MAT 0147: Cálculo II Economia (noturno)

Guia 2: Aplicações contínuas, curva e superfície de nivel

Prof. M Alexandrino (IME-USP)

2023

Alerta: Este é apenas um guia resumido de parte das transparências das aulas. Ele não substitui as aulas (onde existem discussões, resoluções de exercícios, figuras, etc) e não substitui a leitura da bibliografia recomendada. Figuras foram produzidas com o GeoGebra http://www.geogebra.org

Motivação: Estabelecer propriedades e exemplos de funções e aplicações contínuas (que servem para modelar não só as funções que futuramente serão otimizadas, mas também os vínculos que determinarão as regiões onde acontecerão as otimizações) além de dar exemplos de curvas e superfíceis de nível (uteis para entender, e.g, curva e superfície de indiferença, curvas "isoprofits"etc)

Objetivo:

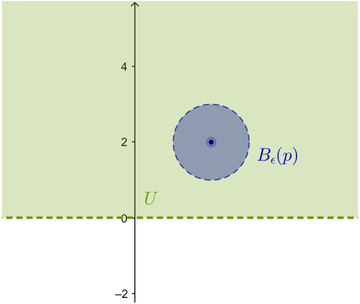
(1) Conjuntos abertos, fechados, compactos
(2) aplicações contínuas
(3) Curvas de nível em $\mathbb{R}^2$
(4) Curvas parametrizadas
(5) Superfície de nível
(6) Exemplos de Parametrizações de superfícies
(7) Obs: Curvas espaciais em $\mathbb{R}^3$

Conjuntos abertos, fechados, compactos

Def: Um conjunto $U \subset \mathbb{R}^m$ é chamado um **conjunto aberto** se para cada $p \in U$ existe um raio $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(p) \subset U$ onde $B_\delta(p) = \{x \in \mathbb{R}^m | \|x - p\| < \epsilon\}$ é bola (aberta) de centro p e raio ϵ

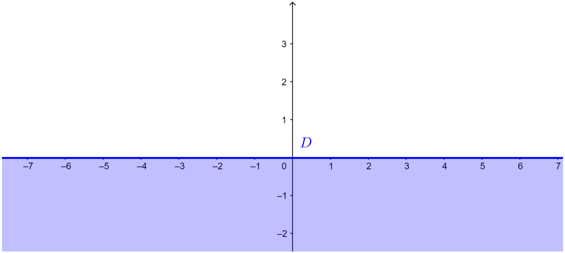
Ex:

$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 > 0\}$ e $B_\delta(p) = \{x \in \mathbb{R}^2 | \|x - (2,2)\| < 1\}$



Def: Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^m$ é chamado **um conjunto fechado** se seu complementar $D^c = \{x \in \mathbb{R}^m, x \notin D\}$ é aberto.

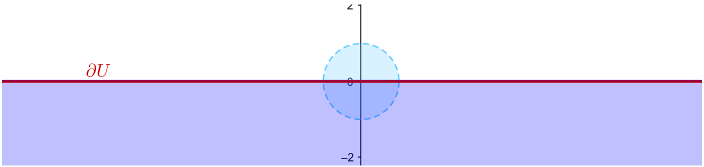
Ex: $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 \leq 0\}$



Def: A **fronteira ou bordo** de um conjunto $U \subset \mathbb{R}^m$ é o conjunto

$$\partial U = \{x \in \mathbb{R}^m | \ \forall \ \epsilon \ \ B_\epsilon(x) \cap U \neq \emptyset \ \text{ e } \ B_\epsilon(x) \cap U^c \neq \emptyset\}$$

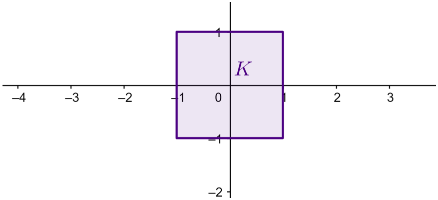
Ex: Se $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 \leq 0\}$ então
$\partial U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 = 0\}$



Def: Um conjunto $K \subset \mathbb{R}^m$ é chamado **compacto** se atende as 2 condições a seguir:

- K é fechado
- K é limitado, ou seja existe uma bola fechada $\overline{B_r(p)} = \{x \in \mathbb{R}^m | \|x - p\| \leq r\}$ tal que $K \subset \overline{B_r(p)}$

Ex: Seja $K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\}$



Problema 1

Sejam x_1, x_2 quantidades (números reais não negativos) de mercadorias A e B consumidas por uma pessoa. Sejam $\$\,2,00$ e $\$\,3,00$ os preços unitários de A e B respectivamente.

(a) *Descreva em coordenadas euclidianas o espaço R das quantidades de mercadorias, quando a despesas para mercadorias é **no máximo** $\$\,10,00$.*

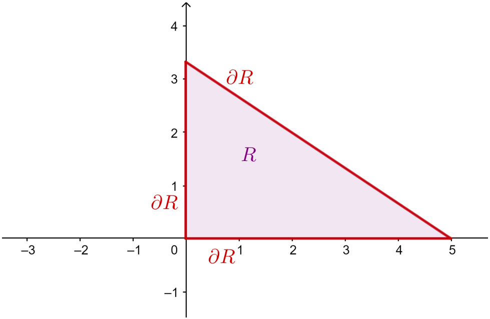
(b) *Esboce R.*

(c) *R é fechado e/ou aberto e/ou compacto?*

(d) *Qual a fronteira de R?*

Sol: $R = \{x \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x_1 \leq 5, 0 \leq x_2 \leq \frac{10}{3} - \frac{2}{3}x_1\}$ é um conjunto compacto. Seu bordo é:

$$\begin{aligned} \partial R &= \{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x_1 \leq 5\} \\ &\cup \{(0, x_2) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x_2 \leq \frac{10}{3}\} \\ &\cup \{(x_1, \frac{10}{3} - \frac{2}{3}x_1) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x_1 \leq 5\} \end{aligned}$$



Obs: No problema anterior vemos que nossa região K é determinada por meio de desigualdades que envolvem três funções:

- $g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ onde $g_1(x) = x_1$
- $g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ onde $g_2(x) = x_2$
- $g_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ onde $g_2(x) = 2x_1 + 3x_2$

Isto ilustra uma situação comum em Cálculo II. Frequentemente teremos uma região K contida em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ e desejamos otimizar **uma certa função** $u : \Omega \to \mathbb{R}$ (e,g função **utilidade ou produção**) restrita a região K (denotamos $u|_K \to \mathbb{R}$). Frequentemente K é determinada por uma serie de restrições, ou seja por meio de igualdades e desigualdades dadas pelas funções **vinculos** g_i.

Os resultados no Guia 2 permitirão em particular compreender melhor a região K dado nossos vínculos g_i.

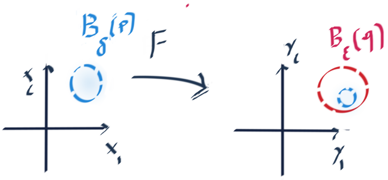
Aplicações contínuas.

Def: Seja uma aplicação $F : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Dizemos que

$$\lim_{x \to p} F(x) = q$$

se para qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$F(B_\delta(p)) \subset B_\epsilon(q)$$



Obs: Tal como em Calculo I, podemos definir limites via sequências (as duas definições são equivalentes).

Def: Uma sequência $\{p_j\}$ é uma função $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^m$.

Def: Dizemos que $p_j \to p$ se para qualquer $\epsilon > 0$ existe um tempo N_0 tal que $\forall \quad j > N_0 \ p_j \in B_\epsilon(p)$

Def (alternativa): $\lim_{x \to p} F(x) = q$ se e somente se $\forall \ \{x_j\}$ tal que $x_j \to p$ temos que $F(x_j) \to q$.

Definição 2

Dizemos que $F : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é **contínua em** $p \in U$ se

$$\lim_{x \to p} F(x) = F(p)$$

A aplicação F será **contínua** se for contínua em cada $p \in U$.

Prop Considere funções $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ contínuas. Então soma, diferença, produto, quociente (onde faz sentido) de funções contínuas são funções contínuas;

Ex: A função linear $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x_1 + x_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ é contínua pois é a soma da função contínua $h(x) = x_1$ com a função contínua $g(x) = x_2$.

Prop Uma aplicação $F : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ definida como $F(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x))$ é uma aplicação contínua SSE $f_i : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é continua para todo i

Ex: $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x) = (\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_2, \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2)$ ou seja $F(x) = Ax$ onde $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ é contínua, pois suas funções componentes $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_2$ e $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2$ são contínuas.

Ex: A curva parametrizada $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definida como $\alpha(\theta) = (2\cos(\theta), 2\sin(\theta))$ é contínua, pois suas funções componentes $\alpha_1(\theta) = 2\cos(\theta)$ e $\alpha_2(\theta) = 2\sin(\theta)$ são funções contínuas.

Prop Suponha que as aplicações $F : A \subset \mathbb{R}^m \to B \subset \mathbb{R}^n$ e $G : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ são contínuas então a aplicação composta $G \circ F : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ é contínua.

Prob: Verifique que a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = d(x, R)$ onde $R = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | 2x_1 + 2x_2 = 0\}$ é contínua.

Dica: Ou use a formula da função distancia de um ponto a uma reta junto com o item (a) ou verifique que f é composta por $h(x) = x_1$ com uma rotação.

Pré-imagem de função contínua

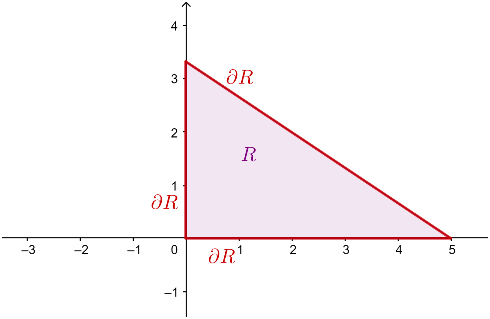
Proposição 3

Seja $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então:

1. $g^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^m | g(x) = c\}$ *é fechado;*
2. $g^{-1}[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}^m | a \leq g(x)\}$ *é fechado;*
3. $g^{-1}(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^m | a < g(x) < b\}$ *é aberto;*
4. *união de abertos é aberto;*
5. *Interseção de fechados é fechado,*
6. *interseção finita de abertos é aberto;*
7. *união finita de fechados é fechado;*

Ex: $R = \{x \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x_1 \leq 5, 0 \leq x_2 \leq \frac{10}{3} - \frac{2}{3}x_1\}$ é um conjunto compacto. Seu bordo é:

$$\begin{aligned} \partial R &= \{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x_1 \leq 5\} \\ &\cup \{(0, x_2) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x_2 \leq \frac{10}{3}\} \\ &\cup \{(x_1, \frac{10}{3} - \frac{2}{3}x_1) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x_1 \leq 5\} \end{aligned}$$



Prob: Seja $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \, x_2 \leq 3, 0 \leq x_1 \leq 4x_2\}$

(a) Esboce o conjunto Ω.

(b) Diga se Ω é fechado, aberto ou nenhum dos dois.

Observações sobre limites de funções

Prop Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\alpha : (0-\epsilon, 0+\epsilon) \to \mathbb{R}^m$ e $\beta : (0-\epsilon, 0+\epsilon) \to \mathbb{R}^m$ com $\alpha(0) = p = \beta(0)$ onde $p \in \partial U$. Se $\lim_{t\to 0} f(\alpha(t)) \neq \lim_{t\to 0} f(\beta(t))$ então $\lim_{x\to p} f(x)$ não existe.

Prob Seja $f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2}$. Verifique que o limite não existe quando $p = (0, 0)$.

Dica: Considere $\alpha(t) = (0, t)$ e $\beta(t) = (t, t^2)$

Prop Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ e $g : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \to p} f = 0$ e $|g| < K$ onde $K > 0$ é uma constante. Então $\lim_{x \to p} f(x)g(x) = 0$

Prob Sejam $f(x_1, x_2) = \frac{x_2 x_1^2 \cos(x_1^2 + x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2}$ e $p = (0, 0)$. Calcule $\lim_{x \to p} f(x)$

Curvas de nível em $\mathbb{R}^2$

Def: Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ função contínua e c um valor de g. Então

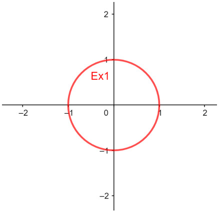
$$C = g^{-1}(c) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | g(x_1, x_2) = c\}$$

é chamado **curva de nível** (ou conjunto de nível).

Exemplo 4

Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$



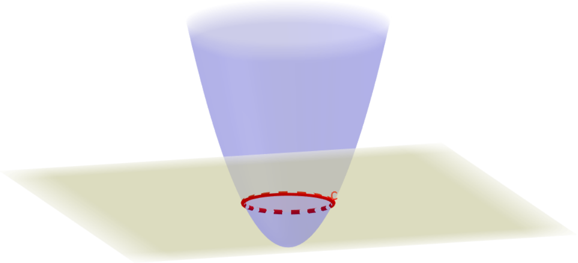
Seja $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | g(x_1, x_2) = x_3\}$ o gráfico associado a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Então a curva de nível transladada para altura $x_3 = c$ é a interseção do plano $\{x_3 = c\}$ com o gráfico S.

Exemplo 5

Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 = x_3\}$$

$$C = \{(x_1, x_2, 1) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 = 1\} = S \cap \{x_3 = 1\}$$



Obs: Uma curva de nível de uma função contínua $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ não precisa ser uma *curva regular*; veremos maiores detalhes na Parte 2 da matéria quando estudarmos o teorema de função implícita.
$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 = 0\}$

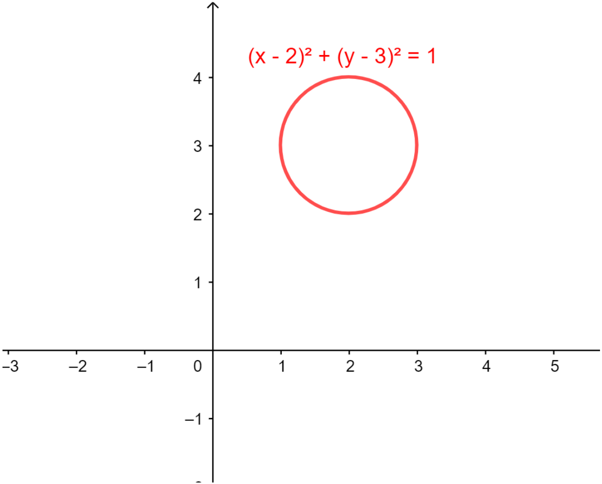
Exemplo 6 (Gráfico)

O gráfico associado a uma função $h : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua é, como vimos em Calculo I, definido como:

$$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 = h(x_1), x_1 \in I\}$$

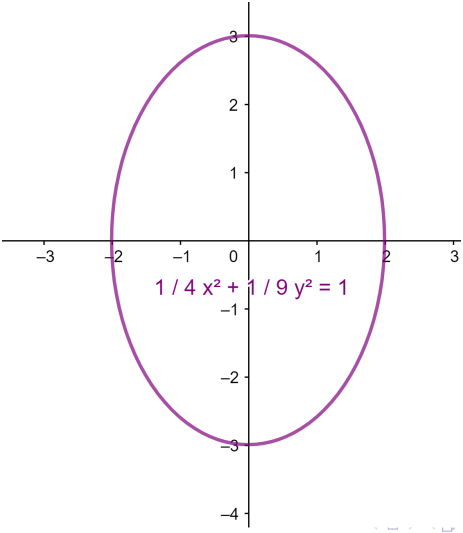
Exemplo 7 (Círculo, posição geral)

$$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | (x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 = r^2\}$$



Exemplo 8 (Elipse)

$$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \frac{(x_1 - p_1)^2}{a^2} + \frac{(x_2 - p_2)^2}{b^2} = 1\}$$



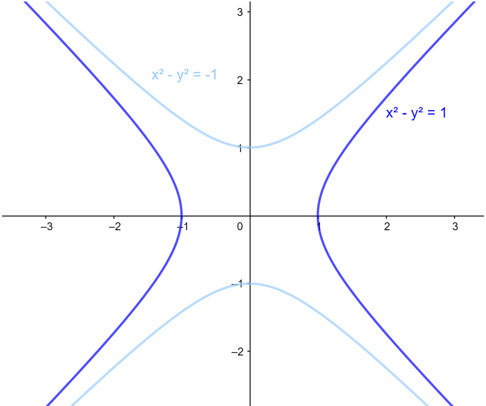
Obs: Uma elipse pode ser vista como **deformação** de um círculo. Por exemplo, seja $C_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. Então para $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como $H(x_1, x_2) = (2x_1, 3x_2)$.

$$H(C_1) = C_2 = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 | \frac{y_1^2}{4} + \frac{y_2^2}{9} = 1\}$$

Exemplo 9 (Hipérbole)

$$C_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1\}$$

$$C_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = -1\}$$



Curva parametrizada

Def: Uma função contínua $\alpha : I \to \mathbb{R}^m$, definida como $\alpha(t) = (\alpha_1(t) \cdots, \alpha_m(t))$ é chamada **curva parametrizada**. A curva será de classe C^k se as suas funções componentes α_i são de classe C^k.

Ex: $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida como

$$\alpha(t) = (3\cos(t), 3\sin(t))$$

Ex: $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida como

$$\beta(t) = (3\cos(2t), 3\sin(2t))$$

Def: Dado uma curva paremetrizada $\alpha : I \to \mathbb{R}^m$, definida como $\alpha(t) = (\alpha_1(t) \cdots, \alpha_m(t))$ o vetor $\alpha'(t) = (\alpha_1'(t) \cdots, \alpha_m'(t))$ é **vetor velocidade** e $\|\alpha'(t)\|$ é a **velocidade**.

Ex: $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida como $\alpha(t) = (3\cos(t), 3\sin(t))$.
Então $\alpha'(t) = (-3\sin(t), 3\cos(t))$, $\|\alpha'(t)\| = 3$

Ex: $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida como $\beta(t) = (3\cos(2t), 3\sin(2t))$

Então $\beta'(t) = (-6\sin(2t), 6\cos(2t))$ e $\|\beta'(t)\| = 6$

Parametrizações dos exemplos básicos

Exemplo 6: Gráfico associado a uma função $h : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 = h(x_1), x_1 \in I\}$

$\alpha(t) = (t, h(t))$ onde $t \in I$.

Exemplo 7: Círculo

$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | (x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 = r^2\}$

$\alpha(t) = (r\cos(t) + p_1, r\sin(t) + p_2)$ onde $t \in [0, 2\pi]$

Exemplo 8: Elipse

$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \frac{(x_1 - p_1)^2}{a^2} + \frac{(x_2 - p_2)^2}{b^2} = 1\}$

$\alpha(t) = (a\cos(t) + p_1, b\sin(t) + p_2)$ onde $t \in [0, 2\pi]$.

Exemplo 9: Hipérbole

$C_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1, x_1 > 0\}$

$\alpha(t) = (a\cosh(t), b\sinh(t))$ $t \in \mathbb{R}$.

Prob: Sejam x_1 e x_2, respectivamente, quantidade (números reais não negativo) de mercadorias A e B consumidas por uma pessoa. Suponha que R$5,00 e R$2,00 são, respectivamente, os preços unitários (e.g., preço de 1 quilo) de A e B e que C seja o segmento de reta em $\mathbb{R}^2$ que descreve o espaço da quantidade das mercadorias, quando a despesa (orçamento) para mercadorias é R$7,00. Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida como $u(x) = \|x - (2,2)\|$. Determine **o ponto** $p \in R$ tal que $u(p)$ assume o menor valor.

Dica: Considere um vetor v tangente a reta orçamento (ex, $v = (-2, 5)$) e um ponto p_0 na reta orçamento (ex, $p_0 = (1, 1)$).

Escolha uma parametrizaccão da reta orçamento, i.e.,

$$\alpha(t) = p_0 + t.v$$

Obtenha o mínimo t_{min} da função $f(t) = u(\alpha(t))$ utilizando Calculo I e a geometria do problema (ou seja mesmo que domínio não seja fechado e limitado, voce sabe que haverá um minimo que realiza distância).

Temos então que $p = \alpha(t_{min})$.

Superfície de nível

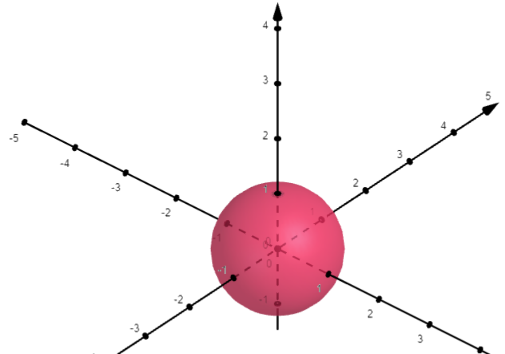
Def: Seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ função contínua e c um valor de g. Então

$$S = g^{-1}(c) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | g(x_1, x_2, x_3) = c\}$$

é chamado **superfície de nível** (ou conjunto de nível).

Ex: Seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$S = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$



Obs: Uma superfície de nível de uma função contínua $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ não precisa ser uma *superfície regular*; veremos maiores detalhes na Parte 2 da matéria quando estudarmos o teorema de função implícita. Considere por exemplo:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\}$$

Ex de supefícies de nível: *Gráficos*

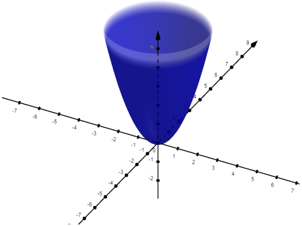
O gráficos associado a uma função $h : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua é

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3 = h(x_1, x_2), \ (x_1, x_2) \ \in U\}$$

Ex: A superfície

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3 = x_1^2 + x_2^2 \ \}$$

é gráfico, onde $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é $h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$



Ex: A superfície (sela de cavalo)

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3 = x_1^2 - x_2^2 \ \}$$

é gráfico, onde $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é $h(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$

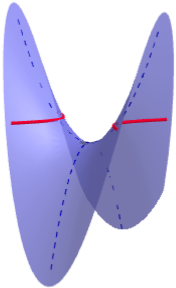
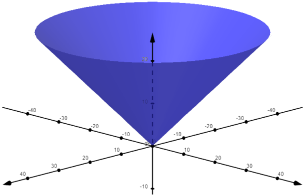


Figura: Note que $C = S \cap \{x_3 = 0.4\}$ é a translação de um hiperboloide (curva de nível) $\frac{x_1^2}{0.4} - \frac{x_2^2}{0.4} = 1$.

Ex: A superfície

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\ \}$$

é gráfico onde $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é $h(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.



Obs A superfície

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 \ \}$$

não é gráfico pois não conseguimos descrever todos os pontos de S como $x_3 = h(x_1, x_2)$ para uma **unica** função h.

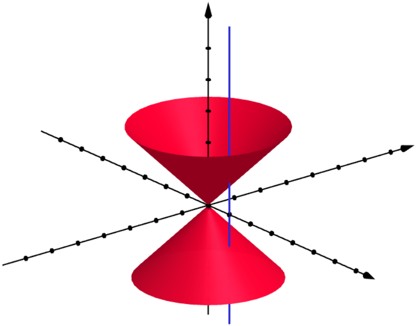


Figura: Não é gráfico, em particular retas paralelas ao eixo x_3 interseptam a superfície em mais de um ponto

Ex de supefícies de nível: *Superfície de Revolução*

Prob Considere a aplicação linear $R_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida como:

$$R_\theta(x) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Verifique que $R_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma rotação em torno do eixo x_3 ou seja em torno da reta $\{x_1 = 0, x_2 = 0\}$.

Uma superície S é **superfície de revolução** (em torno do eixo x_3) se é invariante pela rotações R_θ ou seja $S = R_\theta(S)$ para todo θ.

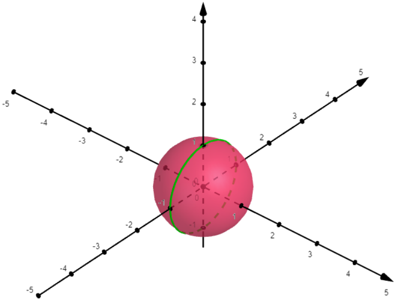
Em geral uma superfície de **revolução** (em torno do eixo x_3) pode ser descrita como superfície de nível:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | g(r^2, x_3) = c\}$$

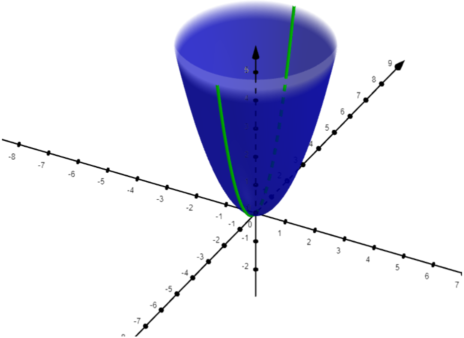
onde $r^2 = (x_1^2 + x_2^2)$, para alguma função $g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Prob: Verifique que uma superfície descrita pela equação acima atende: $R_\theta(S) \subset S$.

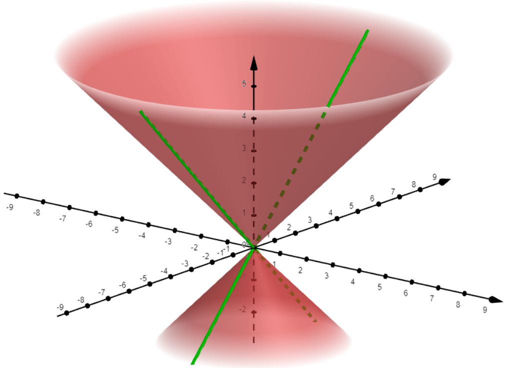
Ex: A superfície $S = \{x \in \mathbb{R}^3 | (x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 = 1\}$ é superfície de revolução, sendo gerada pela rotação da curva geratriz $C = \{(0, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3^2 + x_2^2 = 1\}$ em torno do eixo x_3.



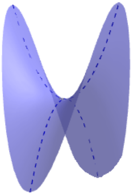
Ex: A superfície $S = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_3 - (x_1^2 + x_2^2) = 0\}$ é superfície de revolução, sendo gerada pela rotação da curva geratriz $C = \{(0, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3 = x_2^2\}$ em torno do eixo x_3.



Ex: A superfície $S = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_3^2 - (x_1^2 + x_2^2) = 0\}$ é superfície de revolução, sendo gerada pela rotação da curva geratriz $C = \{(0, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3^2 = x_2^2\}$ em torno do eixo x_3.



Obs: A superfície (sela de cavalo) $S = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_3 = x_1^2 - x_2^2\}$ não é superfície de revolução. Note em particular que $x_3 = (x_1^2 + x_2^2) - 2x_2^2$ ou seja S não consegue ser descrita como $g(r^2, x_3) = c$ onde $r^2 = (x_1^2 + x_2^2)$



Algoritmo: Vamos resumir o que observamos nos exemplos anteriores. Considere

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3 = \cos(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})\}$$

Vamos verificar se S é de revolução e esboçar S

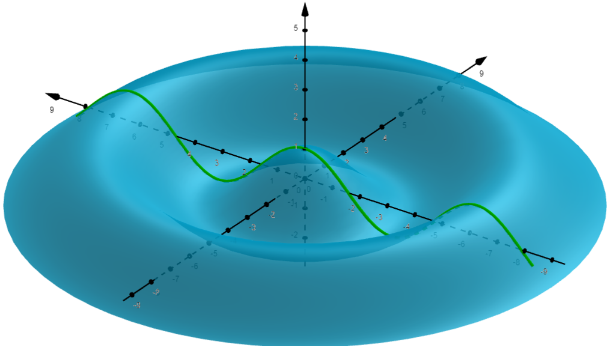
(1) Começamos com a igualdade que define S, i.e., $x_3 = \cos(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})$;

(2) Substituimos $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ na igualdade, i.e., $x_3 = \cos(r)$

(3) **Visto que as únicas variáveis foram r e x_3** (ou seja pode ser descrita como $g(r^2, x_3) = c$) então S é de revolução,

(4) Vamos então descobrir a curva geratriz definida como $C = S \cap \{x_1 = 0\}$ ou seja $C = \{(0, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 |, x_3 = \cos(|x_2|)\}$;

(5) Giramos a curva geratriz C em torno do eixo x_3 obtendo a superfície S.



Ex de supefícies de nível: ***invariante por translação (ou cilindro sobre curvas planas)***

Considere a aplicação translação $T_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida como $T_t(x) = x + (0, 0, t)$

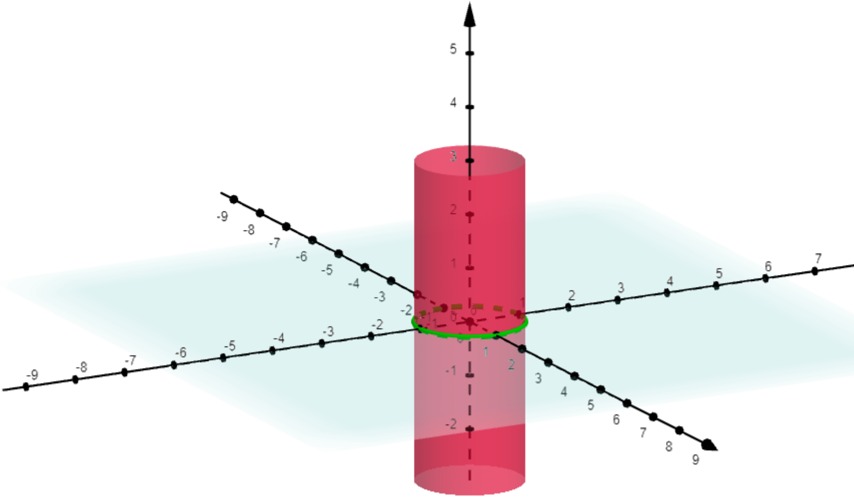
Uma superfície S será um **invariante por translação na direção de** $\{x_3 = 0\}$ se for invariante pela translação T_t ou seja $T_t(S) = S$.

Em geral tal superfície é definida como o conjunto de nível

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | g(x_1, x_2) = c\}$$

onde $g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Ex : $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 = 1\}$



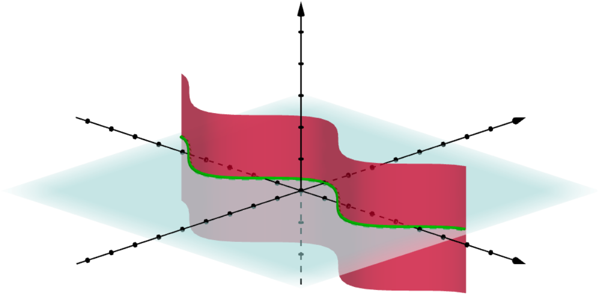
Algorítmo : Vamos resumir como identificar e esboçar uma superfície invariante por translação na direção x_3

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_2 - \cos(x_1) = 0\}$$

(1) Começamos com a igualdade que define S ,ou seja $x_2 - \cos(x_1) = 0$;

(2) **Visto que faltou a variável** x_3 então é invariante por translação na direção x_3.

(3) Consideramos a curva $C = S \cap \{x_3 = 0\}$ e transladamos na direção x_3



Ex de supefícies de nível: *Deformação*

Considere a deformação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida como:

$$T(x) = (ax_1, bx_2, cx_3) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Dado uma superfície

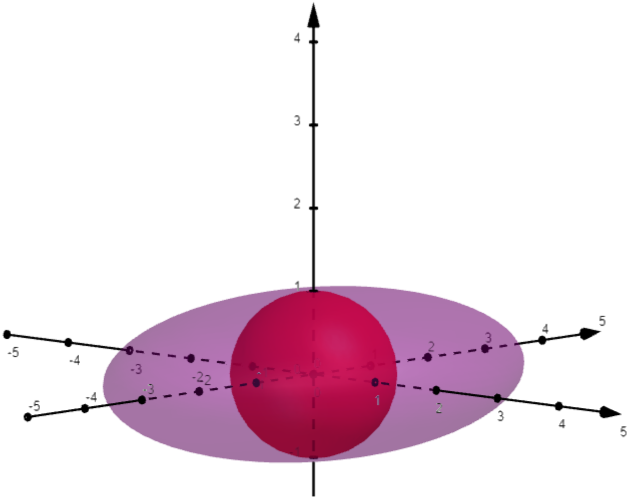
$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 | \, g(x_1, x_2, x_3) = d\}$$

sua **deformação** será descrita como:

$$T(S) = \{y \in \mathbb{R}^3 | \, g\left(\frac{y_1}{a}, \frac{y_2}{b}, \frac{y_3}{c}\right) = d\}$$

Ex: Considere $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 3x_2, x_3)$.

- $S = \{x \in \mathbb{R}^3 | \, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$
- $T(S) = \{y \in \mathbb{R}^3 | \, \frac{y_1^2}{4} + \frac{y_2^2}{9} + y_3^2 = 1\}$



Ex: Considere $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 3x_2, x_3)$.

(a) $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = -1\}$

(b) $\widetilde{S} = T(S) = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid -\frac{1}{4}y_1^2 - \frac{1}{9}y_2^2 + y_3^2 = -1\}$

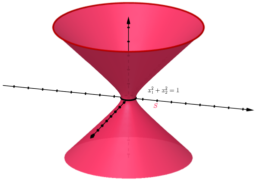


Figura: Item (a), superfície de revolução S

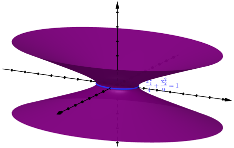


Figura: Item (b), superfície deformada $\widetilde{S} = T(S)$

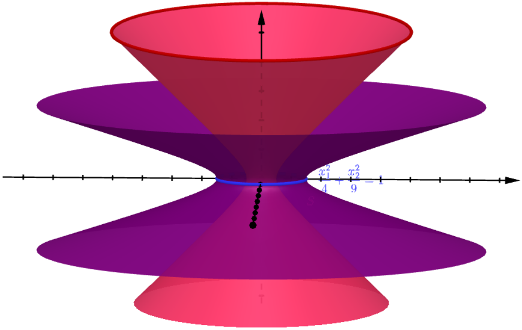


Figura: superfície de revolução S junto com a sua deformação a superfície $\widetilde{S} = T(S)$

Exemplos de Parametrizações de superfícies

Dada uma superfície S, uma aplicação $\psi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é uma **parametrização** de S se $\psi(U) \subset S$.

Ex Gráficos: Seja $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3 = h(x_1, x_2)\}$ onde $h : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Então $\psi(x_1, x_2) = (x_1, x_2, h(x_1, x_2))$ é uma parametrização.

Ex Cilindro canônico: Seja $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 = 4\}$ Então $\psi(\theta, z) = (2\cos(\theta), 2\sin(\theta), z)$ é uma parametrização.

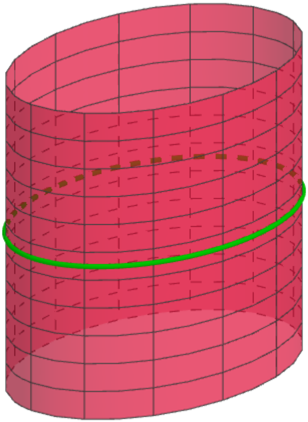
Obs: O último exemplo sugere parametrizações mais gerais para:

- cilindro sobre curvas planas;
- superfícies de revolução.

Ex Invariante por translação: Seja S uma superfície *invariante por translação* onde $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ é uma parametrização da curva plana $C = S \cap \{x_3 = 0\}$. Então $\psi(t, x_3) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), x_3)$ é uma parametrização.

Ex:

- Se $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} = 1\}$
- $\alpha(t) = (2\cos(t), 3\sin(t))$
- $\psi(t, x_3) = (2\cos(t), 3\sin(t), x_3)$



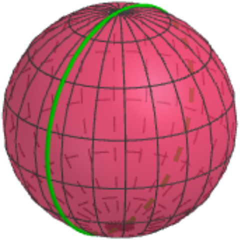
Ex superfície de revolução: Seja S uma *superfície de revolução* onde $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ é uma parametrização da curva geratriz $C = S \cap \{x_1 = 0\}$. Observe que

- $\alpha(t) = (0, \alpha_2(t), \alpha_3(t))$,
- $\alpha_2(t)$ mede a distância ao eixo x_3
- $\alpha_3(t)$ mede a altura do ponto $\alpha(t)$

Então $\psi(t, \theta) = (\alpha_2(t)\cos(\theta), \alpha_2(t)\sin(\theta), \alpha_3(t))$ é uma parametrização de S.

Ex:

- Seja $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$
- $\alpha(t) = (0, \sin(t), \cos(t))$
- $\psi(t, \theta) = (\sin(t)\cos(\theta), \sin(t)\sin(\theta), \cos(t))$



Prob: Seja $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 |, \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 3\right)^2 + x_3^2 = 1\}$

1. Determine se S é gráfico, superfície de revolução ou invariante por translação.
2. Esboce S.
3. Determine uma parametrização $\psi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

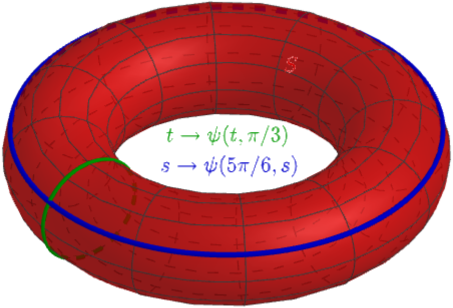


Figura: $\psi(t,s) = (\cos(t) - 3)\cos(s), (\cos(t) - 3)\sin(s), \sin(t)),$
$t \in (0, 2\pi)$, $s \in (0, 2\pi)$

Obs: Curvas espaciais em $\mathbb{R}^3$

Prob: Sejam

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\}$$

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_3 = 1 + x_2\}$$

(a) Esboce S_1 e S_2.

(b) Determine a parametrização de $C = S_1 \cap S_2$.

Dica b: Primeiro determine a equação cartersiana da projeção $\pi(C)$ no $\{x_3 = 0\}$, segundo determine a parametrização $(\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ da curva plana $\pi(C)$ e por fim obtenha a coordenada α_3 usando $x_3 = 1 + x_2$

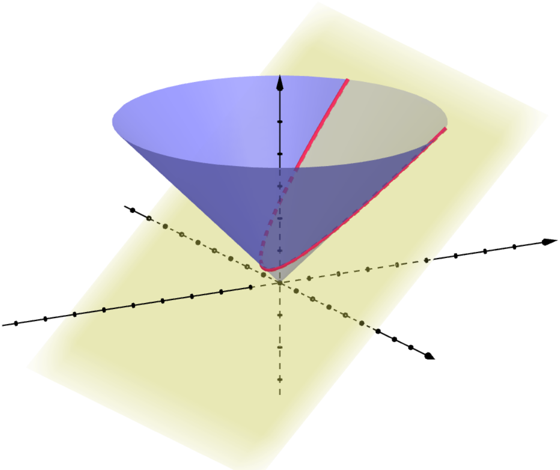


Figura: **Resposta (b)** $\alpha(t) = \left(t, \frac{t^2-1}{2}, \frac{t^2+1}{2}\right)$ para $t \in \mathbb{R}$.