

MAT0146: Cálculo Diferencial e Integral I para Economia

Guia Resumido 1: Limites

Prof. M Alexandrino (IME-USP)

2021

Alerta: Este é apenas um guia resumido de parte das transparências das aulas. Ele não substitui as aulas (onde existem discussões, resoluções de exercícios, figuras, etc) e não substitui a leitura da bibliografia recomendada. O GeoGebra <http://www.geogebra.org> (aqui utilizado) é uma ótima ferramenta, porém o aluno deve também tentar fazer as figuras a mão para compreendê-las melhor.

Objetivo:

- (▶ 1) Motivação: uma discussão intuitiva
- (▶ 2) Formalizações: definições
- (▶ 3) Funções contínuas
- (▶ 4) Técnicas para limites

Motivação: Para onde *tende* $f(x)$ quando x tende a p ?

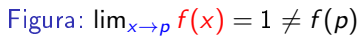
Exemplo 1

Seja $p = 0$ e função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

n	x_n	$y_n = f(x_n)$
1	1	$1 + 1$
2	$1/2$	$1 + 1/4$
3	$1/3$	$1 + 1/9$
4	$1/4$	$1 + 1/16$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Obs Uma única tabela sugere, **mas não determina completamente** o fenômeno *tender para* (usaremos tabelas apenas para criar intuição, mas limites serão calculados com técnicas).



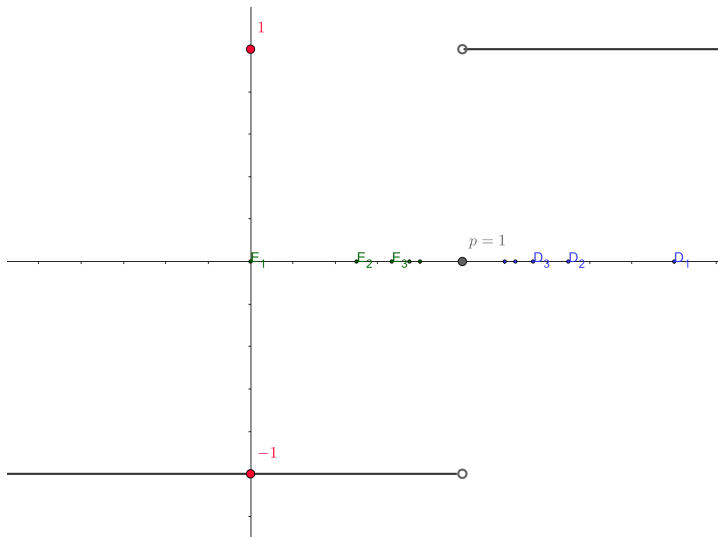
Exemplo 2

Sejam $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$ e $p = 1$

n	e_n	$y_n = f(x_n)$
1	$1-1$	-1
2	$1-1/2$	-1
3	$1-1/3$	-1
4	$1-1/4$	-1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

n	d_n	$y_n = f(x_n)$
1	$1+1$	1
2	$1+1/2$	1
3	$1+1/3$	1
4	$1+1/4$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Dado $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$ e $p = 1$ observamos que $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ não existe, porém existe **limite lateral a direita**, $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = 1$ e **limite lateral a esquerda**, $\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = -1$



Exemplo 3

Sejam $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + 2$ e considere 2 situações:

► $p = 1$

► $p = +\infty$.

n	x_n	$y_n = f(x_n)$
1	$1 + 1$	$2 + 1$
2	$1 + 1/2$	$2 + 4$
3	$1 + 1/3$	$2 + 9$
4	$1 + 1/4$	$2 + 16$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

n	x_n	$y_n = f(x_n)$
1	$1 + 1$	$2 + 1$
2	$1 + 2$	$2 + 1/4$
3	$1 + 3$	$2 + 1/9$
4	$1 + 4$	$2 + 1/16$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Dado $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + 2$ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

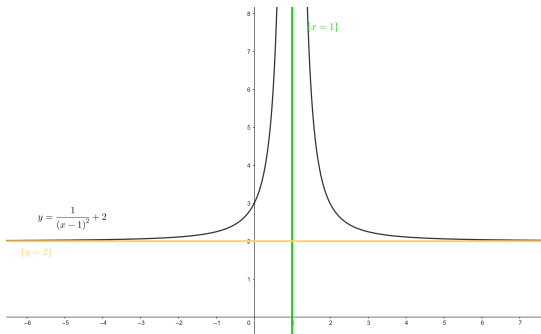


Figura: $\{y = 2\}$ é a assintota horizontal e $\{x = 1\}$ é assintota vertical

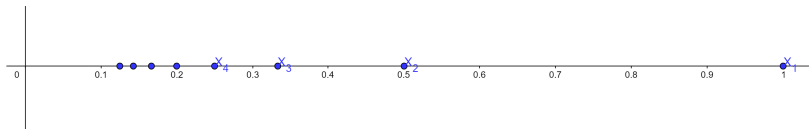
Formalizações: definições

Definição 4

Uma sequência é uma função

$$X : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

n	x_n
1	1
2	$1/2$
3	$1/3$
4	$1/4$
$\vdots$	$\vdots$



Definição 5

Dizemos que uma sequência $\{x_n\}$ **converge** para um ponto p (ou seja $x_n \rightarrow p$) se, para todo $\epsilon > 0$, existe um N_0 tal que $\forall n > N_0$ temos $|x_n - p| < \epsilon$.

Definição 6 (limite)

Dizemos que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ se para toda sequência $x_n \rightarrow p$ tivermos que $f(x_n) \rightarrow L$

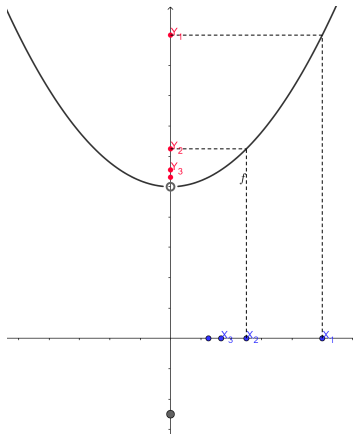


Figura: Para $f(x) = x^2 + 1$, com $x \neq 0$ e $f(x) = -\frac{1}{2}$ para $x = 0$ temos $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \neq f(p)$

Definição 7 (equivalente de limite)

$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ se para todo $\epsilon > 0$ existe um δ tal que para todo $x \in (p - \delta, p + \delta)$ temos $f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$

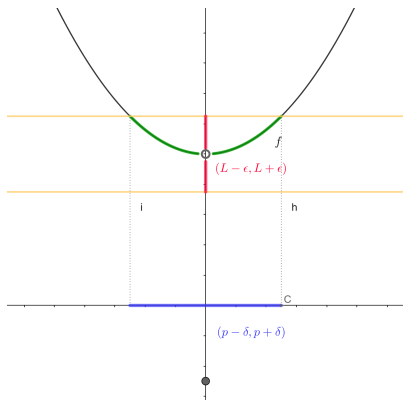


Figura: Para $f(x) = x^2 + 1$, com $x \neq 0$ e $f(x) = -\frac{1}{2}$ para $x = 0$ temos $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \neq f(p)$

Definição 8 (limite lateral a direita)

Dizemos que $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = L$ se para toda sequência $x_n \rightarrow p$ com $x_n > p$ tivermos que $f(x_n) \rightarrow L$

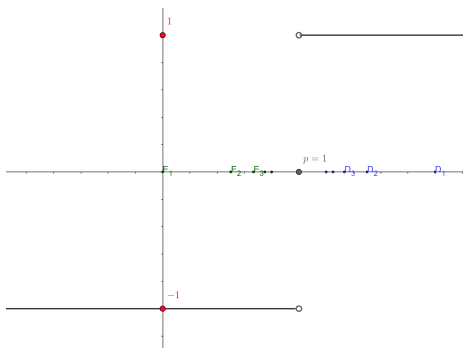


Figura: para $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$ e $p = 1$ temos $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$

Obs: Vale definição análoga para $\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = L$

Definição 9

Dizemos que $x_n \rightarrow +\infty$ se para todo $R > 0$ existe um N_0 tal que se $n > N_0$ então $x_n > R$.

Definição 10

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = L$ se para toda sequência $x_n \rightarrow +\infty$ tivermos $f(x_n) \rightarrow L$. Neste caso a $\{y = L\}$ é assintota horizontal

Definição 11

$\lim_{x \rightarrow p} f = +\infty$ se para toda sequência $x_n \rightarrow p$ tivermos $f(x_n) \rightarrow +\infty$. Neste caso $\{x = p\}$ é assintota vertical

Obs: Definições análogas valem para $x_n \rightarrow -\infty$, para $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = L$ e $\lim_{x \rightarrow p} f = -\infty$.

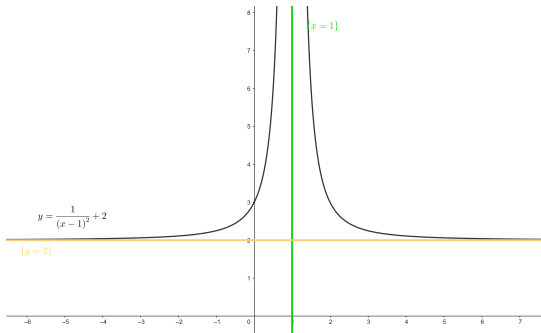


Figura: Seja $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + 2$. Visto que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ temos que: $\{x = 1\}$ é **assintota vertical**. Visto que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, temos que $\{y = 2\}$ é **a assintota horizontal**. Note que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ então $\{y = 2\}$ é única assintota horizontal.

Prob: Usando a definição demonstre que:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
3. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Funções contínuas

Definição 12

Dizemos que uma função $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função **contínua** em $p \in I$ se

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$$

Note que:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \neq 0 \\ -0.5 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

não é uma função contínua.

Proposição 13

As seguintes funções são contínuas:

1. $x \rightarrow x^n$
2. $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$
3. $x \rightarrow \text{sen}(x)$
4. $x \rightarrow \text{cos}(x)$

Proposição 14

Soma, subtração, produto, quociente (onde estiver definidas) e compostas de funções contínuas são contínuas.

Exemplo 15

1. $f(x) = 7x^2 + \text{cos}(x)$
2. $f(x) = \text{sen}(x^2)$

são funções contínuas.

Teorema 16

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) < f(b)$ e c é um número tal que $f(a) < c < f(b)$ então existe um ponto $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x) = c$.

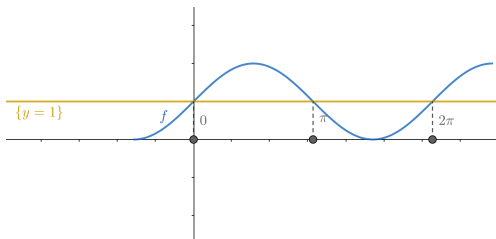


Figura: Seja $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \sin(x) + 1$. Para $c = 1$ existem 3 pontos x_i tal que $f(x_i) = 1$

Prob: Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ onde $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{se } x \neq 0 \\ -1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Solução:

Observe que $h(x) = x^2 + 4$ é uma função contínua. Definindo $I = \mathbb{R} - \{0\}$ podemos observar que a restrição $f|_I$ coincide com $h|_I$. Assim $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = h(0) = 4$.
Visto que $f(0) = -1$ também podemos observar que f não é contínuo em $x = 0$.

Prob: Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}$

Solução:

Seja $h(x) = \frac{1}{x+2}$ (note que seu domínio maximal é $\mathbb{R} - \{-2\}$).
Defina $I = \mathbb{R} - \{2, -2\}$. Observe que $h|_I = f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ e que h é contínua em $x = 2$. Logo
 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = h(2) = 1/4$.

Técnicas para limites

Proposição 17

Sejam $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções que tenham limites (reais) em p . Então:

1. $\lim_{x \rightarrow p}(f + g) = \lim_{x \rightarrow p} f + \lim_{x \rightarrow p} g$
2. $\lim_{x \rightarrow p}(f - g) = \lim_{x \rightarrow p} f - \lim_{x \rightarrow p} g$
3. $\lim_{x \rightarrow p}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow p} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow p} g(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow p} f(x)}{\lim_{x \rightarrow p} g(x)}$ quando $\lim_{x \rightarrow p} g(x) \neq 0$

O resultado também funciona para $x \rightarrow p^+$ e $x \rightarrow p^-$ (limites laterais) e para $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$

Obs: A proposição acima **não lida** com situações **indefinidas** tais como $+\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ ou $0 \times \infty$ (que serão abordadas com outras técnicas).

Proposição 18

Sejam $h : S \rightarrow T$ e $g : T \rightarrow \mathbb{R}$ funções. Suponha que $\lim_{x \rightarrow p} h(x) = b \in T$ e que g é função contínua. Então $\lim_{x \rightarrow p} g(h(x)) = g(\lim_{x \rightarrow p} h(x))$

Ex:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \arcsen\left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\right) &= \arcsen\left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\right) \\ &= \arcsen\left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + \sqrt{x}}\right) \\ &= \arcsen\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

Proposição 19

Sejam $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções com $f \leq g$. Suponha que os limites $\lim_{x \rightarrow p} f$ e $\lim_{x \rightarrow p} g$ existem. Então $\lim_{x \rightarrow p} f \leq \lim_{x \rightarrow p} g$.

Teorema 20 (Confronto ou sandwich)

Sejam $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções com $g \leq f \leq h$ tais que $\lim_{x \rightarrow p} g$ e $\lim_{x \rightarrow p} h$ existem e $\lim_{x \rightarrow p} g = L = \lim_{x \rightarrow p} h$. Então $\lim_{x \rightarrow p} f = L$.

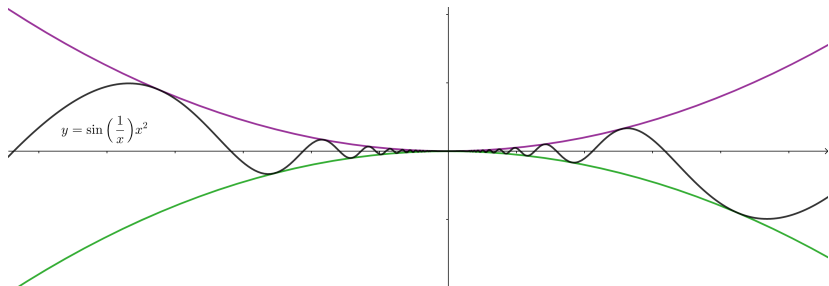


Figura: Ex: $h(x) = x^2$, $g(x) = -x^2$, $f(x) = \sin(\frac{1}{x})x^2$, $L = 0$ e $p = 0$

Corolário 21

Suponha que $\lim_{x \rightarrow p} f_1(x) = 0$ e $|f_2(x)| < k$ próximo a p (limitada). Então $\lim_{x \rightarrow p} f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$

Recordemos que $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = L$ se para toda sequencia $x_n \rightarrow p$ com $x_n > p$ tivermos que $f(x_n) \rightarrow L$

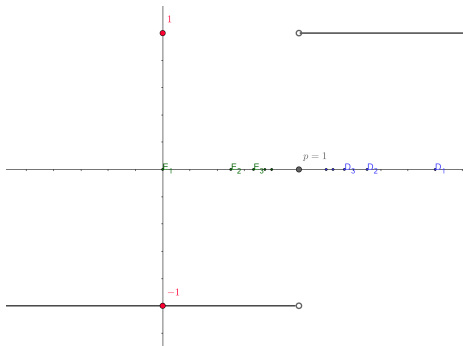


Figura: para $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$ e $p = 1$ temos $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$

Teorema 22

$\lim_{x \rightarrow p} f = L$ se e somente se $\lim_{x \rightarrow p^+} f = L = \lim_{x \rightarrow p^-} f$

Prob Seja $F(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}$

1. Calcule os limites $\lim_{x \rightarrow 1^+} F$ e $\lim_{x \rightarrow 1^-} F$
2. Existe $\lim_{x \rightarrow 1} F(x)$?

Soluções

Observe primeiro que:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{(x-1)} & \text{se } 1 < x \\ \frac{x^2-1}{-(x-1)} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Assim: $\lim_{x \rightarrow 1^+} F = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2$ e

$\lim_{x \rightarrow 1^-} F = \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x+1) = -2$ Como os limites laterais não coincidem não existe limite.

Prob: Determine c para que a função $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ possa ser uma função tributária (e.g, Carne Leão)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ x + c & \text{se } 2 < x \end{cases}$$

Prob: Uma refinaria de petróleo possui 5 torres de destilação e opera tantas torres quantas forem necessárias para processar as matérias-primas disponíveis. As despesas gerais para operar cada torre de destilação (operador, manutenção, etc) são de R\$ 100,00 por semana. Além disto, o custo das matérias-primas é de R\$ 0,40 por galão de petróleo refinado. Cada torre de destilação pode processar matérias-primas para produzir 10.000 galões de petróleo por semana. Se y for o custo de operação e x a quantidade em galões de petróleo refinado, a função custo pode ser algebricamente representada pela equação

$$f(x) = 100\left(\left[\frac{x}{10000}\right] + 1\right) + 0,4x$$

onde $[t]$ denota o maior inteiro menor do que t (por exemplo $[2] = 1$, $[2, 3] = 2$ etc). Calcule os limites laterais a esquerda e a direita nos pontos $x = 10000$, $x = 20000$, $x = 30000$, $x = 40000$ e $x = 50000$ e diga se a função f é contínua ou descontínua nestes pontos.

Recordemos que: $\lim_{x \rightarrow p} f = +\infty$ se para toda sequência $x_n \rightarrow p$ tivermos $f(x_n) \rightarrow +\infty$. Neste caso $\{x = p\}$ é assintota vertical

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = L$ se para toda sequência $x_n \rightarrow +\infty$ tivermos $f(x_n) \rightarrow L$. Neste caso a $\{y = L\}$ é assintota horizontal

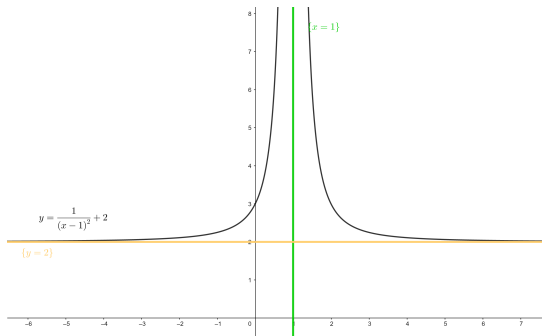


Figura: Seja $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + 2$. Visto que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ temos que: $\{x = 1\}$ é assintota vertical. Visto que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, temos que $\{y = 2\}$ é a assintota horizontal

Prob Calcule os limites e assíntotas das funções abaixo:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-3} + 4$

2. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} + 4$

3. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} + 4$

Limites podem ser utilizados para comparar crescimentos de certas funções (e.g, polinomiais) quando $x \rightarrow \infty$ ou para comparar quão rápido estas funções vão a zero quando $x \rightarrow 0$.

Prob Calcule:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x}{5x^3 + 17x^2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x}{5x^2 + 17x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x}{5x^3 + 17x}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2 + x}{5x^3 + 17x}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2 + x}{5x^3 + 17x^2}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 4x^3$$

Soluções

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x}{5x^3 + 17x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3(2 - 1/x^2)}{x^3(5 + 17/x)} = \frac{2}{5} \text{ visto que}$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - 1/x^2) = 2 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} (5 + 17/x) = 5$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x}{5x^2 + 17x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(2x - 1/x)}{x^2(5 + 17/x)} = +\infty \text{ visto que}$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1/x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} (5 + 17/x) = 5$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x}{5x^3 + 17x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(2 + 1/x)}{x^2(5x + 17/x)} = 0 \text{ visto que}$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + 1/x) = 2 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} (5x + 17/x) = +\infty$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2+x}{5x^3+17x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(2x+1)}{x(5x^2+17)} = \frac{1}{17} \text{ visto que}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (2x+1) = 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^-} (5x^2+17) = 17$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2+x}{5x^3+17x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2(2+1/x)}{x^2(5x+17)} = -\infty \text{ visto que}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (2+1/x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^-} (5x+17) = 17$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 4x^3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3(1/x - 4) = -\infty \text{ visto que}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} (1/x - 4) = -4$$