MAT0147 - Cálculo Diferencial e Integral II-Noturno

Gabarito da 1^o 21/10/2022, Provas A, B

A prova foi baseada na primeira lista de exercícios e Guias Resumidos 3,2. Em particular compare:

- Questão 1 com Exemplo 16 do Guia Resumido 3,
- Questão 2 com Problemas 3.2 da Primeira Lista e Sec 5 Guia 2,
- Questão 3 com Problema 3.10 da Primeira Lista e Sec 3 Guia 2,
- Questão 4 com Problemas 3.20 da Primeira Lista e Sec 12 Guia 3.

1 Prova A

Questão 1.1 (2,5 pt)**.**
Considere o vínculo $C = \{x \in \mathbb{R}^2 | 2x_1 + 4x_2 = 15, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ onde 15 é um valor fixo (orçamento). Considere a função Cobb-Douglas $u(x) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$.

(a) Determine o ponto $q \in C$ onde $u|_C$ (a utilidade u restrita a C) assume maior valor.

(b) Determine o valor máximo de $u|_C$, i.e., $u(q)$.

Respostas:

(a) $q = (\frac{15}{4}, \frac{15}{8})$

(b) $u(q) = \frac{15\sqrt{2}}{8}$

Questão 1.2 (2,5 pt)**.** Considere a função $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}$.

(a) Esboce o gráfico de f.

(b) Determine a derivada $df(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$.

(c) Determine a equação Cartesiana do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 2)$.

Respostas:

(b) $df(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$.

(c) $-\frac{\sqrt{3}}{4}\big(x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\big) - \frac{3}{4}\big(x_2 - \frac{3}{2}\big)\big) + (x_3 - 2) = 0$

Questão 1.3 (2,5 pt)**.** Considere a função $g(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1 - x_2^2 + 2x_2$.

(a) Esboce a curva de nível $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, | g(x, y) = -2\}$.

(b) Determine o vetor v unitário ($\|v\| = 1$) tal que a derivada direcional $\frac{\partial g}{\partial v}(\frac{11}{3}, \frac{7}{3})$ seja a maior possível.

(c) Determine um vetor unitário w tangente a C no ponto $p = (\frac{11}{3}, \frac{7}{3})$.

Respostas:

(b) $v = \frac{\nabla g(p)}{\|\nabla g(p)\|} = (\frac{5}{\sqrt{41}}, \frac{-4}{\sqrt{41}})$

(c) $w = (\frac{4}{\sqrt{41}}, \frac{5}{\sqrt{41}})$

Questão 1.4 (2,5 pt)**.** Sejam $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ aplicação demanada e $g : W \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ função utilidade definidas como:

$$\begin{aligned} F(p_1, p_2, w) &= (\frac{3}{2}\frac{w}{p_1}, \frac{3}{2}\frac{w}{p_2}) \\ g(y_1, y_2) &= \frac{1}{2}\ln(y_1) + \frac{1}{2}\ln(y_2). \end{aligned}$$

Seja $h : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como $h = g \circ F$.

(a) Calcule $DF(p_1, p_2, w)$

(b) Calcule $dh(p_1, p_2, w)$

Respostas:

(a) $DF(p_1, p_2, w) = \begin{bmatrix} \frac{-3w}{2(p_1)^2} & 0 & \frac{3}{2p_1} \\ 0 & \frac{-3w}{2(p_2)^2} & \frac{3}{2p_2} \end{bmatrix}$

(b) $dh(p_1, p_2, w) = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2p_1} & \frac{-1}{2p_2} & \frac{1}{w} \end{bmatrix}$

2 Prova B

Questão 2.1 (2,5 pt)**.** Considere o vínculo $C = \{x \in \mathbb{R}^2 | 4x_1+3x_2 = 20, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ onde 20 é um valor fixo (orçamento). Considere a função Cobb-Douglas $u(x) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$.

(a) Determine o ponto $q \in C$ onde $u|_C$ (a utilidade u restrita a C) assume maior valor.

(b) Determine o valor máximo de $u|_C$, i.e., $u(q)$.

Respostas:

(a) $q = (\frac{5}{2}, \frac{10}{3})$

(b) $u(q) = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

Questão 2.2 (2,5 pt)**.** Considere a função $f(x_1, x_2) = 2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}$.

(a) Esboce o gráfico de f.

(b) Determine a derivada $df(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$.

(c) Determine a equação Cartesiana do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 4)$.

Respostas:

(b) $df(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$.

(c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}\big(x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\big) - \frac{3}{2}\big(x_2 - \frac{3}{2}\big)\big) + (x_3 - 4) = 0$

Questão 2.3 (2,5 pt)**.** Considere a função $g(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1 - x_2^2 + 2x_2$.

(a) Esboce a curva de nível $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|g(x, y) = -2\}$.

(b) Determine o vetor v unitário ($\|v\| = 1$) tal que a derivada direcional $\frac{\partial g}{\partial v}(\frac{11}{3}, \frac{7}{3})$ seja a maior possível.

(c) Determine um vetor unitário w tangente a C no ponto $(\frac{11}{3}, \frac{7}{3})$.

Respostas:

(b) $v = \frac{\nabla g(p)}{\|\nabla g(p)\|} = (\frac{5}{\sqrt{41}}, \frac{-4}{\sqrt{41}})$

(c) $w = (\frac{4}{\sqrt{41}}, \frac{5}{\sqrt{41}})$

Questão 2.4 (2,5 pt)**.** Sejam $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ aplicação demanada e $g : W \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ função utilidade definidas como:

$$\begin{aligned} F(p_1, p_2, w) &= (\frac{5}{2}\frac{w}{p_1}, \frac{5}{2}\frac{w}{p_2}) \\ g(y_1, y_2) &= \frac{1}{2}\ln(y_1) + \frac{1}{2}\ln(y_2). \end{aligned}$$

Seja $h : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como $h = g \circ F$.

(a) Calcule $DF(p_1, p_2, w)$

(b) Calcule $dh(p_1, p_2, w)$

Respostas:

(a) $DF(p_1, p_2, w) = \begin{bmatrix} \frac{-5w}{2(p_1)^2} & 0 & \frac{5}{2p_1} \\ 0 & \frac{-5w}{2(p_2)^2} & \frac{5}{2p_2} \end{bmatrix}$

(b) $dh(p_1, p_2, w) = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2p_1} & \frac{-1}{2p_2} & \frac{1}{w} \end{bmatrix}$