os ângulos internos. Verifique

1. Se $K = 0$, então $\sum_{i=1}^3 \varphi_i = \pi$
2. Se $K > 0$ então $\sum_{i=1}^3 \varphi_i > \pi$
3. Se $K < 0$ então $\sum_{i=1}^3 \varphi_i < \pi$

6.7. (*) Curvatura e fibrado de referenciais

Nesta seção consideramos um fibrado Euclidiano $\mathbb{R}^k \rightarrow E^{m+k} \rightarrow (M^m, \mathbf{g})$ com métrica $\mathbf{h}$ nas fibras e conexão $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ compatível com $\mathbf{h}$. Sejam $O(E)$ o fibrado de referenciais ortonormal e $\hat{\mathcal{H}}$ distribuição induzida por ∇ , recorde Seção 5.4. Desejamos aqui comentar as relações entre a curvatura de E e a distribuição $\hat{\mathcal{H}}$ e utilizar tais relações para inferir alguns resultados relevantes.

6.7.1. Fibrado de referenciais, formas de conexão e curvatura

Já havíamos comentado na Seção 5.4 como ∇ induzia a distribuição $\hat{\mathcal{H}}$ em $O(E)$. Ocorre que ∇ também induz (de uma única maneira) uma **$\mathfrak{o}$ -forma de conexão** $\hat{\omega}$ em $O(E)$ ou seja:

- (i) $\hat{\omega} \in \Omega^1(O(E), \mathfrak{o})$, i.e., uma 1-forma de $O(E)$ que retorna valores na álgebra de Lie $\mathfrak{o}$ de $\mathbb{O}(k)$;
- (ii) $\hat{\omega}(d\mu_z(X)) = X$ para $X \in \mathfrak{g}$;
- (iii) $\hat{\omega}(d\mu^g(\cdot)) = g^{-1}\hat{\omega}g$.

Antes mesmo de tentar entender como ∇ determina unicamente $\hat{\omega}$ (vide Proposição 6.75), é natural nos perguntarmos como este novo conceito se relaciona com os objetos matemáticos que já conhecemos, ou seja é natural nos perguntarmos:

- Qual a relação entre $\hat{\omega} \in \Omega^1(O(E), \mathfrak{o})$ e a matriz de 1 formas de conexão de ∇ associada a um referencial local, i.e., $\omega = [\omega_{ij}] \in \Omega^1(M, \mathfrak{o})$?
- Qual a relação entre a $\mathfrak{o}$ -forma de conexão $\hat{\omega}$ e a distribuição $\hat{\mathcal{H}}$?

O lema a seguir responde estas perguntas.

Lema 6.74. (a) Considere $\hat{\xi} : U \ni x \rightarrow \{\xi_i(x)\} \in O(E)$ um referencial local e $\omega = [\omega_{ij}]$ a matriz de 1-forma de conexão, i.e., definidas pela equação $\nabla_{(\cdot)}\xi_i = \sum_j \omega_{ij}(\cdot) \otimes \xi_j$. Temos então que

$$\hat{\xi}^*\hat{\omega} = \omega^t = -\omega. \quad (6.7.1)$$

(b) Um vetor $\hat{X} \in T_{\hat{\xi}}O(E)$ é tangente a $\hat{\mathcal{H}}_{\hat{\xi}}$ se e somente se $\hat{\omega}(\hat{X}) = 0$ ou seja:

$$\ker \hat{\omega} = \hat{\mathcal{H}} \quad (6.7.2)$$

Este lema segue direto da proposição a seguir, que explicita em coordenadas exatamente como ∇ induz a $\hat{\omega} \in \Omega^1(O(E), \mathfrak{o})$. Destacamos que a demonstração desta proposição é apresentada apenas a título de curiosidade, ela não será necessária para compreender os resultados que queremos discutir neste seção.

Proposição 6.75.

Considere $\hat{\xi} : U \ni x \rightarrow \{\xi_i(x)\} \in O(E)$ um referencial local e defina

$$\psi : U \times \mathbb{O}(k) \ni (x, g) \rightarrow \mu(\xi(x), g) \in \pi^{-1}(U).$$

Então ∇ induz uma 1 $\mathfrak{o}$ -forma de conexão $\hat{\omega}$ em $O(E)$ da seguinte maneira:

$$\psi^*\hat{\omega}_{(x,g)}(V_1, V_2) = g^{-1}\omega^t(V_1)g + g^{-1}V_2$$

Continuação.

onde $\omega = [\omega_{ij}]$ é a matriz de 1-formas de conexão definidas por

$$\nabla_{(\cdot)} \xi_i = \sum_j \omega_{ij}(\cdot) \otimes \xi_j.$$

Demonstração. Iremos demonstrar que $\hat{\omega}$ está bem definida, i.e., não depende da definição de ψ (ou seja da escolha de ξ).

Seja $\tilde{\xi}$ um outro referencial e $h : U \rightarrow Gl(n, \mathbb{R})$ a aplicação tal que

$$\xi(x) = \mu(\tilde{\xi}(x), h(x)).$$

Temos então que:

$$\psi(x, g) = \tilde{\psi}(x, h(x)g)$$

Derivando a equação acima temos que se $d\psi_{(x,g)}(V_1, V_2) = d\tilde{\psi}_{(x,hg)}(\tilde{V}_1, \tilde{V}_2)$ então:

$$(\tilde{V}_1, \tilde{V}_2) = (V_1, dhV_1g + hV_2). \quad (6.7.3)$$

Note também que:

$$h^{-1}\tilde{\omega}^th = -h^{-1}dh + \omega^t \quad (6.7.4)$$

De fato sabemos pela transformação de gauge (vide Proposição 6.64) que

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= d(h^{-1})^th^t + (h^{-1})^t\omega h^t \\ \tilde{\omega}^t &= hdh^{-1} + h\omega^th^{-1} \end{aligned}$$

Assim sendo $h^{-1}\tilde{\omega}^th = dh^{-1}h + \omega^t$. Tal equação e o fato de $dh^{-1}h + h^{-1}dh = 0$ implicam a equação (6.7.4). Podemos finalmente concluir que:

$$\begin{aligned} \psi^*\hat{\omega}_{(x,g)}(V_1, V_2) &:= g^{-1}\omega^t(V_1)g + g^{-1}V_2 \\ &= g^{-1}h^{-1}\tilde{\omega}^t(V_1)hg + g^{-1}h^{-1}dh(V_1)g + g^{-1}V_2 \\ &= (hg)^{-1}\tilde{\omega}^t(\tilde{V}_1)(hg) + (hg)^{-1}(\tilde{V}_2) \\ &=: (\tilde{\psi}^*\hat{\omega})_{(x,hg)}(\tilde{V}_1, \tilde{V}_2) \end{aligned}$$

onde utilizamos a equação (6.7.4) na segunda igualdade e a equação (6.7.3) na terceira igualdade. $\square$

Podemos agora definir **2-o forma de curvatura**, a qual será importante para os teoremas que desejamos demonstrar nesta seção.

$$\hat{\Omega} = d\hat{\omega} + [\hat{\omega}, \hat{\omega}] \quad (6.7.5)$$

O lema a seguir resume as principais propriedades de $\hat{\Omega}$ e como este novo conceito se relaciona com os conceitos apresentados até o momento.

Lema 6.76.

- (a) Considere $\hat{\xi} : U \ni x \rightarrow \{\xi_i(x)\} \in O(E)$ um referencial local e $\Omega = [\Omega_{ij}]$ a matriz de 2-forma de curvatura, i.e., definidas pela equação $R(\cdot, \cdot)\xi_i = \sum_j \Omega_{ij}(\cdot) \otimes \xi_j$. Então $\hat{\xi}^*\hat{\Omega} = \Omega$.
- (b) $\mu_g^*\hat{\Omega} = g^{-1}\Omega g$.
- (c) Sejam $\hat{X}, \hat{Y}$ vetores em $\hat{\mathcal{H}}_{\hat{\xi}_p}$ e considere extensões $\hat{X}, \hat{Y}$ em $O(E)$ projetáveis com respeito a $\pi : O(E) \rightarrow M$ e tangentes a $\hat{\mathcal{H}}$. Denotemos $[\hat{X}, \hat{Y}]_x^\nu$ a projeção (com respeito a decomposição dada por $\hat{\mathcal{H}}$) de $[\hat{X}, \hat{Y}]_x$ no espaço tangente das fibras $\hat{\pi}^{-1}(x) = O(E_x)$. Seja $V \in \mathfrak{o}$ tal que $d\mu_{\hat{\xi}_p}(V) = [\hat{X}, \hat{Y}]_{\hat{\xi}_p}^\nu$. Vamos denotar tal elemento V por $[\hat{X}, \hat{Y}]^\vee$. Temos então que:
 $\Omega_{\hat{\xi}_p}(\hat{X}, \hat{Y}) = -[\hat{X}, \hat{Y}]^\vee$.

Demonstração. Vamos aqui rapidamente indicar os ingredientes das provas das propriedades, deixando para o(a) leitor(a) interessado completar os detalhes. A propriedade (a) segue do item (a) do Lema 6.74. O item (b) segue direto da invariância de $\hat{\omega}$ (i.e., da propriedade (iii) de uma $\mathfrak{o}$ -forma de conexão). Afim de provar o item (c) lembremos que $\hat{\omega}(\hat{X}) = \hat{\omega}(\hat{Y}) = \hat{\omega}([\hat{X}, \hat{Y}]^h) = 0$. Assim aplicando a definição de $\hat{\Omega}$ e a fórmula de derivação temos:

$$\begin{aligned}
 \hat{\Omega}_{\hat{\xi}_p}(\hat{X}, \hat{Y}) &= d\hat{\omega}_{\hat{\xi}_p}(\hat{X}, \hat{Y}) + [\hat{\omega}(\hat{X}), \hat{\omega}(\hat{Y})]_{\hat{\xi}_p} \\
 &= -\hat{\omega}_{\hat{\xi}_p}([\hat{X}, \hat{Y}]) \\
 &= -\hat{\omega}_{\hat{\xi}_p}([\hat{X}, \hat{Y}]^\nu) \\
 &= -\hat{\omega}_{\hat{\xi}_p}(\mu_{\hat{\xi}_p}[\hat{X}, \hat{Y}]^\vee) \\
 &= -[\hat{X}, \hat{Y}]^\vee
 \end{aligned}$$

□

6.7.2. Integrabilidade e curvatura

Estamos aptos a enunciar o nosso primeiro resultado desta seção.

Teorema 6.77.

As seguintes afirmações são equivalentes.

- (a) O tensor curvatura R do fibrado Euclidiano $\mathbb{R}^k \rightarrow E^{m+k} \rightarrow M^m$ é nulo.
- (b) $\widehat{\mathcal{H}}$ é involutivo e assim (pelo teorema de Frobenius) integrável.
- (c) Transporte paralelo independe dos caminhos contráteis.
- (d) para cada p existe uma vizinhança U de p , tal que para toda base $\{\xi_i\}$ de E_p existe uma extensão $\hat{\xi} = \{\hat{\xi}_i\} : U \rightarrow O(E)$ tal que $(\nabla_{(\cdot)} \hat{\xi}_i)_x = 0$, para todo $x \in U$, i.e., **referenciais locais paralelos**.

Demonstração. Na Proposição 6.9 já discutimos a equivalência entre (b),(c) e (d).

Como veremos a seguir a equivalência entre (a) e (b) seguirá do Lema 6.76. De fato,

$$\begin{aligned}\Omega_p(\vec{X}, \vec{Y}) &= (\hat{\xi})_p^* \hat{\Omega}(\vec{X}, \vec{Y}) \\ &= \hat{\Omega}_{\hat{\xi}_p}(\hat{X}, \hat{Y}) \\ &= [\hat{X}, \hat{Y}]^\vee\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}\Omega_p(\vec{X}, \vec{Y}) = 0 &\iff [\hat{X}, \hat{Y}]^\vee = 0 \\ &\iff [\hat{X}, \hat{Y}]_{\hat{\xi}_p}^\nu = 0\end{aligned}$$

Assim $\Omega_p = 0$ se e somente se $\widehat{\mathcal{H}}$ for uma distribuição involutiva. □

Vemos a seguir um belo resultado de equações diferenciais, o qual será muito relevante para demonstrar o teorema fundamental das imersões isométricas.

Teorema 6.78.

Sejam ω uma $\mathfrak{o}(k)$ -forma definida em um domínio $U \subset \mathbb{R}^m$ e $p \in U$. Então as seguintes afirmações são equivalentes.

- (a) ω atende a chamada **Equação de Maurer-Cartan**, i.e.,

$$d\omega = \omega \wedge \omega; \tag{6.7.6}$$

Continuação.

(b) existe uma vizinhança $\tilde{U} \subset U$ de p tal que para todo $g \in \mathbb{O}(k)$ existe uma única solução $\varphi : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{O}(k)$ da equação diferencial

$$d\varphi = \omega\varphi, \quad \varphi(p) = g. \quad (6.7.7)$$

Demonstração. Vamos demonstrar que o item (a) implica o item (b) ou seja, vamos supor primeiro que Eq. (6.7.6) é atendida. Considere o espaço total $E := U \times \mathbb{R}^k$ e a conexão $\nabla e_i = \sum_j \omega_{ij} \otimes e_j$. Eq. (6.7.6) e equação estrutural implicam que a curvatura Ω desta conexão é nula. Assim sendo pelo Teorema 6.77 existe $\tilde{\xi} : \tilde{U} \rightarrow O(E)$ com $0 = \tilde{\omega} = \tilde{\xi}^* \hat{\omega}$ e tal que $e(p) \cdot (g^t)^{-1} = \tilde{\xi}(p)$. Seja φ a matriz com $e_i = \sum_j \varphi_{ij} \tilde{\xi}_j$. Então pela transformação de gauge (vide Proposição 6.64) temos

$$\omega = (d\varphi)\varphi^{-1} + \varphi\tilde{\omega}\varphi^{-1}.$$

A equação acima e o fato de $\tilde{\omega} = 0$ implicam que $d\varphi = \omega\varphi$ e $\varphi(p) = g$.

Vamos agora demonstrar que o item (b) implica o item (a), ou seja vamos supor que $d\varphi = \omega\varphi$ e verificar que $d\omega = \omega \wedge \omega$. Visto que $d\varphi = \omega\varphi$ temos que $\omega = d\varphi\varphi^{-1}$. Como $d\varphi\varphi^{-1} + \varphi d(\varphi^{-1}) = 0$ concluímos que $d(\varphi^{-1}) = -\varphi^{-1}d\varphi\varphi^{-1}$. Logo

$$\begin{aligned} d\omega &= d(d\varphi\varphi^{-1}) \\ &= -d\varphi \wedge d(\varphi^{-1}) \\ &= d\varphi \wedge (\varphi^{-1}d\varphi\varphi^{-1}) \\ &= \omega \wedge \omega. \end{aligned}$$

□

6.7.3. Holonomia e curvatura

Teorema 6.79.

Seja $(M, \mathbf{g})$ variedade Riemanniana. Considere uma vizinhança $U \subset M$ de $p \in M$ e campos vetoriais $\vec{e}_1 \in \mathfrak{X}(M)$ and $\vec{e}_2 \in \mathfrak{X}(M)$ ortogonais em p e tais que $[\vec{e}_1, \vec{e}_2] = 0$ em U . Seja $\alpha_s : [0, 1] \rightarrow U$ uma família de loops definida como concatenação de curvas integrais dos campos vetoriais $\sqrt{s}\vec{e}_1, \sqrt{s}\vec{e}_2, -\sqrt{s}\vec{e}_1$ e $-\sqrt{s}\vec{e}_2$,

Continuação.

i.e.,

$$\alpha_s(t) = \begin{cases} e^{4t\sqrt{s}e_1}(p) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ e^{4(t-\frac{1}{4})\sqrt{s}e_2}(\alpha_s(\frac{1}{4})) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{2}{4} \\ e^{-4(t-\frac{2}{4})\sqrt{s}e_1}(\alpha_s(\frac{2}{4})) & \frac{2}{4} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ e^{-4(t-\frac{3}{4})\sqrt{s}e_2}(\alpha_s(\frac{3}{4})) & \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Defina a curva de isometrias $s \rightarrow \beta(s) = \mathcal{P}_{\alpha_s} \in \text{Iso}(E_p)$. Então:

$$\beta'(0) = -R(e_1, e_2)_p.$$

Notemos que a proposição acima implica em particular que $R_p(X, Y)$ está na álgebra de Lie do grupo de Lie $\text{Hol}_p(E_p)$.

Demonstração. Considere os levantamentos horizontais $\sqrt{s}\hat{e}_1$, $\sqrt{s}\hat{e}_2$, dos campos $\sqrt{s}\vec{e}_1$, $\sqrt{s}\vec{e}_2$ e os levantamentos $t \rightarrow \hat{\alpha}_s(t)$ das curvas α_s .

Defina a curva $s \rightarrow \hat{\beta}(s) = \hat{\alpha}_s(1) = \mathcal{P}_{\alpha_s}(\hat{\xi}_p) \in O(E_p)$. Afirmamos que:

$$\hat{\beta}'(0) \stackrel{(*)}{=} [\hat{e}_1, \hat{e}_2]_{\hat{\xi}_p} \stackrel{(**)}{=} [\hat{e}_1, \hat{e}_2]_{\hat{\xi}_p}^\nu. \quad (6.7.8)$$

De fato, a igualdade (*) segue da relações entre $t \rightarrow \hat{\alpha}_s(t)$ e os campos $\sqrt{s}\hat{e}_1$, $\sqrt{s}\hat{e}_2$ bem como a propriedade de aproximação do colchete de Lie (recorde Exercício 2.47). A igualdade (**) segue da hipótese, i.e., $[\vec{e}_1, \vec{e}_2]_p = [\hat{e}_1, \hat{e}_2]_{\hat{\xi}_p}^h = 0$.

Desejamos então relacionar $[\hat{e}_1, \hat{e}_2]_{\hat{\xi}_p}^\nu$ com $R_p(e_1, e_2)$.

Para tanto vamos considerar a ação a direita $\mu : O(E_p) \times \mathbb{O}(k) \rightarrow O(E_p)$ do fibrado $O(E)$ e a ação a esquerda $\kappa : K \times O(E_p) \rightarrow O(E_p)$ onde $K = \text{Iso}(E_p)$. Definamos $\underline{\mu} : O(E_p) \rightarrow \mathbb{O}(k)$ como inversa de $\mu_{\hat{\xi}_p} = \mu(\hat{\xi}_p, \cdot) : \mathbb{O}(k) \rightarrow O(E_p)$ e $\underline{\kappa} : O(E_p) \rightarrow K$ como inversa de $\kappa^{\hat{\xi}_p} = \kappa(\cdot, \hat{\xi}_p) : K \rightarrow O(E)$. Segue então que

$$\underline{\kappa}(\hat{\beta}(s)) = \beta(s). \quad (6.7.9)$$

Também não é difícil verificar que:

$$\underline{\mu} \circ \kappa^{\hat{\xi}_p}(g) = [g]^t, \quad (6.7.10)$$

onde $[g]$ é a representação de $g \in K$ na base $\{\xi_i\} = \hat{\xi}_p$. Visto que a representação matricial de R na base $\hat{\xi}_p$ é Ω^t , i.e., $[R(X, Y)] = \Omega(X, Y)^t$, temos que Eq.(6.7.10) implica:

$$d(\underline{\mu} \circ \kappa^{\hat{\xi}_p})R(e_1, e_2) = \Omega_p(e_1, e_2). \quad (6.7.11)$$

Assim sendo

$$\begin{aligned}
 d\mu d\kappa^{\hat{\xi}_p} R(e_1, e_2) &\stackrel{(i)}{=} \Omega_p(e_1, e_2) \\
 &\stackrel{(ii)}{=} (\hat{\xi}^* \hat{\Omega})_p(e_1, e_2) \\
 &\stackrel{(iii)}{=} \hat{\Omega}(\hat{e}_1, \hat{e}_2)_{\hat{\xi}_p} \\
 &\stackrel{(iv)}{=} -[\hat{e}_1, \hat{e}_2]^\vee \\
 &\stackrel{(v)}{=} -d\mu[\hat{e}_1, \hat{e}_2]_{\hat{\xi}_p}^\nu
 \end{aligned}$$

onde (i) segue da Eq. (6.7.11), (ii) segue do Lema 6.76, (iii) segue do fato que $\hat{e}_i \circ \hat{\xi} = d\hat{\xi}\vec{e}_i$ e (iv), (v) seguem do Lema 6.76. Logo

$$R(e_1, e_2)_p = -d\kappa[\hat{e}_1, \hat{e}_2]_{\hat{\xi}_p}^\nu. \quad (6.7.12)$$

Concluimos que:

$$R(e_1, e_2)_p \stackrel{(6.7.12)}{=} -d\kappa[\hat{e}_1, \hat{e}_2]_{\hat{\xi}_p}^\nu \stackrel{(6.7.8)}{=} -d\kappa\hat{\beta}'(0) \stackrel{(6.7.9)}{=} -\beta'(0)$$

□

6.8. Teorema fundamental das imersões isométricas

Nesta seção demonstraremos o teorema fundamental das imersões isométricas que, a grosso modo falando, garante que uma imersão isométrica é localmente determinada por candidatos a primeira e segunda forma, quando tais candidatos atendem certas equações de compatibilidade, i.e., as equações de Gauss, Codazzi e Ricci.

6.8.1. Convenções e recordações

Como discutimos anteriormente uma imersão $\varphi : (M, \mathbf{g}) \mapsto (\widetilde{M}, \widetilde{\mathbf{g}})$ é **isométrica** se $\varphi^*\widetilde{\mathbf{g}} = \mathbf{g}$. Em particular uma imersão $\varphi : M \mapsto (\widetilde{M}, \widetilde{\mathbf{g}})$ torna-se isométrica se definimos a **métrica induzida** $\mathbf{g} := \varphi^*\widetilde{\mathbf{g}}$.

Ao longo desta seção, a menos que algo seja dito ao contrário, estaremos supondo que M é subvariedade mergulhada de $\widetilde{M}$ e φ é a inclusão $i : M \mapsto \widetilde{M}$. Isto porque estamos interessados principalmente nos aspectos locais da teoria das

imersões isométricas. Assim a métrica em M será sempre considerada a métrica induzida. Estaremos denotando a métrica do espaço ambiente $\widetilde{M}$ simplesmente por $\mathbf{g}$ (no lugar de $\tilde{\mathbf{g}}$). A métrica induzida $i^*\mathbf{g}$ na variedade mergulhada M é chamada **primeira forma** (por vezes também será denotada por $\mathbf{g}$). A subvariedade M dotada da primeira forma é chamada então de **subvariedade Riemanniana**.

É conveniente aqui discutir o conceito de **referencial adaptado a imersão**. Dado a subvariedade Riemanniana M e um ponto $p \in M$ podemos sempre encontrar uma vizinhança p em $\widetilde{M}$ e um referencial local ortonormal $e_1 \dots e_{\tilde{m}}$ (onde $\tilde{m} = \dim \widetilde{M}$) definido em uma vizinhança de p com as seguintes propriedades:

1. Para $1 \leq i \leq m = \dim(M)$ temos que $e_i(x)$ é tangente a M se $x \in M$
2. Para $m + 1 \leq \alpha \leq \tilde{m} = \dim(\widetilde{M})$ temos que $e_\alpha(x)$ é normal a M se $x \in M$.

Também é conveniente estabelecer uma *convenção* sobre as letra que usaremos para os índices do referencial adaptado. Estaremos reservando as letras maiúsculas A, B, C para índices de 1 ate $\tilde{m} = \dim(\widetilde{M})$. Estaremos reservando as letras minúsculas i, j, k para os primeiros índices, de 1 ate $m = \dim(M)$. Por fim estaremos reservando as letras gregas α, β, γ para os últimos índices variando de $m + 1$ ate $\tilde{m} = \dim(\widetilde{M})$.

Estaremos considerando no nosso estudo duas conexões afins. A primeira conexão é a conexão Riemanniana em M associada a primeira forma $i^*\mathbf{g}$. Tal conexão é chamada **conexão tangente** e será denotada por ∇ . Mais precisamente:

$$\nabla_X Y(p) = \pi \widetilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}(p)$$

onde $\pi : T_p \widetilde{M} \mapsto T_p M$ é a projeção ortogonal, $\tilde{X}, \tilde{Y}$ são campos suaves de M , $\tilde{X}, \tilde{Y}$ são extensões locais de $\vec{X}, \vec{Y}$ em uma vizinhança de $p \in M$ e $\widetilde{\nabla}$ é a conexão Riemanniana de $\widetilde{M}$. A unicidade da conexão Riemanniana garante que está é a conexão Riemanniana de M com métrica induzida. A outra conexão relevante em nossos estudos será uma conexão definida no espaço normal. Seja $\nu(M)_p$ o espaço normal a $T_p M$. O (espaço total do) **fibrado normal** é definido como $\nu(M) := \cup_{p \in M} \nu_p(M)$. A **conexão normal** $\nabla^\nu : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(\nu(M)) \mapsto \Gamma(\nu(M))$ é então definida como

$$\nabla_X^\nu \xi := \pi^\nu \widetilde{\nabla}_X \tilde{\xi}$$

onde $\pi^\nu : T_p \widetilde{M} \mapsto \nu_p(M)$ é a projeção ortogonal, X é um campo em M , $\tilde{\xi}$ uma extensão de ξ em uma vizinhança de $p \in M$. É possível mostrar que tal conexão está bem definida, ou seja não depende da extensão.

A relação entre a conexão do ambiente $\tilde{\nabla}$ e a conexão tangente ∇ é descrita pelo tensor **segunda forma** $B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Gamma(\nu(M))$ definido como:

$$B(X, Y) = \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} - \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}$$

onde $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ são extensões de $\vec{X}$ e $\vec{Y}$. Como vimos anteriormente

(a) B é bem definido (não depende das extensões)

(b) B é $(1, 2)$ tensor simétrico.

Por vezes também será conveniente tratar o $(1, 2)$ tensor B acima, como o $(0, 3)$ tensor abaixo.

$$\Pi_\eta(X, Y) = g(B(X, Y), \eta)$$

onde X, Y são tangentes a M e η é um vetor normal. Visto que B é simétrico, podemos então definir um operador simétrico (em relação ao produto g) $\mathcal{S}_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ via o tensor segunda forma:

$$g(\mathcal{S}_\eta X, Y) = \Pi_\eta(X, Y)$$

Seja $\eta \in \nu_p(M)$ e $\tilde{\eta}$ uma extensão de η em uma vizinhança de p em $\tilde{M}$. Então

$$\mathcal{S}_\eta(X) = -\pi(\tilde{\nabla}_X \tilde{\eta})$$

onde $\pi : T_p \tilde{M} \rightarrow T_p M$ é a projeção ortogonal e $X \in T_p M$

6.8.2. Equações de Gauss Codazzi e Ricci

Ja havíamos visto a equação de Gauss, algumas consequências e em particular como ela implicava o *teorema Egregium de Gauss*. Vamos agora revisa-la.

Proposição 6.80. eq. de Gauss

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)Z, W) - g(\tilde{R}(X, Y)Z, W) &= g(B(X, Z), B(Y, W)) \\ &\quad - g(B(X, W), B(Y, Z)) \end{aligned}$$

onde X, Y, Z, W são tangentes a M .

A demonstração da próxima equação pode ser encontrada no livro [Car] e veremos nos 2 exercícios logo depois uma formulação mais simples e uma aplicação no caso em que M é hipersuperfície de $\mathbb{S}^{m+1}$.

Proposição 6.81. Eq. de Codazzi

$$(\tilde{\nabla}_X \Pi)(Y, Z, \eta) - (\tilde{\nabla}_Y \Pi)(X, Z, \eta) = g(\tilde{R}(X, Y)Z, \eta)$$

onde $(\tilde{\nabla}_X \Pi)$ é a derivada da segunda forma Π ou seja

$$\begin{aligned} (\tilde{\nabla}_X \Pi)(Y, Z, \eta) &:= X \bullet (\Pi(Y, Z, \eta)) - \Pi(\nabla_X Y, Z, \eta) \\ &\quad - \Pi(Y, \nabla_X Z, \eta) - \Pi(Y, Z, \nabla_X^\nu \eta) \end{aligned}$$

e X, Y, Z são tangentes a M e η é normal a M .

Exercício 6.82.

Suponha que $\tilde{M}$ tem curvatura constante K igual a c e M é uma hipersuperfície. Verifique que

$$\nabla_X \mathcal{S}_\eta(Y) - \nabla_Y \mathcal{S}_\eta(X) = \mathcal{S}_\eta[X, Y]$$

Observação 6.83.

Uma hipersuperfície M^m em um espaço simplesmente conexo $\tilde{M}^{m+1}$ com curvatura constante c (os assim chamados espaços formas) é chamada **isoparamétrica** se suas curvaturas principais são constantes. Tais hipersuperfícies começaram a ser estudadas por Cartan e até hoje em dia são exemplos relevantes. Por exemplo em $\mathbb{R}^3$ superfícies isoparamétricas são cilindros de raio r (que tem curvaturas principais $\lambda_1 = r$ e $\lambda_2 = 0$), esferas de raio r (onde $\lambda_1 = \lambda_2 = r$) e planos. De fato no espaços Euclidianos e hiperbólicos os únicos exemplos são hipersuperfícies totalmente geodésicas ou cilindros que tenham como eixo subvariedades totalmente geodésicas. Porém nas esferas $\mathbb{S}^{m+1}$ existem infinitos exemplos de hipersuperfícies isoparamétricas não homogêneas.

Exercício 6.84.

Seja M^m em $\mathbb{S}^{m+1}$ uma hipersuperfície isoparamétrica. Aceitando que a multiplicidade das curvaturas principais λ_i é constante, i.e, para cada ponto p existe uma distribuição de curvatura E_i (i.e auto-espaço de $\mathcal{S}_\eta$ associado a λ_i), verifique que tais distribuições são integráveis, ou seja E_i coincidem com

Continuação.

espaços tangentes das folhas de folheações $\mathcal{F}_i$ em M (as assim chamadas folheações de curvatura) em M .

Vemos a seguir a última equação fundamental.

Proposição 6.85. Equação de Ricci

$$g(\widetilde{R}(X, Y)\eta, \xi) - g(R^\nu(X, Y)\eta, \xi) = g([\mathcal{S}_\eta, \mathcal{S}_\eta]X, Y)$$

onde η e ξ são vetores normais a M e X e Y tangentes a M .

Exercício 6.86.

Suponha que $\widetilde{M}$ tem curvatura constante K igual a c . Verifique que as afirmações abaixo são equivalentes:

- (a) $R^\nu = 0$ (a conexão normal é flat),
- (b) $[\mathcal{S}_\eta, \mathcal{S}_\xi] = 0$ para qualquer η, ξ normal a M ,
- (c) existe uma base ortonormal que diagonaliza todos os $\mathcal{S}_\eta$.

Observação 6.87.

Exemplos de subvariedades com conexão normal flat são órbitas principais da ação $\text{Ad} : G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ (ação Adjunta) de um grupo de Lie G na sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, quando G admite métrica bi-invariante. Por exemplo considere $G = SU(3)$. Neste caso a álgebra de Lie é $\mathfrak{su}(3) = \{X, X + X^* = 0, \text{tr} X = 0\}$, uma métrica bi-invariante é $g(X, Y) = \text{tr} \text{Re} X, Y^*$ e a ação $\text{Ad} : G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ é $\text{Ad}(g)(X) = gXg^{-1}$. Defina $\mathfrak{t}$ o subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$ das matrizes diagonais com traço zero. Seja $Z \in \mathfrak{t}$ a matriz com elementos da diagonal diferentes entre si. Então $G(Z) = SU(3)/T^2$ (onde T^2 é o subgrupo de $SU(3)$ das matrizes diagonais) é uma órbita principal com fibrado normal flat. Além disto tal órbita intersecta $\mathfrak{t}$ ortogonalmente e o espaço normal em qualquer ponto $p = gZg^{-1} \in G(Z)$ é $\text{Ad}(g)(\mathfrak{t})$ (vide maiores detalhes em [AB15]).

As equações de Gauss, Codazzi e Ricci parecem ter naturezas bem diferentes. Porém veremos a seguir que elas fazem parte da equação de curvatura. Para entender

este fato precisamos fazer algumas observações sobre formas de conexão. Seja $\{e_A\}$ um referencial adaptado a M (i.e a uma vizinhança de $p \in M$). Então $\tilde{\nabla}_{(\cdot)} e_A = \sum_B \tilde{\omega}_{A,B}(\cdot) \otimes e_B$. Como $\nabla_{(\cdot)} e_i = \sum_j \omega_{i,j}(\cdot) \otimes e_j$ concluímos que $\tilde{\omega}_{i,j} = \omega_{i,j}$ (para $1 \leq i, j \leq m$). Porém note que a matriz $\tilde{\omega}$ não é a matriz ω pois $\tilde{\omega}$ tem mais linhas e colunas. Note também que $\mathcal{S}_{e_\alpha}(\cdot) = -\pi \tilde{\nabla}_{(\cdot)} e_\alpha = \sum_i \tilde{\omega}_{i,\alpha}(\cdot) \otimes e_i$ (onde $\pi : TM \rightarrow M$ é a projeção ortogonal) e assim que $\Pi_{e_\alpha} = \sum_i \tilde{\omega}_{i,\alpha} \otimes \tilde{\theta}_i$. Posto estas observações estamos prontos para rever as equações fundamentais agora usando a linguagem de formas.

Proposição 6.88.

Seja M subvariedade Riemanniana de uma variedade Riemanniana $\tilde{M}$. Seja $\{e_A\}$ um referencial adaptado a M e denote $\tilde{\omega}_{A,B}$ as 1-formas de conexão e $\tilde{\Omega}_{i,j}$ as 2-formas de curvatura de $\tilde{M}$ associadas a $\{e_A\}$. Então

- (a) $d\tilde{\omega}_{i,j} = \sum_k \tilde{\omega}_{i,k} \wedge \tilde{\omega}_{k,j} + \sum_\alpha \tilde{\omega}_{i,\alpha} \wedge \tilde{\omega}_{\alpha,j} - \tilde{\Omega}_{i,j}$ é a equação de Gauss escrita no referencial adaptado.
- (b) $d\tilde{\omega}_{i,\alpha} = \sum_k \tilde{\omega}_{i,k} \wedge \tilde{\omega}_{k,\alpha} + \sum_\beta \tilde{\omega}_{i,\beta} \wedge \tilde{\omega}_{\beta,\alpha} - \tilde{\Omega}_{i,\alpha}$ é a equação de Codazzi escrita no referencial adaptado.
- (c) $d\tilde{\omega}_{\alpha,\beta} = \sum_i \tilde{\omega}_{\alpha,i} \wedge \tilde{\omega}_{i,\beta} + \sum_\gamma \tilde{\omega}_{\alpha,\gamma} \wedge \tilde{\omega}_{\gamma,\beta} - \tilde{\Omega}_{\alpha,\beta}$ é a equação de Ricci escrita no referencial adaptado.

Concluimos então que as equações de Gauss, Codazzi e Ricci são partes da equação de curvatura:

$$d\tilde{\omega} = \tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega} - \tilde{\Omega}.$$

6.8.3. Teorema fundamental das imersões isométricas

A seguir apresentamos o teorema fundamental das imersões isométricas, sendo que sua demonstração será baseada no [PT].

Teorema 6.89.

Seja $E = M^m \times \mathbb{R}^k$ um fibrado vetorial trivial. *Suponha que:*

- M admita uma **primeira forma** i.e., métrica $\mathbf{g}$, um referencial ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^m$ com suas formas duais $\{\theta_i\}_{i=1}^m$ e sejam $\{\omega_{i,j}\}$ as formas de conexão Riemanniana associadas a $\mathbf{g}$;

Continuação.

- o **fibrado vetorial** E admita uma métrica nas fibras $\mathbf{h}$ e uma conexão afim $\nabla^{\mathbf{h}}$ compatível com $\mathbf{h}$ e considere $\{e_\alpha\}_{\alpha=m+1}^{m+k}$ ortonormal de $\mathbf{h}$ e as formas de conexão $\{\omega_{\alpha,\beta}\}$ das formas da conexão $\nabla^{\mathbf{h}}$;
- existam formas $\{\omega_{\mathbf{i},\alpha}\}$ ($\mathbf{i} = 1 \cdots m$, $\alpha = m+1, \cdots m+k$) que são candidatos a **segunda forma**, i.e., ao definir o $(1, 2)$ tensor A como $A(e_\alpha) = \sum_{i=1}^m \omega_{\mathbf{i},\alpha} \otimes \theta_i$ ele se torna (por hipótese) simétrico. Vamos definir $\omega_{\alpha,\mathbf{i}} = -\omega_{\mathbf{i},\alpha}$;
- $\omega = (\omega_{A,B})$ ($1 \leq A, B \leq m+k$) atenda eq. de **Gauss, Codazzi e Ricci** em $\mathbb{R}^{m+k}$ ou seja $d\omega = \omega \wedge \omega$.

Temos então que dado $p_0 \in M$ e $q_0 \in \mathbb{R}^{m+k}$ e uma base ortonormal $v_1, \cdots, v_{m+k}$ de $\mathbb{R}^{m+k}$ (com métrica canônica) existe uma vizinhança U de p_0 tal que

- Existe uma única imersão isométrica $\psi : (U, p_0) \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$, com $\psi(p_0) = q_0$ tal que $d\psi_{p_0} e_i = v_i$ ($i = 1, \cdots m$).
- Existe um isomorfismo de fibrado vetorial $F : E \rightarrow \nu(\psi(U))$ com
 - $F(e_\alpha) = v_\alpha$
 - $\Pi_{F(\xi)}(d\psi(X), d\psi(Y)) = A(\xi)(X, Y)$
 - $F(\nabla_X^{\mathbf{h}} \xi) = \nabla_{d\psi(X)}^\nu F(\xi)$

Demonstração. Visto que $d\omega = \omega \wedge \omega$, temos pelo Teorema 6.78 que existe um única aplicação $\varphi : U \rightarrow \mathbb{O}(m+k)$ tal que

$$d\varphi = \omega\varphi, \quad \varphi(p) = [v], \quad (6.8.1)$$

onde $[v]$ é a matriz com linhas v_A . Definindo V_A como as linhas de φ , podemos concluir que a equação (6.8.1) equivale a equação

$$dV_A = \sum_B \omega_{A,B} \otimes V_B, \quad V_A(p_0) = v_A \quad (6.8.2)$$

Para provar o item (a) basta encontrar uma aplicação $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ (diminuindo U se necessário) tal que:

$$d\psi = \sum_{i=1}^m \theta_i \otimes V_i \quad (6.8.3)$$

De fato, se uma aplicação ψ satisfaz a equação acima, então $d\psi(e_i) = V_i$ o que implica não só que ela é uma imersão, mas também que leva referencial ortonormal $\{e_i\}$ (com a métrica $\mathbf{g}$) no referencial ortonormal $\{v_i\}$ (com a métrica do espaço Euclidiano) ou seja ψ se torna uma imersão isométrica e assim a demonstração do item (a) terá terminado.

Note que $\eta := \sum_{i=1}^m \theta_i \otimes V_i$ é uma 1-forma com valores em $\mathbb{R}^{m+k}$. Pelo lema de Poincaré, para uma vizinhança pequena de p_0 se $d\eta = 0$ então existe uma aplicação ψ tal que $d\psi = \eta$. Assim sendo para demonstrar a Eq.(6.8.3) basta provar a equação abaixo:

$$d\left(\sum_{i=1}^m \theta_i \otimes V_i\right) = 0 \quad (6.8.4)$$

Afim de provar a Eq. (6.8.4) defina $h_{i,\alpha,j}$ como $\omega_{i,\alpha} = \sum_j h_{i,\alpha,j} \theta_j$. Visto que $A(e_\alpha)$ é simétrica temos $h_{i,\alpha,j} = \omega_{i,\alpha}(e_j) = \omega_{j,\alpha}(e_i) = h_{j,\alpha,i}$. Assim concluímos:

$$\begin{aligned} d \sum_{i=1}^m \theta_i V_i &= \sum_i (d\theta_i \otimes V_i - \theta_i \wedge \sum_A \omega_{i,A} \otimes V_A) \\ &= \sum_i d\theta_i \otimes V_i - \sum_{i,j} \theta_i \wedge \omega_{i,j} \otimes V_j \\ &\quad + \sum_{i,\alpha} \theta_i \wedge \omega_{i,\alpha} \otimes V_\alpha \\ &= \sum_j (d\theta_j - \sum_i \theta_i \wedge \omega_{i,j}) \otimes V_j \\ &\quad - \sum_{i,j,\alpha} h_{i,\alpha,j} \theta_i \wedge \theta_j \otimes V_\alpha \\ &= 0 \end{aligned}$$

Os dois termos da penultima equação se anulam devido a equação estrutural (vide Proposição 6.67) e devido ao fato de $h_{i,\alpha,j} = h_{j,\alpha,i}$. Isto termina a demonstração da Eq. (6.8.4) e assim a demonstração da Eq.(6.8.3) e consequentemente o item (a).

Afim de provar o item (b) basta definir $F : W \rightarrow \nu(\psi(U))$ como $F(e_\alpha) = V_\alpha$. O item (b) pode então ser verificado usando a eq. (6.8.2).

Por fim para garantir a unicidade da imersão ψ (a menos da redução da vizinhança de p_0) basta observar que se uma imersão atende item (a) e item (b) então Eq. (6.8.2) tem que ser atendida. Visto que Eq.(6.8.2) equivale a Eq. (6.8.1) a unicidade da aplicação ψ segue da unicidade da Eq. (6.8.1).

□

Índice Remissivo

- k -forma diferencial, 174
- aplicação
 - suave, 83
 - em um ponto, 83
- aplicações de Cálculo Avançado
 - em Computação, 50–53, 55
 - em Controle Geométrico, 113, 205
 - em Economia, 29, 30, 32
 - em Física, 161, 196
 - em Mecânica, 4–6, 241
- campo
 - gradiente, 25
 - gradiente Riemanniano, 26
 - suave, 22
 - tensorial suave, 173
- conexão
 - Riemanniana, 247
- Critério
 - da segunda derivada, 36
- curva
 - integral, 94
- curvatura
 - de Gauss, 61
 - média, 65
 - vetor, 65
- curvatura seccional, 295
- diferencial
 - k -forma, 174
- distribuição
 - integrável, 109
- EDP das superfícies mínimas, 68
- Equação de curvatura, 331
- Equações de estrutura, 331
- espaço
 - tangente, 85
- espaço tangente, 16
- forma
 - volume, 185
- forma fundamental
 - segunda, 62
- formas de conexão, 329
- formas de curvatura, 330
- função
 - característica, 129
 - integrável, 129
- grupo de Lie, 19

- $\mathbb{SO}(m)$, 21
- Hessiano de f em p , 34
- imersão, 13
- máximo
 - local, 37
- média, curvatura, 65
- métrica induzida, 21
- mínima
 - superfície, 66
- mínimas, EDP das superfícies, 68
- mínimo local, 37
- matriz
 - ortogonal, 19
 - unitária, 21
 - hessiana, 35
- mergulho, 89
- polinômio de Taylor, 40
- ponto
 - crítico, 38
- posto, 90
- primeira forma, 21
- segunda forma fundamental, 62
- suave
 - campo tensorial, 173
- submersão, 8
- subvariedade
 - immersa, 90
- superfície
 - mínima, 66
- superfícies mínimas, EDP das, 68
- tensor curvatura de espaço de
 - curvatura constante, 295
- teorema
 - da função implícita, 11
 - da função inversa, 7
 - da imersão, 13
 - da submersão, 8
 - de Frobenius, 109
 - do posto, 90
 - do valor regular, 10
 - espectral, 24
 - de Sard, 10
- Transformação de gauge, 329
- valor
 - singular, 11
 - regular, 10
- variedade
 - mergulhada, 90
 - orientável, 185
- variedade mergulhada em $\mathbb{R}^{m+k}$, 6
- vetor
 - curvatura
 - média, 65
- vetor com pé, 15

Todo list

Referências Bibliográficas

- [AS04] A. Agrachev, Y Sachkov, *Control Theory from the Geometric Viewpoint* Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol 87 Springer Verlag 2004.
- [ACG] M. M. Alexandrino, L. F. Cavenaghi, I. Gonçalves *On Mean curvature flow of Singular Riemannian foliations: Non compact cases*, Differential Geometry and its Applications, Volume 72, October 2020, 101664,
- [AR] M.M. Alexandrino and M. Radeschi, *Mean curvature flow of singular Riemannian foliations*, The Journal of Geometric Analysis, v. 26, p. 2204–2220, (2015)
- [AB15] , M. M. Alexandrino, R. Bettiol, *Lie Groups and Geometric Aspects of Isometric Actions* Springer Verlag 2015.
- [AJ] M. M. Alexandrino, M.A. Javaloyes *on closed geodesics in the leaf space of singular Riemannian foliations*, Glasgow Mathematical Journal, **53** (2011) 555–568.
- [Alt] C. Altafini, *Redundant Robotic Chains on Riemannian Submersions*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, **20**, NO. 2 (2004)
- [Apo69] T. M. Apostol, *Calculus* Vol II. Wiley International Edition.
- [BC64] R.L. Bishop e R.J Crittenden, *Geometry of submanifolds*, AMS Chelsea Publishing, 1964
- [Bou23] N. Boumal, *An introduction to optimization on smooth manifolds*, Cambridge University Press, 2023.
- [BL04] F. Bullo, A. D. Lewis *Geometric Control of Mechanical Systems (modeling, Analysis and Design for Simple Mechanical Control Systems)*, V. 49, Texts in Applied Mathematics, Springer Verlag, 2004.

- [CT02] M. Craizer e G. Tavares, *Cálculo integral a variedades variáveis*, Editora Loyola, 2002.
- [Car] M. P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Editora IMPA, 2019, sexta edição.
- [GW] D. Gromoll and G. Walschap, *Metric Foliations and Curvature*, Progress in Mathematics, **268** (2009).
- [IT] M. Ise and Takeuchi, *Lie groups I and II* Translation of Mathematical monographs, V 85, American Mathematical Society, 1991.
- [KP02] S. G. Krantz and H. R. Parks, *A Primer of Real Analytic Functions*, Birkhäuser Advanced Texts, Second Edition, 2002.
- [Kuh] W. Kühnel, *Differential Geometry, curves-surfaces-manifolds*, American Mathematical Society, Student Mathematical Library, vol 16. Second Edition 2006.
- [Jost] J. Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, 2nd edn. Universitext, Springer, (1998).
- [Lan83] S. Lang *Undergraduate Analysis* Springer Verlag, Undergraduate Texts in Mathematics, 1983.
- [Mil65] J. W. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, Princeton Landmarks in Mathematics, 1997.
- [Pat] G. P. Paternain, *Geodesic flows*, Birkhäuser, Progress in Mathematics, **180**, 1999.
- [PT] Palais, Terng *Critical Point Theory and Submanifold Geometry*, Lecture Notes in Mathematics, 1253, Springer Verlag 1988.
- [Pet] P. Petersen *Riemannian Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, 171, second Edition, Springer Verlag 2006.
- [Spi03] M. Spivak, *O cálculo em variedades*, Coleção Clássicos da Matemática, Editora Companhia Moderna, 2003.
- [WBK20] J. Watt, R. Borhani, A. K. Katsaggelos, *Machine Learning refined (foundations, algorithms, and applications)*, Cambridge University Press, Second Edition 2020.