

MAT0146: Cálculo Diferencial e Integral I para Economia

B 5 : Integral: Propriedades e Teorema Fundamental

Prof. M Alexandrino (IME-USP)

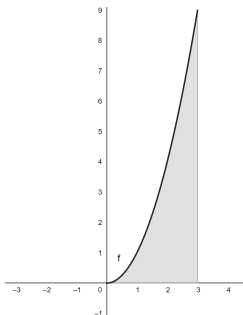
2021

Alerta: Este é apenas um guia resumido de parte das transparências das aulas. Ele não substitui as aulas (onde existem discussões, resoluções de exercícios, figuras, etc) e não substitui a leitura da bibliografia recomendada. Figuras foram produzidas com o GeoGebra <http://www.geogebra.org>

- (▶ 1) Motivação
- (▶ 2) Definição e propriedades
- (▶ 3) Teorema fundamental do Cálculo
- (▶ 4) Integral indefinida
- (▶ 5) Área entre gráficos

Motivação

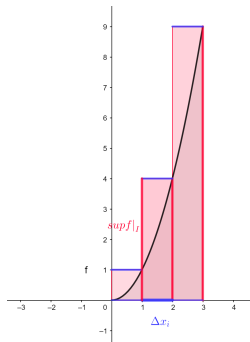
Como calcular a área de uma função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f > 0$?



Definição e propriedades

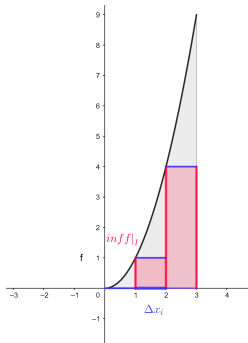
Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ função. Seja $P = a = x_0 < \cdots x_n = b$ uma partição de $[a, b]$. Defina

$$U(f, P) = \sum_i \sup(f)|_{[x_{i-1}, x_i]} \Delta x_i \quad \text{onde} \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$



Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ função. Seja $P = a = x_0 < \cdots x_n = b$ uma partição de $[a, b]$. Defina

$$L(f, P) = \sum_i \inf(f)|_{[x_{i-1}, x_i]} \Delta x_i \quad \text{onde} \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$



Denotando $\mathcal{P}$ é o conjunto das partições de $[a, b]$ podemos definir:

$$U \int_a^b f dx := \inf_{P \in \mathcal{P}} U(f, P)$$
$$L \int_a^b f dx := \sup_{P \in \mathcal{P}} L(f, P)$$

Por construção $L \int_a^b f dx \leq U \int_a^b f dx$

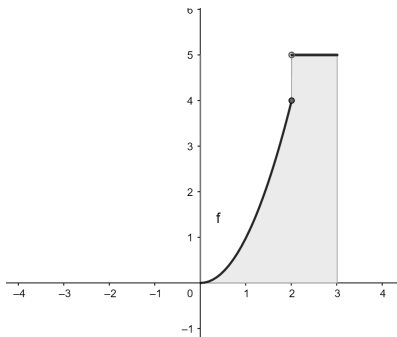
Definição 1

Quando temos a igualdade $L \int_a^b f dx = U \int_a^b f dx$ dizemos que a função é **integrável** e denotamos:

$$\int_a^b f(x) dx = L \int_a^b f dx = U \int_a^b f dx$$

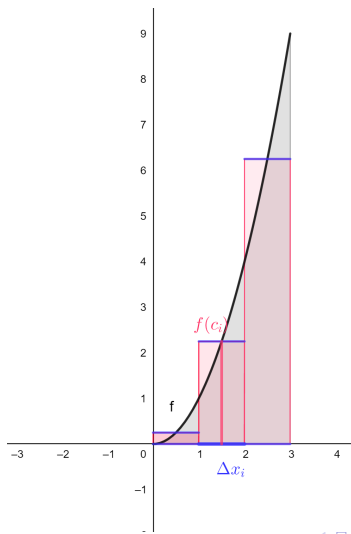
Proposição 2

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ função limitada com **somente um número finito de descontinuidades** Então f é integrável.

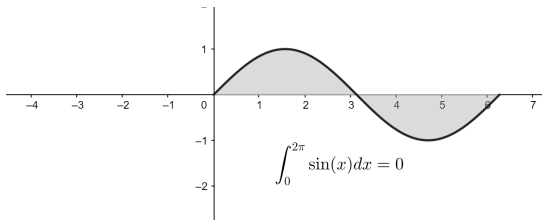


Proposição 3

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ função integrável então dado $\epsilon > 0$ existe uma partição P tal que $|\int_a^b f(x)dx - \sum_i f(c_i)\Delta x_i| < \epsilon$ para qualquer $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$



Obs: Se a função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ não for sempre não negativa, a integral pode dar zero ou mesmo negativa.



Obs: $\int_a^a f(x)dx = 0$ e $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Proposição 4

Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis e $k \in \mathbb{R}$.
Então:

(a) $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$

(b) $\int_a^b f(x) \pm g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

(c) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ para $c \in [a, b]$.

(d) Se $f \leq g$ então $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

(e) $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

Teorema fundamental do Cálculo

Teorema 5 (Parte I)

Seja $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 e $f(x) = F'(x)$ então:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{d}{dx} F(x) dx = F(b) - F(a) = F|_a^b$$

Ex: Seja $f(x) = x^2$ e $F(x) = \frac{x^3}{3}$.

$$\int_1^2 x^2 dx = \int_1^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{x^3}{3} \right) dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{(2)^3}{3} - \frac{(1)^3}{3} = \frac{7}{3}$$

Dem:

Pela Proposição 3, dado $\epsilon > 0$ existe uma partição P tal que $|\int_a^b F'(x)dx - \sum_i F'(c_i)\Delta x_i| < \epsilon$ para qualquer $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Pelo teorema do valor médio (**TVM**) podemos escolher c_i tal que

$$F'(c_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

Assim TVM e **soma telescópica**

$$\sum_i F'(c_i)\Delta x_i = \sum_i \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x_i - x_{i-1}) = F(b) - F(a)$$

Logo

$$\left| \int_a^b F'(x)dx - (F(b) - F(a)) \right| < \epsilon$$

A arbitrariedade na escolha de ϵ termina a demonstração.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{d}{dx} F(x) dx = F(b) - F(a) = F|_a^b$$

Calcule

1. $\int_a^b x^n dx$
2. $\int_a^b \cos(y) dy$
3. $\int_a^b \sin(t) dt$
4. $\int_a^b \exp(w) dw$
5. $\int_a^b \frac{1}{z} dz$ (onde $0 < a < b$ ou $a < b < 0$.)

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{d}{dx} F(x) dx = F(b) - F(a) = F|_a^b$$

Sol:

$$1. \int_a^b x^n dx = \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right) dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b$$

$$2. \int_a^b \cos(y) dy = \int_a^b \frac{d}{dy} \sin(y) dy = \sin(y) \Big|_a^b$$

$$3. \int_a^b \sin(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} (-\cos(t)) dt = (-\cos(t)) \Big|_a^b$$

$$4. \int_a^b \exp(w) dw = \int_a^b \frac{d}{dw} \exp(w) dw = \exp(w) \Big|_a^b$$

$$5. \int_a^b \frac{1}{z} dz = \int_a^b \frac{d}{dz} \ln(|z|) dz = \ln(|z|) \Big|_a^b \text{ onde } 0 < a < b \text{ ou } a < b < 0.$$

Lembre que pela Proposição 4

$$(a) \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

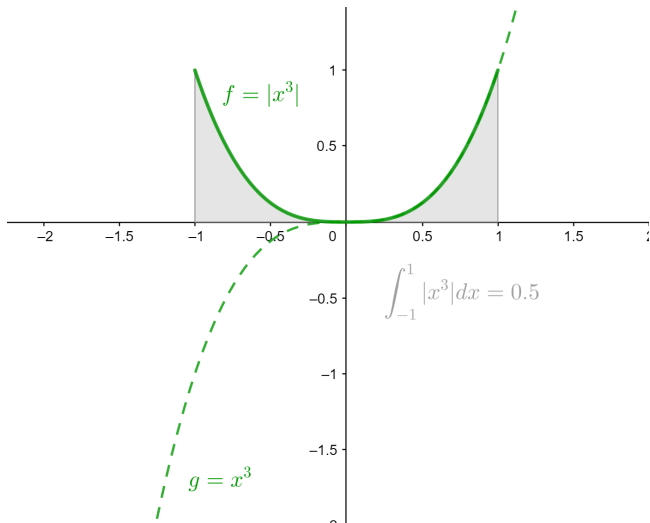
$$(b) \int_a^b f(x) \pm g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$(c) \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \text{ para } c \in [a, b].$$

Calcule:

$$1. \int_0^{\pi/2} 2 \cos(x) + x^3 dx$$

$$2. \int_{-1}^1 |x^3| dx$$



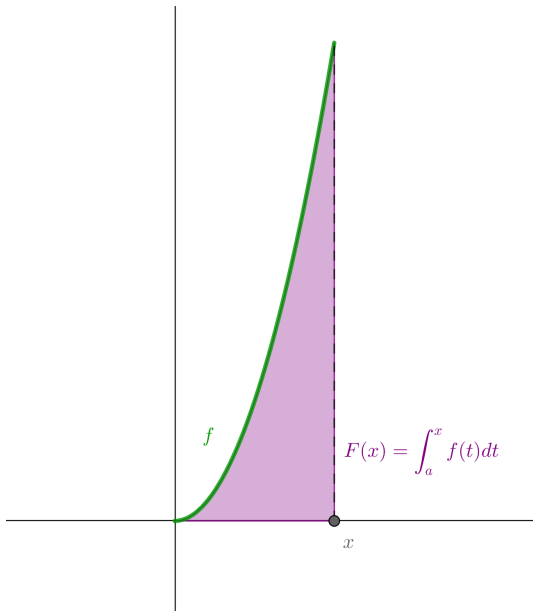
Função descrita em termos de integral: Dado uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua podemos definir a função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como $F(x) = \int_a^{(x)} f(t)dt$

Ex: Seja $f(x) = x^2$ considere:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t)dt \\ &= \int_0^x t^2 dt \\ &= \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

Neste exemplo temos:

$$\frac{d}{dx} \int_0^x f(t)dt = \frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^3}{3} \right) = x^2 = f(x)$$



Teorema 6 (Parte II)

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $F(x) = \int_a^{(x)} f(t) dt$ Então:

$$\frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx} \int_a^{(x)} f(t) dt = f(x)$$

Ex: $\frac{d}{dx} \int_0^x x^2 dt = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^3}{3} \right) = x^2$

Teorema fundamental

Parte I

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{d}{dx} F(x) dx = F(b) - F(a) = F \Big|_a^b$$

Parte II

$$\frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx} \int_a^{(x)} f(t) dt = f(x)$$

$$\frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx} \int_a^{(x)} f(t) dt = f(x)$$

Prob: Seja $F(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^x \cosh^{17}(t) dt$ Calcule $\frac{d}{dx} F(x)$

Prob: Seja $G(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{(x^3)} \cosh^{17}(t) dt$ Calcule $\frac{d}{dx} G(x)$

Note os problemas não pedem para resolver, calcular a integral. Eles pedem para derivar F e $G(x) = F(x^3)$

Integral indefinida

Definição: Dizemos que uma função F é **primitiva** de f se $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$.

Obs 1: O teorema parte II anterior afirma que toda função continua admite primitiva.

Obs 2: O teorema parte I afirma que $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x)dx = F|_a^b$.

Obs: 3 Uma função f contínua admite mais de uma primitiva. De fato se $F'(x) = f(x)$ então para $G(x) := F(x) + c$ temos $G'(x) = F'(x) = f(x)$ i.e., G é primitiva de f .

Obs: 4 Toda a primitiva de f podem ser escritas como $F(x) + c$ onde F é uma primitiva fixa. De fato se $G'(x) = f(x) = F'(x)$ então $(G - F)' = 0$ implica que $G - F = c$

Obs: 5 A operação **integração indefinida** constitui em achar **todas** as primitivas de f .

Obs: 6 A **notação** $\int f(x)dx$ indica a operação integração indefinida. Assim se $F' = f$ temos por Obs 3 e Obs 4 que $\int f(x)dx = F(x) + C$

Ex: $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$

Área entre gráficos

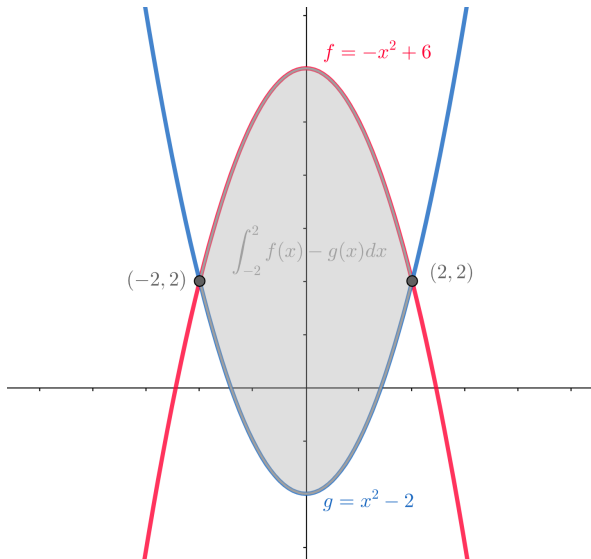
Proposição 7

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas tal que $g \leq f$.

Então a área entre os gráficos f e g (e entre $y = a$ e $y = b$) é dada por: $\int_a^b f(x) - g(x) dx$

Ex: Considere $f(x) = -x^2 + 6$ e $g(x) = x^2 - 2$. Determine a área entre os 2 gráficos. Primeiro determinamos a e b .

Para tanto igualamos $x^2 - 2 = -x^2 + 6$ e encontramos $(-2, 2)$ e $(2, 2)$ como pontos de interseção dos gráficos. Assim $a = -2$ e $b = 2$.



$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-2}^2 -x^2 + 6 - (x^2 - 2) dx \\
 &= \int_{-2}^2 -2x^2 + 8 dx \\
 &= \left. \frac{-2x^3}{3} + 8x \right|_{-2}^2 \\
 &= \frac{64}{3}
 \end{aligned}$$

Problema: Esboce a região A limitada pelas curvas $y = -x^2 + 4x$ e $y = x^2$ e encontre a área de A .

Problema: Esboce a região limitada pela parábola $y^2 = 2x + 6$ e pela reta $y = x - 1$, decida se é melhor integrar em relação a x ou y e calcule a área da região.