

M. Alexandrino e Y. N. Alvarez

Cálculo Avançado

Notas de aula do
Prof. Marcos M. Alexandrino (IME-USP)
(com co autoria de Dra. Yunelsy N. Alvarez)

Sumário

Prefácio	iii
Agradecimentos	v
1 Variedades mergulhadas em espaços Euclidianos	1
1.1 Submersões e imersões	1
1.2 Espaços tangentes e métrica induzida	11
1.3 Campos de vetores e o campo gradiente	15
1.3.1 Campos de vetores	15
1.3.2 Campo gradiente	16
1.3.3 Colchete de campos, um primeiro contato	18
1.4 Multiplicadores de Lagrange	19
1.5 Hessiano	25
1.5.1 Extremos locais	28
1.5.2 Critérios de classificação de pontos críticos	33
1.5.3 Fórmula de Taylor de ordem maior	38
1.5.4 Máximos e mínimos absolutos	39
1.6 *Curvatura de Gauss de superfícies	41
1.7 *Hessiana orlada	48
1.7.1 Motivação e o Teorema do Hessiano Orlado	49
1.7.2 **Ideia da Prova	51
2 Uma introdução a Geometria Riemanniana	55
2.1 Métricas e variedades Riemannianas	55
2.2 Conexão Riemanniana e o Transporte Paralelo	57
2.3 Geodésicas	67

2.4	Curvatura intrínseca, campos de Jacobi e Equação de Gauss	77
2.4.1	Tensor curvatura e curvatura seccional	77
2.4.2	Campos de Jacobi e variações por geodésicas	79
2.4.3	Equação de Gauss e o teorema Egregium de Gauss	85
2.5	Curvatura média e superfícies mínimas	90
2.5.1	Superfícies mínimas	90
2.5.2	EDP das superfícies mínimas	93

Índice Remissivo	97
-------------------------	-----------

Prefácio

Estas são notas de aulas da disciplina ministrada pelo Prof. Marcos Alexandrino que estão sendo completamente revisadas e ampliadas pela co-autora Dra. Yunelsy Nápoles Alvarez (durante seu pos-doc no IME-USP). Esta previsto que tais notas sejam a primeira parte (primeiro volume) de um projeto mais elaborado (Cálculo Avançado e Geometria Riemanniana), sendo que nos próximos volumes contaremos com co-autorias dos Profs. Francisco C. Caramello Jr e Leonardo F. Cavenaghi.

Os objetivos deste volume de Cálculo Avançado são:

Primeiro partindo sempre de motivações de Cálculo II e Cálculo III introduzir os vários conceitos da disciplina, dentre eles: variedade mergulhada, teorema de submersão, imersão, posto, campos de vetores, teorema de Frobenius, integração em \mathbb{R}^n incluindo teorema de Fubini e mudança de variáveis, e uma introdução a formas diferenciáveis em variedades com uma versão do teorema de Stokes com suas aplicações a Cálculo III.

Segundo, ao longo do texto, sempre que for oportuno, colocar tópicos adicionais destacando ao leitor(a) as conexões da disciplinas com tópicos mais avançados (vários deles com um alerta (*) para informar o leitor(a) que o tópico pode ser pulado de acordo com sua conveniência). Dentre tais tópicos podemos destacar: conceitos de Geometria Diferencial (curvatura de Gauss, conexão, geodésica), Hessianos orlados, conceitos da Teoria Geométrica de Controle e o Teorema de Stefan-Sussmann (incluindo sua demonstração), formulação da mecânica Hamiltoniana e Lagrangiana, e uma ideia do enunciado e da prova do princípio do máximo de Pontryagin.

São Paulo, 2022

Marcos M. Alexandrino

Agradecimentos

Estas são notas em preparação. Agradecemos muito envio de correções e sugestões para o email malex@ime.usp.br

Variedades mergulhadas em espaços Euclidianos

Neste capítulo vamos apresentar alguns resultados sobre teoria das variedades mergulhadas e fixar algumas notações. Por meio de recordações de alguns resultados e exercícios esperamos destacar ao leitor ou leitora que muitos dos conceitos e resultados sobre variedades que iremos utilizar são generalizações naturais de resultados que foram apresentados em disciplinas anteriores de Cálculo II ou Cálculo III.

1.1. Submersões e imersões

Já nos primeiros semestre de graduação, engenheiros, matemáticos e físicos encontravam **espaços de configurações** M (todas possíveis posições de um certo sistema) como sendo "bons" subconjuntos em espaços Euclidianos \mathbb{R}^{m+k} . Em geral tais conjuntos eram descrito via pre imagens de k -vínculos $g_i : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}$, i.e., $M = G^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^{m+k}, G(x) = c\}$ onde $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ para $G(x) = (g_1(x), \dots, g_k(x))$ e $c = (c_1, \dots, c_k) \in \mathbb{R}^k$. Sobre boas condições conseguimos estabelecer os m graus de liberdade do M como sendo dimensão do espaço menos o número de vínculos. Tais conjuntos eram na verdade o que chamaremos aqui de variedades mergulhadas e os graus de liberdade suas dimensões. As boas condições sobre os vínculos serão revista no teorema de submersão. Antes de estabelecer as definições formais, recordemos alguns exemplos onde tais conjuntos apareciam. O leitor agora não precisa se preocupar em verificar algumas das afirmações e sim se concentrar mais na intuição e ideias dos exemplos.

Exemplo 1.1.

Dados 2 partículas $p, q \in \mathbb{R}^3$ a uma distância fixa de 1 unidade, o espaço de configuração deste sistema, pode ser descrito como

$$g^{-1}(1) = \{(p, q) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, g(p, q) = 1\}$$

onde a função $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(p, q) = \|p - q\|^2 = \sum_{i=1}^3 |p_i - q_i|^2$$

é nosso *vinculo*.

Exemplo 1.2.

Consideremos o espaço de configuração de um "braço robótico" em um plano com braço em si e antebraço de comprimentos l_1 e l_2 , i.e., conjunto de todos os possíveis 2 segmentos de reta no plano $\overline{0p}$ e \overline{pq} com $\|p\| = l_1$ e $\|p - q\| = l_2$. A configuração do braço é determinada pelo ângulo θ_1 entre eixo x_1 e $\overline{0p}$ e θ_2 ângulo entre eixo x_1 e \overline{pq} . Dado $z_i = e^{i\theta_i}$ temos então que o espaço de configuração é $M = S^1 \times S^1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} | G(z_1, z_2) = (1, 1)\}$ onde $G : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ como $G(z_1, z_2) = (|z_1|^2, |z_2|^2)$

Exemplo 1.3.

Consideremos agora o espaço de configuração de um sólido em \mathbb{R}^3 com centro de massa em 0 , i.e., o conjunto de todas as bases ortonormais $\{q_i\}_{i=1 \dots 3}$ com a mesma orientação da base canônica. Ao colocar as bases nas colunas de matrizes, tal conjunto pode então ser descrito como as matrizes ortogonais com determinante 1, ou seja primeiro consideramos as **matrizes ortogonais**

$$\mathbb{O}(3) := G^{-1}(Id) = \{Q \in \mathbb{GL}^{3 \times 3}(\mathbb{R}^3) | G(Q) = Id\}$$

onde $G : \mathbb{GL}^{3 \times 3} \rightarrow \mathcal{S}$ é $G(A) = AA^t$, sendo que $\mathbb{GL}^{3 \times 3}$ denota as matrizes com determinante diferente de zero e \mathcal{S} as matrizes simétricas. Possível verificar que $\mathbb{GL}^{3 \times 3}$ pode ser identificado com um aberto de \mathbb{R}^9 e \mathcal{S} com \mathbb{R}^6 . Nosso grupo $\mathbb{O}(3)$ terá 3 graus de liberdade. O espaço de configuração desejado

Continuação.

então é a componente conexa de $\mathbb{O}(3)$ das matrizes com determinante 1 denotado por $\mathbb{SO}(3)$ (que tem o mesmo grau de liberdade ou seja com 3 graus de liberdade). De fato é possível mostrar que as matrizes de determinante 1 podem ser conectadas continuamente a matriz identidade Id , enquanto as de determinante -1 podem ser conectadas com a matriz $-Id$

Observação 1.4.

Mais geralmente **um sistema mecânico interligado** estará mergulhado em um **sistema mecânico livre** que é descrito como produto de m cópias de $\mathbb{SO}(3) \times \mathbb{R}^3$ (cada cópia descrevendo um corpo rígido e seu centro de massa) com n cópias de \mathbb{R}^3 (cada cópia descrevendo uma partícula). Em particular, no Exemplo 1.2

$$\begin{aligned} \varphi : S^1 \times S^1 &\rightarrow (\mathbb{SO}(3) \times \mathbb{R}^3) \times (\mathbb{SO}(3) \times \mathbb{R}^3) \\ (z_1, z_2) &\mapsto ((Q(z_1), R(z_1)), (Q(z_2), R(z_2, z_1))) \end{aligned}$$

onde $Q(z_i) : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ é rotação definida como $Q(z_i)(z, t) = (z_i z, t)$ e as aplicações centro de massa são: $R_1(z_1) = r_1 Q(z_1) e_1$, $R_2(z_2, z_1) = l_1 Q(z_1) e_1 + r_2 Q(z_2) e_1$. Aqui r_1 é a distância do centro de massa de $\bar{0}p$ a 0 e r_2 é a distância do centro de massa de $\bar{p}q$ ao link p .

Observação 1.5.

Nossos conjuntos, que serão exemplos naturais de variedades, podem aparecer não só como espaço de configuração de um sistema, mas também como um subconjunto do espaço de fases (posição velocidade) de algum sistema dinâmico. Considere por exemplo, uma partícula com massa m localizada em uma reta presa a uma mola perfeita. O movimento de tal partícula é descrita pelo oscilador harmônico $m\alpha''(t) = -k\alpha(t) = -U'(\alpha(t))$ onde $U(q) = \frac{k}{2}q^2$ é a função potencial. Defina $E : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como a energia total, i.e., $E(q, \dot{q}) = \frac{m}{2}(\dot{q})^2 + U(q)$. Visto que $\frac{d}{dt}E(\alpha(t), \alpha'(t)) = 0$, (o que pode ser facilmente verificado pela regra da cadeia) concluímos que $E(\alpha(t), \alpha'(t)) = c$. Em outras palavras, posição e velocidade da partícula ficam restritas à elipse $E^{-1}(c) = \{(q, \dot{q}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, E(q, \dot{q}) = c\}$.

Após alguns exemplos e motivações estamos prontos para a definição formal de variedade mergulhada a seguir. Tal definição implicara, a grosso modo, que um pedaço da superfície é levada em um aberto de um plano.

Definição 1.6. Variedade mergulhada

Um conjunto $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$ é uma **m -variedade mergulhada** no espaço Euclidiano \mathbb{R}^{m+k} (ou subvariedade do \mathbb{R}^{m+k}) se para cada $p \in M$ existe uma vizinhança (aberto e conexo) $U \subset \mathbb{R}^{m+k}$ de p , vizinhança $V \subset \mathbb{R}^{m+k}$ de q e um difeomorfismo $\psi : U \rightarrow V$ tal que $\psi(p) = q$ e $\psi(U \cap M) = V \cap \{\mathbb{R}^m \times \{0\}\}$. Chamamos a aplicação $\psi|_{U \cap M}$ de **sistema de coordenada**, e $\varphi := \psi^{-1}|_{V \cap \{\mathbb{R}^m \times \{0\}\}}$ é chamada de **parametrização**.

Exemplo 1.7. Gráficos

Seja $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave. Considere o gráfico de h em \mathbb{R}^3 , ou seja, o conjunto

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 = h(x_1, x_2)\}.$$

Então M é uma variedade mergulhada em \mathbb{R}^3 pois a aplicação $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3 - h(x_1, x_2))$$

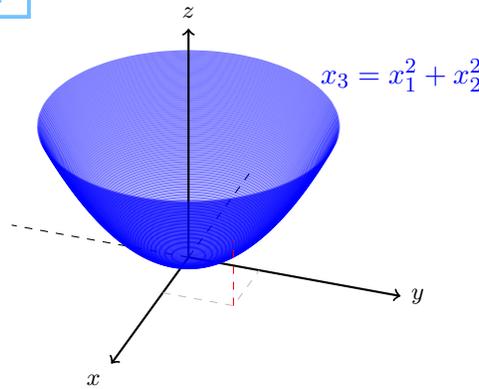
satisfaz as propriedades da Definição 1.6. De fato, como

$$D\psi(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\partial h}{\partial x_1} & -\frac{\partial h}{\partial x_2} & 1 \end{bmatrix}$$

para todo $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, então, pelo Teorema da Função Inversa, ψ é um difeomorfismo local de \mathbb{R}^3 . Além disso, $\psi|_M = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

Como caso particular observamos que o parabolóide é uma superfície mergulhada pois é o gráfico sobre \mathbb{R}^2 da função $h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

Continuação.

Figura 1.1: O Parabolóide de equação $x_3 = x_1^2 + x_2^2$

Subvariedades mergulhadas do espaço Euclidiano aparecem naturalmente descrita por “bons vínculos”, ou seja via submersões. Recorde que uma aplicação suave $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ é chamada **submersão** se DG_x é sobrejetora $\forall x \in U$.

Teorema 1.8. Teorema da Submersão

Seja $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma submersão suave. Então para todo $p_0 \in U$ existe uma vizinhança $U_0 \subset U$ de p_0 tal que a partição $\mathcal{F} = \{G^{-1}(c), c \in \mathbb{R}^k\} \cap U_0$ é difeomorfa à **folheação canônica** $\mathcal{F}_0 = \{\pi^{-1}(c), c \in \mathbb{R}\}$, onde $\pi : \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ é definida como $\pi(x, y) = y$. Mais precisamente existe um difeomorfismo $\varphi : V_0 \rightarrow U_0$ tal que $G \circ \varphi(x, y) = \pi(x, y) = y$.

Exemplo 1.9.

Para ilustrar o Teorema 1.8, consideremos novamente o Exemplo 1.7. Se definirmos a função $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_3 - h(x_1, x_2),$$

vemos que $\mathcal{F} = \{g^{-1}(c), c \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto das translações verticais do gráfico da função h (as quais são movimentos rígidos). Como o gráfico de h é difeomorfo a \mathbb{R}^2 , então \mathcal{F} é difeomorfa a \mathcal{F}_0 .

Neste caso, o difeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3 + h(x_1, x_2))$$

Continuação.

satisfaz

$$g \circ \varphi(x_1, x_2, x_3) = x_3 = \pi(x_1, x_2, x_3).$$

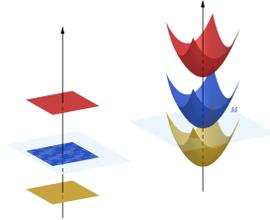


Figura 1.2: As folheações \mathcal{F}_0 e \mathcal{F} no caso em que $h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

Prova do Teorema 1.8. Seja $A : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ um movimento rígido (isometria no espaço Euclidiano) tal que a matriz $D_y \tilde{G}_{p_0}$ é invertível onde $\tilde{G} = G \circ A$. Defina $\psi(x, y) = (x, \tilde{G}(x, y))$ e observe que

$$D\psi_{p_0} = \begin{bmatrix} Id & 0 \\ D_x \tilde{G}_{p_0} & D_y \tilde{G}_{p_0} \end{bmatrix}$$

é um isomorfismo. Logo pelo teorema da função inversa $\psi : U_0 \rightarrow V_0$ é um difeomorfismo. Seja $L = \{(x, c) \in (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k) \cap V_0\}$.

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(L) &= \{(x, y) \in U_0, \psi(x, y) = (x, c)\} \\ &= \{(x, c) \in U_0, \tilde{G}(x, y) = c\} \end{aligned}$$

Assim $G \circ A \circ \psi^{-1}(x, c) = c$. A demonstração termina definindo $\varphi = A \circ \psi^{-1}$. \square

Dado uma aplicação $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ suave. Suponha que para $c \in G(U)$ temos que DG_x é sobrejetor $\forall x \in G^{-1}(c)$. Neste caso dizemos que c é **valor regular**.

Observe que dado um valor regular c e um ponto $x \in G^{-1}(c)$ então, como DG_x é sobrejetor, DG_p é sobrejetor para todos os pontos p próximos a x ou seja G se torna uma submersão na vizinhança de $x \in G^{-1}(c)$. Podemos então inferir o seguinte corolário usualmente conhecido como **teorema do valor regular**.

Corolário 1.10.

Seja $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma aplicação suave e c um valor regular. Então $M = G^{-1}(c)$ é variedade mergulhada no \mathbb{R}^{m+k} .

Exercício 1.11. Gráficos

Seja $H : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ aplicação suave. Defina o gráfico

$$M = \{(x, y) \in U \times \mathbb{R}^k, y = H(x)\}$$

e a função $G : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ como

$$G(x, y) = \sum_{i=1}^k (h_i(x) - y_i)e_{m+i},$$

Verifique que:

- (a) $M = G^{-1}(0)$,
- (b) G é submersão.

Segue também da demonstração do Teorema 1.8 o resultado a seguir.

Teorema 1.12. Teorema da Função Implícita

Seja $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma submersão suave. Então $M = G^{-1}(c)$ é um gráfico local. Mais precisamente suponha que a matriz $D_y G_{(p_1, p_2)}$ é um isomorfismo onde (p_1, p_2) é tal que $c = G(p_1, p_2)$. Então existe uma vizinhança B de (p_1, p_2) , uma vizinhança $W \subset \mathbb{R}^m$ de p_1 uma aplicação suave $H : W \rightarrow \mathbb{R}^k$ tal que: $(x, y) \in B \cap M$ se e somente se $y = H(x)$ com $x \in W$. Em particular $G(x, H(x)) = c$.

Demonstração. Na demonstração do Teorema 1.8 basta considerar $A = Id$. Com c fixado temos $\psi^{-1}(x, c) = (x, \tilde{H}(x, c))$. Então definimos $H(x) = \tilde{H}(x, c)$. \square

Exercício 1.13. Superfície de Revolução

Seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Suponha que c é valor regular da função

Continuação.

$(r, x_3) \rightarrow g(r^2, x_3)$. Seja

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, g(x_1^2 + x_2^2, x_3) = c\}.$$

Verifique que M é **superfície de revolução**, i.e., variedade mergulhada de dimensão 2 invariante por rotações que fixam o eixo x_3 (vide o exemplo da Figura 1.3).

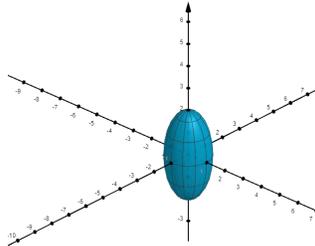


Figura 1.3: $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{4}x_3^2 = 1\}$ ilustra o Exercício 1.13

Observação 1.14.

No exercício anterior temos então uma variedade M que admite uma aplicação $\mu : G \times M \rightarrow M$ (onde $G = S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, $M = \mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$), definida como

$$\mu(g, (z, t)) = (gz, t).$$

Observe que tal aplicação μ atende as propriedades a seguir:

- $\mu(e, x) = x$;
- $\mu(g_2, \mu(g_1, x)) = \mu(g_2g_1, x)$.

Em geral, uma aplicação $\mu : G \times M \rightarrow M$ (G um grupo de Lie, por exemplo, um grupo fechado de matrizes, e M uma variedade) que satisfaz essas propriedades será denominada **ação**.

No exercício que se segue, temos um exemplo de uma variedade que admite a estrutura (suave) de um grupo, i.e., um exemplo de um grupo de Lie (vide detalhes Capítulo 2).

Exercício 1.15.

Seja $F : M^{3 \times 3}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}^{3 \times 3}(\mathbb{R})$ a aplicação definida por $F(A) = AA^t$, onde $M^{3 \times 3}(\mathbb{R})$ são as matrizes quadradas 3×3 com entradas reais, $\mathcal{S}^{3 \times 3}(\mathbb{R})$ são as matrizes simétricas com entradas reais e A^t denota a matriz transposta de A . Verifique que $DF(A) : \mathbb{R}^9 = T_A M^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^6 = T_{Id} \mathcal{S}^{3 \times 3}$ é sobrejetor, por exemplo aplicando $DF(A)$ aos vetores AS para matrizes simétricas S (os quais são candidatos a serem vetores normais a $\mathbb{O}(3)$ com pé em A). Conclua pelo teorema de submersão que $\mathbb{O}(3)$ é variedade mergulhada.

Observação 1.16.

Como observado anteriormente $\mathbb{SO}(3)$ é a componente conexa de $\mathbb{O}(3)$ contendo a identidade e assim também é variedade. As contas feitas no exercício acima se generalizam, mutatis mutandis para dimensões maiores. $\mathbb{O}(n)$ e $\mathbb{SO}(n)$ serão nossos exemplos neste livro de grupos de Lie compactos, mas outro grupo de Lie compacto igualmente fundamental é o grupo $\mathbb{SU}(n)$. Bom lembrar que também que $\mathbb{GL}^{n \times n}(\mathbb{R})$ (matrizes com determinante diferente de zero) e $\mathbb{SL}(n)$ (matrizes com determinante 1) são bons exemplos de grupos (de Lie) não compactos.

Uma outra forma em que encontrávamos variedades mergulhadas no espaço Euclidiano era via as imersões (as parametrizações). Recorde que uma aplicação suave $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ é chamada **imersão** se $D\varphi_x$ é injetora para todo $x \in U$.

Teorema 1.17. Teorema de imersão

Seja $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ uma imersão. Então dado $p \in U$ existe uma vizinhança $U_0 \subset U$ de p tal que $\varphi(U_0)$ é variedade mergulhada. Mais precisamente existe uma vizinhança U_1 de $\varphi(p_0)$, uma vizinhança U_2 de $(p, 0)$ em \mathbb{R}^{m+k} e um difeomorfismo $\psi : U_1 \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow U_2 \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ tal que $\psi \circ \varphi(x) = (x, 0)$.

Demonstração. Escolha um movimento rígido $A : \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ tal que a aplicação $\tilde{\varphi} = A \circ \varphi$ tem a propriedade que a matriz $(\frac{\partial \tilde{\varphi}_i}{\partial x_j})(p)$ é invertível onde $1 \leq j \leq m$ e $1 \leq i \leq m$.

Vamos definir então

$$\begin{aligned} F(x, y) &= (\tilde{\varphi}_1(x), \dots, \tilde{\varphi}_m(x), \tilde{\varphi}_{m+1}(x) + y_1, \dots, \tilde{\varphi}_{m+k}(x) + y_k) \\ &= \tilde{\varphi}(x) + (0, y) \end{aligned}$$

Observe que a matriz

$$DF_p = \begin{bmatrix} \pi_1 \circ D\varphi_p & 0 \\ \pi_2 \circ D\varphi_p & Id \end{bmatrix}$$

é invertível, onde $\pi_1(x, y) = x$ e $\pi_2(x, y) = y$.

Concluimos assim pelo teorema da função inversa que $F : U_2 \rightarrow U_1$ é um difeomorfismo, para vizinhanças U_i apropriadas. A demonstração termina observando que a aplicação definida como $\psi = F^{-1} \circ A$ atende as propriedades necessárias. \square

Exercício 1.18.

Seja M^2 superfície mergulhada em \mathbb{R}^3 invariante por rotação no eixo x_3 , ou seja, uma superfície de rotação. Verifique que a aplicação $\varphi : U \rightarrow M$ definida como

$$\varphi(t, \theta) = (r(t) \cos(\theta), r(t) \sin(\theta), h(t))$$

é uma parametrização de M^2 , onde $\beta(t) = (r(t), 0, h(t))$ é uma parametrização da curva geratriz com as propriedades que $\|\beta'\| \neq 0$ e $r(t) \neq 0$. Em outras palavras verifique que φ é uma imersão e sua imagem está contida em M^2 , vide Figura 1.4.

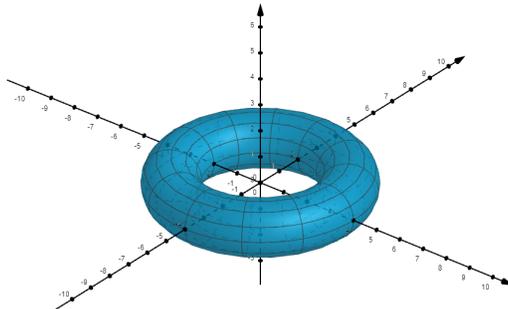


Figura 1.4: A aplicação $\varphi(t, \theta) = ((\cos(t) - 3) \cos(\theta), (\cos(t) - 3) \sin(\theta), \sin(t))$ é uma parametrização que ilustra o Exercício 1.18.

1.2. Espaços tangentes e métrica induzida

Antes de definir espaço tangente, precisamos fixar o conceito de vetores com pé e fibrado tangente do espaço Euclidiano. Dado um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, definimos:

- fibrado tangente de U como $TU = U \times \mathbb{R}^m$,
- projeção pé $\pi : TU \rightarrow U$ como $\pi(q, v) = q$,
- espaço tangente $T_qU = \mathbb{R}^m = \pi^{-1}(q)$

Um elemento $v_q \in T_qU$ será chamado **vetor com pé** e frequentemente pode modelar uma **velocidade** de uma partícula passando pela *posição* q . De fato, v_q é o vetor velocidade da curva $q + tv_q$ (onde t é suficientemente pequeno).

Note também que, dado uma curva suave $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow U$, a velocidade $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}U$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Além disso, se $F : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ uma aplicação suave, então $\beta(t) = F \circ \alpha(t)$ é uma curva suave em \mathbb{R}^{m+k} . Pela regra da cadeia segue que $\beta'(t) = DF_{\alpha(t)}(\alpha'(t))$. Em particular, se $q = \alpha(0)$, então DF_q leva $\alpha'(0) \in T_qU$ em $\beta'(0) \in T_{F(q)}\mathbb{R}^{m+k}$. Isto é,

$$DF_q : T_qU \rightarrow T_{F(q)}\mathbb{R}^{m+k}.$$

Definição 1.19.

Seja $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$ uma m -variedade mergulhada e $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset M$ uma parametrização. Então o subespaço $T_pM = D\varphi_q T_qU \subset T_p\mathbb{R}^{m+k}$ é chamado de **espaço tangente** no ponto $p = \varphi(q)$.

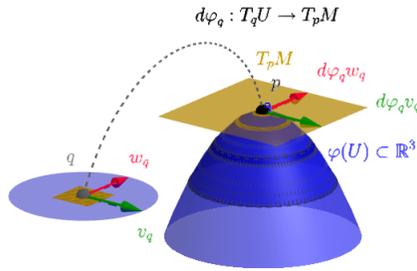


Figura 1.5: Dado uma imersão $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, uma base $\{v_q, w_q\}$ de $T_q U$ é levada em uma base $\{d\varphi_q v_q, d\varphi_q w_q\}$ de $T_p M$

O exercício a seguir mostra que o espaço tangente não depende da parametrização escolhida, logo, está *bem definido*.

Exercício 1.20.

Considere duas parametrizações $\varphi_i : V_i \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$ de uma variedade mergulhada $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$ tal que $W := \varphi_1(V_1) \cap \varphi_2(V_2) \neq \emptyset$. Verifique que se $\varphi_1(0) = p = \varphi_2(0)$ então $(D\varphi_1)_0 \mathbb{R}^m = (D\varphi_2)_0 \mathbb{R}^m$.

Veremos a seguir diferentes interpretações do espaço tangente. Em particular, o plano tangente de uma superfície pode ser visto como o espaço dos vetores velocidades de curvas contidas na superfície (vide Figura 1.6). Além disso, se a superfície for uma superfície de nível $M^2 = g^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^3; g(x) = c\}$, então o plano tangente passando por p será o plano afim perpendicular à $\nabla g(p)$.

Proposição 1.21.

Seja $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$ uma variedade mergulhada. Mostre que $v \in T_p M$ se e somente se existe curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$ (ou seja, v é uma velocidade de uma curva contida em M).

Demonstração. Seja $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$ uma parametrização tal que $\varphi(0) = p$. Como $v \in T_p M$, existe $w \in T_0 U$ tal que $v = D\varphi_0(w)$ (veja Definição 1.19). Seja ϵ suficientemente pequeno de forma tal que o seguimento $r(t) = tw$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, esteja contido em U . Assim, a curva $\alpha(t) = \varphi \circ r(t)$ é uma curva em M satisfazendo $\alpha(0) = \varphi(r(0)) = \varphi(p)$ e $\alpha'(0) = D\varphi_0(r'(0)) = D\varphi_0(w) = v$, como desejado. \square

Proposição 1.22.

Seja $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$ uma variedade mergulhada. Verifique que se M é pré imagem de valor c de uma submersão $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$, então $T_p M$ coincide com o núcleo de DG em p .

Demonstração. Seja $v \in T_p M$ o vetor velocidade de uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ passando por p (veja Proposição 1.21). Sendo $M = G^{-1}(c)$, temos que $G \circ \alpha(t) = c$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Logo,

$$DG_p(v) = DG_{\alpha(0)}(\alpha'(0)) = (G \circ \alpha)'(0) = 0,$$

mostrando que v pertence ao núcleo de DG_p .

Seja $v \in T_p M$ qualquer, o vetor velocidade de uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ passando por p (veja Proposição 1.21). Sendo $M = G^{-1}(c)$, temos que $G \circ \alpha(t) = c$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Logo,

$$DG_p(v) = DG_{\alpha(0)}(\alpha'(0)) = (G \circ \alpha)'(0) = 0,$$

mostrando que v pertence ao núcleo de DG_p . Como v é qualquer, segue que $T_p M \subset \text{Ker}(DG_p)$.

Por outro lado, como G é uma submersão, $\dim(T_p M) = \dim(\text{Im}(DG_p)) = m$. Além disso, de Álgebra Linear sabemos que

$$\dim(\mathbb{R}^{m+k}) = \dim \text{Ker}(DG_p) + \dim(\text{Im}(DG_p)),$$

donde

$$\dim(\text{Ker}(DG_p)) = m = \dim(T_p M),$$

concluindo que esses espaços coincidem. □

Observação 1.23.

A Proposição 1.22 implica que os vetores de $T_p M$ são ortogonais aos gradientes das componentes de G . De fato, supondo que $G(x) = (g_1(x), \dots, g_k(x))$, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= (G \circ \alpha)'(0) \\ &= ((g_1 \circ \alpha)'(0), \dots, (g_k \circ \alpha)'(0)) \\ &= (\langle \nabla g_1(\alpha(0)), \alpha'(0) \rangle, \dots, \langle \nabla g_k(\alpha(0)), \alpha'(0) \rangle). \end{aligned}$$

Exemplo 1.24.

Seja $g : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ função de classe C^1 e $M = \{x \in U \mid g(x) = c\}$ uma superfície regular (i.e., $\nabla g(x) \neq 0 \forall x \in M$). Dado $q = (q_1, q_2, q_3) \in M$ verifiquemos que o plano tangente no ponto q é dado pela equação

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(q)(x_1 - q_1) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(q)(x_2 - q_2) + \frac{\partial g}{\partial x_3}(q)(x_3 - q_3) = 0.$$

De fato, pela Proposição 1.22 e a Observação 1.23, temos que $\nabla g(q)$ é ortogonal ao vetor $x - q \in T_p M$. Portanto,

$$\langle \nabla g(q), x - q \rangle = 0$$

de onde segue a equação desejada.

Exercício 1.25.

Determine o plano tangente ao toro $M = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 3)^2 + x_3^2 = 1\}$ passando pelo ponto $q = (\frac{7}{4}, \frac{7\sqrt{3}}{4}, \frac{2\sqrt{3}}{4})$.

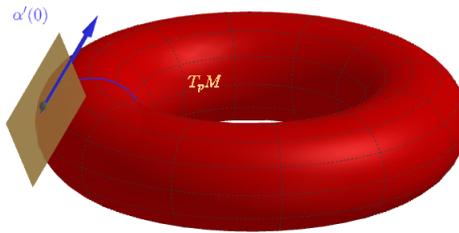


Figura 1.6: Plano tangente ao toro do Exercício 1.25

Exercício 1.26.

Determine $T_I \mathbb{O}(n)$, $T_A \mathbb{O}(n)$, onde A é qualquer matriz em $\mathbb{O}(n)$ e I é a matriz identidade de $\mathbb{M}^{n \times n}(\mathbb{R})$.

Sabendo que o espaço tangente a uma subvariedade mergulhada é um subespaço vetorial, é algo natural querer pensar em algumas estruturas usuais dos espaços vetoriais tais como produto interno e norma.

Definição 1.27.

Seja M variedade mergulhada em \mathbb{R}^{m+k} . Definimos a *métrica induzida* ou *primeira forma* como sendo o produto interno em \mathbb{R}^{m+k} restrito a cada espaço tangente, isto é,

$$g_p(u, v) = \langle u, v \rangle, \quad \forall u, v \in T_p M, \quad \forall p \in M.$$

Além disso, dada uma parametrização $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$, os valores $g_{ij} = \langle d\varphi_p(e_i), d\varphi_p(e_j) \rangle$, são os *coeficientes da métrica induzida* referentes a essa parametrização.

Exercício 1.28. Superfície de Revolução

Considere M uma superfície de revolução em \mathbb{R}^3 . Temos então a parametrização

$$\psi(t, s) = (r(t) \cos(s), r(t) \sin(s), h(t)),$$

onde $t \rightarrow \beta(t) = (r(t), h(t))$ é a curva geratriz com $\|\beta'(t)\| \neq 0$. Então

$$\begin{aligned} \psi_t &= \frac{\partial \psi}{\partial t} = (r'(t) \cos(s), r'(t) \sin(s), h'(t)) \\ \psi_s &= \frac{\partial \psi}{\partial s} = (-r(t) \sin(s), r(t) \cos(s), 0) \end{aligned}$$

Verifique que a métrica em coordenadas é:

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} (r'(t))^2 + (h'(t))^2 & 0 \\ 0 & (r(t))^2 \end{bmatrix}$$

1.3. Campos de vetores e o campo gradiente

Vamos nesta seção recordar alguns conceitos e resultados vistos em Cálculo II. Mais resultados sobre campos de vetores serão discutidos no Capítulo 2.

1.3.1. Campos de vetores

Um **campo \vec{F} suave** em um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ é uma aplicação suave $\vec{F} : U \rightarrow U \times \mathbb{R}^m$ definida como $\vec{F}(x) = (x, F(x))$ onde $F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$

é uma aplicação suave $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Ou seja uma aplicação do nosso espaço de configurações U para o nosso espaço de fases $U \times \mathbb{R}^m$ tal que $\pi \circ \vec{F}(x) = x$ onde $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é a projeção canônica $\pi(x, v) = x$. Visto que nosso espaço de fases é um produto trivial é possível escrever o campo \vec{F} em termos dos campos canônicos $\vec{e}_i(x) = (x, e_i)$ da forma

$$\vec{F} = \sum_i f_i \vec{e}_i, \quad (1.3.1)$$

vide Figura 1.3.2.

Dado um campo \vec{F} campo em $U \subset \mathbb{R}^m$ de classe C^k e $p \in U$. Então existe uma (única) curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ de classe C^k tal que

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \vec{F}(\gamma(t)) \\ p &= \gamma(0) \end{aligned}$$

Exemplo 1.29.

Seja $F(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ i.e., $\vec{F}(x_1, x_2) = x_1 \vec{e}_1 + \frac{3}{2} x_2 \vec{e}_2$ e $p = (1, 2)$.

Então, por Cálculo I, $\gamma(t) = (\exp(t), 2 \exp(\frac{3}{2}t))$

O exemplo acima ilustra o que chamamos **campo linear**, ou seja a aplicação $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é linear (i.e., $F(x) = Ax$).

1.3.2. Campo gradiente

Chamamos de **campo gradiente** de uma função diferenciável f ao campo

$$\nabla f = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \vec{e}_i.$$

Note que a equação acima parece depender dos campos canônicos. O Teorema de Representação de Riezs nos permite retirar essa dependência como podemos ver na seguinte definição.

Definição 1.30.

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Definimos o *vetor gradiente* de f em $p \in U$, denotado por $\nabla f(p)$, como sendo o único vetor de \mathbb{R}^n

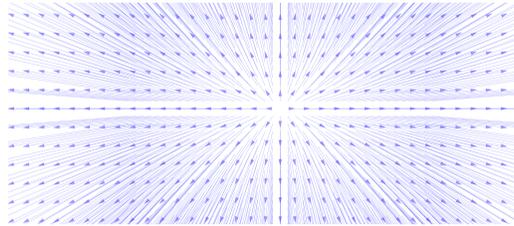


Figura 1.7: Campo $\vec{F} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{3}{2} x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$

Continuação.

satisfazendo

$$df(p)X = \langle \nabla f(p), X \rangle \quad \forall X \in \mathbb{R}^m.$$

Observe que,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = df(p)e_i = \langle \nabla f(p), e_i \rangle. \quad (1.3.2)$$

Logo,

$$\nabla f(p) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla f(p), e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) e_i. \quad (1.3.3)$$

Como aprendemos em Cálculo, segue da regra da cadeia, que campo gradiente indica direção e sentido de maior crescimento da função f e como vimos antes ele é ortogonal as superfícies de níveis $f^{-1}(c)$.

Observação 1.31.

Nem todo campo vetorial é gradiente de uma função. Por exemplo seja $\vec{F}(x_1, x_2) = x_2 \vec{e}_1 - x_1 \vec{e}_2$. Vamos supor por absurdo que existisse uma função f tal que $\nabla f = \vec{F}$. Então teríamos $\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2$ e $\frac{\partial f}{\partial x_2} = -x_1$. Por outro lado, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$. Chegamos assim a um absurdo pois $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = -1$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 1$. Logo não existe a tal f .

Uma vez recordado o relevante conceito de campos, podemos definir **um campo suave \vec{F} de uma variedade mergulhada $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$** como sendo uma aplicação que a cada $p \in M$ associa $\vec{F}(p) \in T_p M$ e que admite uma extensão local de um campo em \mathbb{R}^{m+k} . Vamos denotar o conjunto de campos suaves de M como $\mathfrak{X}(M)$.

Campo gradiente Riemanniano

Vimos que dado uma função $u : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável,

$$du_p X = \langle \nabla u(p), X \rangle, \forall X \in T_p \mathbb{R}^m.$$

Definição 1.32.

Considere uma função $u : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável e $M \subset U$ uma subvariedade mergulhada em \mathbb{R}^{m+k} . Defina $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ a restrição da função u a M , ou seja, $f = u|_M$. Definimos o campo **gradiente Riemanniano** $\text{grad } f(p)$ como o campo tangente a M que atende:

$$df_p X = \langle \text{grad } f(p), X \rangle, \forall X \in T_p M. \quad (1.3.4)$$

Em particular, $\text{grad } f(p)$ é a parte tangente de $\nabla u(p)$.

Observação 1.33.

No caso em que $M = g^{-1}(c)$, pre-imagem de um valor regular de uma função $g : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}$, segue

$$\text{grad } f(p) = \nabla u(p) - \left\langle \nabla u(p), \frac{\nabla g(p)}{\|\nabla g(p)\|} \right\rangle \frac{\nabla g(p)}{\|\nabla g(p)\|}$$

Segue diretamente de (1.3.4) que a maior taxa de variação de $f = u|_M$ ocorre na direção e sentido do vetor gradiente Riemanniano.

1.3.3. Colchete de campos, um primeiro contato

Nesta subseção apresentaremos rapidamente o operador colchete de campos e algumas de suas propriedades. No Capítulo 2 discutiremos seu significado geométrico. A grosso modo veremos que o colchete de campos mede a não comutatividade de campos. Porém, no momento estamos apenas interessados em sua definição no espaço Euclidiano e algumas de suas propriedades (a serem utilizadas em breve).

Sejam $\vec{V} = \sum_i v_i(x) \vec{e}_i$ e $\vec{W} = \sum_i w_i(x) \vec{e}_i$ dois campos de vetores no espaço Euclidiano \mathbb{R}^{m+k} . Definimos o **campo colchete** como sendo

$$[\vec{V}, \vec{W}] = D_V W - D_W V, \quad (1.3.5)$$

onde (vide Exemplo 2.4)

$$D_W \vec{V}_p = \sum_{i=1}^m dv_i(W) \vec{e}_i.$$

Exercício 1.34.

Escreva $[\vec{V}, \vec{W}]$ em termos dos campos canônicos \vec{e}_i .

Proposição 1.35.

- Se \vec{V} e \vec{W} são tangentes a uma subvariedade mergulhada M^m então $[\vec{V}, \vec{W}]$ é tangente a M
- $[V, W] = -[W, V]$
- $[V, W + \lambda Z] = [V, W] + \lambda[V, Z]$
- $[[V, W], Z] + [[Z, V], W] + [[W, Z], V] = 0$

1.4. Multiplicadores de Lagrange

Problemas de otimização estão presentes no dia a dia de engenheiros e economistas, usualmente tais problemas estão sujeitos (desde o ponto de vista prático ou lógico) a uma ou várias restrições. Tais restrições podem ser vistas como variedades mergulhadas em espaços Euclidianos. Nesta seção iremos aplicar alguns dos conceitos e resultados anteriores para provar o clássico resultado de multiplicadores de Lagrange.

Proposição 1.36.

Considere uma função suave $g : U \subset \mathbb{R}^2$ e sua curva de nível associada a um valor regular c ,

$$C = g^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^2, g(x) = c\}.$$

Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ função suave. Suponha que $f|_C$ (ou seja f restrita a C) tenha um ponto de máximo ou mínimo em $p \in C$. Então, $\nabla f(p)$ é perpendicular a C , ou

Continuação.

seja, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p).$$

Demonstração. Vamos dar uma prova para o caso em que p é máximo, o outro caso é análogo.

Como c é valor regular temos que existe uma parametrização $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow C$ com $\alpha'(t) \neq 0$ e $\alpha(0) = p$ (e.g. poderíamos usar o teorema da função implícita e tomar $\alpha(t) = (t+x_0, h(t+x_0))$). Temos então que $c = g(\alpha(t))$ para $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ e derivando concluímos

$$0 = \left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} g(\alpha(t)) \right|_{t=0} = \langle \nabla g(p), \alpha'(0) \rangle$$

Por outro lado, como f tem máximo em $p = \gamma(0)$ temos que $t \rightarrow f(\gamma(t))$ tem ponto crítico no interior e assim

$$0 = \left. \frac{d}{dt} f(\alpha(t)) \right|_{t=0} = \langle \nabla f(p), \alpha'(0) \rangle$$

As duas equações acima garantem que $\nabla g(p)$ e $\nabla f(p)$ são paralelos ou seja $\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$. \square

Exemplo 1.37. Cobb-Douglas e orçamento de 2 produtos

Consideremos o seguinte problema clássico de micro-economia.

Seja $C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 - w = 0 \text{ e } x_1, x_2 \geq 0\}$ a curva que representa um vínculo orçamentário de dois produtos. Considere que a função de utilidade esteja dada pela função de Cobb Douglas

$$u(x) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}.$$

O objetivo é maximizar a utilidade do consumidor dada a sua restrição orçamentária, isto é, maximizar a função u restrita a C .

Pela Proposição 1.36, se $s = (s_1, s_2)$ é um ponto de máximo, ele deve atender

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} s_1^{-\frac{1}{2}} s_2^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2} s_2^{-\frac{1}{2}} s_1^{\frac{1}{2}} \right) &= \nabla u(s) = \lambda \nabla g(s) = \lambda(2, 1) \\ w &= 2s_1 + s_2 \end{aligned}$$

Continuação.

Resolvendo o sistema acima concluímos que $s(w) = (\frac{w}{4}, \frac{w}{2})$. Ou seja, as quantidades dos produtos 1 e 2 que maximizam a função utilidade são $\frac{w}{4}$ e $\frac{w}{2}$, respectivamente. A utilidade máxima é $u(s(w)) = \frac{w}{2\sqrt{2}}$.

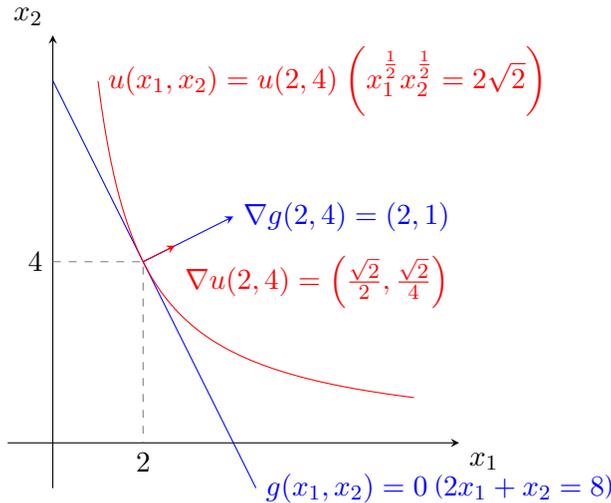


Figura 1.8: Representação para $w = 8$ da restrição orçamentária, a utilidade máxima sujeita à restrição orçamentária (curva de nível $u = u(s(8))$), e os gradientes de ambas funções no ponto de máximo

Observação 1.38. Shadow prices e família de vínculos

No caso bem particular de Cobb Douglas temos a existência de um único máximo $s(w)$ para cada vínculo $C_w = g^{-1}(w)$, o que nos dá uma curva diferenciável $w \rightarrow s(w) \in C_w$, vide Figura 1.9. Em particular $g \circ s(w) = w$. Por ser máximo temos: $\nabla u(s(w)) = \lambda(w) \nabla g(s(w))$. Assim, ao multiplicar ambos os lados

Continuação.

por $s'(w)$ concluímos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dw} u \circ s(w) &= \langle \nabla u(s(w)), s'(w) \rangle \\ &= \lambda(w) \langle \nabla g(s(w)), s'(w) \rangle \\ &= \lambda(w) \frac{d}{dw} g \circ s(w) \\ &= \lambda(w) \end{aligned}$$

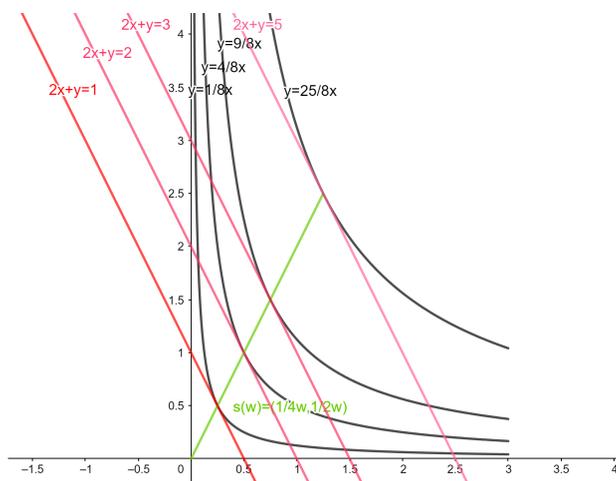


Figura 1.9: curvas de máximos no caso particular de u sendo **Cobb Douglas** e vários vínculos dado por orçamentos, ilustrando Exemplo 1.37 e Observação 1.38. Lembre que em problemas gerais de multiplicadores de Lagrange não precisa existir uma curva bem definida $w \rightarrow s(w)$

A seguir generalizaremos os multiplicadores de Lagrange para curvas planas para subvariedades mergulhadas no espaço Euclideano.

Teorema 1.39. Multiplicadores de Lagrange

Sejam $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma aplicação de classe C^1 definida por $G(x) = (g_1(x), \dots, g_k(x))$ e $M = \{x \in \mathbb{R}^{m+k} \mid G(x) = c\}$ uma subvariedade regular. Seja $u : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 . Suponha que existe

Continuação.

$q \in M$ tal que $u|_M$ tem valor máximo ou mínimo local. Então, $\nabla u(q)$ é ortogonal a T_qM , ou seja, existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla u(q) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla g_i(q).$$

Demonstração. Da Proposição 1.21 temos que para cada $v_q \in T_qM$ existe uma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ com $\alpha'(0) = v_q$. Visto que $u|_M$ (função restrita a M) tem um máximo ou mínimo em $q \in M$, temos que a função $h(t) = u(\alpha(t))$ tem máximo ou mínimo interior em $t = 0$, logo, $h'(0) = 0$. Assim, pela regra da cadeia, $0 = h'(0) = \langle \nabla u(q), \alpha'(0) \rangle = \langle \nabla u(q), v_q \rangle$. Como isto pode ser feito para qualquer outro $v_q \in T_qM$ concluímos que $\nabla u(q)$ é ortogonal a T_qM .

Por outro lado, sabemos que para cada $1 \leq i \leq k$, $\nabla g_i(q)$ é também ortogonal a T_qM (vide a Observação 1.23). Além disso, sendo $DG(x)$ sobrejetora $\forall x \in M$, o conjunto $\{\nabla g_i\}_{i=1}^k$ é uma base de T_qM^\perp (complemento ortogonal¹ de T_qM). Conclui-se que $\nabla u(p)$ é combinação linear de $\{\nabla g_i\}_{i=1}^k$ como desejado. \square

Do Teorema 1.39 podemos concluir que uma possibilidade para determinar os máximos ou mínimos de uma função $u : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sobre uma subvariedade regular $M = G^{-1}(c_1, \dots, c_k)$ é a de resolver o sistema

$$\begin{cases} \nabla u(q) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla g_i(q) \\ c_1 = g_1(q) \\ \vdots \\ c_k = g_k(q) \end{cases}$$

Exemplo 1.40. Cobb-Douglas e orçamento para três produtos

Seja $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6x_i > 0\}$ a superfície que representa um vínculo orçamentário de três produtos. Vamos considerar a função utilidade $u(x) = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$. Para determinar o ponto $q \in S$ onde $u|_S$ assume maior valor resolvemos o sistema dado pelo multiplicador de Lagrange.

¹Lembre-se que o complemento ortogonal de um subespaço vetorial é o conjunto de vetores do espaço que são ortogonais a tal subespaço.

Continuação.

Temos

$$\left(\frac{1}{3}x_1^{-\frac{2}{3}}x_2^{\frac{1}{3}}x_3^{\frac{1}{3}}, \frac{1}{3}x_2^{-\frac{2}{3}}x_1^{\frac{1}{3}}x_3^{\frac{1}{3}}, \frac{1}{3}x_3^{-\frac{2}{3}}x_2^{\frac{1}{3}}x_1^{\frac{1}{3}} \right) = \lambda(6, 3, 2)$$

$$6 = 6x_1 + 3x_2 + 2x_3,$$

donde $q = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$ e $u(q) = \sqrt[3]{\frac{2}{9}}$. Visto que \bar{S} (fecho de S) é fechado e limitado, e que o máximo não acontece no bordo ∂S (onde u é zero) q tem que ser de fato o ponto de máximo.

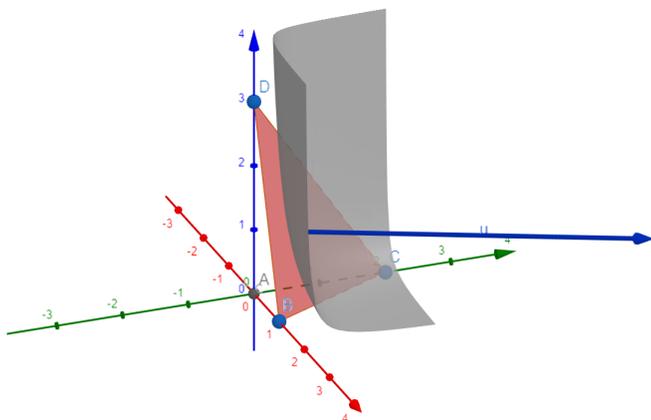


Figura 1.10: Superfície de nível $u^{-1}\left(\sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right)$ (associada à função utilidade u) tangente ao vínculo orçamentário S no ponto de máximo q , e o vetor $N = \nabla g(q)$.

Exercício 1.41.

Determine o volume do maior paralelepípedo de faces paralelas aos planos coordenados que pode ser inscrito em $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 9x_1^2 + 36x_2^2 + 4x_3^2 = 36\}$

Vamos agora rerepresentar o teorema dos multiplicadores de Lagrange em termos do gradiente Riemanniano (grad).

Proposição 1.42.

Seja M uma subvariedade mergulhada em \mathbb{R}^{m+k} e suponha que $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável que tem um ponto de máximo ou mínimo local em $p \in M$. Então $\text{grad } f(p) = 0$.

Demonstração. Seja p um ponto de máximo ou mínimo da função f . Sabemos que em uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^{m+k}$ de p , $M \cap U$ é a imagem inversa de um valor regular de uma aplicação diferenciável $G : U \rightarrow \mathbb{R}^k$.

Seja $\bar{f} : V \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}$ uma extensão de f a uma vizinhança de \mathbb{R}^{m+k} de p , ($V \subset U$) ou seja, $\bar{f} : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\bar{f}|_{V \cap M} = f$. Pela Proposição 1.39, $\nabla \bar{f}$ é ortogonal a M , logo sua projeção ortogonal em $T_p M$ é 0, mostrando que $\text{grad } f(p) = 0$. \square

1.5. Hessiano

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . Sabemos que $df(p) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação linear definida por $df(p) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_m}(p) \right]$

Deixando o p variar, temos uma aplicação $df : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ que é suave. Podemos então considerar a derivada da aplicação df .

$$\begin{aligned} df : M &\longrightarrow TM^* \\ p &\longmapsto df(p) : T_p M \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\qquad v \longmapsto df(p)v \end{aligned}$$

Definição 1.43.

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . A segunda derivada de f no ponto $p \in U$, $\text{Hess } f(p) = D(df)(p)$, é chamada de *Hessiano de f em p* .

Assim, temos

$$\text{Hess } f(p) = \begin{bmatrix} d \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \\ \vdots \\ d \frac{\partial f}{\partial x_m}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(p) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_m}(p) \end{bmatrix} \quad (1.5.1)$$

Exercício 1.44.

Determine o *Hess* f das funções $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

(a) $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2$

(b) $f(x_1, x_2) = -2x_1^2 - 2x_2^2$

(c) $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 2x_2^2$

(d) $f(x_1, x_2) = x_1x_2$

Relembre que dado uma matriz A $m \times n$, podemos definir uma nova matriz B $n \times m$ como sendo a matriz transporta A^t ou seja $b_{i,j}$ é definido como a_{ji} . Por exemplo se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ então $B = A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Além disso, uma matriz $m \times m$ A é chamada simétrica se $A = A^t$.

A matriz $m \times m$ na equação 1.5.1 é chamada de *matriz Hessiana de f* . Dado que f é de classe C^2 , temos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)$$

pelo teorema de Schwarz e, portanto, $\text{Hess } f(p)$ é uma matriz simétrica. Consequentemente, a segunda derivada de f , $D(df)(p) = \text{Hess } f(p)$ é uma aplicação linear simétrica.

Neste ponto convém lembrar um teorema muito útil de Álgebra Linear para matrizes simétricas

Teorema 1.45. Espectral

Seja A uma matriz simétrica $m \times m$. Então existe uma base ortonormal $\{q_i\}$ de \mathbb{R}^m (i.e., $\langle q_i, q_j \rangle = 0$ se $i \neq j$ e $\|q_i\| = 1$) tal que:

1. $Aq_i = \lambda_i q_i$, i.e., q_i é auto-vetor;
2. $Q^t A Q = \Lambda$, onde Q é a matriz com colunas q_i e Λ é a matriz diagonal de auto-valores λ_i .

Demonstração. vide Strang-Algebra Linear e aplicações □

Lembre que a equação $Av = \lambda v$ é equivalente à equação $(A - \lambda Id)v = 0$, e tal sistema tem solução não trivial se, e somente se, $(A - \lambda Id)$ não for invertível, ou seja, se, e somente se, $p(\lambda) = \det(A - \lambda Id) = 0$.

Lembre também que a transformação linear R associada a uma matriz ortogonal Q é um movimento rígido, ou seja, $\langle Rx, Ry \rangle = \langle x, y \rangle$ e assim $\|Qx\| = \|x\|$.

Exercício 1.46.

1. Mostre que os autovalores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

são 1 e -1 e que uma base ortonormal de auto-vetores é

$$\left\{ q_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), q_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}.$$

2. Dadas a matriz

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

cujas colunas são q_1 e q_2 , a aplicação linear $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $Q(x) = [Q]x$ e a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^t A x = 2x_1 x_2$, determine

$$f \circ Q(y) = f(y_1 q_1 + y_2 q_2).$$

Observação 1.47.

No Exemplo 1.46 tem-se que o gráfico da função (não linear) f é uma rotação do gráfico de $f \circ Q$ (a qual é uma sela de cavalo) como mostra a figura a seguir:

Continuação.

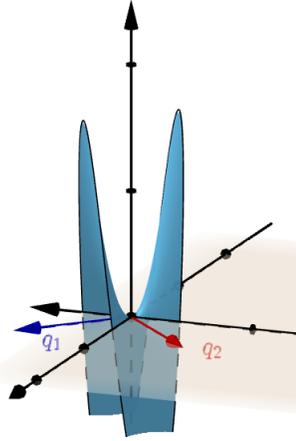


Figura 1.11: Gráfico de $f \circ Q(y) = f(y_1q_1 + y_2q_2) = y_1^2 - y_2^2$

1.5.1. Extremos locais

De Cálculo I sabemos que os extremos locais de uma função suave são pontos críticos da mesma. Isto é, se $f : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave e $p \in (-\epsilon, \epsilon)$, é um máximo ou mínimo local de f , então $f'(p) = 0$.

Porém a função $f(x) = x^3$ nos mostra que nem todo ponto crítico é um ponto de máximo ou mínimo local (de fato, $f'(0) = 0$ e $x = 0$ não é nem máximo nem mínimo).

Isto motivou a procura de critérios mais precisos como, por exemplo, o *Critério da segunda derivada*:

Seja $p \in (-\epsilon, \epsilon)$ é um ponto crítico de f ($f'(p) = 0$). Temos:

1. se $f''(p) > 0$ então p é mínimo local;
2. $f''(p) < 0$ então p é máximo local;

A prova se baseia no uso da fórmula de Taylor, i.e.,

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x - p) + \frac{1}{2}f''(p)(x - p)^2 + R(x - p)$$

onde x está suficientemente próximo de p e $\lim_{x \rightarrow p} \frac{R}{(x-p)^2} = 0$.

De fato, se $f'(p) = 0$ e $f''(p) > 0$, então, dividindo a Fórmula de Taylor por $(x - p)^2$ temos:

$$\frac{f(x) - f(p)}{(x - p)^2} = \frac{1}{2}f''(p) + \frac{R(x - p)}{(x - p)^2} > 0$$

e, assim, $f(x) > f(p)$ para x próximo a p (p é mínimo local).

Iremos aqui generalizar tais argumentos para funções sobre abertos de \mathbb{R}^n .

Exemplo 1.48.

A função $f(x) = 2x^2 - x^4$ tem um ponto crítico em $p = 0$ e a reta tangente ao gráfico de f em p é o eixo x . Para x próximo a p a função f é aproximada por $h(x) = \frac{1}{2}f''(p)(x - p)^2 = 2x^2$

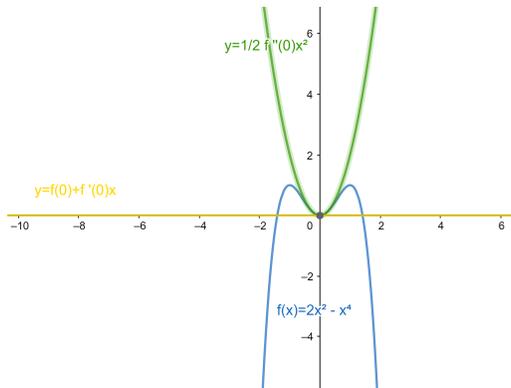


Figura 1.12: Gráfico de $f(x) = 2x^2 - x^4$, sua reta tangente em $p = 0$ e sua aproximação quadrática

Definição 1.49.

Sejam U um aberto de \mathbb{R}^n e $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ função diferenciável, dizemos que $p \in U$ é ponto de *mínimo local* (interior) se existe $\epsilon > 0$ tal que $\forall x \in B_\epsilon(p) \subset U$ tem-se $f(x) \geq f(p)$.

Analogamente, $q \in U$ é ponto de *máximo local* (interior) se existe $\epsilon > 0$ tal que $\forall x \in B_\epsilon(q) \subset U$ tem-se $f(x) \leq f(q)$.

Exemplo 1.50.

Dado $f(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - (x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4)$, é possível observar na figura a seguir que $p = (0, 0)$ é ponto de mínimo local de f .

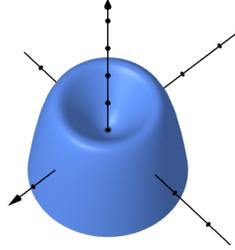


Figura 1.13:

Proposição 1.51.

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $p \in U$ um ponto de mínimo ou máximo local (interior). Então p é ponto crítico de f , i.e., $\nabla f(p) = 0$.

Demonstração. Dado $v_p \in T_p\mathbb{R}^m$, considere uma curva suave $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ tal que $\alpha'(0) = v_p$. Seja $h = f \circ \alpha$. Como p é máximo ou mínimo local, então $t = 0$ é máximo ou mínimo interior de $h = f \circ \alpha$, logo

$$0 = h'(0) = \langle \nabla f(p), \alpha'(0) \rangle.$$

Como isto vale para todo vetor tangente concluímos que $\nabla f(p) = 0$. □

Exemplo 1.52.

Dado $f(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 2$, $p = (0, 0)$ é ponto de máximo interior e, portanto, ponto crítico. Note que o vetor normal do plano tangente é $N = \left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), -\frac{\partial f}{\partial x_2}(p), 1\right) = (0, 0, 1)$, logo, o plano tangente é paralelo ao plano de equação $\{x_3 = 0\}$.

Continuação.

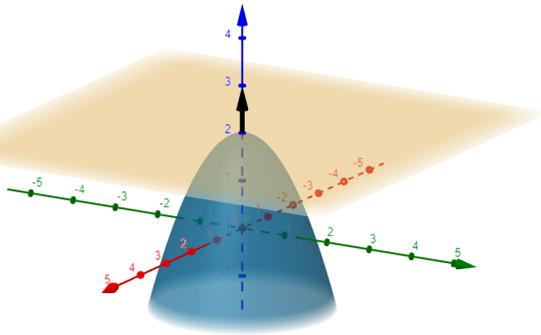


Figura 1.14:

Mas, se de um lado todo ponto de máximo ou mínimo interior é ponto crítico, nem todo ponto crítico é ponto de máximo ou mínimo local. Assim, tal como em Cálculo I, precisaremos de critérios mais finos para classificar pontos críticos, i.e., determinar se eles são de máximo, de mínimo ou sela.

Exemplo 1.53.

No gráfico de $f(x) = x_1^2 - x_2^2 + \frac{3}{2}$ se observa que $p = (0, 0)$ não é máximo nem mínimo local.

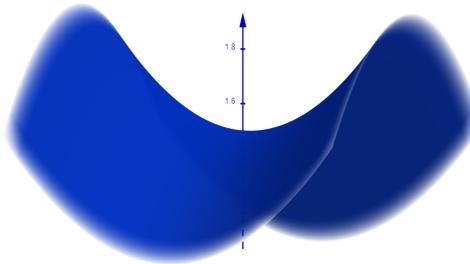


Figura 1.15:

Teorema 1.54. Fórmula de Taylor de ordem 2

Continuação.

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ função de classe C^3 . Então:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + df(p)(x - p) + \frac{1}{2}(x - p)^t \text{Hess } f(p)(x - p) + R(x - p) \\ &= f(p) + \langle \nabla f(p), (x - p) \rangle + \langle \text{Hess } f(p)(x - p), x - p \rangle + R(x - p) \end{aligned}$$

onde $\lim_{x \rightarrow p} \frac{R(x-p)}{\|x-p\|^2} = 0$.

Observação 1.55.

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Então

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(p) + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 - p_1 & x_2 - p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \end{bmatrix} \\ &= f(p) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)(x_1 - p_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)(x_2 - p_2) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p)(x_1 - p_1)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p)(x_1 - p_1)(x_2 - p_2) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(p)(x_2 - p_2)^2 \end{aligned}$$

O Teorema 1.54 garante que o polinômio

$$P_2(x) = f(p) + df(p)(x - p) + \frac{1}{2}(x - p)^t \text{Hess } f(p)(x - p),$$

chamado de *polinômio de Taylor de grau 2 em torno de p* , aproxima a função f numa vizinhança de p .

Além disso, se p for um ponto crítico de f , então a forma quadrática

$$h(x) = \frac{1}{2}(x - p)^t \text{Hess } f(p)(x - p)$$

aproxima a função. Isso sugere que, tal como em Cálculo I, classificar pontos críticos esteja relacionado com a compreensão da segunda derivada.

Note que no Problema 1.44, P_2 em torno de $p = (0, 0)$ coincide com a própria função de f .

Exemplo 1.56.

Seja $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - (x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4)$. Considerando $p = 0$ temos (pelo Problema 1.44) que $P_2(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2$.

Note que (pela figura) $p = (0, 0)$ é um ponto de mínimo e assim um ponto crítico, i.e., $\nabla f(p) = (0, 0)$. Logo, o plano tangente ao gráfico de f em p é $\{x_3 = f(p) = 0\}$.

A Fórmula de Taylor garante que, próximo a $p = (0, 0)$ o gráfico de f é aproximado por $h(x) = \frac{1}{2}(x - p)^t \text{Hess } f(p)(x - p) = P_2(x)$.

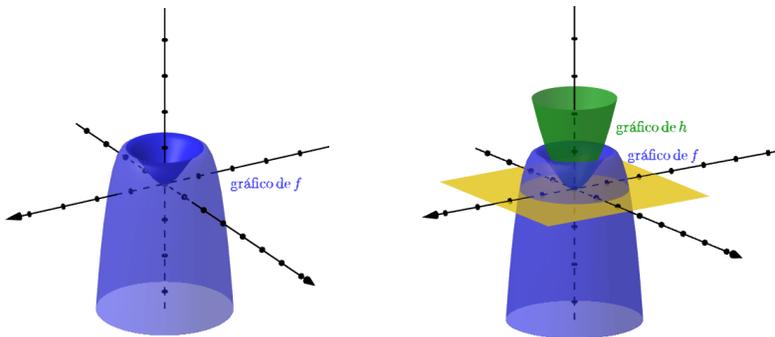


Figura 1.16: Gráfico de $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - (x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4)$, plano tangente e aproximação quadrática

1.5.2. Critérios de classificação de pontos críticos**Teorema 1.57.**

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3 . Suponha que $p \in U$ seja ponto crítico (i.e., $df(p) = 0$) e $\det \text{Hess } f(p) \neq 0$

- Se todos os auto-valores λ_i de $\text{Hess } f(p)$ são positivos (i.e., $\lambda_i > 0$), então p é mínimo.
- Se todos os auto-valores λ_i de $\text{Hess } f(p)$ são negativos (i.e., $\lambda_i < 0$), então p é máximo.
- Se parte dos auto-valores λ_i de $\text{Hess } f(p)$ são positivos, e a outra parte negativa, então p é sela.

Exemplo 1.58.

A função $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \frac{3}{2}$ tem um mínimo local em $(0, 0)$. Observe que $\text{Hess } f(0, 0)$ tem 2 como autovalor de multiplicidade 2.

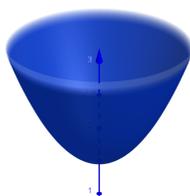


Figura 1.17:

A função $f(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 2$ tem um máximo local em $(0, 0)$. O Hessiano de f tem um único autovalor -2 de multiplicidade 2.

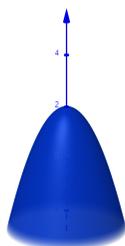


Figura 1.18:

Por outro lado, a função $f(x) = x_1^2 - x_2^2 + \frac{3}{2}$ não tem nem máximo nem mínimo no ponto $(0, 0)$. De fato, os autovalores de $\text{Hess } f(0, 0)$ são 2 e -2 .

Continuação.

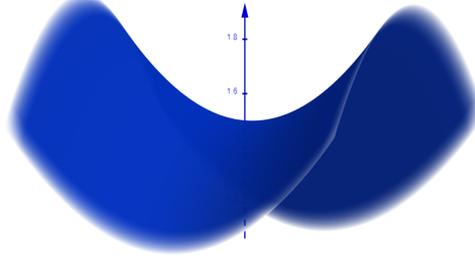


Figura 1.19:

Prova do Teorema 1.57. Vamos supor inicialmente que p está na origem, $f(p) = 0$ e $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m$ são os auto-valores de $\text{Hess } f(p)$.

Pela fórmula de Taylor temos:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x)^t \text{Hess } f(p)(x) + R$$

Pelo teorema Espectral

$$Q^t \text{Hess } f(p)(x) Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix} = \Lambda$$

onde $Q = [q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_m]$ é a matriz ortogonal cujas colunas são os autovetores (ortonormais) q_1, q_2, \dots, q_m de $\text{Hess } f(p)(x)$ associados a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$.

Sejam $y_i, 1 \leq i \leq m$, as coordenadas de x com respeito à base $\{q_1, q_2, \dots, q_m\}$, ou seja,

$$x = y_1 q_1 + y_2 q_2 + \cdots + y_m q_m = Qy, \quad (*)$$

onde $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$.

Substituindo nas duas equações acima temos:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{2} y^t Q^t \text{Hess } f(p) Q y + R \\
 &= \frac{1}{2} y^t (Q^t \text{Hess } f(p) Q) y + R \\
 &= \frac{1}{2} y^t \Lambda y + R \\
 &= \frac{1}{2} (\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_m y_m^2) + R \quad (**)
 \end{aligned}$$

Dividindo por $\|x\|^2 = \|y\|^2$ temos:

$$\frac{f(x)}{\|x\|^2} \geq \frac{1}{2} \lambda_1 + \frac{R}{\|x\|^2} > 0$$

para x próximo a p ou seja p é mínimo. \square

Entendido o fenômeno, podemos desenvolver um critério mais fácil de ser implementado (no qual não será necessário calcular os auto-valores explicitamente, mas apenas ter uma maneira de detectar seus sinais).

Iremos explorar o caso particular de dimensão dois.

Corolário 1.59.

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3 . Suponha que $p \in U$ seja ponto crítico (i.e., $df(p) = 0$) e $\det \text{Hess } f(p) \neq 0$

- (a) Se $\det \text{Hess } f(p) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p) > 0$ então p é mínimo.
- (b) Se $\det \text{Hess } f(p) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p) < 0$ então p é máximo.
- (c) Se $\det \text{Hess } f(p) < 0$ então p é sela.

Comentário (prova da proposição): A demonstração da proposição segue como caso particular do Teorema anterior e do Teorema *critério positivo definido* comentado a seguir.

¹O leitor pode verificar a obteção de (*) e (**) usando operações básicas de matrizes, começando por dimensões baixas.

Porém também é possível aplicar o Teorema anterior e o seguinte argumento geométrico: suponha que hipótese (a) seja verificada. Como $\det \text{Hess } f(0) = \lambda_1 \lambda_2 > 0$ temos $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ ou $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$. Assim pela demonstração do teorema anterior, o gráfico S da função $h(x) = x^t \text{Hess } f(0)x$ é um parabolóide elíptico para cima (se $\lambda_i > 0$) ou para baixo se ($\lambda_i < 0$). Para decidir qual das opções observe que o gráfico de $h(x_1, 0) = x_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(0)$ descreve a parábola $C = S \cap \{x_2 = 0\}$. Como esta parábola é para cima (pois por hipótese $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(0) > 0$), o gráfico de S é para cima. Logo $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ e pelo Teorema anterior, 0 é ponto de mínimo. Os outros itens se provam de forma similar.

Comentário (critério positivo definido): A proposição anterior é relacionada ao seguinte resultado de Álgebra Linear.

Teorema 1.60.

Considere uma matriz simétrica A . Então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. Os auto-valores de A são todos positivos (i.e, $\lambda_i > 0$);
2. $x^t A x > 0, \forall x \neq 0$ (A é positiva-definida);
3. $\det A_k > 0$ para todas as submatrizes A_k a esquerda, i.e as matrizes $k \times k$ definidas como $(a_k)_{ij} = a_{ij}$ para $0 \leq i \leq k$ e $0 \leq j \leq k$.

Por exemplo, se $m = 2$ e $A = \text{Hess } f(0)$, então $A_1 = [\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(0)]$ e $A_2 = \text{Hess } f(0)$, e assim re-obtemos as hipóteses do item (a) da proposição anterior.

Observação: Para demonstração vide Strang-Álgebra Linear e aplicações

Exercício 1.61.

Considere $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ função definida como $f(x_1, x_2) = 2(2x_1 - x_1^2)(2x_2 - x_2^2)$. Determine e classifique os pontos críticos.

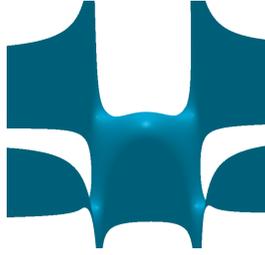


Figura 1.20: Gráfico da função do Problema 1.61, onde podemos observar que $(1, 1)$ é ponto de máximo local, e os pontos $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$ são pontos de sela

Observação 1.62. Curvatura de Gauss (Vide Seção 1.6)

Quando temos $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ função de classe C^3 onde $(0, 0) \in U$ é ponto crítico, temos que o plano tangente do gráfico em $(0, 0, f(0, 0))$ é paralelo a $\{x_3 = 0\}$. Neste caso, $K(q) = \det \text{Hess } f(0, 0) = \lambda_1 \lambda_2$ é chamada Curvatura de Gauss no ponto $q = (0, 0, f(0, 0))$. Assim se $K(q) > 0$ o gráfico de f é aproximado por uma parabolóide elíptico e se $K(q) < 0$ é aproximado por um parabolóide hiperbólico (sela de cavalo).

Mais geralmente, dado um gráfico S qualquer e $q \in S$ podemos, após movimento rígido, descrevê-lo (pelo menos localmente) como um novo gráfico de uma função h em relação ao plano plano tangente $T_q S$. Assim o conceito de curvatura de Gauss (presente na área da matemática chamada Geometria Diferencial) pode ser definido para qualquer ponto $q \in S$ bem como sua interpretação geométrica.

1.5.3. Fórmula de Taylor de ordem maior

Para facilitar a discussão vamos nos limitar a um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$.

Seja $v = (v_1, v_2)$ vetor em \mathbb{R}^2 . Considerando o conjunto de todas as funções de classe C^k em U (denotada por $C^k(U)$) poderemos criar uma aplicação linear $T : C^k(U) \rightarrow C^{k-1}(U)$ definida como

$$T(f) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

Denotaremos $v \cdot \nabla = T$ e assim

$$v \cdot \nabla = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

Com esta notação

$$\begin{aligned}
 (v \cdot \nabla)(w \cdot \nabla)f(p) &= (v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2})(w_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + w_2 \frac{\partial}{\partial x_2})f \\
 &= v_1 w_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p) + v_1 w_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p) \\
 &\quad + v_2 w_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p) + v_2 w_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(p) \\
 &= [v_1 \quad v_2] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \\
 &= v^t \text{Hess } f(p) w
 \end{aligned}$$

Em particular $\frac{1}{2} v^t \text{Hess } f(p) v = \frac{1}{2} (v \cdot \nabla)^2 f(p)$.

Teorema 1.63.

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ função de classe C^{k+1} , $p \in U$ e $v = (x - p)$. Então:

$$\begin{aligned}
 f(v + p) &= f(p) + (v \cdot \nabla)f(p) \\
 &\quad + \frac{1}{2}(v \cdot \nabla)^2 f(p) \\
 &\quad + \frac{1}{3!}(v \cdot \nabla)^3 f(p) \\
 &\quad + \frac{1}{4!}(v \cdot \nabla)^4 f(p) \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad + \frac{1}{k!}(v \cdot \nabla)^k f(p) \\
 &\quad + R(v)
 \end{aligned}$$

Onde $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{R(v)}{\|v\|^k} = 0$

1.5.4. Máximos e mínimos absolutos

Em certos casos particulares é possível até determinar máximos e mínimos absolutos. Para isto usaremos o seguinte resultado:

Teorema 1.64.

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $K \subset U$ um conjunto fechado e limitado (ou seja fechado tal que $K \subset B_R(\mathbf{0})$). Então a função restrita $f|_K$ possui um valor máximo e um valor mínimo.

O Teorema 1.64 sugere o seguinte algoritmo:

Passo 1: Determinar pontos críticos no interior de K ;

Passo 2: determinar candidatos a máximo ou mínimos de $f|_{\partial K}$ (ex, via parametrizações ou multiplicadores de Langrange)

Passo 3: comparar os candidatos determinados nos passos anteriores.

Exemplo 1.65.

Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 2x_1^2 + x_1 + x_2^2 - 2$ e $K = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g(x) = x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$. Vamos determinar os valores de máximos e mínimos absolutos de $f|_K$ seguindo o algoritmo anterior.

Passo 1: A solução do problema $\nabla f(x) = (0, 0)$ para x no interior de K é $x = (-\frac{1}{4}, 0)$

Passo 2: Para determinar candidatos a máximo ou mínimos de $f|_{\partial K}$ usaremos neste exemplo multiplicadores de Langrange.

$$\begin{aligned} (4x_1 + 1, 2x_2) = \nabla f(x) &= \lambda \nabla g(x) = \lambda(2x_1, 2x_2) \\ 4 &= x_1^2 + x_2^2 \end{aligned}$$

Cujas soluções são: $(2, 0), (-2, 0), (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}), (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2})$

Passo 3: Avaliando f nos pontos obtidos nos Passos 1 e Passo 2 concluímos: $-\frac{17}{8} = f(-\frac{1}{4}, 0)$ é valor mínimo absoluto, e $f(2, 0) = 8$ valor máximo absoluto.

Note que, como se mostra na figura a seguir, o ponto $(2, 0)$ é um ponto de máximo global de $f|_K$ que está no bordo de K e não é um ponto crítico de f .

Continuação.

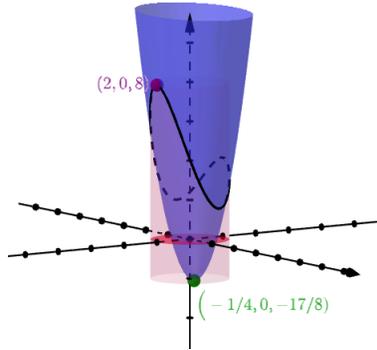


Figura 1.21:

1.6. *Curvatura de Gauss de superfícies

Por motivos didáticos estaremos considerando aqui sempre $M = g^{-1}(c)$ uma superfície regular onde c será um valor regular de uma função $g : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Após vermos o conceito de plano tangente de uma superfície de nível M seria natural nos perguntarmos por objetos que meçam quão diferente localmente a superfície possa ser de um plano. Uma possível abordagem seria olhar o vetor normal unitário $\eta = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}$ e nos perguntarmos quão rápido ele gira. Ou seja pensando nele intuitivamente como uma alavanca (ou um Joystick de videogame) gostaríamos de ver quão rápido ele muda de posição. Claramente se ele nunca mudar de posição ou seja se sua derivada for zero, então M é (ou pelo menos parece ser) um plano. Isto nos motiva a definir o seguinte operador

Definição 1.66.

Dado um superfície regular $M^2 = g^{-1}(c)$ em \mathbb{R}^3 e campo unitário $\eta = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}$ podemos definir a aplicação simétrica $\mathcal{S}_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ como

$$\mathcal{S}_p(X) := -D\eta_p X =: D_X \eta(p)$$

chamada **operador forma** (shape operator) ou Weingarten operator.

A definição acima claramente demanda várias explicações.

A primeira seria porque este operador de fato é um operador linear de T_pM para T_pM . Para ver isto considere uma curva $t \rightarrow \alpha(t) \in M$ com $\alpha'(0) = X \in T_pM$. Podemos então definir a função $f(t) = \langle \eta \circ \alpha(t), \eta \circ \alpha(t) \rangle = 1$. Ao derivar f em $t = 0$ concluímos que:

$$0 = f'(0) = 2\langle -\mathcal{S}_\eta X, \eta(p) \rangle$$

A equação acima então implica que de fato $\mathcal{S}_\eta : T_pM \rightarrow T_pM$

A segunda explicação que deveríamos dar é porque a aplicação $\mathcal{S}_\eta : T_pM \rightarrow T_pM$ é simétrica (e talvez porque este incômodo sinal de menos). Como isto exige um pouco mais de contas, coloquemos esta explicação em um pequeno lema.

Lema 1.67.

$\mathcal{S}_\eta(p) : T_pM \rightarrow T_pM$ é de fato simétrica.

Demonstração.

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{S}_\eta X, Y \rangle &= \langle -(D_X \eta)_p, Y \rangle \\ &\stackrel{(*)}{=} \langle \eta_p, D_X Y \rangle \\ &\stackrel{(**)}{=} \langle \eta_p, D_Y X \rangle \\ &\stackrel{(*)}{=} \langle -(D_Y \eta)_p, X \rangle \\ &= \langle \mathcal{S}_\eta Y, X \rangle \end{aligned}$$

Igualdade (*) segue definindo $f(t) = \langle \eta \circ \alpha(t), Y \circ \alpha(t) \rangle = 0$ e derivando em $t = 0$ (ou seja alterando levemente o truque acima discutindo). A igualdade (**) seguirá da expressão 1.3.5 para o campo colchete. \square

Uma vez definido o operador forma, podemos tentar medir quanto ele difere de zero, e assim tentar estabelecer uma medida de quanto M difere de um plano (pelo menos localmente). Por ser um operador simétrico nada mais natural do que olhar para seus autovalores.

Definição 1.68.

Os autovalores λ_1 e λ_2 de $\mathcal{S}_\eta(p) : T_pM \rightarrow T_pM$ são chamados **curvaturas principais**.

Antes interpretar o significado destes auto-valores, recordemos um resultado de Cálculo útil em nossa discussão sobre curvaturas principais.

Proposição 1.69.

Seja $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ função de classe C^3 . Suponha que $p \in U$ seja ponto crítico (i.e., $dh(p) = 0$) e que os autovalores λ_i de $\text{Hess } h(p)$ sejam diferentes de zero, i.e., $\det \text{Hess } h(p) \neq 0$. Defina $K(p) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$.

- (a) Se todos os auto-valores λ_i de $\text{Hess } h(p)$ são positivos, então p é mínimo, $K(p) > 0$ e o gráfico associado a h é aproximado (perto de p) por um parabolóide elíptico.
- (b) Se todos os auto-valores λ_i de $\text{Hess } h(p)$ são negativos (i.e., $\lambda_i < 0$), então p é máximo, $K(p) > 0$ e o gráfico associado a h é aproximado (perto de p) por um parabolóide elíptico.
- (c) Se um auto-valor de $\text{Hess } h(p)$ é positivo e o outro negativo, então p é ponto de sela, $K(p) < 0$ e o gráfico associado a h é aproximado (perto de p) por um parabolóide hiperbólico.

Proposição 1.70.

Seja M o gráfico em \mathbb{R}^3 de uma função $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suave tal que $(0, 0) \in U$, $h(0, 0) = 0$ e $\nabla h(0, 0) = (0, 0)$. Temos então:

- (a) $T_{(0,0,0)}M = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$,
- (b) se $\eta(0, 0, 0) = (0, 0, 1)$ então $S_\eta(v, 0) = (\text{Hess } h(0, 0)v, 0)$, onde S_η é o operador forma.
- (c) Conclua que as curvaturas principais são auto-valores λ_1 e λ_2 do $\text{Hess } h(0, 0)$ e assim que M pode ser aproximado por um parabolóide elíptico (respectivamente parabolóide hiperbolóide) se $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ (respectivamente se $\lambda_1 \lambda_2 < 0$).

Demonstração. (a) Ao definir $g(x) = x_3 - h(x_1, x_2)$ temos que o vetor normal $\nabla g(x) = (-\frac{\partial h}{\partial x_1}, -\frac{\partial h}{\partial x_2}, 1)$. Assim $\eta(0, 0, 0) = \nabla g(0, 0, 0) = (0, 0, 1)$ e consequentemente o plano tangente em $(0, 0, 0)$ é $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

(b) Definamos a parametrização $\psi(x_1, x_2) = (x_1, x_2, h(x_1, x_2))$ e com ela vetor normal e sua representação em uma parametrização (ou seja $\eta \circ \psi = \tilde{\eta}$)

$$\tilde{\eta}(x_1, x_2) = \frac{(-h_{x_1}, -h_{x_2}, 1)}{\sqrt{h_{x_1}^2 + h_{x_2}^2 + 1}}$$

onde $h_{x_i} = -\frac{\partial h}{\partial x_i}$. Seja $\alpha = \psi(\tilde{\alpha})$. Temos então:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\eta \alpha'(0) &= -\frac{d}{dt} \tilde{\eta} \circ \tilde{\alpha}(t)|_{t=0} \\ &= -\left(\frac{d}{dt} ((h_{x_1} \circ \tilde{\alpha}(t))^2 + (h_{x_2} \circ \tilde{\alpha}(t))^2 + 1)^{-1/2} \Big|_{t=0} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} -h_{x_1} \circ \tilde{\alpha}(t) \\ -h_{x_2} \circ \tilde{\alpha}(t) \\ 1 \end{bmatrix} \Big|_{t=0} \right) \\ &= 0 + \begin{bmatrix} h_{x_1 x_1}(0,0) & h_{x_2 x_1}(0,0) \\ h_{x_1 x_2}(0,0) & h_{x_2 x_2}(0,0) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}'_1(0) \\ \tilde{\alpha}'_2(0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

lembrando que $\alpha'(0) = (\tilde{\alpha}'_1(0), \tilde{\alpha}'_2(0), 0)$

(c) segue direto da Proposição 1.69. \square

Agora que temos uma interpretação do que são as curvaturas principais no caso particular descrito acima, podemos observar que toda superfície $M = g^{-1}(c)$ pode ser rodada e localmente na vizinhança do ponto p recaímos na situação descrita na Proposição 1.70. Assim a proposição acima motiva a definição de curvatura de Gauss a seguir e implica o corolário apresentado abaixo.

Definição 1.71.

Dado uma superfície regular $M = g^{-1}(c)$ e sejam λ_1, λ_2 curvaturas principais associadas a $\eta(p) = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}(p)$. A *curvatura de Gauss* em $p \in M$ é definida como $K(p) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$.

Corolário 1.72.

Seja $M = g^{-1}(c)$ superfície regular.

(a) Se $K(p) > 0$ então M é aproximado (perto de p) por um parabolóide elíptico,

Continuação.

(b) se $K(p) < 0$ então M é aproximado (perto de p) por um parabolóide hiperbólico.

Observação 1.73.

Note que embora os sinais das curvaturas principais possam depender da escolha do sentido do vetor normal unitário η (ou seja para $\hat{\eta} = -\eta$, $\hat{\lambda}_i = -\lambda_i$) a curvatura de Gauss não depende da escolha do sentido do vetor η .

Exercício 1.74.

Utilizando diretamente a definição de \mathcal{S}_η , determine as curvaturas principais e curvatura de Gauss de um plano em \mathbb{R}^3 e da esfera (canônica) $\mathbb{S}^2(r)$ de raio r e centro zero em \mathbb{R}^3 com vetor normal apontando para fora.

Para exemplos mais complicados, podemos calcular explicitamente curvaturas principais e curvatura de Gauss via parametrização, mas, antes de formalizar isto, precisamos do conceito de segunda forma, que não é mais que a aplicação bilinear associada ao operador de Weingarten (que, como vimos, é uma aplicação linear autoadjunta)

Definição 1.75.

Seja $M \subset \mathbb{R}^2$ uma subvariedade mergulhada. A forma quadrática $II_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$II_p(X) = \langle S_\eta(X), X \rangle, \quad (1.6.1)$$

é chamada de *segunda forma fundamental*.

Observação 1.76.

Se $\psi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ é uma parametrização de M , η vetor normal e $\tilde{\eta}$ definido como $\tilde{\eta} = \eta \circ \psi$. então os coeficientes da segunda forma fundamental estão dados por

$$b_{ij} = \langle -\tilde{\eta}_{x_i}, \psi_{x_j} \rangle = \langle \tilde{\eta}, \psi_{u_i, u_j} \rangle.$$

Proposição 1.77.

Sejam M superfície mergulhada em \mathbb{R}^3 e g_{ij} e b_{ij} os coeficientes da primeira e segunda forma, respectivamente. Então:

(a) a representação matricial do operador forma está dada por

$$[\mathcal{S}_\eta] = \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix};$$

(b) a curvatura de Gauss é dada por

$$\tilde{K}(x_1, x_2) = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2};$$

(c) a média das curvaturas principais, $H = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$, é calculada em coordenadas como:

$$\tilde{H}(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{b_{11}g_{22} - 2b_{12}g_{12} + g_{11}b_{22}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \right);$$

(d) e as curvaturas principais por $\lambda_i = H \pm \sqrt{H^2 - K}$.

Demonstração. Sejam a_{ij} funções tais que:

$$-\tilde{\eta}_{x_1} = a_{11}\psi_{x_1} + a_{21}\psi_{x_2}$$

$$-\tilde{\eta}_{x_2} = a_{12}\psi_{x_1} + a_{22}\psi_{x_2}$$

Multiplicando tais equações por ψ_{x_i} temos:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

a qual implica o item (a).

No caso dos itens (b) e (c) basta observar que $K = \det[\mathcal{S}_\eta]$ e $H = \text{tr}[\mathcal{S}_\eta]$ (deixamos o cálculo explícito aos leitores).

Para demonstrar (d) observe que o cálculo dos auto-valores de \mathcal{S}_η pode ser feito calculando o polinômio característico da matriz $[\mathcal{S}_\eta] = [a_{ij}]$. Assim,

$$0 = P(\lambda) = \det([\mathcal{S}_\eta] - \lambda Id) = \lambda^2 - \text{tr}[\mathcal{S}_\eta]\lambda + \det[\mathcal{S}_\eta] = \lambda^2 - 2H\lambda + K. \quad \square$$

Exemplo 1.78. Superfície de Revolução

Considere M uma superfície de revolução em \mathbb{R}^3 . Temos então a parametrização

$$\psi(t, s) = (r(t) \cos(s), r(t) \sin(s), h(t))$$

onde $t \rightarrow \beta(t) = (r(t), h(t))$ é a curva geratriz com $\|\beta'(t)\| \neq 0$.

$$\psi_t = \frac{\partial \psi}{\partial t} = (r'(t) \cos(s), r'(t) \sin(s), h'(t))$$

$$\psi_s = \frac{\partial \psi}{\partial s} = (-r(t) \sin(s), r(t) \cos(s), 0)$$

Logo a métrica em coordenadas é:

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} (r'(t))^2 + (h'(t))^2 & 0 \\ 0 & (r(t))^2 \end{bmatrix}$$

Para calcular b_{ij} primeiro calculemos o vetor normal.

$$\tilde{\eta}(t, s) = \frac{\psi_t \times \psi_s}{\|\psi_t \times \psi_s\|} = \frac{(-\cos(s)h'(t), -\sin(s)h'(t), r'(t))}{\sqrt{(h')^2 + (r')^2}}$$

Em seguida calculemos as derivadas segundas:

$$\psi_{tt} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (r''(t) \cos(s), r''(t) \sin(s), h''(t))$$

$$\psi_{ts} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial s} = (-r'(t) \sin(s), r'(t) \cos(s), 0)$$

$$\psi_{ss} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} = (-r(t) \cos(s), -r(t) \sin(s), 0)$$

$$[b_{ij}] = \frac{1}{\sqrt{(h')^2 + (r')^2}} \begin{bmatrix} -r''(t)h'(t) + h''(t)r'(t) & 0 \\ 0 & r(t)h'(t) \end{bmatrix}$$

Continuação.

Usando o item (b) da Proposição 1.77 podemos calcular a curvatura de Gauss.

$$\begin{aligned} K(p) &= \frac{1}{((r'(t))^2 + (h'(t))^2) r^2} \frac{(-r''(t)h'(t) + r'(t)h''(t)) r(t)h'(t)}{\sqrt{(r'(t))^2 + (h'(t))^2}} \\ &= \frac{-r''(t)(h'(t))^2 + r'(t)h'(t)h''(t)}{r(t) ((r'(t))^2 + (h'(t))^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Analogamente, pelo item (c) da Proposição 1.77 segue

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{1}{2r^2 ((r'(t))^2 + (h'(t))^2)} \\ &\quad \cdot \frac{(-r''(t)h'(t) + r'(t)h''(t)) (r(t))^2 + ((r'(t))^2 + (h'(t))^2) r(t)h'(t)}{\sqrt{(r'(t))^2 + (h'(t))^2}} \\ &= \frac{-r''(t)h'(t)(r'(t))^2 + (r(t))^2 r'(t)h''(t) + r(t)(r'(t))^2 h'(t) + r(t)(h'(t))^3}{2r^2 ((r'(t))^2 + (h'(t))^2)} \end{aligned}$$

Finalmente, se a curva β está parametrizada por comprimento de arco, ou seja, $\|\beta'\| = 1$, segue

$$\begin{aligned} K(p) &= \frac{-r''(t)(1 - (r'(t))^2) + r'(t)(-r'(t)r''(t))}{r(t) ((r'(t))^2 + 1 - (r'(t))^2)^{3/2}} \\ &= \frac{-r''(t)(1 - (r'(t))^2) - r''(t)(r'(t))^2}{r(t)} \\ &= -\frac{r''(t)}{r(t)}. \end{aligned}$$

1.7. *Hessiana orlada

Recordamos no Teorema 1.39 o clássico teorema de multiplicadores de Lagrange, que garante uma condição necessária para que a restrição de uma função u em um variedade regular $M = G^{-1}(c)$ tenha máximo ou mínimo em um ponto $p \in M$. Porém tal critério não garantiu que de fato a solução seja um ponto de máximo ou mínimo i.e., é um critério necessário porém não suficiente para existência de máximos e mínimos. Nos problemas clássicos de multiplicadores de Lagrange, as

funções u , são particulares o suficiente para admitirem apenas números finitos de candidatos a máximos e mínimos, então comparando-se os valores e usando compacidade de M estabelece-se que o valor menor é de fato o mínimo absoluto e o valor maior o máximo absoluto.

Recordaremos aqui o critério de Hessianos orlados (ou bordered hessian) o qual garante se um ponto crítico $q \in M$ é máximo ou mínimo local da função restrita a variedade M .

Utilizaremos esta discussão para já introduzir o conceito de conexão Riemanniana associada a métrica induzida do ambiente. Por motivos puramente didáticos estaremos considerando aqui sempre $S = g^{-1}(c)$ uma superfície onde c será um valor regular de uma função $g : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Embora de fato seja possível em um ponto crítico falar de Hessiano intrínscico sem envolver a estrutura geométrica (métrica induzida), utilizando apenas os colchetes dos campos, achamos que esta seria uma boa oportunidade para introduzir o conceito de derivação intrínscica e ver como ele pode ser uma ferramenta útil.

1.7.1. Motivação e o Teorema do Hessiano Orlado

Sejam $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ função definida como $u(x) = \frac{1}{2}(\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2)$, a superfície $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g(x) = x_1 = c\}$, $p = (c, 0, 0)$ e $f = u|_S$. Desejamos saber se p é ponto de máximo ou mínimo local de f e ao mesmo tempo motivar a apresentação do critério da Hessiana orlada.

Fácil ver que

- $f(x_2, x_3) = \frac{1}{2}(\lambda_1 c^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2)$
- $\text{grad } f(0, 0) = (0, 0)$
- $\text{Hess } f(0, 0) = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$ Assim p é máximo local de f se $\lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$ e é mínimo se $\lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$

Fizemos uma conta intrínscica. Mas e se quisermos fazer uma conta extrínscica, i.e., usando u ? Primeiro notemos que

$$\nabla u(p) = (\lambda_1 c, 0, 0) = \lambda \nabla g(p) = \lambda(1, 0, 0)$$

Ou seja, por multiplicador de Lagrange, p é o candidato para ser máximo ou mí-

nimo. Note também que $\text{Hess } u(p) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$ e assim contém informa-

ção a mais, i.e não precisamos saber sinal de λ_1 . Suponha que voce esteja ensinando um computador a se livrar da informação adicional (i.e., λ_1). Um bom

truque é usar a seguinte matriz orlada (colocando $\nabla g(p) = (1, 0, 0)$ no bordo).

$$\overline{H}_3 = \overline{\text{Hess } u} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \text{ e } \overline{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Visto que $\det \overline{H}_2 = (-1)\lambda_2$ e $\det \overline{H}_3 = (-1)\lambda_2\lambda_3$ concluímos que:

- Se $\det \overline{H}_2 < 0$ e $\det \overline{H}_3 < 0$, então p é mínimo de f ($\lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$).
- Se $\det \overline{H}_2 > 0$ e $\det \overline{H}_3 < 0$, então p é máximo de f ($\lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$).

O truque da matriz orlada parece ser bom no caso em que a superfície S é um plano. Mas se S não for um plano? (vide Observação 1.6) Se S tiver curvatura diferente de zero? Para lidar com tal questão no lugar de usar $\text{Hess } u(p)$ precisaremos em geral usar uma outra matriz simétrica H , relacionada ao conceito Hessiano Riemanniano (o qual vamos discutir dentro em breve).

Definição 1.79. Matriz Hessiana orlada

Sejam $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g(x) = c\}$ superfície regular e $p \in S$ é tal que $\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p)$, onde u e g são suaves. Definimos:

$$H = \text{Hess } u(p) - \lambda \text{Hess } g(p)$$

Antes de discutir mais sobre H vamos apresentar o resultado desta seção que foi ilustrado pela nossa motivação.

Teorema 1.80.

Seja $p \in S$ com $\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p)$. Suponha que $\frac{\partial g}{\partial x_1}(p) \neq 0$.

- Se $\det \overline{H}_2 < 0$ e $\det \overline{H}_3 < 0$ então p é mínimo local de f .
- Se $\det \overline{H}_2 > 0$ e $\det \overline{H}_3 < 0$ então p é máximo local de f .

onde

$$\overline{H}_3 = \overline{H} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(p) & \frac{\partial g}{\partial x_3}(p) \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(p) & H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2}(p) & H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ \frac{\partial g}{\partial x_3}(p) & H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix}$$

Continuação.

$$\overline{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(p) \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(p) & H_{11} & H_{12} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2}(p) & H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$$

Observação 1.81.

As vezes H pode ser expresso com outra notação. De fato, seja $L : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ função, defina

$$L(\lambda, x) = u(x) - \lambda(g(x) - c).$$

Então

$$\nabla L(\lambda, x) = (g(x) - c, \nabla u(x) - \lambda \nabla g(x))$$

Se $\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p)$ então H coincide com a matriz 3×3 esquerda superior de $\text{Hess } L(p, \lambda)$.

1.7.2. **Ideia da Prova**Derivada Intrínseca e o Hessiano Riemanniano**

Inspirado na discussão do gradiente Riemanniano $\text{grad } f(p)$ podemos nos perguntar: Dados campos \vec{X} e \vec{Y} tangentes a superfície S como derivar \vec{X} na direção de \vec{Y} de forma que o resultado continue tangente a S ? Afinal mesmo que os 2 campos sejam tangente a S , $(D\vec{X})\vec{Y}$ pode não ser tangente a S . A solução será considerar a parte tangente de $(D\vec{X})\vec{Y}$.

Definição 1.82. Conexão Riemanniana

Dado campos $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ definimos o operador $\nabla : \mathfrak{X}(S) \times \mathfrak{X}(S) \rightarrow \mathfrak{X}(S)$ como

$$\nabla_Y \vec{X}(p) = D\vec{X}(p)Y - \left\langle (D\vec{X}(p)Y), \frac{\nabla g(p)}{\|\nabla g(p)\|} \right\rangle \frac{\nabla g(p)}{\|\nabla g(p)\|}$$

Tal operador será chamado **conexão Riemanniana associada a métrica induzida**.

Uma vez que sabemos derivar campos \vec{X} tangentes a S , podemos derivar o $\text{grad } f$, definindo o conceito do Hessiano intrínseco ou Riemanniano $\mathcal{H}(p)$.

Definição 1.83. Hessiano Riemanniano

$$\mathcal{H}(p)(X, Y) = \langle \nabla_X \text{grad } f, Y \rangle, \quad X, Y \in T_p S$$

Proposição 1.84.

Seja $p \in S$, com $\text{grad } f(p) = 0$.

- Se $\mathcal{H}(p)$ é positivo definido (i.e., tenha auto-valores positivo). então $p \in S$ é ponto de mínimo local.
- Se $\mathcal{H}(p)$ é negativo definido (i.e., tenha auto-valores negativos). então $p \in S$ é ponto de máximo local.

De volta a discussão extrínica

A Proposição 1.84 já resolve, pelo menos em teoria, nossa questão de determinar se um ponto crítico é ou não um ponto de máximo ou mínimo local. Porém na prática aplica-la diretamente para fazer uma conta, pode ser uma má ideia. Primeiro trata-se de uma conta intrínica. Teríamos que sempre parametrizar a superfície de nível? Segundo e de fato a questão mais séria (que já aparecia no problema análogo em \mathbb{R}^2) é que se só necessitamos saber os sinais dos autovalores, deveríamos ter um algoritmo onde esta informação fosse obtida sem gastar tanto tempo para calcular explicitamente algo que de fato não vamos utilizar. Cabe lembrar que nossa discussão para superfícies pode (e é) generalizada para dimensões maiores, e assim o tempo gasto para calcular auto-valores pode ser relevante. A álgebra linear nos dá um critério para resolver este tipo de questão. Então nosso objetivo será converter nossa conta intrínica para uma conta extrínica (vide Exercício 1.85 e Proposição 1.86) e adaptar um critério de algebra linear (vide Proposição 1.87) para determinar os sinais dos auto-valores, provando assim o Teorema 1.80.

Usando a definição de \mathcal{H} é possível resolver o próximo exercício:

Exercício 1.85.

Para todo $X, Y \in T_p S$

$$\mathcal{H}(p)(X, Y) = \text{Hess } u(p)(X, Y) - \left\langle \frac{\nabla u}{\|\nabla g\|}(p), \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}(p) \right\rangle \text{Hess } g(X, Y)$$

No caso em que $\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p)$, notamos que $H|_{T_p S \times T_p S} = \mathcal{H}(p)$. Assim podemos reformular a Proposição 1.84 da seguinte maneira:

Proposição 1.86.

Seja $p \in S$ tal que $\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p)$ (i.e, $\text{grad} f(p) = 0$). Então:

- Se $H|_{T_p S \times T_p S}$ é positivo definido, então $p \in S$ é ponto de mínimo local.
- Se $H|_{T_p S \times T_p S}$ é negativo definido então $p \in S$ é ponto de máximo local.

A próxima proposição de Álgebra Linear pode ser demonstrada usando a matriz apresentada na motivação, o teorema espectral e a lei de inércia de Sylvester

Proposição 1.87.

Seja A matriz simétrica e suponha que existe um plano V tal que a aplicação bilinear associada a A restrita a $V \times V$ seja também simétrica. Ou seja existe aplicação simétrica $\mathcal{H} : V \rightarrow V$ tal que $Y^t A X = Y^t \mathcal{H} X$ para todo $X, Y \in V$. Vamos também supor que \mathcal{H} não seja degenerado. Seja w vetor normal a V . Suponha que $w_1 \neq 0$.

- (a) Se $\det \bar{A}_2 < 0$ e $\det \bar{A}_3 < 0$ então $y^t A x|_{V \times V}$ é positivo definido.
- (b) Se $\det \bar{A}_2 > 0$ e $\det \bar{A}_3 < 0$ então $y^t A x|_{V \times V}$ é negativo definido.

$$\bar{A}_3 = \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & w_1 & w_2 & w_3 \\ w_1 & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ w_2 & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ w_3 & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & w_1 & w_2 \\ w_1 & A_{11} & A_{12} \\ w_2 & A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Demonstração. Seja a base $\{q_1, q_2, q_3\}$ como $q_1 = \frac{w}{\|w\|}$, $\mathcal{H}q_2 = \lambda_2 q_2$ e $\mathcal{H}q_3 = \lambda_3 q_3$. Temos então que $Aq_2 = b_{12}q_1 + \lambda_2 q_2$ e $Aq_3 = b_{13}q_1 + \lambda_3 q_3$, onde $b_{12} = \langle \mathcal{H}(q_1), q_2 \rangle$ e $b_{13} = \langle \mathcal{H}(q_1), q_3 \rangle$. Definamos agora base para \mathbb{R}^4 $\bar{q}_0 = (1, 0, 0, 0)$, $\bar{q}_i = (0, q_i)$, para $i = 1 \cdots 3$. Definindo Q a matriz ortogonal com colunas \bar{q}_j não é difícil verificar que:

$$Q^t \bar{A} Q = B = \begin{bmatrix} 0 & \|w\| & 0 & 0 \\ \|w\| & c_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{12} & \lambda_2 & 0 \\ 0 & b_{13} & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Por escalonamento (análogo a decomposição LU), e utilizando o fato de λ_2 e λ_3 serem diferentes de zero temos que B é conjugado a:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \|w\| & 0 & 0 \\ \|w\| & \tilde{c}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & o & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Por outro lado ao escalonar diretamente A temos que A é conjugada a

$$D = \begin{bmatrix} 0 & w_1 & 0 & 0 \\ w_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que B e D são equivalentes, temos pela lei de inércia de Sylvester, que sinal de d_2 e d_3 são iguais a λ_2 e λ_3 , respectivamente. A hipótese do item (a) e argumento usual de decomposição LU implicam que d_2 e d_3 tem sinais positivos e assim λ_2 e λ_3 são positivos. De forma análoga a hipótese do item (b) implica que d_2 e d_3 tem sinais negativos e assim λ_2 e λ_3 são negativos.

□

Proposições 1.86 e 1.87 implicam o Teorema 1.80.

Uma introdução a Geometria Riemanniana

Neste capítulo apresentamos alguns resultados clássicos de um curso de graduação/mestrado em Geometria Diferencial. O leitor pode já ler este capítulo como uma forma de aplicar os vários conceitos do Capítulo 1 sobre variedade mergulhada, supondo por exemplo que (M, g) é uma variedade mergulhada em um espaço Euclidiano \mathbb{R}^{m+k} e g é a métrica induzida, ou pular este capítulo, ler o próximo e voltar posteriormente, compreendendo então algumas sutilezas que comentamos aqui.

2.1. Métricas e variedades Riemannianas

Vimos anteriormente que uma variedade M^m em um espaço Euclidiano \mathbb{R}^{m+k} admite uma métrica induzida g_0 , vindo do produto Euclidiano em \mathbb{R}^{m+k} . Apesar de sua utilidade por vezes podemos estar interessados em outras formas de ter um produto interno g_x associado a cada espaço tangente $T_x M$.

Chamaremos uma aplicação que a cada ponto $x \in M$ associa um produto interno g_x de $T_x M$ de **métrica** em M .

Por exemplo veremos em outro capítulo que ao considerarmos uma partícula em uma superfície M^2 em \mathbb{R}^3 sob força conservativa $-\nabla U$ (e.g, campo gravitacional), a trajetória $t \rightarrow \alpha(t)$ da partícula obedece uma equação de Newton tangente, i.e., $(\alpha''(t))^\perp = -\text{grad}U$ onde $\text{grad}U$ é o gradiente Riemanniano i.e $\text{grad}U = (\nabla U)^\perp$. Como discutiremos mais tarde (como uma forma de ilustrar a linguagem Lagrangiana e Hamiltoniana) uma reparametrização de $t \rightarrow \alpha(t)$ po-

derá ser vista como uma curva que minimiza localmente distância (geodésica) referente a uma outra métrica, $g = (c - U)g_0$ (quando assumimos potencial menor que constante c). Existem outras métricas relevantes em mecânica, vide Observação 2.1

Em Geometria Diferencial estaremos pedindo também que tal métrica $x \rightarrow g_x$ seja **suave**. Uma forma sofisticada de dizer que tal aplicação é suave, seria dizer que é uma *seção suave dos 2-tensores simétricos positivos definidos em TM* .

Uma forma mais pedestre de explicar isto, pode ser via parametrizações. Lembremos que dado um ponto $p_0 \in M$, temos uma parametrização $\varphi : V \rightarrow U \subset M$ para p_0 contido em U . Seja $\frac{\partial}{\partial x_i} = d\varphi e_i \circ \varphi^{-1}$ campos (coordenados) em U . Com isto em mente dizemos que uma aplicação $x \rightarrow g_x$ é uma **métrica suave** se as funções $x \rightarrow g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$ são suaves em U , para todo U .

Uma variedade M com uma métrica suave g é chamado **variedade Riemanniana** (M, g) .

Observação 2.1.

A **energia cinética** de um objeto (B, μ) (região B com uma medida μ) no tempo t é $KE(t) = \frac{1}{2} \int_B \|\dot{Q}(t)x + \dot{R}(t)\|^2 \mu$ para $t \rightarrow \alpha(t) = (Q(t), R(t)) \in \mathbb{SO}(3) \times \mathbb{R}^3$ onde $Q(t) \in \mathbb{SO}(3)$ é a matriz ortogonal cujas colunas descrevem (no tempo t) a posição do objeto (com respeito ao seu centro de massa) e $R(t)$ a posição do seu centro de massa no tempo t . Podemos então definir $g(\alpha'(0), \alpha'(0)) = KE(0)$ o que nos dá uma aplicação bilinear simétrica não negativa definida g . De forma análoga dado vários objetos $(B_1, \mu_1) \cdots (B_n, \mu_n)$ temos para cada (B_i, μ_i) uma forma não negativa g_i . Vamos supor que $g = \sum_i g_i$ é não degenerado (o que ocorre em vários casos estudados). Dado um sistema mecânico interligado M mergulhado no sistema mecânico livre $(\mathbb{SO}(3) \times \mathbb{R}^3) \times \cdots \times (\mathbb{SO}(3) \times \mathbb{R}^3)$ a métrica em M é a métrica induzida. Em particular no caso do braço robótico, vide Exemplo 1.2 e Observação 1.4 temos para a parametrização

$$\begin{aligned} \varphi : U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow M \subset (\mathbb{SO}(3) \times \mathbb{R}^3) \times (\mathbb{SO}(3) \times \mathbb{R}^3) \\ (\theta_1, \theta_2) &\mapsto ((Q(e^{i\theta_1}), R(e^{i\theta_1})), (Q(e^{i\theta_2}), R(e^{i\theta_2}, e^{i\theta_1}))) \end{aligned}$$

que:

$$\varphi^* g = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \frac{1}{4}(m_1 + 4m_2)l_1^2 & \frac{m_2}{2}l_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{m_2}{2}l_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & \lambda_2 + \frac{1}{4}m_2l_2^2 \end{bmatrix}$$

onde λ_1 e λ_2 são as chamadas inércias principais (auto-valores do tensor de inércia, os quais sempre são não negativos). Para maiores discussões vide **livro F. Bullo, A.**

Continuação.

Lewis??^a

^aContas explícitas na Observação 2.1 podem ser feitas por exemplo usando o fato que $KE(t) = KE_{trans}(t) + KE_{rot}(t)$ onde *energia cinética de translação* é definida como $KE_{trans}(t) = \frac{1}{2}\mu(B)\|\dot{R}(t)\|^2$ e *energia cinética de rotação* é definida como $KE_{rot}(t) = \frac{1}{2}\langle I_c Z(t), Z(t) \rangle$ para $I_c(v) = -\int_B \mathcal{A}_{x-c} \mathcal{A}_{x-c}(v) \mu$ *tensor de inersia* (simétrico não negativo definido) referente ao centro de massa $c(t) = R(t)$. Aqui dado $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ temos

$$\mathcal{A}_\xi = \begin{bmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } Z(t) \text{ é tal que } \mathcal{A}_{Z(t)} = Q^t \dot{Q}(t)$$

2.2. Conexão Riemanniana e o Transporte Paralelo

Definição 2.2.

Seja (M, g) variedade Riemanniana. Uma **conexão Riemanniana** (ou conexão de Levi-Civita) associada a métrica g é uma aplicação \mathbb{R} -bilinear

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

que atende para qualquer $X, Y, Z, \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$:

- (a) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$
- (b) $\nabla_X fY = f \nabla_X Y + (X \cdot f)Y$
- (c) $X \cdot g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (**compatível com a métrica**).
- (d) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (**simétrica ou livre de torsão**)

Proposição 2.3.

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Então existe uma única conexão Riemanniana em TM . Tal conexão é dada pela **fórmula de Koszul** abaixo:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_Y X, Z) &= X \cdot g(Y, Z) - Z \cdot g(X, Y) + Y \cdot g(Z, X) \\ &\quad - g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X) \end{aligned}$$

Demonstração. Suponha que a conexão Riemanniana existe. Então temos pela com-

patibilidade com a métrica que:

$$X \cdot g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

$$Z \cdot g(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$$

$$Y \cdot g(Z, X) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X)$$

As equações acima e o fato da conexão ser livre de torsão implicam que:

$$\begin{aligned} X \cdot g(Y, Z) - Z \cdot g(X, Y) + Y \cdot g(Z, X) &= 2g(\nabla_Y X, Z) + g([X, Y], Z) \\ &+ g([X, Z], Y) + g([Y, Z], X) \end{aligned}$$

a qual por sua vez implica a fórmula de Koszul. Por fim, pode-se verificar que a fórmula de Koszul define uma conexão Riemanniana. \square

Exemplo 2.4.

Dado um campo $\vec{V} = \sum_{i=1}^m v_i \vec{e}_i$ (vide equação 1.3.1), vamos definir a **derivada Euclidiana do campo** \vec{V} na direção de um vetor W (com pé em p), como

$$D_W \vec{V}_p = \sum_{i=1}^m dv_i(W) \vec{e}_i.$$

Proposição 2.5.

Seja M^m variedade mergulhada em \mathbb{R}^{m+k} . Dado $p \in M$ defina $\pi_p : T_p \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow T_p M$ como projeção ortogonal no espaço tangente $T_p M$ de um vetor com pé em $p \in M$ (não necessariamente tangente a variedade M). Defina o operador conexão tangente como $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ onde

$$(\nabla_X Y)_p = \pi_p((D_X Y)_p).$$

Este operador é de fato a conexão Riemanniana associada a métrica induzida

Demonstração. É fácil verificar que é \mathbb{R} -bilinear. Então basta verificar os itens da Definição 2.2. Como ela é única, então será a conexão da métrica induzida.

(a)

$$\begin{aligned} (\nabla_{fX}Y)_p &= \pi_p((D_{fX}Y)_p) \\ &= \pi_p(f(p)(D_XY)_p) \\ &= f(p)\pi_p((D_XY)_p) \\ &= f(p)(\nabla_XY)_p. \end{aligned}$$

(b) Como $Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\pi(p)(Y) = Y$, logo

$$\begin{aligned} (\nabla_X fY)_p &= \pi(p)(D_X fY)_p \\ &= \pi(p)(fD_XY + X(f)Y)_p \\ &= f(p)\pi(p)(D_XY)_p + X(f)_p\pi(p)(Y) \\ &= f(p)(\nabla_XY)_p + (X \cdot f)Y_p. \end{aligned}$$

(c) Seja $p \in M$ e $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ uma curva em M tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = X$. Sejam \tilde{Y} e \tilde{Z} extensões de Y e Z a \mathbb{R}^{m+k} . Temos

$$\begin{aligned} X \cdot g(Y, Z) &= \frac{d}{dt}g(Y_\alpha(t), Z_\alpha(t)) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \langle \tilde{Y}_\alpha(t), \tilde{Z}_\alpha(t) \rangle \Big|_{t=0} \\ &= \langle D_{\alpha'(t)}\tilde{Y}_\alpha(t), \tilde{Z}_\alpha(t) \rangle \Big|_{t=0} + \langle \tilde{Y}_\alpha(t), D_{\alpha'(t)}\tilde{Z}_\alpha(t) \rangle \Big|_{t=0} \\ &= \langle \nabla_{\alpha'(t)}Y_\alpha(t), Z_\alpha(t) \rangle \Big|_{t=0} + \langle Y_\alpha(t), \nabla_{\alpha'(t)}Z_\alpha(t) \rangle \Big|_{t=0} \\ &= g(\nabla_{\alpha'(t)}Y_\alpha(t), Z_\alpha(t)) \Big|_{t=0} + g(Y_\alpha(t), \nabla_{\alpha'(t)}Z_\alpha(t)) \Big|_{t=0} \\ &= g(\nabla_XY, Z) + g(Y, \nabla_XZ). \end{aligned}$$

(d) Para resolver o item (d) iremos assumir o seguinte fato:

$$D_XY - D_YX =: [X, Y] \in \mathfrak{X}(M), \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Assim sendo, temos:

$$\begin{aligned} \nabla_XY - \nabla_YX &= \pi_p((D_XY)_p) - \pi_p((D_YX)_p) \\ &= \pi_p((D_XY)_p - (D_YX)_p) \\ &= \pi_p([X, Y]) \\ &= [X, Y], \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do fato suposto.

□

Definição 2.6.

Um difeomorfismo $F : (M^m, g^M) \rightarrow (N^m, g^N)$ entre variedades Riemannianas é chamado **isometria** se $DF : (T_x M, g_x^M) \rightarrow (T_{F(x)} N, g_{F(x)}^N)$ é isometria para todo $x \in M^1$.

Em outras palavras uma isometria entre variedades preserva métrica e assim objetos definidos com métrica.

Exercício 2.7.

Sejam (M_1, g_1) e (N, \tilde{h}) variedades Riemannianas e ∇ e $\tilde{\nabla}$ suas conexões Riemannianas. Seja $F : M \rightarrow \tilde{M}$ isometria. Utilizando a fórmula de Koszul Mostre que $dF_p \nabla_{X_1} X_2 = (\tilde{\nabla}_{\tilde{X}_1} \tilde{X}_2)_{F(p)}$, onde $\tilde{X}_i \circ F = dF X_i$ para $X_i \in \mathfrak{X}(M)$.

Sugestão: Utilize o fato que $[\tilde{X}_1, \tilde{X}_2] \circ F = dF[\tilde{X}_1, \tilde{X}_2]$ e a equação de Koszul.

Vamos agora descrever nossa conexão Riemanniana utilizando coordenadas:

Seja U uma vizinhança coordenada de $p \in M$ e $\{\xi_i\}$ referenciais de $TM|_U$, e.g. $\xi_j(p) = \frac{\partial}{\partial x_j} := d\psi^{-1}(e_j)$ onde $\psi : (U) \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ é um sistema de coordenadas..

Suponha $W = \sum_i w_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $V = \sum_j v_j \xi_j$ Temos então que

$$\begin{aligned} \nabla_W V &= \nabla_W \sum_j v_j \xi_j \\ &= \sum_j (W \cdot v_j) \xi_j + \sum_j v_j \nabla_W \xi_j \\ &= \sum_k (W \cdot v_k) \xi_k + \sum_{i,j} v_j w_i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \xi_j. \end{aligned}$$

A equação acima então implica que

$$\nabla_W V = \sum_k \{(W \cdot v_k) + \sum_{i,j} w_i v_j \Gamma_{i,j}^k\} \xi_k \quad (2.2.1)$$

¹Talvez caiba apenas aqui ter um exemplo em mente. Sejam duas variedades M^m e N^m mergulhadas em espaços euclidianos. Suponha que uma aplicação bijetora $F : M \rightarrow N$ admita extensões locais suaves e a inversa F^{-1} também admita extensões locais suaves. Neste caso F é chamada um difeomorfismo. Derivada DF_x neste exemplo é apenas restrição ao espaço tangente $T_x M$ da derivada da extensão.

onde a função $\Gamma_{i,j}^k$ é chamada **símbolo de Cristoffel** e é definida como

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \xi_j = \sum_k \Gamma_{i,j}^k \xi_k$$

Observação 2.8.

É importante observar que a fórmula acima garante que $(\nabla_W V)_p$ depende apenas do vetor $W(p)$ e não do campo W .

Exercício 2.9.

Sejam M superfície mergulhada em \mathbb{R}^3 , ∇ a conexão Riemanniana associada a métrica induzida g e Γ_{ij} os símbolos de Cristofell associados a uma parametrização $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset M$. Verifique as igualdades a seguir (as quais garantem que Γ_{ij} podem ser obtidas diretamente da métrica g , ou seja que ∇ pode ser definido em termos de g).

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 g_{11} + \Gamma_{11}^2 g_{12} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u_1} g_{11} \\ \Gamma_{11}^1 g_{12} + \Gamma_{11}^2 g_{22} &= \frac{\partial}{\partial u_1} g_{12} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u_2} g_{11} \\ \Gamma_{12}^1 g_{11} + \Gamma_{12}^2 g_{12} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} g_{11} \\ \Gamma_{12}^1 g_{12} + \Gamma_{12}^2 g_{22} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} g_{22} \\ \Gamma_{22}^1 g_{11} + \Gamma_{22}^2 g_{12} &= \frac{\partial}{\partial u_2} g_{12} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} g_{22} \\ \Gamma_{22}^1 g_{12} + \Gamma_{22}^2 g_{22} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u_2} g_{22} \end{aligned}$$

Exercício 2.10.

Seja $\varphi(t, \theta) = (r(t) \cos(\theta), r(t) \sin(\theta), h(t))$ parametrização de superfície de revolução M^2 em \mathbb{R}^3 . Suponha que $(h'(t))^2 + (r'(t))^2 = 1$. Verifique que

Continuação.

que os símbolos de Cristofell associada a φ são:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= 0 & , & \Gamma_{11}^2 &= -r(t)r'(t) \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{r'(t)}{r(t)} & , & \Gamma_{12}^2 &= 0 \\ \Gamma_{22}^1 &= 0 & , & \Gamma_{22}^2 &= 0\end{aligned}$$

Observação 2.11.

Utilizando a fórmula de Koszul é possível concluir:

$$\Gamma_{i,j}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{\partial g_{j,k}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{k,i}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{i,j}}{\partial x_k} \right) g^{k,m}$$

onde (g^{ij}) é a matriz inversa de $(g_{i,j})$ e $\Gamma_{i,j}^k$ são os símbolos de Cristoffel.

A equação (2.2.1) admite uma **formulação matricial**.

$$\nabla_W V = D_W V + A(W)V \quad (2.2.2)$$

onde $D_W V$ é a derivada de campos em \mathbb{R}^n e $A(\cdot)$ é a matriz de 1-formas definida como

$$a_{k,j}(\cdot) := \sum_i \Gamma_{i,j}^k dx_i,$$

onde $dx_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{ij}$ i.e., fixo p temos que os funcionais lineares $dx_i : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ são os duais dos vetores $(\frac{\partial}{\partial x_j}(p))$

Observação 2.12.

A equação (2.2.2) implica que o espaço de conexões é um **espaço afim**. De fato dado duas conexões $D + A$ e $D + \tilde{A}$ podemos definir a soma destes vetores com pé como $D + A + \tilde{A}$ e a multiplicação por $\lambda \in \mathbb{R}$ como $D + \lambda A$. Por este motivo, um operador que atende (a) e (b) da Definição 2.2 é chamado **conexão afim**.

Conexão nos permite derivar campos tangentes a uma variedade. Mas se tivermos um campo $t \rightarrow V(t)$ que está apenas definido ao longo de uma curva $t \rightarrow \alpha(t)$, como derivar? Lembrando que se a curva não for mergulhada não necessariamente um campo ao longo de uma curva se estende para um campo em M ou seja $V(t)$ não

precisa ser $\tilde{V} \circ \alpha(t)$ para $\tilde{V} \in \mathfrak{X}(M)$. Assim a resposta a esta pergunta **não é** simplesmente dizer restrinja a conexão ao longo da curva. Felizmente como veremos na proposição a seguir, de fato a questão não é complicada.

Proposição 2.13.

Sejam ∇ a conexão Riemanniana de (M, g) e $\alpha : I \rightarrow M$ uma curva suave por partes. Denote $\Gamma(\alpha^*TM)$ o espaço dos campos vetoriais ao longo da curva α . Então existe um único operador $\frac{\nabla}{dt} : \Gamma(\alpha^*TM) \rightarrow \Gamma(\alpha^*TM)$ tal que

- (a) $\frac{\nabla}{dt}(V + W) = \frac{\nabla}{dt}V + \frac{\nabla}{dt}W$
- (b) $\frac{\nabla}{dt}(fV) = f'V + f\frac{\nabla}{dt}V$ para $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ suave.
- (c) Se $\tilde{V} \in \Gamma(E)$ e $V(t) := \tilde{V}(\alpha(t))$ então $\frac{\nabla}{dt}V = \nabla_{\alpha'}\tilde{V}$

Demonstração. Se $\frac{\nabla}{dt}$ atende a propriedade (c) então ela deve se descrita em coordenadas como:

$$\left(\frac{\nabla}{dt}V\right)(t) = \sum_k \{v'_k(t) + \sum_{i,j} x'_i(t) v_j(t) \Gamma_{i,j}^k \circ \alpha(t)\} \xi_k \circ \alpha(t)$$

Onde $V(t) = \sum_k v_k(t)\xi_k \circ \alpha(t)$ e $\alpha'(t) = \sum_i x'_i(t)\frac{\partial}{\partial x_i} \circ \alpha(t)$. Em outras palavras

$$\frac{\nabla V}{dt} = \frac{DV}{dt} + A(\alpha'(t))V(t).$$

Também é claro que a equação acima atende (a) e (b) e assim temos a existência local. A unicidade local e existência local garantem então a existência e unicidade global. □

Munidos com o conceito de derivada covariante podemos introduzir o conceito de paralelismo. Um campo $t \rightarrow V(t) \in T_{\alpha(t)}M$ ao longo de uma curva α é chamado **paralelo** se $\frac{\nabla}{dt}V(t) = 0$ para todo t .

Proposição 2.14.

Sejam ∇ a conexão Riemanniana de (M, g) e $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ uma curva suave por partes. Seja $V \in T_{\alpha(a)}$. Então existe um único campo $V \in \Gamma(\alpha^*TM)$ paralelo tal que $V(a) = V$.

Demonstração. Considere uma partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ tal que a curva restrita $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$ está contida em uma vizinhança coordenada. Vamos provar primeiro o resultado para cada uma destas curvas. Como vimos na demonstração da Proposição 2.13, em uma vizinhança coordenada, $\frac{\nabla}{dt}V = 0$ equivale a

$$0 = \sum_k \{v'_k(t) + \sum_{i,j} x'_i(t) v_j(t) \Gamma_{i,j}^k \circ \alpha(t)\} \quad (2.2.3)$$

Tal E.D.O tem uma única solução $\sum_j v_j(t) \xi_j \circ \alpha(t)$ em $[t_i, t_{i+1}]$ que coincide em t_i com um certo vetor dado $V \in E_{\alpha(t_i)}$ e isto demonstra o resultado para $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$. Pela unicidade das soluções, as soluções coincide nas interseções das vizinhanças coordenadas e isto permite estender a solução para todo $[a, b]$. \square

Com as hipóteses da proposição acima o vetor $V(b) \in T_{\alpha(b)}M$ é chamado **transporte paralelo** do vetor $V \in T_{\alpha(a)}M$ e denotado por

$$\mathcal{P}_\alpha V := V(b).$$

Observação 2.15.

Com um transporte paralelo podemos **conectar** as fibras $TM_{\alpha(a)}$ com $TM_{\alpha(b)}$, daí o nome *conexão*. É importante observar que em geral o transporte paralelo depende do caminho, vide Exercício 2.17.

Exercício 2.16.

Seja (M, g) variedade Riemanniana com conexão Riemanniana ∇ . Seja $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ curva suave por partes. Demonstre que o transporte paralelo ao longo de α induz isometria entre $T_{\alpha(0)}M$ e $T_{\alpha(1)}M$.

Exercício 2.17.

Sejam M superfície mergulhada em \mathbb{R}^3 e ∇ conexão Riemanniana associada a métrica induzida. Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica com velocidade 1 ou seja $\frac{\nabla}{dt}\gamma'(t) = 0$ (ou seja pedaço de grande círculo). Dado $e_2 \in T_{\gamma(0)}M$ unitário com $g(e_2(0), \gamma'(0)) = c$.

- (a) Defina $t \rightarrow e_2(t)$ campo paralelo ao longo de γ com $e_2(0) = e_2$. Verifique que $g(e_2(t), \gamma'(t)) = c$ para todo t ,

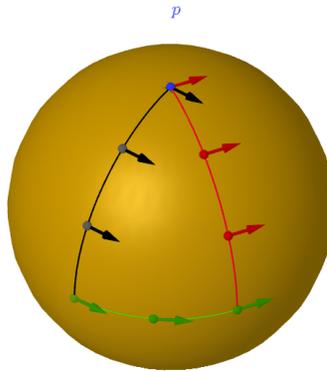


Figura 2.1: ilustrando Exercício 2.17

Continuação.

- (b) Seja \mathbb{S}^2 esfera com métrica canônica (i.e, induzida de \mathbb{R}^3) Verifique que, dado $X \in T_p\mathbb{S}^2$ e $Y \in T_p\mathbb{S}^2$, existe caminho (suave por partes) com $Y = \mathcal{P}_\alpha X$, vide Figura 2.1.

Observação 2.18. Conexão em fibrado vetorial

Aqui é o momento adequado para destacarmos ao leitor, que muito do que discutimos até agora poderia ser refeito mutatis mutandis (com exceção do item (d) da definição da conexão Riemanniana e da unicidade da conexão) para um fibrado vetorial $\mathbb{R}^k \rightarrow E \rightarrow B$ que admita uma métrica nas fibras (frequentemente chamamos isto de fibrado euclidiano). Por exemplo poderíamos considerar uma variedade mergulhada M^m em um espaço euclidiano, mas no lugar de considerar a conexão tangente (derivar no ambiente e projetar no espaço tangente) poderíamos considerar a conexão normal (derivar no ambiente e projetar no espaços normais) do fibrado normal $E = \nu(M) = \cup_x \nu_x M$ (onde $\nu_x M$ denota os vetores normais a $T_x M$). Mais precisamente poderíamos definir $\nabla^\nu : \xi(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ como $\nabla_X^\nu \xi = (D_X \xi)^\nu$. A métrica fibras do fibrado normal são simplesmente a restrição da métrica aos vetores normais de sua variedade mergulhada. Assim conexão, derivada covariante, transporte paralelo que preserva métrica nas fibras, podem ser feitos. De fato uma das razões para denotarmos ξ_i no lugar de nossos vetores coordenados (quando consideramos a conexão Riemanniana) é já deixar a notação correta para esta generalização direta. Até o presente o que não conseguimos generalizar neste contexto mais geral seria a

Continuação.

unicidade da conexão (adaptada a métrica), justamente por não podermos falar mais no conceito livre de torção (que deixa de fazer sentido). O leitor que se sente mais confiante com a linguagem de fibrado vetorial pode tentar rever as provas levando em consideração esta observação.

Observação 2.19. Conexão pull-back

A derivada covariante ao longo de uma curva é na verdade a conexão pull-back no fibrado pullback $\alpha^*(E)$, conceito que discutimos rapidamente na observação a seguir. Seja (E^{m+k}, M^m, π) uma fibrado vetorial com conexão afim ∇ . Seja $\varphi : B \rightarrow M$ uma aplicação suave entre uma variedade B e a variedade M . O espaço total do fibrado pull-back é definido como

$$\varphi^*E := \{(p, V) \in M \times E \mid \varphi(p) = \pi(V)\}$$

(E, B, π_1) se torna então um fibrado vetorial, onde a projeção $\pi_1 : \varphi^*E \rightarrow B$ é definida como $\pi_1(p, V) = p$. Observe também que $\varphi \circ \pi_1 = \pi \circ \tilde{\varphi}$ onde $\tilde{\varphi} : \varphi^*E \rightarrow E$ é definido como $\tilde{\varphi}(p, V) = V$.

De forma análoga a prova da Proposição 2.13 é possível mostrar que existe uma única conexão $\varphi^*\nabla$ em φ^*E tal que

$$(\varphi^*\nabla)_W V \circ \varphi = \nabla_{dF(W)} V$$

onde $V \in \Gamma(E)$ e $W \in \mathfrak{X}(M)$.

Observação 2.20. Grupo de Holonomia

Dado um ponto p de uma variedade M (base de um fibrado E^{m+k} com conexão ∇) e uma curva fechada $\alpha : [0, 1] \rightarrow M^m$ (i.e $\alpha(0) = \alpha(1)$) o transporte paralelo $\parallel_\alpha : E_p \rightarrow E_p$ induz um isomorfismo entre as fibras de E_p . O grupo gerado por tais isomorfismo é chamado **grupo de Holonomia** de p e denotado por Hol_p .

- O **teorema de Ambrose-Singer** garante que o grupo de Holonomia Hol_p de uma conexão ∇ em um fibrado (E, M, π) é de fato um grupo de Lie.
- Quando consideramos a conexão Riemanniana em uma variedade simplesmente conexa, compacta (mais geralmente completa) a decomposição da representação da componente conexa $Hol(p)^0 \times (T_p M = V_0 \oplus \cdots \oplus V_k) \rightarrow$

Continuação.

$(T_p M = V_0 \oplus \cdots \oplus V_k)$ implica a decomposição do próprio M ou seja $M = M_0 \times \cdots \times M_k$.

- No caso em que a conexão é Riemanniana, o grupo de Holonomia passa a desempenhar um papel importante na classificação de variedades. O celebrado teorema de Berger garante que se o grupo de holonomia de uma variedade Riemanniana (irreduzível) não agir de forma transitiva em $T_p^1 M = \{v \in T_p M, \|v\| = 1\}$ então M será um espaço localmente simétrico.

Aqui vale apenas ressaltar que um espaço M é chamado localmente simétrico se para qualquer $p \in M$ existe uma isometria $\sigma_p : B_\epsilon(p) \rightarrow B_\epsilon(p)$ que reverte toda geodésica γ saindo de p i.e., $\gamma(0) = p$ ou seja $\sigma_p \circ \gamma(t) = \gamma(-t)$. Por outro lado os espaços simétricos (que recobrem os espaços localmente simétricos) são classificados. Assim sendo o conhecimento da ação do grupo de Hol_p pode determinar completamente uma variedade M se M for simplesmente conexa irreduzível e o grupo não agir transitivamente na esfera unitária $T_p M^1$.

2.3. Geodésicas

Seja M uma variedade com métrica g . O produto interno em cada espaço tangente $T_x M$, nos permite calcular normas em cada espaço tangente $\|X\| = \sqrt{g(X, X)}$ (onde $X \in T_x M$) e assim podemos definir comprimento de uma curva suave por partes, i.e., seja $\alpha : [0, a] \rightarrow M$ então $L(\alpha) = \int_0^a \|\alpha'(t)\| dt$. Comprimento de curva nos permite então definir a **distância entre pontos** $p, q \in M$ como sendo $d(p, q) = \inf_{\alpha \in \Omega} L(\alpha)$ onde Ω é o conjunto das curvas suaves por partes $\alpha : [0, a] \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha(a) = q$.

No espaço Euclidiano as curvas de aceleração zero são justamente as curvas que minimizam distâncias. Assim um candidato natural para curvas que minimizam *localmente distâncias* em uma variedade Riemanniana (M, g) serão as curvas de aceleração nula.

Definição 2.21.

Continuação.

Uma curva suave $\gamma : (-a, a) \rightarrow (M, g)$ é chamada **geodésica** se

$$\frac{\nabla}{dt}\gamma'(t) = 0, \forall t \in (-a, a)$$

Aceitando alguns resultados, nesta seção teremos nosso primeiro contato com este fundamental conceito, o qual será mais cuidadosamente discutido em outras disciplinas, como por exemplo Geometria Riemanniana.

Observação 2.22.

Observe que se $\gamma : I \rightarrow (M, g)$ é geodésica, então $\|\gamma'(t)\|$ é constante. De fato $\frac{d}{dt}(g(\gamma'(t), \gamma'(t))) = 2g(\frac{\nabla}{dt}\gamma'(t), \gamma'(t)) = 0$. Segue então que se γ é geodésica, $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = c(b - a)$ onde $c = \|\gamma'(t)\|$.

Exercício 2.23.

Seja M^m subvariedade mergulhada em \mathbb{R}^{m+k} . Dado uma curva $\gamma : I \rightarrow M$ verifique que γ é geodésica se e somente se γ'' é perpendicular a M . Conclua que segmentos dos grandes círculos da esfera \mathbb{S}^m são geodésicas.

Exercício 2.24.

Seja M uma superfície mergulhada de revolução em \mathbb{R}^3 , onde g é métrica induzida. Demonstre que sua curva geratriz é geodésica de M .

Observação 2.25.

Segmentos de grandes círculos na esfera não necessariamente minimizam distâncias. Por exemplo, se $\alpha : [0, \frac{3\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{S}^m$ é uma geodésica com velocidade unitária, então ela não minimiza distância entre $\alpha(0)$ e $\alpha(\frac{3\pi}{2})$. De fato, $L(\alpha) = \frac{3\pi}{2}$.

Por outro lado, se consideramos um outro segmento do mesmo grande círculo, $\beta : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{S}^m$ com $\alpha(0) = \beta(0)$ e $\alpha(\frac{3\pi}{2}) = \beta(\pi/2)$ temos que $L(\beta) = \frac{\pi}{2} < L(\alpha)$.

Ou seja, geodésicas não minimizam (grandes) distâncias, mas como veremos em breve sempre minimizam distâncias localmente.

Em coordenadas $\frac{\nabla}{dt}\gamma'(t) = 0$ equivale, a seguinte EDO de segunda ordem.

$$0 = x''_k(t) + \sum_{ij} x'_i(t)x'_j(t)\Gamma_{ij}^k(x(t)), \forall k \quad (2.3.1)$$

Temos então que, pelo menos localmente, dado as duas condições iniciais posição $p \in M$ (pé do vetor) e velocidade $v_p \in T_pM$, deveria existir uma única geodésica $\gamma_{v_p} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ com $\gamma_{v_p}(0) = p$ e $\gamma'_{v_p}(0) = v_p$. Transformando a E.D.O de segunda ordem (2.3.1) em uma E.D.O de primeira ordem em $TM = \cup_{x \in M} T_xM$ e aplicando resultado de E.D.O sobre suavidade das condições iniciais é possível provar o resultado a seguir.

Proposição 2.26.

Dado $p \in M$ existe uma vizinhança U de p em M , números $\delta, \epsilon > 0$ e uma aplicação $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times \mathcal{U} \rightarrow M$ com $\mathcal{U} := \{V_q \in TM, q \in U, \|V_q\| < \delta\}$ tal que $\gamma_{v_p}(\cdot) = \varphi(\cdot, V_q)$ é a única geodésica com $\gamma'_{v_p}(0) = \frac{d}{dt}\varphi(t, V_q)|_{t=0} = V_q$ e $\varphi(0, V_q) = q$.

Em geral reparametrizar uma solução γ de uma E.D.O de segunda ordem (mesmo que seja por constantes i.e $\beta(t) = \gamma(ct)$ não dará uma nova solução da E.D.O. Porém a equação (2.3.1) tem um formato muito especial (dizemos em Geometria Riemanniana que ela atende propriedades de um spray) e assim temos o resultado a seguir.

Proposição 2.27.

Seja $\gamma_{v_q}(\cdot) = \varphi(\cdot, V_q)$ geodésica definida em $(-\epsilon, \epsilon)$. Seja $a > 0$ então:

- (a) A geodésica $t \rightarrow \gamma_{av_q}(t) = \varphi(t, aV_q)$ está definida em $(-\frac{\epsilon}{a}, \frac{\epsilon}{a})$
- (b) $\gamma_{av_q}(t) = \varphi(t, aV_q) = \varphi(at, V_q) = \gamma_{v_q}(at)$.

Demonstração. Note que o item (b) implica o item (a). Visto que $\frac{d}{dt}\varphi(at, V_q)|_{t=0} = aV_q$ basta mostrar que $t \rightarrow \varphi(at, V_q)$ é geodésica. Isto segue do fato que em coordenadas $y(t) = x(at)$ atende a equação (2.3.1). \square

As duas proposições acima então implicam que:

Proposição 2.28.

Dado $p \in M$ existe uma vizinhança U de p em M , um número $\delta > 0$ e uma aplicação $\varphi : (-2, 2) \times \mathcal{U} \rightarrow M$ com $\mathcal{U} := \{V_q \in TM, q \in U, \|V_q\| < \delta\}$

Continuação.

tal que $\varphi(\cdot, V_q)$ é a única geodésica com $\frac{d}{dt}\varphi(t, V_q)|_{t=0} = V_q$ e $\varphi(0, V_q) = q$.

Definição 2.29.

Podemos definir agora a **aplicação exponencial** como

$$\begin{aligned} \exp_q : B_\delta(0) \subset T_q M &\rightarrow M \\ V_q &\rightarrow \varphi(1, V_q) \end{aligned}$$

Observação 2.30.

Visto que $\varphi(1, V_q) = \varphi(\|V_q\|, \frac{V_q}{\|V_q\|})$ temos que $\exp_q(V)$ é o ponto em M obtido percorrendo um comprimento $\|V_q\|$ ao longo da imagem da geodésica que sai de q com velocidade $\frac{V_q}{\|V_q\|}$.

Proposição 2.31.

Seja $q \in M$. Então $d(\exp_q)_0 = Id$ e assim sendo existe um $\epsilon > 0$ tal que $\exp_q : B_\epsilon(0) \rightarrow M$ é um difeomorfismo sobre um aberto em M .

Demonstração.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \exp_q(tV)|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \varphi(1, tV_q)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \varphi(t, V_q)|_{t=0} \\ &= V_q \end{aligned}$$

e assim $d(\exp_q)_0$ é a identidade. O resto da proposição segue do teorema da função inversa. \square

Tal vizinhança B_ϵ será chamada de **vizinhança normal**.

Observação 2.32.

Veremos no próximo capítulo que se M é um grupo de Lie matricial compacto (e.g., $SO(n)$), com métrica bi-invariante (e.g., $\langle gX, gY \rangle_g = \text{tr}(XY^t)$) a exponencial

Continuação.

Riemanniana em e coincidirá com a exponencial de matrizes.

No que se segue, demonstraremos o conhecido lema de Gauss o qual garante que geodésicas radiais são ortogonais as esferas normais. Antes porém faz-se necessário apresentar o lema abaixo, o qual será útil em diversos momentos.

Lema 2.33.

Seja $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow M$ aplicação suave. Então

$$\frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}$$

Teorema 2.34. Lema de Gauss

Seja $B_{\tilde{\delta}}(0)$ uma bola em $T_q M$ tal que a restrição da exponencial $\exp_q : B_{\tilde{\delta}}(0) \rightarrow M$ está bem definida. Sejam $\mathbb{S}_{\delta}^{n-1}$ a esfera contida em $B_{\tilde{\delta}}(0)$ com $\delta < \tilde{\delta}$ e $v : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{S}_{\delta}^{n-1}$ curva suave. Defina $f(s, t) = \exp_q(tv(s))$. Então

$$g\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) = 0$$

Demonstração. Observe primeiro que

$$g\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)_{f(s,t)} = g(d(\exp_q)_{tv(s)} tv'(s), d(\exp_q)_{tv(s)} v(s))$$

Podemos então concluir que:

$$g\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)_{f(s,0)} = 0.$$

Assim para demonstrar o lema de Gauss é suficiente verificar que a derivada em relação a t da função $g\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)_{f(s,t)}$ é zero para todo t .

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \left(g \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right) &= g \left(\frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) + g \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} \right) \\
&= g \left(\frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) \\
&= g \left(\frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} g \left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \|v(s)\|^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

onde a segunda igualdade deve-se ao fato de $f(s, \cdot)$ ser geodésica, a terceira igualdade deve-se ao Lema 2.33 e a última igualdade deve-se ao fato de $v(\cdot)$ ser uma curva contida em uma esfera. \square

O lema de Gauss nos permite demonstrar que geodésicas minimizam localmente caminhos. Mais precisamente temos a seguinte proposição.

Proposição 2.35.

Seja $B_\delta(q)$ uma bola normal. Defina $\alpha : [0, 1] \rightarrow B_\delta(0)$ como $\alpha(t) = \exp_q(tv)$ com $\|v\| < \delta$. Seja $\beta : [0, 1] \rightarrow M$ curva suave por partes tal que $\alpha(0) = \beta(0)$ e $\alpha(1) = \beta(1)$. Então

$$L(\alpha) \leq L(\beta)$$

Se a igualdade vale, então as imagens de α e β coincidem.

Demonstração. Vamos primeiro considerar o caso em que $\beta([0, 1]) \subset B_\delta(q)$.

Podemos supor sem perda de generalidade que $\beta(t) \neq q$ para $t > 0$.

Seja $\tilde{\beta} := (\exp_q|_{B_\delta(0)})^{-1} \circ \beta$. Defina as seguintes funções suaves por partes:

$$\begin{aligned}
f : [0, \delta) \times \mathbb{S}_1^{n-1} \ni (R, V) &\rightarrow \exp_q(RV) \in B_\delta(q) \\
r : [0, 1] \ni t &\rightarrow \|\tilde{\beta}(t)\| \in [0, \delta) \\
v : (0, 1] \ni t &\rightarrow \frac{\tilde{\beta}(t)}{\|\tilde{\beta}(t)\|} \in \mathbb{S}_1^{n-1}
\end{aligned}$$

Observe que $\beta(t) = f(r(t), v(t))$. Temos então pelo lema de Gauss que:

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon}^1 \|\beta'(t)\| dt &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\beta'(t)\| dt \\ &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{(r'(t))^2 + g\left(\frac{\partial f}{\partial V} v'(t), \frac{\partial f}{\partial V} v'(t)\right)} dt \\ &\geq \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} |r'(t)| dt \\ &\geq \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} r'(t) dt \\ &= r(1) - r(\epsilon) \end{aligned}$$

Logo $L(\beta) \geq r(1) = L(\alpha)$. Note que se as igualdades são satisfeitas então as imagens de α e β coincidem.

Por fim vamos considerar o caso em que $\beta([0, 1])$ não está completamente contido em $B_\delta(q)$. Seja t_1 o primeiro tempo tal que $\beta(t_1)$ está na fronteira da bola. Então temos pela discussão anterior:

$$L(\beta) > L(\beta|_{[0, t_1]}) \geq \delta > L(\alpha).$$

□

A Proposição 2.35 pode ser melhorada como comentamos no teorema a seguir.

Teorema 2.36. Vizinhança convexa

Seja (M, g) variedade Riemanniana. Então para cada $q \in M$ existem números $\delta > 0$, $\epsilon > 0$ tal que as seguintes afirmações são válidas.

- Para qualquer $p \in B_\epsilon(q)$ temos $\exp_p|_{B_\delta(0)}$ é um difeomorfismo e que $B_\epsilon(q) \subset \exp_p(B_\delta(0))$.
- Para cada 2 pontos p_1 e p_2 em $B_\epsilon(q)$ existe um único segmento minimizante de geodésica ligando p_1 a p_2 .
- O segmento (do item (b)) fica contido em $B_\epsilon(q)$ e depende suavemente dos pontos inicial e final.

Exercício 2.37.

Utilizando a Proposição 2.35, demonstre que o item (a) implica o item (b) no teorema da vizinhança convexa, enunciado acima.

Embora não demonstremos o teorema da vizinhança convexa, vamos apresentar uma boa aplicação.

Proposição 2.38.

Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow (M, g)$ curva suave por partes tal que $d(\gamma(0), \gamma(1)) = L(\alpha)$. Então γ é imagem de uma geodésica.

Demonstração. Observe primeiro que para cada $t \in [0, 1]$ existe um intervalo I_t tal que $\gamma(I_t)$ está contida em uma bola normal convexa.

Afirmamos que $\gamma(I_t)$ é imagem de um segmento de geodésica. De fato seja $I_t = [a, b]$ então como $\gamma(I_t)$ está contida em uma bola normal convexa então existe um único segmento de geodésica α ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$ tal que $L(\alpha) = d(\gamma(a), \gamma(b))$. Suponha por absurdo que $\gamma(I_t)$ seja diferente de α . Então defina a concatenação $\beta = \gamma_{[a,b]} * \alpha * \gamma_{[0,a]}$. Note que $\beta(0) = \gamma(0)$, $\beta(1) = \gamma(1)$ e $L(\beta) < L(\alpha)$ o que contraria a definição de γ .

Seja $I_{t_i}^0$ uma cobertura finita do intervalo compacto $[0, 1]$ tais que $\gamma(I_{t_i})$ está em uma bola normal convexa. Se $s \in I_{t_i}^0 \cap I_{t_{i+1}}^0$ então considere um intervalo I_s^0 tal que $I_s^0 \subset I_{t_i}^0 \cap I_{t_{i+1}}^0$ e tal que $\gamma(I_s)$ está contida em uma bola normal convexa. Como vimos acima $\gamma(I_s)$ é um segmento de geodésica contido nos segmentos de geodésicas $\gamma(I_{t_i})$ e $\gamma(I_{t_{i+1}})$. Logo por EDO os segmentos de geodésicas $\gamma(I_{t_i})$ e $\gamma(I_{t_{i+1}})$ ficam contidos em um segmento de geodésica maior e isto termina a prova. \square

Vamos terminar esta seção com mais uma interessante aplicação do teorema de bola normal (convexa). No teorema abaixo damos uma ideia da demonstração do teorema de Hopf-Rinow para o caso compacto usando apenas o conceito de bola normal e um argumento chamado *encurtamento* o qual é útil no estudo de geodésicas em particular das geodésicas fechadas.

Teorema 2.39.

Suponha que M é variedade Riemanniana compacta. Então:

(a) para todo $q \in M$ a aplicação exponencial $\exp_q : T_q M \rightarrow M$ está bem

Continuação.

definida (ie., M é geodesicamente completo).

- (b) dados q e p em M , existe um segmento de geodésica $\gamma : [0, R] \rightarrow M$ (parametrizado por comprimento de arco) ligando q a p (i.e., $\gamma(0) = q$ e $\gamma(R) = p$) que realiza distância, i.e., $L(\gamma) = R = d(q, p)$. que realiza distância (i.e.,

Demonstração. Afim de ter uma ideia da demonstração do item (a), aceitemos que a Equação 2.3.1 garante a existência de um campo (chamado campo geodésico) $\vec{G} \in \mathfrak{X}(TM)$ sendo que a projeção de sua linha integral coincide a geodésicas em M . Agora podemos restringir \vec{G} ao fibrado tangente unitário $T^1(M) := \{V_x \in T_x M, \|V_x\| = 1\}_{x \in M}$. Ao aplicar o resultado que afirma que *todo campo suave definido em variedade compacta gera um grupo a 1 parametro de difeomorfismos* podemos concluir que o fluxo de \vec{G} restrito $T^1(M)$ é completo (i.e., está definido para todo tempo) e assim projetando em M concluímos que M é geodesicamente completo.

Vamos agora dar ideia da prova do item (b). Como M é compacta podemos considerar uma cobertura finita de bolas B_{δ_i} que são vizinhanças normais convexas (vide Teorema 2.36). A esta cobertura considere δ o número de Lebesgue associado a ela, ou seja se $d(x, y) < \delta$ então $x, y \in B_{\delta_i}$ para algum i . Sejam $R = d(q, p)$ e $0 < t_1 < t_2 \cdots t_{m-1} = R$ uma partição tal que $\Delta t_i := (t_i - t_{i-1}) < \frac{\delta}{4}$

Considere uma sequencia de curvas $\tilde{\gamma}_n : [0, b_n] \rightarrow M$ parametrizadas por comprimento de arco tal que $L(\tilde{\gamma}_n)$ converge a R com $\tilde{\gamma}_n(0) = q$ e $\tilde{\gamma}_n(b_n) = p$. Considere $N > N_0$ tal que $R \leq L(\tilde{\gamma}_n) < R + \epsilon_0$ onde $\epsilon_0 < \frac{\delta}{8}$. Em particular observe que $b_n < R + \epsilon_0$ Defina $t_m^n := b_n$ (sendo que $t_{m-1} \leq t_m$).

Finalmente defina γ_n como a curva composta por união de segmentos de geodésicas ligando $x_n^{i-1} := \tilde{\gamma}_n(t_{i-1})$ com $x_n^i := \tilde{\gamma}_n(t_i)$. De fato a escolha de Δt_i garante que existe uma única geodésica ligando tais pontos. Chamaremos γ_n o *encurtamento* de $\tilde{\gamma}_n$. Visto que M é compacta, passando por uma subsequencia (que continuaremos a denotar por $\{x_n^i\}_n$) podemos garantir que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^i = x^i$. Novamente a escolha de Δt_i e propriedade do número de Lebesgue δ garante que existe um único segmento de geodésica ligando x^{i-1} e x^i . Vamos denotar por γ a curva que é a união destes segmentos de geodésicas. Note que $\gamma_n|_{[t_{i-1}, t_i]}$ converge para $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$. Visto que $L(\tilde{\gamma}_n)$ converge para R concluímos que $L(\gamma) = R$. Logo pela Proposição 2.38 concluímos que γ é a geodésica minimizante ligando q a p . \square

Exercício 2.40. *

Seja M variedade Riemanniana compacta não simplesmente conexa. Demonstre que por cada q existe um loop geodésico (i.e uma geodésica $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = \gamma(1)$, porém $\gamma'(0)$ não precisa ser igual a $\gamma'(1)$).

Dado as técnicas apresentadas acima é conveniente dizer algumas palavras sobre um dos primeiros resultados sobre *existência de geodésicas fechadas em variedades compactas* (assunto muito estudado na Geometria Riemanniana). Seja $\beta : [0, 1] \rightarrow M$ uma curva fechada (i.e, $\beta(0) = \beta(1)$) em uma variedade compacta M . Considere 2 partições τ_i e t_i definidas da seguinte forma, $\tau_0 = \tau_k - 1 < t_0 = 0 < \tau_1 < t_1 < \tau_2 < t_2 \cdots \tau_k < t_k = 1$ com Δt_i e $\Delta \tau_i$ pequenos o suficiente (onde a estimativa é feita adequadamente usando cobertura de bolas convexas e o número de Lebesgue). Aplicando o processo de encurtamento a curva fechada β (referente a partição t_i) discutido na demonstração acima, obtemos uma curva fechada γ_1 união de segmentos de geodésicas. Agora usando o encurtamento (referente a partição τ_i) a curva γ_1 obtemos uma nova curva fechada união de segmentos de geodésicas. Vamos denota-la por γ . Criamos então um processo que chamaremos **duplo-encurtamento** $\mathcal{P}(\beta) = \gamma$.

É possível demonstrar que as curvas fechadas união de segmentos de geodésicas $\mathcal{P}^n(\beta)$ converge para uma geodésica fechada γ , i.e, $\gamma'(0) = \gamma'(1)$, que em princípio poderia ser um ponto. Então surge a questão de como garantir que γ não é trivial. Podemos então pensar em 2 casos. O primeiro mais simples onde $\pi_1(M)$ é não trivial. Neste caso poderíamos ter começado com uma curva fechada β que não é homotópica a um ponto e aplicarmos o processo duplo a esta curva. Temos assim neste caso que γ é uma geodésica fechada não trivial, pois γ e β estão na mesma classe de homotopia que não fixa extremos e β não pode ser deformada a um ponto. Finalmente considere o caso em que M é simplesmente conexo. Sabe-se por topologia algébrica que pelo menos um dos grupos de homotopia $\pi_k(M)$ é não trivial. Considere uma aplicação $\psi : \mathbb{S}^k \rightarrow M$ não homotópica a um ponto. Aplicando duplo encurtamento a cada um dos paralelos concluímos que deve existir uma geodésica fechada, pois caso contrário a esfera seria homotópica a um disco, que por sua vez é homotópico a um ponto.

O leitor poderá encontrar em literatura mais especializada outros resultados sobre geodésicas fechadas em variedades (e.g se existem mais de uma, como elas crescem etc).²

²Alguns resultados sobre geodésicas fechadas em espaços singulares tais como orbifolds, podem ser encontrados em Alexandrino Javaloyes-on closed geodesics in the leaf space of singular Riemannian foliations.

2.4. Curvatura intrínseca, campos de Jacobi e Equação de Gauss

Vamos aqui considerar uma variedade Riemanniana (M^m, g) . Na Subseção 2.4.3 precisaremos supor também que M^m está mergulhada em uma variedade Riemanniana $(\widetilde{M}^{m+k}, \tilde{g})$ sendo g a métrica induzida por \tilde{g} . O leitor que se sentir mais confortável poderá supor sempre que $\widetilde{M}^{m+k} = \mathbb{R}^{m+k}$, supor que \tilde{g} é a métrica Euclidiana, e que g é a métrica induzida na variedade mergulhada M^m . Mesmo com tal simplificação, o leitor poderá aproveitar boa parte dos resultados aqui discutidos.

O principal resultado desta seção será o Teorema 2.64 que em particular implicará o teorema egregium de Gauss o qual afirma que *a curvatura de Gauss (objeto extrinsecamente calculado) de uma superfície no espaço Euclidiano, coincide com a curvatura seccional (objeto intrinsecamente definido, vide Subseção 2.4.1)*. Para compreender uma das várias interpretações das curvaturas seccionais (que diferem da curvatura de Gauss nos caso em que \widetilde{M} não é o espaço Euclidiano) apresentamos o conceito de campos de Jacobi, vide Subseção 2.4.2. Campos de Jacobi são os vetores velocidades de variações por geodésicas. Aproveitamos o conceito de campo de Jacobi para provar a Proposição 2.53 a qual em particular implica que *variedades Riemannianas com mesma curvatura seccional constante são localmente isométricas*.

Embora campos de Jacobi sejam ferramentas fundamentais na Geometria Diferencial, o leitor que esteja somente interessado no Teorema 2.64, poderá se quiser, ler apenas a Definição 2.4.1 e Proposição 2.44 e seguir para Subseção 2.4.3.

2.4.1. Tensor curvatura e curvatura seccional

Iniciemos definindo um operador em campos tangente a M

$$\begin{aligned} R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y, \xi) &\rightarrow R(X, Y)\xi \end{aligned}$$

onde

$$R(X, Y)\xi := \nabla_{[X, Y]}\xi - \nabla_X \nabla_Y \xi + \nabla_Y \nabla_X \xi.$$

Por meio de cálculos diretos, é possível verificar o resultado a seguir.

Proposição 2.41.

Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, e $f, g, h \in C^\infty(M)$ Então:

- (a) R é \mathbb{R} -trilinear,
- (b) $R(X, Y) = -R(Y, X)$,
- (c) $R(fX, gY)hZ = fghR(X, Y)Z$.
- (d) $g(R(X, Y)Z, T) + g(R(Y, Z)X, T) + g(R(Z, X)Y, T) = 0$,
- (e) $g(R(X, Y)Z, T) = -g(R(X, Y)T, Z)$
- (f) $g(R(X, Y)Z, T) = g(R(Z, T)X, Y)$

Os itens (a), (b), (c) acima garantem então que R_p depende apenas dos vetores $X(p)$, $Y(p)$ e $Z(p)$ e não dos campos X, Y, Z . Assim R é um $(1, 3)$ tensor, i.e., $R_p : T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$ é 3-linear. R será chamado **tensor curvatura**.

Item (f) garante que o **operador de Jacobi** $R_{v_p} : T_p M \rightarrow T_p M$ definido como $R_{v_p}(\cdot) := R(v_p, \cdot)v_p$ é uma transformação linear simétrica. Em particular, R_{v_p} admite uma base de auto-vetores, ortonormais a v_p .

Observação 2.42. interpretações

- Segue direto da definição que se o tensor curvatura é nulo então $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}$ comuta com $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}$.
- Como veremos na Subseção 2.4.2, o operador de Jacobi $R_{\gamma'_0(t)}$ também ajuda a medir quão rápido geodésicas $t \rightarrow \gamma_s(t)$ saindo do mesmo ponto $p_0 = \gamma_s(0)$ se afastam.
- Tensor curvatura mede quanto o transporte paralelo depende de caminhos curtos, em particular, se $R = 0$ então o transporte paralelo não depende de caminhos curtos.
- Veremos no Capítulo 4, como consequência de uma versão local do teorema de

Continuação.

Gauss Bonnet, uma relação entre curvatura seccional (a ser definida abaixo) e triângulos geodésicos em superfícies, ideia que pode ser generalizada para geometria em espaços métricos.

Seja $\sigma \subset T_p M$ um subespaço bi-dimensional e $X, Y \in \sigma$ vetores linearmente independente. Então definimos a **curvatura seccional** em σ como:

$$K(X, Y) := \frac{g(R(X, Y)X, Y)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}$$

De fato é possível mostrar que $K(X, Y)$ é o mesmo para qualquer outra base de σ . Também é possível mostrar que tendo todas as curvaturas seccionais de todos os subespaços bi-dimensionais de $T_p M$ então pode-se reconstruir o tensor R_p .

A próxima proposição é um resultado útil sobre tensor curvatura de espaço de curvatura constante .

Proposição 2.43.

(M, g) tem curvaturas seccionais constantes iguais a K_0 se e somente se

$$g(R(X, Y)Z, T) = K_0(g(X, Z)g(Y, T) - g(X, T)g(Y, Z))$$

2.4.2. Campos de Jacobi e variações por geodésicas

Seja $\gamma : I \rightarrow (M, g)$ geodésica em uma variedade Riemanniana M com dimensão n . Um campo suave J ao longo de γ é chamado **campo de Jacobi** se ele atende a **equação de Jacobi**:

$$\frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} J + R_{\gamma'(t)} J(t) = 0. \quad (2.4.1)$$

onde $R_{\gamma'(t)}(\cdot) = R(\gamma', \cdot)\gamma'$ é o operador de Jacobi. Como vemos a seguir todo vetor velocidade de uma variação por geodésica é um campo de Jacobi.

Proposição 2.44.

Seja $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \rightarrow M$ uma aplicação suave tal que $t \rightarrow \gamma_s(t) = f(s, t)$ é geodésica para todo $s \in (-\epsilon, \epsilon)$. Então $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$ é campo de Jacobi ao longo da geodésica $t \rightarrow \gamma(t) = \gamma_0 = f(0, t)$.

Demonstração. A prova é um cálculo direto, aceitando que o tensor curvatura restrito a variação (o que formalmente é chamado **pullback da curvatura** via f) não terá o termo de colchete.

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} J &= \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial s} \\ &= \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \frac{\nabla}{ds} \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} - R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right) \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= -R(\gamma', J)\gamma' \end{aligned}$$

□

Veremos na Proposição 2.46 que o resultado recíproco também será verdadeiro ou seja todo campo de Jacobi pode ser obtido por variações por geodésicas. Antes porém vamos descrever um campo de Jacobi em termos de um referencial paralelo e observar que ele de fato atende uma EDO e extrair algumas conclusões simples de tal equação diferencial.

Sejam J um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica γ e $t \rightarrow \{e_i(t)\}_{i=0\dots n-1}$ um referencial ortonormal paralelo ao longo de γ onde $e_0 := \gamma'/\|\gamma'\|$. Neste caso para

$$J(t) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(t)e_i(t)$$

temos

$$\frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} J = \sum_{i=0}^{n-1} f_i''(t)e_i(t).$$

Concluimos então que a equação de Jacobi pode ser escrita como

$$f_j''(t) + \sum_i f_i g(R(\gamma', e_i)\gamma', e_j) = 0 \quad \forall j \quad (2.4.2)$$

Em termos matriciais temos

$$J'' + CJ = 0 \quad (2.4.3)$$

onde $C = (c_{ij})$ e $c_{ij} = g(R(\gamma', e_i)\gamma', e_j)$. Em outras palavras C é a representação matricial de $R_{\gamma'}$ na base $\{e_i\}$. Note que $c_{ij} = c_{ji}$ e $c_{0j} = 0$.

As equações acima nos permite inferir algumas conclusões imediatas sobre campos de Jacobi as quais resumimos na proposição a seguir.

Proposição 2.45. (a) Se $V, W \in T_{\gamma(0)}M$ então existe um único campo de Jacobi J ao longo da geodésica $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ tal que $J(0) = V$ e $\frac{\nabla}{dt}J(0) = W$.

(b) Existem $2n$ campos de Jacobi linearmente independentes.

(c) γ' e $t\gamma'$ são campos de Jacobi, os quais são soluções de $f''_0 = 0$

(d) Existem $2(n - 1)$ campos de Jacobi perpendicular à γ (não necessariamente ortogonais entre si).

(e) $g(J, \gamma') = t g(J'(0), \gamma') + g(J(0), \gamma'(0))$

Demonstração. Os itens (a),(b),(c) são imediatos. O item (d) segue da equação (2.4.3) levando em conta que $c_{0j} = 0$. Para verificar o item (e) basta observar que

$$\begin{aligned} g(J, \gamma') &= \|\gamma'\| f_0 \\ &= \|\gamma'\| (t f'_0(0) + f_0(0)) \\ &= \|\gamma'\| \left(t g(J'(0), \frac{\gamma'(0)}{\|\gamma'(0)\|}) + g(J(0), \frac{\gamma'(0)}{\|\gamma'(0)\|}) \right). \end{aligned}$$

□

Podemos agora mostrar que todo campo de Jacobi é vetor velocidade de uma variação por geodésicas.

Proposição 2.46.

Seja J um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$. Considere uma curva $\beta : (-1, 1) \rightarrow W$ com $\beta'(0) = J(0)$, um campo $s \rightarrow V(s)$ ao longo de β com $V(0) = \gamma'(0)$ e $\frac{\nabla}{ds}V(0) = \frac{\nabla}{dt}J(0)$. Suponha que a variação $f(s, t) := \exp_{\beta(s)}(tV(s))$ está bem definida. Então $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$.

Demonstração. Observe que $\frac{\partial f}{\partial s}(0, 0) = J(0)$. Devemos verificar que $\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial s}(0, 0) = \frac{\nabla}{dt}J(0)$ e o resultado seguirá pela Proposição 2.44 e pela unicidade de EDO. Para

tanto basta observar que

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial s}(0, 0) &= \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial f}{\partial t}(0, 0) \\ &= \frac{\nabla}{ds} (d(\exp_{\beta(s)})_0 V(s))|_{s=0} \\ &= \frac{\nabla}{ds} (V(s))|_{s=0} \\ &= \frac{\nabla}{dt} J(0). \end{aligned}$$

□

Observação 2.47.

É fácil achar uma curva β tal que $\beta'(0) = J(0)$. Sejam $s \rightarrow X(s)$ e $s \rightarrow Y(s)$ os campos paralelos ao longo de β com $X(0) = \gamma'(0)$ e $Y(0) = \frac{\nabla}{dt} J(0)$. O campo $s \rightarrow V(s)$ pode então ser definido como $V(s) := X(s) + sY(s)$. Se a aplicação \exp está sempre bem definida, e.g., M compacta então f está bem definida. Caso contrário, pode-se proceder da seguinte forma. Primeiro verifica-se que f está certamente bem definida para intervalos pequenos de s e t . Depois, grudando variações f_i ao longo de γ podemos construir a desejada variação f .

É conveniente considerar o caso particular de campos de Jacobi com $J(0) = 0$.

Corolário 2.48.

Suponha que $\exp_p : B_\delta(0) \rightarrow M$ está bem definida e seja $B := \exp_p(B_\delta(0))$. Seja J um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica $\gamma \subset B$ com condições iniciais $J(0) = 0$ e $\frac{\nabla}{dt} J(0) = W$. Então

$$J(t) = d(\exp_p)_{t\gamma'(0)} tW$$

Demonstração. Basta considerar na demonstração anterior a curva $\beta(s) = p$ e um campo $V(s) = \sum_i a_i(s)e_i(p)$ com $V(0) = \gamma'(0)$ e $V'(0) = W$. Observe que

$$\frac{\nabla}{ds} V(0) = V'(0) = \sum_i a'_i(0)e_i(p).$$

O resultado segue observando que

$$\frac{\partial f}{\partial s}(0, t) = d(\exp_p)_{tV(0)} tV'(0).$$

□

Observação 2.49.

Por vezes é conveniente reescrever o corolário acima em termos de variações. Mais precisamente se J é um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica γ com $J(0) = 0$ e $W = \frac{\nabla}{dt}J(0)$ então $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$ onde $f(s, t) = \exp_p(tv(s))$ e $V : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow T_pM$ é curva com $V'(0) = W$ e $V(0) = \gamma'(0)$.

Consideraremos agora campos de Jacobi em espaços de curvatura constante.

Proposição 2.50.

Sejam (M, g) variedade Riemanniana com curvaturas seccionais constantes K e $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ geodésica com vetor velocidade 1. Então o campo de Jacobi J ao longo de γ com condições iniciais $J(0) = 0$ e $\frac{\nabla}{dt}J(0) = w$ para w perpendicular a $\gamma'(0)$ é $J(t) = c_K(t)w(t)$ onde $w(\cdot)$ é o transporte paralelo de w ao longo de γ e c_K é a função definida como $c_K(t) := \frac{\sin(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}}$ se $K > 0$, $c_K(t) := t$ se $K = 0$ e $c_K(t) := \frac{\sinh(t\sqrt{-K})}{\sqrt{-K}}$ se $K < 0$.

Demonstração. Considere o campo $\tilde{J}(t) := c_K(t)w(t)$. Sabemos pela Proposição 2.43 que

$$g(R(\gamma', \tilde{J})\gamma', e_i) = Kg(\tilde{J}, e_i)$$

Assim

$$R(\gamma', \tilde{J})\gamma' = K\tilde{J}$$

Logo o campo \tilde{J} atende a equação de Jacobi, ou seja

$$\frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{dt}\tilde{J} + K\tilde{J} = 0.$$

O resultado segue da unicidade das soluções da equação de Jacobi, dado condições iniciais. □

Temos então o seguinte corolário.

Corolário 2.51.

Seja M variedade Riemanniana com curvatura constante K . Suponha que $\exp_p : B_\delta(0) \rightarrow M$ está bem definida. Seja $f(s, t) = \exp_p(tv(s))$ onde $v : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow$

Continuação.

$\mathbb{S}_1^{n-1} \subset T_p M$ é curva com $\|V'(0)\| = 1$ e $|t| < \delta$. Então $\|J(t)\| = |c_K|$ onde c_K foi definido na proposição anterior e $J(t) := \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$.

Observação 2.52. Fórmula de Taylor

Caso M não possua curvaturas seccionais constante, ainda sim podemos ter uma estimativa de $\|J\|$. De fato sejam f e J definidos como no corolário anterior. Então:

$$\|J(t)\|^2 = t^2 - \frac{1}{3}K(p, \sigma)t^4 + O(t^4)$$

$$\|J(t)\| = t - \frac{1}{6}K(p, \sigma)t^3 + O(t^3)$$

onde σ é o espaço bi-dimensional gerado por $V(0)$ e $V'(0)$.

A seguir iremos utilizar nosso conhecimento sobre campos de Jacobi em espaços de curvatura constante para descrever a métrica g em termos de coordenadas geodésicas polares.

Proposição 2.53.

Sejam (M^n, g) variedade Riemanniana com curvaturas seccionais constantes K e $\psi : (0, \delta) \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow B_\delta(p)$ **parametrização geodésica polar**, i.e., $\psi(r, v) := \exp_p(rAv)$ onde $A : (\mathbb{R}^n, g_0) \rightarrow (T_p M, g)$ é isometria linear. Então a métrica g em **coordenadas geodésicas polares** (i.e., ψ^*g) é $dr^2 + (c_k(r))^2 ds^2$ onde ds^2 é a métrica canônica da esfera \mathbb{S}^{n-1} e a função c_K foi definida na Proposição 2.50.

Demonstração. Seja $\{e_i\} \subset T_v \mathbb{S}^{n-1}$ referencial ortonormal. Pelo Corolário 2.48

$$\begin{aligned} J_i(r) &:= d(\exp_p)_{rAv} r A e_i \\ &= d\psi_{(r,v)}(0, e_i), \end{aligned}$$

é campo de Jacobi ao longo da geodésica $r \rightarrow \exp_p(rAv)$. Utilizando Proposição 2.50 podemos verificar que

$$g(J_i, J_j) = \delta_{i,j} c_K^2. \quad (2.4.4)$$

Por fim defina

$$\begin{aligned} J_0(r) &:= d(\exp_p)_{rAv} Av \\ &= d\psi_{(r,v)}(1, 0) \end{aligned}$$

e utilizando o Lema de Gauss concluímos que

$$g(J_0, J_i) = 0. \quad (2.4.5)$$

O resultado então seguirá das equações (2.4.4) e (2.4.5). \square

Observação 2.54.

A descrição acima implica em particular que: duas variedades Riemannianas com mesma dimensão e mesmas curvaturas seccionais constantes iguais a constante c são localmente isométricas.

Observação 2.55.

Como comentamos acima, uma isometria $F : M^m \rightarrow N^m$ leva geodésica em geodésica, assim para todo p existe uma vizinhança U de p e V de $q = F(p)$ tal que $F : U \rightarrow V$ é descrito como

$$\exp_q \circ A \circ \exp_p^{-1}, \text{ para isometria } A : T_p M \rightarrow T_q N, \quad (2.4.6)$$

De fato $A = DF(p)$. Uma pergunta natural é sobre que condições a recíproca é verdadeira. O teorema de Cartan (cuja demonstração usa campos de Jacobi) apresenta condições técnicas (descrita em termos do tensor curvatura e transportes paralelo ao longo de geodésicas radiais) para que a Equação (2.4.6) determine uma isometria. O teorema de Cartan de fato pode ser utilizado para demonstrar uma versão melhor da observação acima, ou seja se 2 variedades são simplesmente conexa e tem curvatura constante c elas são isométricas (e não apenas localmente isométricas). Quando consideramos dimensão 2, o teorema de Cartan ganha um formato bem elegante: Seja $A : T_p M^2 \rightarrow T_q N^2$ isometria, então $F = \exp_q \circ A \circ \exp_p^{-1} : U \subset M^2 \rightarrow V \subset N^2$ é isometria, caso $K(F(x)) = K(x)$ para cada $x \in M^2$.

2.4.3. Equação de Gauss e o teorema Egregium de Gauss

Como comentamos no início da seção, agora vamos supor que que M^m está mergulhada em uma variedade Riemanniana $(\widetilde{M}^{m+k}, \widetilde{g})$ sendo g a métrica induzida por \widetilde{g} . Para evitar sobrecarga de notação iremos denotar as 2 métricas simplesmente por g .

Vamos rever algumas ideias apresentadas na Seção 1.6 agora neste contexto um pouco mais geral.

A relação entre a conexão do ambiente $\widetilde{\nabla}$ e a conexão tangente ∇ é descrita pelo tensor $B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ definido a seguir

Definição 2.56. Tensor Segunda Forma

$$B(X, Y) = \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} - \nabla_X Y$$

onde \tilde{X} e \tilde{Y} são extensões de X e Y .

Proposição 2.57.

- (a) B é bem definido (não depende das extensões)
 (b) B é $(1, 2)$ tensor simétrico.

Demonstração. O item (a) e o fato de B ser um $(1, 2)$ tensor pode ser demonstrado utilizando referencial adaptado e o fato de

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} = D_X \tilde{Y} + \tilde{A}(X) \tilde{Y}.$$

Para demonstrar que B é simétrico note

$$\begin{aligned} B(X, Y) &= \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} - \nabla_X Y \\ &= \tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{X} + [\tilde{X}, \tilde{Y}] \\ &\quad - (\nabla_Y X + [X, Y]) \\ &= B(Y, X). \end{aligned}$$

□

Por vezes também será conveniente tratar o $(1, 2)$ tensor B acima, como o $(0, 3)$ tensor abaixo.

Definição 2.58. Segunda forma

$$\Pi_\eta(X, Y) = g(B(X, Y), \eta)$$

onde X, Y são tangentes a M e η é um vetor normal.

Visto que B é simétrico, podemos então definir um operador simétrico (em relação ao produto g) $\mathcal{S}_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ via o tensor segunda forma:

Definição 2.59. Operador forma

$$g(\mathcal{S}_\eta X, Y) = \Pi_\eta(X, Y)$$

O significado geométrico do operador forma pode ser compreendido mais claramente na proposição a seguir. Em particular para hipersuperfícies no espaço Euclidiano pode ser interpretado como *uma forma de medir quão rápido o vetor normal unitário varia, ou seja quão rápido uma hipersuperfície "curva". Em particular se o operador forma for sempre zero a hipersuperfície será um hiperespaço.*

Proposição 2.60.

Seja $\eta \in \nu_p(M)$ e $\tilde{\eta}$ uma extensão de η em uma vizinhança de p em \tilde{M} . Então

$$\mathcal{S}_\eta(X) = -\pi(\tilde{\nabla}_X \tilde{\eta})$$

onde $\pi : T_p \tilde{M} \rightarrow T_p M$ é a projeção ortogonal e $X \in T_p M$

Demonstração. Seja $Y \in T_p M$ um vetor qualquer fixo e \tilde{Y} uma extensão deste vetor. Observe primeiro que como $g(\eta, Y) = 0$ temos, após derivar por X que $g(\tilde{\nabla}_X \tilde{Y}, \tilde{\eta}) = -g(\tilde{Y}, \tilde{\nabla}_X \tilde{\eta})$ e assim

$$\begin{aligned} g(\mathcal{S}_\eta X, Y) &= g(\tilde{\nabla}_X \tilde{Y} - \nabla_X Y, \tilde{\eta}) \\ &= g(\tilde{\nabla}_X \tilde{Y}, \tilde{\eta}) \\ &= g(Y, -\tilde{\nabla}_X \tilde{\eta}) \end{aligned}$$

A equação acima e a arbitrariedade da escolha do vetor Y conclue a prova da proposição. \square

Observação 2.61.

Natural nos perguntarmos o que significa B e \mathcal{S}_η serem zero. Dizemos que M é totalmente geodésica em p se $B_p = 0$. Mais geralmente M é **totalmente geodésica** se $B_p = 0$ para todo $p \in M$. Exemplos de subvariedades totalmente geodésicas:

- M é subespaço vetorial de $\tilde{M} = \mathbb{R}^{m+k}$,
- V um subespaço de \mathbb{R}^{m+1} , defina $M := V \cap \mathbb{S}^m$ e $\tilde{M} = \mathbb{S}^m$;

Continuação.

- M sendo subgrupo fechado de $\widetilde{M} = SO(n)$ com métrica $\langle X, Y \rangle = \text{tr}XY^t$.

Uma vez estabelecidos alguns exemplos onde S_η são nulas, é natural considerarmos casos onde tais operadores simétricos não são nulos e assim somos levados a considerar seus auto-valores e tentarmos entender o significado destes.

Definição 2.62.

Seja η vetor normal unitário de M . Os autovalores λ_i do operador forma $S_\eta : T_pM \rightarrow T_pM$ são chamados **curvaturas principais**. Frequentemente os auto-vetores são chamados direções principais e os auto-espaço E_λ associados a uma curvatura principal λ de auto-espaço principal.

Uma interpretação geométrica das curvaturas principais já foi apresentada na Seção 1.6. Em particular, observamos que toda superfície é aproximada ou por um parabolóide elíptico ou por um parabolóide hiperbólico se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ ou se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$. O produto $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ em p era então chamado de **Curvatura de Gauss** e como ficará claro abaixo (teorema Egregium de Gauss), tal curvatura coincide de fato com a curvatura seccional $K(p)$.

O próximo exercício fornece mais uma interessante interpretação sobre as curvaturas principais, agora destacando o significado de $\frac{1}{\lambda_i}$, as assim chamadas **distâncias focais** que a grosso modo medem lugares onde superfícies “focalizam”.

Exercício 2.63.

Seja M uma superfície mergulhada em $\widetilde{M} = \mathbb{R}^3$ e ξ vetor normal unitário a M . Defina $\eta_{r\xi} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ como $\eta_{r\xi}(x) = x + r\xi$

- Sejam e_1 e e_2 direções principais em T_pM com curvaturas principais λ_1 e λ_2 . Verifique que $d\eta_{r\xi}e_i = (1 - r\lambda_i)e_i$
- Conclua que se $r \neq \frac{1}{\lambda_i}$ em vizinhança \tilde{U} de p , então existe vizinhança $U \subset \tilde{U}$ de p tal que $\eta_{r\xi}(U)$ é superfície mergulhada.

Chegamos agora ao resultado principal desta seção que relaciona curvatura intrínseca, curvatura do ambiente e segunda forma.

Teorema 2.64. eq. de Gauss

Continuação.

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)X, Y) - g(\tilde{R}(X, Y)X, Y) &= g(B(X, X), B(Y, Y)) \\ &\quad - g(B(X, Y), B(Y, X)) \end{aligned}$$

onde X, Y são tangentes a M .

Demonstração. Seja $\{e_\beta\}$ referencial ortonormal a M definido em uma vizinhança de $p \in M$. Ou seja para todo $x \in M$ próximo a p , temos que $\{e_\beta(x)\}$ é base de $\nu_x(M) := TM_x^\perp$. Temos então que $B(X, Y) = \sum_\beta g(\tilde{\nabla}_X Y, e_\beta) e_\beta$. Estamos aqui usando a notação $\tilde{\nabla}_X Y$ para denotar $\tilde{\nabla}_X \tilde{Y}$ onde \tilde{Y} é extensão de Y próximo a p . Logo

$$\tilde{\nabla}_Y X = \nabla_Y X + \sum_\beta g(\tilde{\nabla}_Y X, e_\beta) e_\beta$$

Uma vez que $g(e_\beta, Y) = 0$ temos que:

$$\begin{aligned} g(\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y X, Y) &= g(\tilde{\nabla}_X \nabla_Y X, Y) \\ &\quad + \sum_\beta g(\tilde{\nabla}_Y X, e_\beta) g(\tilde{\nabla}_X e_\beta, Y) \\ &= g(\nabla_X \nabla_Y X, Y) \\ &\quad - \sum_\beta g(\nabla_Y X, e_\beta) g(e_\beta, \tilde{\nabla}_X Y) \end{aligned}$$

e assim concluímos:

$$g(\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y X, Y) = g(\nabla_X \nabla_Y X, Y) - g(B(X, Y), B(Y, X)). \quad (2.4.7)$$

De forma análoga obtemos

$$g(\tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X X, Y) = g(\nabla_Y \nabla_X X, Y) - g(B(X, X), B(Y, Y)). \quad (2.4.8)$$

Por fim note que:

$$g(\tilde{\nabla}_{[X, Y]} X, Y) = g(\nabla_{[X, Y]} X, Y). \quad (2.4.9)$$

As eq. (2.4.7), (2.4.8) e (2.4.9) implicam a Equação de Gauss. \square

A equação de Gauss nos permite algumas conclusões diretas. Em particular no item (b) do exercício abaixo vemos o celebrado **teorema Egregium de Gauss**, que observa que a curvatura seccional de uma superfície em \mathbb{R}^3 (que é definido intrinsicamente) pode ser calculada como o produto das curvaturas principais (que é calculado extrinsicamente).

Exercício 2.65. Teorema Egregium

Seja M hipersuperfície de $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$.

- (a) Verifique que $K(e_1, e_2) - \widetilde{K}(e_1, e_2) = \lambda_1 \lambda_2$ onde e_1, e_2 são direções principais de $T_p M$ associadas as curvaturas principais λ_1 e λ_2 .
- (b) Conclua que se $\widetilde{M} = \mathbb{R}^3$ com métrica Euclidiana, então a curvatura sectional da superfície M é $K(p) = \lambda_1 \lambda_2$.

2.5. Curvatura média e superfícies mínimas

Nesta seção vamos estudar conceitos que estão diretamente relacionados à média das curvaturas principais (vide item (c) da Proposição 1.77). Para isso, vamos introduzir formalmente este conceito.

Definição 2.66.

Seja uma superfície S em \mathbb{R}^3 e $p \in S$. A média das curvaturas principais

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2},$$

é chamada de *curvatura média* de S no ponto p , e o vetor $\mathbf{H} = HN$ é chamado de *vetor curvatura média*.

Observação 2.67.

Assim como no caso da curvatura de Gauss (Observação 1.73), o sentido do vetor curvatura média não depende do sentido do vetor normal, pois se mudamos o sentido deste, também muda o sinal da curvatura média e, portanto, o sentido de \mathbf{H} permanece invariante.

2.5.1. Superfícies mínimas

A palavra mínima neste contexto está relacionada com o problema de encontrar a superfície com a menor área dentre todas as superfícies que tem a mesma fronteira.

De fato, se consideremos uma superfície S em \mathbb{R}^3 e consideramos variações normais de tal superfície, ou seja, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, consideramos a aplicação

$$\begin{aligned} \psi_\lambda : \quad U &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2) &\longmapsto \psi(x_1, x_2) + \lambda h(x_1, x_2)N(x_1, x_2) \end{aligned} \quad ,$$

onde N é o normal à superfície e $h(x_1, x_2)$ uma função arbitrária e diferenciável em U , então a primeira variação da área é dada por:

$$A'(0) = -2 \iint_D hH \sqrt{\det(g)} dx_1 dx_2. \quad (2.5.1)$$

Então podemos estabelecer a seguinte proposição.

Proposição 2.68.

Seja S uma superfície mergulhada $\psi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Então ela é um ponto crítico do funcional da área para uma dada condição de contorno se, e somente se, a sua curvatura média é identicamente nula.

Demonstração. Se $H \equiv 0$ é claro que a condição é satisfeita pois vale (2.5.1). Reciprocamente, suponhamos que $A'(0) = 0$ e que existe $q \in D$ tal que $H(q) \neq 0$, então existe uma vizinhança V na qual H não se anula. Escolhamos $h : \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável tal que $h(q) = H(q)$, $hH > 0$ em V e h tem suporte compacto em V . Assim $A'(0) < 0$ para a variação determinada por essa função h , o que é uma contradição. \square

Definição 2.69.

Uma superfície mergulhada S é chamada de *superfície mínima* se a curvatura média é zero em cada ponto da superfície.

Observação 2.70.

A seguinte questão é, então, natural: se S é uma superfície mínima que tem como bordo a curva Γ , ela minimiza globalmente a área? A resposta a esta pergunta é negativa e isto foi observado por H. A. Schwarz (ver obras completas publicadas em 1890) mostrando que, quando a fórmula da segunda variação do funcional área para a superfície mínima que tem como bordo Γ é estritamente menor que zero, ela não minimiza globalmente a área. Porém, as mesmas minimizam localmente a área e a

Continuação.

prova pode ser encontrada em [?].

Lema 2.71.

Uma superfície mínima está caracterizada em termos da primeira e segunda forma fundamental pela equação

$$g_{11}b_{22} + g_{22}b_{11} - 2g_{12}b_{12} = 0. \quad (2.5.2)$$

Demonstração. Segue diretamente do item (c) da Proposição 1.77. \square

Exemplo 2.72. O catenoide

O catenoide é a superfície gerada pela rotação da catenária $x_2 = a \cosh\left(\frac{x_3}{a}\right)$, $a > 0$ em torno do eixo x_3 (veja figura 2.2).

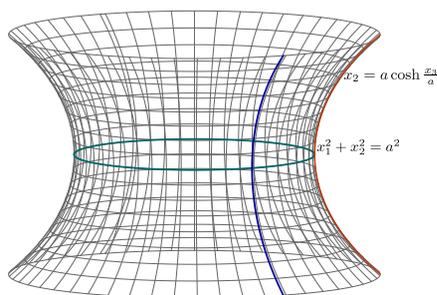


Figura 2.2: O catenoide obtido pela rotação da catenária ao redor do eixo x_3 .

Logo, ele é a imagem da aplicação

$$\psi(s, t) = (a \cosh(t) \cos(s), a \cosh(t) \sin(s), at).$$

Fazendo uso da fórmula para H obtida no Exemplo 1.78 – observando que, neste caso, $r(t) = a \cosh(t)$ e $h(t) = at$ – obtêm-se $H = 0$ (deixamos o cálculo explícito ao cargo do leitor). Logo tal superfície é mínima.

Um fato interessante do catenoide é que pode ser caracterizado como a única superfície mínima de revolução (não plana).

Exercício 2.73.

Se S é uma superfície mínima de revolução em \mathbb{R}^3 (não plana), então S é um catenoide ou um pedaço dele.

Sugestão: Fazendo $H = 0$ na fórmula do Exemplo 1.78, mostre que as únicas possibilidades para r e h são as do exemplo precedente.

2.5.2. EDP das superfícies mínimas

Vamos considerar o caso em que a superfície mínima seja o gráfico de uma função diferenciável $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Sabemos que uma parametrização é dada por:

$$\psi(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_3 - f(x_1, x_2)).$$

Assim,

$$d\psi_p(e_1) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x_1}\right) \quad \text{e} \quad d\psi_p(e_2) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right).$$

Logo, da Definição 1.27 segue que os coeficientes da métrica induzida estão dados por

$$g_{11} = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2, \quad g_{12} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right), \quad \text{e} \quad g_{22} = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2.$$

O vetor normal unitário é, portanto,

$$N = \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}, -\frac{\partial f}{\partial x_2}, 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + 1}},$$

e, como

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} = \left(0, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right),$$

segue que os coeficientes da segunda forma são

$$b_{ij} = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + 1}}.$$

Com isto obtemos uma equação equivalente à equação (2.5.2), que é uma equação diferencial parcial quasilinear e elíptica dada por:

$$\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right) - 2 \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right) = 0. \quad (2.5.3)$$

Sendo que toda superfície mergulhada é localmente um gráfico, a equação (2.5.3) nos permite encontrar exemplos específicos de superfícies mínimas. Tal equação é chamada de *EDP das superfícies mínimas*.

Exemplo 2.74.

Vamos usar a equação (2.5.3) para mostrar que o helicóide é uma superfície mínima. O helicóide de passo um está dado pela imersão

$$\psi(x_1, x_2) = (x_2 \cos x_1, x_2 \sin x_1, x_1).$$

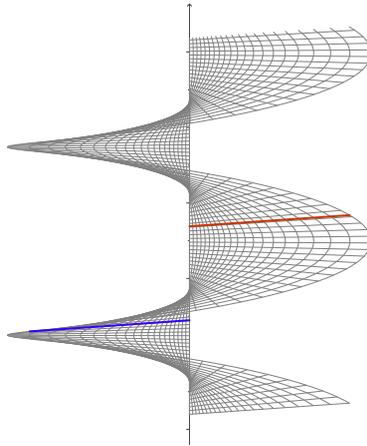


Figura 2.3: O helicóide como uma superfície regrada.

Supondo que $x_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e $x_2 \neq 0$, temos que

$$\frac{x_2(x_1, x_2)}{x_1(x_1, x_2)} = \tan x_1,$$

Continuação.

logo,

$$x_3 = \arctan \frac{x_2}{x_1}.$$

Portanto, o helicóide é, localmente, o gráfico da função

$$f(x_1, x_2) = \arctan \frac{x_2}{x_1},$$

onde $x_1 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $x_2 \neq 0$. Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2} \cdot \frac{-x_2}{x_1^2} = \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2} \cdot \frac{1}{x_1} = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{x_2 \cdot 2x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{-2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{-(x_1^2 + x_2^2) + x_2 \cdot 2x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}.$$

Donde,

$$\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{(x_1^2 + x_2^2)^2 + x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \cdot \frac{2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \quad (2.5.4)$$

$$\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{(x_1^2 + x_2^2)^2 + x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \cdot \frac{-2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}. \quad (2.5.5)$$

Continuação.

Somando (2.5.4) e (2.5.5) obtemos,

$$\begin{aligned} & \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \\ &= \frac{2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \left(\frac{(x_1^2 + x_2^2)^2 + x_1^2 - (x_1^2 + x_2^2)^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \right) \\ &= \frac{2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \cdot \frac{-(x_2^2 - x_1^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\ &= 2 \cdot \frac{-x_2}{(x_1^2 + x_2^2)} \cdot \frac{x_1}{(x_1^2 + x_2^2)} \cdot \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\ &= 2 \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}. \end{aligned}$$

O helicóide pode ser caracterizado como a única superfície mínima regrada.

Exercício 2.75. *

Toda superfície mínima regrada ou é parte de um plano ou é parte de um helicóide.

Sugestão: Use o fato de que uma superfície regrada³ é a imagem da parametrização

$$\psi(x_1, x_2) = \gamma(x_1) + x_2 w(x_1), \quad x_1 \in I \subset \mathbb{R}, \quad x_2 \in \mathbb{R},$$

onde $\{\gamma(t), w(t)\}$ é a família a 1-parâmetro geradora da superfície. Obtenha a fórmula para a curvatura média de uma superfície com tal parametrização, e mostre a seguir que se a mesma for 0 então as expressões de γ e w são as do helicóide.

³As superfícies regradadas são aquelas que tem a propriedade de que por cada um dos seus pontos passa uma reta que está inteiramente contida na superfície.

Índice Remissivo

- conexão
 - Riemanniana, 58
- Critério
 - da segunda derivada, 28
- curvatura
 - de Gauss, 44
 - média, 90
 - vetor, 90
- curvatura seccional, 79
- EDP das superfícies mínimas, 94
- forma fundamental
 - segunda, 45
- função
 - de Cobb-Douglas, 23
- Hessiano de f em p , 25
- máximo
 - local, 29
- média, curvatura, 90
- mínima
 - superfície, 91
- mínimas, EDP das superfícies, 94
- mínimo local, 29
- matriz
 - hessiana, 26
- polinômio de Taylor
 - de grau 2 em torno de p , 32
- ponto
 - crítico, 30
- primeira forma, 15
- segunda forma fundamental, 45
- superfície
 - mínima, 91
- superfícies mínimas, EDP das, 94
- tensor curvatura de espaço de curvatura constante, 79
- teorema
 - espectral, 26
- variedades
 - mergulhadas, 4
- vetor
 - curvatura
 - média, 90
 - gradiente, 16

Todo list

verificar o número do capítulo	78
------------------------------------------	----