

MAT0146: Cálculo Diferencial e Integral I para Economia

B 4 : Derivada: L'Hospital e TVM

Prof. M Alexandrino (IME-USP)

2021

Alerta: Este é apenas um guia resumido de parte das transparências das aulas. Ele não substitui as aulas (onde existem discussões, resoluções de exercícios, figuras, etc) e não substitui a leitura da bibliografia recomendada. Figuras foram produzidas com o GeoGebra <http://www.geogebra.org>

(▶ 1) L'Hospital

(▶ 2) Teorema do valor Médio (TVM)

(▶ 3) Comentários: Expansão de Taylor.

L'Hospital

Teorema 1

Sejam f e g funções diferenciáveis em (a, b) onde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Assuma que $g'(x) \neq 0$ para $x \in (a, b)$ e que o limite $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ exista (inclusive podendo ser $\pm\infty$). Suponha que **um dos seguintes casos** ocorra.

1. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$.
2. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \pm\infty$

Então:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Obs: Resultado análogo vale para b^- .

Teo: L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ se } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \\ \text{ou} \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \end{cases}$$

Ex:(limite fundamental trigonométrico) Note que

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$. Então:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} &\stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} \sin(x)}{\frac{d}{dx} x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Obs: Estamos apenas ilustrado L'H. A demonstração via trigonometria do limite fundamental (encontrada nos livros) é relevante, pois o limite fundamental é utilizado na demonstração das derivadas das funções trigonométricas

Teo: L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ se } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \\ \text{ou} \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \end{cases}$$

Dem: Caso particular. Vamo supor que f e g são diferenciáveis em $x = a$ e que $f(a) = 0 = g(a)$. Temos por expansão de **Taylor de primeira ordem**:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + R_1$$

$$g(x) = g(a) + g'(a)(x - a) + R_2$$

onde $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_i}{(x-a)} = 0$. Visto que $f(a) = 0 = g(a)$ temos:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)(x - a) + R_1}{g'(a)(x - a) + R_2}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(a)(x-a) + R_1}{g'(a)(x-a) + R_2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a) \left(f'(a) + \frac{R_1}{(x-a)} \right)}{(x-a) \left(g'(a) + \frac{R_2}{(x-a)} \right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(f'(a) + \frac{R_1}{(x-a)} \right)}{\left(g'(a) + \frac{R_2}{(x-a)} \right)} \\
 &= \frac{f'(a)}{g'(a)}
 \end{aligned}$$

pois $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_i}{(x-a)} = 0$. $\square$

Teo: L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ se } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 & = & \lim_{x \rightarrow a} g(x) \\ \text{ou} \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty & = & \lim_{x \rightarrow a} g(x) \end{cases}$$

Prob: Calcule:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x^2}$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}$

Teo: L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ se } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 & = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \\ \text{ou} \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty & = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \end{cases}$$

Sol: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$

Observe que: $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0$. Assim:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} &\stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Teo: L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ se } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 & = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \\ \text{ou} \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty & = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \end{cases}$$

Sol: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x^2}.$

Observe que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ Assim:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x^2} &\stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{2x} \\ &\stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{2} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Teo: L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ se } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 & = & \lim_{x \rightarrow a} g(x) \\ \text{ou} \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty & = & \lim_{x \rightarrow a} g(x) \end{cases}$$

Sol: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}.$

Observe que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty$. Assim

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}} &\stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{-1}}{\frac{1}{3}x^{-2/3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^{-1}x^{2/3} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^{-1/3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Observação 2

Se $\lim_{x \rightarrow a} f = 0$ e $\lim_{x \rightarrow a} g = \pm\infty$ podemos usar L'hospital para calcular $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x)$. De fato:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{1/f(x)} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{(1/f)'(x)}$$

Ex:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{-1}} \\ &\stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{-1}}{-1x^{-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-1)x \\ &= 0 \end{aligned}$$

Prob: Calcule: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

Sol:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \exp(x \ln(x)) \\ &= \exp\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x)\right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \exp(0) \\ &= 1\end{aligned}$$

onde na igualdade (*) utilizamos Observação 2.

Teorema do valor Médio (TVM)

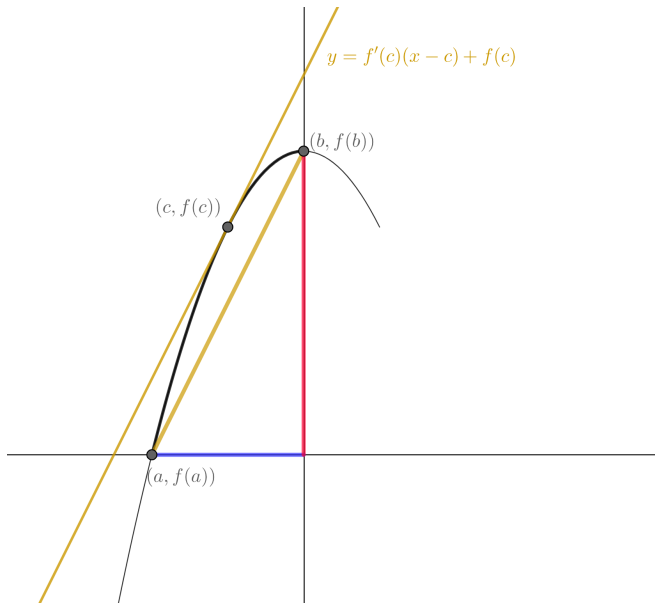
Teorema 3 (TVM)

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e diferenciável em (a, b) .
Então existe um $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{d}{dx}f(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ex: $f : [-2, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ onde $f(x) = -x^2 + 4$. Note que $f'(x) = -2x$
e para $c = -1$ temos

$$\frac{d}{dx}f(-1) = 2 = \frac{4 - 0}{0 - (-2)} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Se $f(a) = 0 = f(b)$ e f não é identicamente nula, TVM significa que existe máximo ou mínimo no interior (o que já foi visto em aulas anteriores). O **TVM** é útil em várias demonstrações. Ele será usado na prova do **Teorema Fundamental do Cálculo**. Também permite redemonstrar resultados já vistos. A prova do L'Hospital (casos gerais) segue do **TVM generalizado** a seguir:

Teorema 4

Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas e diferenciáveis em (a, b) . Então existe um $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Comentários: Expansão de Taylor

Se $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ é suave e $p \in (a, b)$ então:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + f'(p)(x - p) \\ &+ R_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + f'(p)(x - p) \\ &+ \frac{1}{2}f''(p)(x - p)^2 + R_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + f'(p)(x - p) \\ &+ \frac{1}{2!}f''(p)(x - p)^2 \\ &+ \frac{1}{3!}f'''(p)(x - p)^3 + R_3 \end{aligned}$$

onde $\lim_{x \rightarrow p} \frac{R_n}{(x-p)^n} = 0$