

## 1<sup>o</sup> Lista de Exercício: MAT0146, turma 2023121- noturno

### Cálculo Diferencial e Integral I para Economia (1<sup>o</sup> semestre 2023)

Referências principais(nas quais a lista foi baseada):

1. J. Stewart ,*Cálculo I* Pioneira Thomson Learning, 5 Edição;
2. J. E. Weber, *Matemática para Economia e Administração*, 2 Edição;
3. C . P. Simon L Blume, *mathematics for economists*, : W. W. Norton & Company;
4. S.T. Tan, *Matemática Aplicada a Administração e Economia*, Cengage Learning;

## 0 B0- Recordação

### 0.1 B0 Problemas

**Problema 0.1.** Determine a equação da reta do tipo  $y = mx + b$  que passa por  $(-1, 2)$  e  $(3, -4)$ .

**Problema 0.2.** Esboce

- (a) A reta  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + 2y = 5\}$
- (b) A região  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + 2y > 5\}$

**Problema 0.3.** Resolva a desigualdade  $|x - 3| + |x + 2| < 11$

**Problema 0.4.** Determine  $\cos^2(\theta)$ ,  $\sin^2(\theta)$  em termos de  $\cos(2\theta)$ .

**Problema 0.5.** Dez revistas são vendidas a R \$ 80,00. Vinte revistas são vendidas a de R \$ 60. Qual é a equação de demanda (linear)?

**Problema 0.6.** Quando o preço for de R \$ 50,00, cinquenta revistas estão disponíveis no mercado. Quando o preço for de R \$ 75,00, cem revistas estão disponíveis no mercado. Qual é a equação de oferta (linear)?

**Problema 0.7.** Considere as seguintes equações de oferta e de demanda:

$$y = 10 - 2x$$

$$y = \frac{3}{2}x + 1$$

- (a) Desenhe as retas acima.
- (b) Ache o ponto de equilíbrio para as seguintes equações de oferta e de demanda

**Problema 0.8.** Considere as seguintes equações de oferta e demanda (onde  $x$  representa quantidade e  $y$  preço):

$$2x + y - 10 = 0$$

$$y^2 - 8x - 4 = 0$$

- (a) Esboce as curvas acima.
- (b) Ache a quantidade e preço de equilíbrio para as equações de oferta e demanda.

**Problema 0.9.** Considere as seguintes equações de oferta e demanda (onde  $x$  representa a quantidade e  $y$  o preço)

$$(x + 12)(y + 6) = 169$$

$$x - y + 6 = 0$$

- (a) Esboce as curvas acima.
- (b) Ache a quantidade e preço de equilíbrio de mercado para as equações de oferta e demanda acima.

**Problema 0.10.** Uma companhia produz quantidades  $x$  e  $y$  de 2 tecidos diferentes, usando o mesmo processo de produção. A curva de transformação do produto para o insumo usado é dada por:

$$y = 20 - \frac{x^2}{5}$$

- (a) Quais as maiores quantidades  $x$  e  $y$  que podem ser produzidas?
- (b) Que quantidades  $x$  e  $y$  devem ser produzidas para se ter  $x = y$ ?

## 0.2 Respostas B 0

Problema 0.1:  $y = \frac{-3}{2}x + \frac{1}{2}$

Problema 0.3:  $-5 < x < 6$

Problema 0.4:  $\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$ ,  $\sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$

Problema 0.5:  $2x + y = 100$

Problema 0.6:  $x - 2y = 50$

Problema 0.7:  $(\frac{18}{7}, \frac{34}{7})$

Problema 0.8: As interseções das curvas são:  $(6 - 2\sqrt{3}, -2 + 4\sqrt{3})$  e  $(6 + 2\sqrt{3}, -2 - 4\sqrt{3})$  Logo, o ponto de equilíbrio é:  $(6 - 2\sqrt{3}, -2 + 4\sqrt{3})$

Problema 0.9: As interseções são:  $(1, 7)$  e  $(-25, -19)$ . Logo o ponto de equilíbrio é  $(1, 7)$

Problema 0.10:

(a) Maior quantidade  $x$  é 10 (neste caso  $y = 0$ ). Maior quantidade  $y$  é 20 (neste caso  $x = 0$ ).

(b)  $x = y = (-5 + 5\sqrt{17})/2$

# 1 Bloco B1: Limites e continuidade

## 1.1 B1 -Problemas

**Problema 1.1.** Calcule os limites

(1)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(4)  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$  para  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4} & \text{se } x \geq 4 \\ 8-2x & \text{se } x < 4 \end{cases}$

(5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4+8x^3-2x^2}{5x^4+10x^3+x^2}$

**Problema 1.2.** Calcule o limite se existir. Caso não exista, explique o porquê.

(1)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x-2}$

(2)  $\lim_{t \rightarrow 9} \frac{9-t}{3-\sqrt{t}}$

(3)  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{4+x}$

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{(x^3+x^2)} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$

(5)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  onde  $1 \leq f(x) \leq x^2 + 2x + 2$

(6)  $\lim_{x \rightarrow -4} |x + 4|$

(7)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x-2}$

**Problema 1.3.** Seja  $F(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}$

(a) Encontre  $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$ .

(b) Existe  $\lim_{x \rightarrow 1} F(x)$  ?

**Problema 1.4.** Encontre os pontos nos quais  $f$  é descontínua. Em quais desses pontos  $f$  é contínua à direita, à esquerda ou em nenhum deles?

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ 2 - x & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ (x - 2)^2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

**Problema 1.5.** Para quais valores da constante  $c$  a função  $f$  é contínua em  $(-\infty, \infty)$

$$f(x) = \begin{cases} cx + 1 & \text{se } x \leq 3 \\ cx^2 - 1 & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

**Problema 1.6.** Calcule os limites

(1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x + 4}{2x^2 + 5x - 8}$

(2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x - x^2}{2x^2 - 7}$

(3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 5x}{2x^3 - x^2 + 4}$

(4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

(5)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 + x^5)$

(6)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + x^3 + x^5}{1 - x^2 + x^4}$

**Problema 1.7.** Encontre as assíntotas horizontais e verticais.

(1)  $y = \frac{x}{x+4}$

(2)  $y = \frac{x^3}{x^2 + 3x - 10}$

(3)  $h(x) = \frac{x}{\sqrt[4]{x^4 + 1}}$

**Problema 1.8.** Uma refinaria de petróleo possui 5 torres de destilação e opera tantas torres quantas forem necessárias para processar as matérias-primas disponíveis. As despesas gerais para operar cada torre de destilação (operador, manutenção, etc) são de R\$ 100,00 por semana. Além disto, o custo das matérias-primas é de R\$ 0,40 por galão de petróleo refinado. Cada torre de destilação pode processar matérias-primas para produzir 10.000

galões de petróleo por semana. Se  $y$  for o custo de operação e  $x$  a quantidade em galões de petróleo refinado, a função custo pode ser algebricamente representada pela equação

$$f(x) = 100\left(\left[\frac{x}{10000}\right] + 1\right) + 0,4x$$

onde  $[t]$  denota o maior inteiro menor do que  $t$  (por exemplo  $[2] = 1$ ,  $[2, 3] = 2$  etc). Calcule os limites laterais a esquerda e a direita nos pontos  $x = 10000$ ,  $x = 20000$ ,  $x = 30000$ ,  $x = 40000$  e  $x = 50000$  e diga se a função  $f$  é contínua ou descontínua nestes pontos.

## 1.2 Respostas do B1

Problema 1.1

- (1)  $\frac{1}{4}$
- (2)  $\frac{\pi}{6}$
- (3) 0
- (4) 0
- (5)  $\frac{2}{5}$

Problema 1.2

- (1) 5
- (2) 6
- (3)  $\frac{-1}{16}$
- (4) 0
- (5) 1
- (6) 0
- (7) não existe.

Problema 1.3

(a)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = 2$  e  $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = -2$ .

(b) Não.

Problema 1.4: 0, à esquerda.

Problema 1.5:  $\frac{1}{3}$

Problema 1.6

(1)  $\frac{3}{2}$

(2)  $-\frac{1}{2}$

(3)  $\frac{1}{2}$

(4) 3

(5)  $-\infty$

(6)  $\infty$

Problema 1.7

(1)  $y = 1, x = -4$

(2)  $x = 2, x = -5$

(3)  $y = 1, y = -1$ .

Problema 1.8: A função  $f$  é descontínua em 10000, 20000, 30000, 40000 e 50000. Os limites laterais são:

$$\lim_{x \rightarrow 10000^-} f(x) = 4100, \lim_{x \rightarrow 10000^+} f(x) = 4200,$$

$$\lim_{x \rightarrow 20000^-} f(x) = 8200, \lim_{x \rightarrow 20000^+} f(x) = 8300,$$

$$\lim_{x \rightarrow 30000^-} f(x) = 12300, \lim_{x \rightarrow 30000^+} f(x) = 12400,$$

$$\lim_{x \rightarrow 40000^-} f(x) = 16400, \lim_{x \rightarrow 40000^+} f(x) = 16500,$$

$$\lim_{x \rightarrow 50000^-} f(x) = 20500, \lim_{x \rightarrow 50000^+} f(x) = 20600$$

## 2 B2: Derivadas

### 2.1 Problemas

**Problema 2.1.** Suponha que o custo em dólares, para uma companhia produzir  $x$  novas linhas de jeans é:

$$C(x) = 2000 + 3x + 0,01x^2 + 0,0002x^3$$

Encontre a função custo marginal, i.e.,  $C'(x)$ .

**Problema 2.2.** Se  $p(x)$  for o valor total da produção quanto há  $x$  trabalhadores em uma fábrica, então a produtividade média da força de trabalho na fábrica é

$$A(x) = \frac{p(x)}{x}$$

- (a) Encontre  $A'(x)$
- (b) Verifique que  $A'(x) > 0$  se  $p'(x)$  for maior que a produtividade média.

**Problema 2.3.** Seja  $d(x) = \frac{5}{2} - \frac{3}{4}x$  a função demanda e  $R(x) = xd(x)$  a função receita total. Calcule a receita marginal, i.e.,  $R'(x)$ .

**Problema 2.4.** Nas análises teóricas elementares da renda nacional, assume-se que  $x = c(x) + p(x)$  onde  $c$  é a função consumo,  $p$  a função poupança e a variável  $x$  representa a renda nacional total. Considere

$$c(x) = 10 + 0,8x + 0,5\sqrt{x}$$

a função consumo. Calcule:

- (a) A propensão marginal a consumir, i.e.,  $c'(x)$
- (b) A propensão marginal a poupar, i.e.,  $p'(x)$



**Problema 2.5.** . Considere uma função demanda  $q = F(p)$ . Definamos *elasticidade (pontual) da demanda* como  $\mathcal{E}(p) = \frac{F'(p)p}{F(p)}$ . A grosso modo a motivação para definir a elasticidade é compreender como a taxa de variação percentual no preço afeta a taxa de variação percentual na quantidade (evitando que alterações na forma de medir o preço, e.g, em centavos ou milhões, altere esta medida). Em outras palavras considerar  $\lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{q} / \frac{\Delta p}{p} = \mathcal{E}(p)$ . Definamos despesa total como  $D(p) = p \cdot q = p \cdot F(p)$ .

- (a) Calcule  $\frac{D'(p)}{F(p)}$  em termos de  $\mathcal{E}(p)$ .
- (b) Conclua que para um *bem inelástico*, i.e.,  $-1 < \mathcal{E} < 0$  (por exemplo combustível, remédios) um aumento no preço, levam a um aumento da despesa total.
- (c) Conclua que para um *bem elástico*, i.e.,  $-\infty < \mathcal{E} < -1$  (por exemplo artigos de luxo) um aumento no preço leva a uma diminuição na despesa total.

**Problema 2.6.** Calcule a derivada de  $f$ .

- (1)  $f(x) = \sqrt{x} - 2 \exp(x)$
- (2)  $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x}}$

**Problema 2.7.** Ache uma equação da reta tangente à curva no ponto  $p$ .

- (1)  $y = x^4 + 2 \exp(x)$ ,  $p = (0, 2)$ .
- (2)  $y = 3x^2 - x^3$ ,  $p = (1, 2)$ .

**Problema 2.8.** Ache os pontos sobre a curva  $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$  onde a tangente é horizontal.

**Problema 2.9.** Considere as funções trigonométricas:

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}, \quad \operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)}, \quad \cotan(x) = \frac{1}{\tan(x)}.$$

Verifique as igualdades abaixo:

- (1)  $\frac{d}{dx} \tan(x) = \sec^2(x)$
- (2)  $\frac{d}{dx} \sec(x) = \sec(x) \tan(x)$
- (3)  $\frac{d}{dx} \operatorname{cosec}(x) = -\operatorname{cosec}(x) \cotan(x)$
- (4)  $\frac{d}{dx} \cotan(x) = -\operatorname{cosec}^2(x)$

**Problema 2.10.** Considere as funções hiperbólicas:

$$\cosh(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}.$$

Verifique as igualdades abaixo:

- (1)  $\frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh(x)$
- (2)  $\frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x)$

**Problema 2.11.** Encontre a derivada da função  $f$

- (1)  $f(x) = \sqrt[4]{1 + 2x + x^3}$
- (2)  $f(t) = \frac{1}{(t^4 + 1)^3}$
- (3)  $f(x) = \cos(a^3 + x^3)$
- (4)  $f(x) = x \exp(-x^2)$
- (5)  $f(x) = \tan(\cos(x))$
- (6)  $f(x) = \sec^2(x) + \tan^2(x)$

**Problema 2.12.** O deslocamento de uma partícula sobre uma corda vibrante é dado pela equação

$$s(t) = 10 + \frac{1}{4} \sin(10\pi t)$$

onde  $s$  é medido em centímetros e  $t$  em segundos. Encontre a velocidade da partícula após  $t$  segundos.

**Problema 2.13.** A equação  $y''(x)+y'(x)-2y(x) = \sin(x)$  é chamada equação diferencial de segunda ordem, pois envolve a função desconhecida  $y$  e suas derivadas  $y'$  e  $y''$ . Encontre as constantes  $A$  e  $B$  tal que a função  $y(x) = A \sin(x) + B \cos(x)$  satisfaça essa equação.

**Problema 2.14.** Diferencie a função  $f$

(1)  $f(x) = \ln |2 - x - 5x^2|$

(2)  $f(x) = \ln(\exp(-x) + x \exp(-x))$

**Problema 2.15.** Está sendo bombeado ar para dentro de um balão esférico, e seu volume cresce a uma taxa de  $100 \text{ cm}^3/\text{s}$ . Quão rápido o raio do balão está crescendo quando o diâmetro é  $50 \text{ cm}$ ?

**Dica:** Pode-se usar aqui o fato de  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  onde  $V$  é o volume da esfera e  $r$  o seu raio.

**Problema 2.16.** Uma escada com  $10$  pés de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Se a base desliza, afastando-se da parede a uma taxa de  $1 \text{ pé/s}$ , quão rápido o topo da escada está escorregando para baixo na parede quando a base da escada está a  $6$  pés da parede?

**Problema 2.17.** Um tanque de água tem a forma de um cone circular invertido com base de raio  $2 \text{ m}$  e altura igual a  $4 \text{ m}$ . Se a água está sendo bombeada dentro do tanque a uma taxa de  $2 \text{ m}^3/\text{min}$ , encontre a taxa na qual o nível da água estará elevado quando a água estiver a  $3 \text{ m}$  de profundidade.

**Dica:** Pode-se usar o fato de  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$  onde  $V$  é o volume do cone,  $r$  o raio da base e  $h$  a altura.

## 2.2 Respostas B2

Problema 2.1:  $C'(x) = 3 + 0,02x + 0,0006x^2$

Problema 2.2:(a)  $A'(x) = \frac{xp'(x)-p(x)}{x^2}$

Problema 2.3:  $R'(x) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x$

Problema 2.4:

(a)  $c'(x) = 0,8 + \frac{0,25}{\sqrt{x}}$

(b)  $p'(x) = 0,2 - \frac{0,25}{\sqrt{x}}$

Problema 2.5

(a)  $\frac{D'(p)}{F(p)} = \mathcal{E}(p) + 1$

(b) Item (a) implica que se  $-1 < \mathcal{E}(p) < 0$  temos  $\mathcal{E}(p) + 1 > 0$ . Como  $F(p)$  é positivo temos que  $D'(p)$  é positivo.

(c) Item (a) implica que se  $-\infty < \mathcal{E}(p) < -1$  temos  $\mathcal{E}(p) + 1 < 0$ . Como  $F(p)$  é positivo temos que  $D'(p)$  é negativo.

Problema 2.6

(1)  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2 \exp(x)$

(2)  $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{2x}$

Problema 2.7

(1)  $y = 2x + 2$

(2)  $y = 3x - 1$

Problema 2.8:  $(-2, 21)$  e  $(1, -6)$ .

Problema 2.11

$$(1) f'(x) = \frac{2+3x^2}{4(1+2x+x^3)^{\frac{3}{4}}}$$

$$(2) f'(t) = \frac{-12t^3}{(t^4+1)^4}$$

$$(3) f'(x) = -3x^2 \sin(a^3 + x^3)$$

$$(4) f'(x) = \exp(-x^2)(1 - 2x^2)$$

$$(5) f'(x) = -\sin(x) \sec^2(\cos(x))$$

$$(6) f'(x) = 4 \sec^2(x) \tan(x)$$

Problema 2.12:  $v(t) = \frac{5}{2}\pi \cos(10\pi t)$  cm/s

Problema 2.13:  $A = \frac{-3}{10}$ ,  $B = \frac{-1}{10}$

Problema 2.14

$$(1) f'(x) = \frac{10x+1}{5x^2+x-2}$$

$$(2) f'(x) = \frac{-x}{1+x}$$

Problema 2.15: O raio do balão está crescendo a uma taxa de  $\frac{1}{25\pi}$  cm/s.

Problema 2.16: O topo da escada está deslizando para baixo a uma taxa de  $\frac{3}{4}$  pé/s.

Problema 2.17: O nível da água estará subindo uma taxa de  $\frac{8}{9\pi}$  m/min.

**Observação:** Os problemas 2.15, 2.16, 2.17 estão completamente resolvidos na Seção 3.10 (exemplos resolvidos) do livro Stewart: Cálculo Vol I. Quinta Edição.

### 3 B3: Regra de L'Hôpital

#### 3.1 Problemas

Problema 3.1. Calcule o limite

(1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^9 - 1}{x^5 - 1}$

(2)  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\exp(t) - 1}{t^3}$

(3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x}$

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x}$

(5)  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{5^t - 3^t}{t}$

(6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$

(7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \exp(-x^2)$

(8)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{1/x}$

#### 3.2 Respostas da B3

Problema 3.1

(1)  $9/5$

(2)  $\infty$

(3)  $0$

(4)  $-\infty$

(5)  $\ln(5/3)$

(6)  $1/2$

(7)  $0$

(8)  $\exp(-2)$

## 4 B4

### 4.1 Máximos e Mínimos

**Problema 4.1.** Encontre os pontos e valores de máximo e mínimos absolutos de  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$  no intervalo  $[-\frac{1}{2}, 4]$ .

**Problema 4.2.** Encontre os pontos críticos da função

(1)  $f(\theta) = 2 \cos(\theta) + \sin^2(\theta)$

(2)  $f(x) = x \ln(x)$

**Problema 4.3.** Encontre os valores máximos e mínimos absolutos de  $f$  no intervalo  $I$ .

(1)  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$  e  $I = [-2, 3]$

(2)  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$  e  $I = [0, 3]$

(3)  $f(t) = t\sqrt{4-t^2}$  e  $I = [-1, 2]$

(4)  $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$  e  $I = [0, \pi/3]$

(5)  $f(x) = x \exp(-x)$  e  $I = [0, 2]$

(6)  $f(x) = x - 3 \ln(x)$  e  $I = [1, 4]$

**Problema 4.4.** Um fazendeiro tem 2400 pés de cerca e quer cercar um campo retangular que está na margem de um rio reto. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Quais são as dimensões do campo que tem maior área?

**Problema 4.5.** Uma lata cilíndrica é feita para receber 1 litro de óleo (o qual ocupa volume de  $1000 \text{ cm}^3$ ). Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal para produzir a lata.

**Dica:** Utilize que o volume é área da base multiplicada pela altura, i.e.,  $\pi r^2 h = 1000$  onde  $h$  é a altura e  $r$  o raio da base.

**Problema 4.6.** Seja  $p(x)$  o preço por  $x$  unidades. A função rendimento é definida como  $R(x) = xp(x)$ . A função lucro é definida como  $L(x) = R(x) - C(x)$  onde  $C(x)$  é o custo por  $x$  produtos. Determine o nível de produção que maximizará o lucro para uma companhia com funções custo e preço definidas abaixo:

(a)  $C(x) = 84 + 1,26x - 0,01x^2 + 0,00007x^3$ ,  $p(x) = 3,5 - 0,01x$

(b)  $C(x) = 680 + 4x + 0,01x^2$ ,  $p(x) = 12$

(c)  $C(x) = 1450 + 36x - x^2 + 0,001x^3$ ,  $p(x) = 60 - 0,01x$

**Problema 4.7.** Uma loja começa a vender 200 aparelhos por semana a R\$350,00 cada. Uma pesquisa de mercado indicou que, para cada abatimento de R\$10 oferecido aos compradores, o número de aparelhos vendidos aumenta em 20. Em outras palavras, a função preço pode ser modelada por

$$p(x) = 350 - \frac{10}{20}(x - 200) = 450 - \frac{1}{2}x$$

Qual deve ser o abatimento oferecido pela loja para maximizar seu rendimento, i.e.,  $R(x) = xp(x)$ ?

## 4.2 Derivadas e Forma de Gráficos

**Problema 4.8.**

- (a) Encontre os intervalos nos quais  $f$  é crescente ou decrescente.
- (b) Encontre os valores de máximo e mínimo local de  $f$ .
- (c) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão (i.e, de mudança de concavidade).

(1)  $f(x) = x^3 - 12x + 1$



- (2)  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$
- (3)  $f(x) = x - 2\sin(x)$  no domínio  $0 < x < 3\pi$
- (4)  $f(x) = x \exp(x)$
- (5)  $f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

**Problema 4.9.**

- (a) Encontre os intervalos em que a função é crescente ou decrescente.
- (b) Encontre os valores de máximo ou mínimo locais.
- (c) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão (i.e, de mudança de concavidade).
- (d) Esboce o gráfico de  $f$ .

(1)  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

(2)  $f(x) = x^4 - 6x^2$

(3)  $h(x) = 3x^5 - 5x^3 + 3$

(4)  $A(x) = x\sqrt{x+3}$

(5)  $C(x) = x^{1/3}(x+4)$

**Problema 4.10.**

- (a) Encontre as assíntotas vertical e horizontal.
- (b) Encontre os intervalos nos quais a função é crescente ou decrescente.
- (c) Encontre os valores de máximo e mínimo locais.
- (d) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão (i.e, de mudança de concavidade).

(e) Esboce o gráfico de  $f$ .

(1)  $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$

(2)  $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$

(3)  $f(x) = \ln(1 - \ln(x))$

(4)  $f(x) = \exp\left(\frac{-1}{x+1}\right)$

### 4.3 Respostas do B4

Problema ??: ponto de mínimo absoluto é  $x = 2$  e valor mínimo absoluto é  $f(2) = -3$ . O ponto de máximo absoluto é  $x = 4$  e o valor máximo absoluto é  $f(4) = 17$ .

Problema ??:

(1)  $n\pi$  onde  $n$  é um inteiro

(2)  $\frac{1}{e}$

Problema ??:

(1)  $f(3) = 66, f(+1) = f(-1) = 2$

(2)  $f(1) = \frac{1}{2}, f(0) = 0$

(3)  $f(\sqrt{2}) = 2, f(-1) = -\sqrt{3}$

(4)  $f(\pi/4) = \sqrt{2}, f(0) = 1$

(5)  $f(1) = 1/e, f(0) = 0$

(6)  $f(1) = 1, f(3) = 3 - 3\ln(3)$

Problema ??: O campo retangular deve ser de 600 pés de profundidade e 1200 pés de extensão.

Problema ??: Para minimizar o custo da lata, o raio deve ser  $\sqrt[3]{500/\pi}cm$  e a altura duas vezes o raio.

**Observação:** Os problemas ?? e ?? estão completamente resolvidos na Seção 4.7 (exemplos resolvidos) do livro Stewart: Cálculo Vol I. Quinta Edição.

Problema: ??

- (a)  $x = \sqrt{\frac{2,24}{0,00021}}$
- (b) 400
- (c) 672

Problema: ??:  $x = 450$  é a quantidade onde o rendimento atinge seu máximo. O preço correspondente é  $p(450) = R\$225,00$ . Assim sendo o abatimento, i.e., diferença do preço de venda inicial ( $R\$350,00$ ) e do preço de venda atual ( $R\$225$ ), é  $R\$125 = 350 - 225$

Problema ??:

- (1) (a) Cresce em  $(-\infty, -2), (2, \infty)$ ; decresce em  $(-2, 2)$   
(b) Máximo local  $f(-2) = 17$  mínimo local  $f(2) = -15$   
(c) Concavo para cima em  $(0, \infty)$  e concavo para baixo em  $(-\infty, 0)$ , ponto de inflexão  $(0, 1)$ .
- (2) (a) Cresce em  $(-1, 0), (1, \infty)$ , decresce em  $(-\infty, -1), (0, 1)$ .  
(b) Máximo local  $f(0) = 3$  mínimo local  $f(1) = f(-1) = 2$   
(c) Concavidade para cima em  $(-\infty, -\sqrt{3}/3), (\sqrt{3}/3, \infty)$   
Concavidade para baixo em  $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$  e pontos de inflexão  $(\sqrt{3}/3, 22/9)$  e  $(-\sqrt{3}/3, 22/9)$
- (3) (a) Cresce em  $(\pi/3, 5\pi/3), (7\pi/3, 3\pi)$  decresce em  $(0, \pi/3), (5\pi/3, 7\pi/3)$   
(b) Máximo local  $f(5\pi/3) = 5\pi/3 + \sqrt{3}$ , mínimo local  $f(\pi/3) = \pi/3 - \sqrt{3}$   
 $f(7\pi/3) = 7\pi/3 - \sqrt{3}$

- (c) Concavo para cima em  $(0, \pi)$   $(2\pi, 3\pi)$  concavo para baixo em  $(\pi, 2\pi)$ , pontos de inflexão  $(\pi, \pi)$  e  $(2\pi, 2\pi)$ .
- (4) (a) Cresce em  $(-1, \infty)$  decresce em  $(-\infty, -1)$   
 (b) Mínimo local  $f(-1) = -1/e$   
 (c) Concavo para cima em  $(-2, \infty)$  concavo para baixo em  $(-\infty, -2)$ , ponto de inflexão  $(-2, -2 \exp(-2))$
- (5) (a) Cresce em  $(0, \exp(2))$  decresce em  $(\exp(2), \infty)$   
 (b) Máximo local  $f(\exp(2)) = 2/e$   
 (c) Concavo para cima em  $(\exp(8/3), \infty)$  concavo para baixo em  $(0, \exp(8/3))$  ponto de inflexão  $(\exp(8/3), \frac{8}{3} \exp(-4/3))$

Problema ??:

- (1) (a) Cresce em  $(-\infty, -1), (2, \infty)$  decresce em  $(-1, 2)$   
 (b) Máximo local  $f(-1) = 7$ , mínimo local  $f(2) = -20$   
 (c) Concavo para cima em  $(1/2, \infty)$  concavo para baixo em  $(-\infty, 1/2)$ , ponto de inflexão  $(1/2, -13/2)$
- (2) (a) Cresce em  $(-\sqrt{3}, 0), (\sqrt{3}, \infty)$ , decresce em  $(-\infty, -\sqrt{3}), (0, \sqrt{3})$   
 (b) Mínimo local  $f(\sqrt{3}) = f(-\sqrt{3}) = -9$ , máximo local  $f(0) = 0$   
 (c) Concavo para baixo em  $(-1, 1)$  e concavo para cima  $(-\infty, -1)$   $(1, \infty)$ , pontos de inflexão  $(-1, -5)$ ,  $(1, 5)$
- (3) (a) Cresce em  $(-\infty, -1)$   $(1, \infty)$  decresce em  $(-1, 1)$   
 (b) Máximo local  $h(-1) = 5$  mínimo local  $h(1) = 1$   
 (c) Concavo para baixo em  $(-\infty, -1/\sqrt{2})$ ,  $(0, 1/\sqrt{2})$  concavo para cima em  $(-1/\sqrt{2}, 0)$   $(1/\sqrt{2}, \infty)$  pontos de inflexão  $(0, 3)$ ,  $(1/\sqrt{2}, 3 - \frac{7}{8}\sqrt{2})$   $(-1/\sqrt{2}, 3 + \frac{7}{8}\sqrt{2})$
- (4) (a) Cresce em  $(-2, \infty)$  e decresce em  $(-3, -2)$   
 (b) Mínimo local  $A(-2) = -2$   
 (c) Concavo para cima em  $(-3, \infty)$
- (5) (a) Cresce em  $(-1, \infty)$  decresce em  $(-\infty, -1)$

- (b) Mínimo local  $C(-1) = -3$
- (c) Concavo para cima em  $(-\infty, 0)$   $(2, \infty)$  concavo para baixo em  $(0, 2)$ , pontos de inflexão  $(0, 0)$   $(2, 6\sqrt[3]{2})$

Problema ??:

- (1)
  - (a) Assíntota horizontal  $y = 1$ , assíntota vertical  $x = -1$   $x = 1$
  - (b) Cresce em  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 0)$  decresce em  $(0, 1)$   $(1, \infty)$
  - (c) Máximo local  $f(0) = 0$
  - (d) Concavo para cima em  $(-\infty, -1)$   $(1, \infty)$ , concavo para baixo em  $(-1, 1)$
- (2)
  - (a) Assíntota horizontal  $y = 0$
  - (b) Decresce em  $(-\infty, \infty)$
  - (c) nenhum
  - (d) Concavo para cima em  $(-\infty, \infty)$
- (3)
  - (a) Assíntota vertical  $x = 0$   $x = e$
  - (b) Decresce em  $(0, e)$
  - (c) Nenhum
  - (d) Concavo para cima em  $(0, 1)$ , concavo para baixo em  $(1, e)$  ponto de inflexão  $(1, 0)$
- (4)
  - (a) Assíntota horizontal  $y = 1$  assíntota vertical  $x = -1$
  - (b) Cresce em  $(-\infty, -1)$   $(-1, \infty)$
  - (c) Nenhum
  - (d) Concavo para cima em  $(-\infty, -1)$   $(-1, -1/2)$  concavo para baixo em  $(-1/2, \infty)$  ponto de inflexão  $(-1/2, 1/\exp(2))$ .