

MAT0146: Cálculo Diferencial e Integral I para Economia

Guia Resumido: Recordação

Prof. M Alexandrino (IME-USP)

2021

Alerta: Este é apenas um guia resumido de parte das transparências das aulas. Ele não substitui as aulas (onde existem discussões, resoluções de exercícios, figuras, etc) e não substitui a leitura da bibliografia recomendada. O GeoGebra <http://www.geogebra.org> (aqui utilizado) é uma ótima ferramenta, porém o aluno deve também tentar fazer as figuras a mão para compreendê-las melhor.

Conceitos básicos

Sejam A, B conjuntos. Uma **função** $f : A \rightarrow B$ é uma correspondência que a cada elemento $x \in A$ associa um único elemento $f(x) \in B$.

A é chamado **domínio**, B é chamado contra domínio (ou conjunto chegada) e $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$ é chamado **imagem**.

Uma função $f : A \rightarrow B$ é chamada **injetora** se $f(x) = f(\tilde{x}) \Rightarrow x = \tilde{x}$

Uma função $f : A \rightarrow B$ é chamada **sobrejetora** se $\forall y \in B$ existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Uma função $f : A \rightarrow B$ é chamada **bijetora** se é sobrejetora e injetora. Neste caso existe uma **função inversa** $f^{-1} : B \rightarrow A$ ou seja a **compostas** destas funções são identidade:

$$f^{-1}(f(x)) = x, f(f^{-1}(y)) = y$$

Estaremos interessados no caso onde A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}$, em particular em **intervalos**:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ função. Então o conjunto

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x), x \in I\}$$

é chamado **gráfico**

Ex: Sejam $f : [0, 2] \rightarrow [0, 4]$ definida como $f(x) = x^2$ e $h : [0, 4] \rightarrow [0, 2]$ definida como $h(x) = \sqrt{x}$

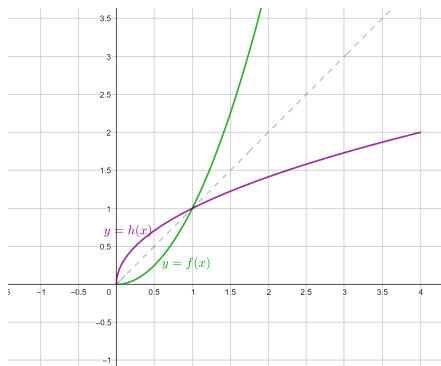
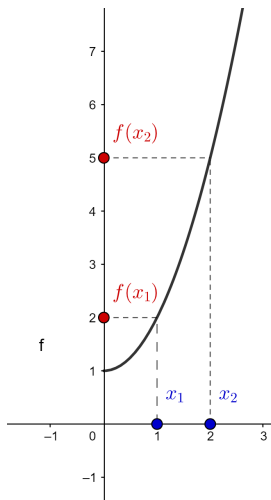


Figura: gráficos das funções f e h . Note que tais funções são inversas uma da outra, i.e., $h \circ f(x) = x$ e $f \circ h(y) = y$

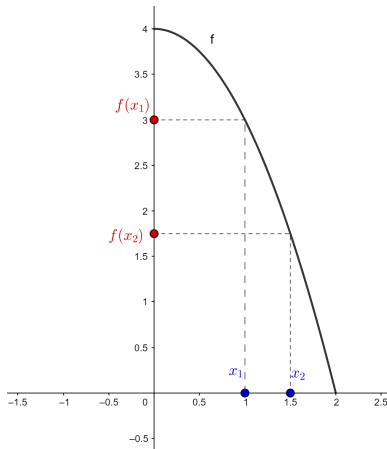
Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é **crescente** (resp. estritamente crescente) se $f(x_1) \leq f(x_2)$ (resp. $f(x_1) < f(x_2)$) para todo $x_1 < x_2$.

Ex: Função oferta clássica: $f : [0, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (quantidade X preço)



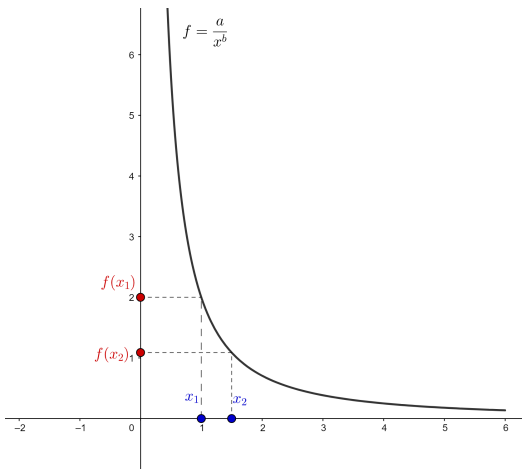
Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é **decrésciente** (resp. estritamente decrésciente) se $f(x_1) \geq f(x_2)$ (resp. $f(x_1) > f(x_2)$) para todo $x_1 < x_2$.

Ex:(Função demanda clássica) $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (quantidade X preço)



Ex:(lei de Pareto da distribuição de renda) Seja

$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ função definida como $f(x) = \frac{a}{x^b}$. O valor $f(x)$ mediria o número de indivíduos de uma dada população de tamanho a com renda acima de x . A constante b (parâmetro da população) em geral é tomada próximo a 1.5



Equação da reta

$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\}$ é chamada **reta** e $ax + by = c$ é chamada **equação da reta**. Uma reta $x = c$ é chamada **reta vertical** e uma reta $y = c$ é chamada **reta horizontal**.

Dado uma reta não vertical chamamos $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ **inclinação da reta**. Em particular $y = m(x - x_1) + y_1$.

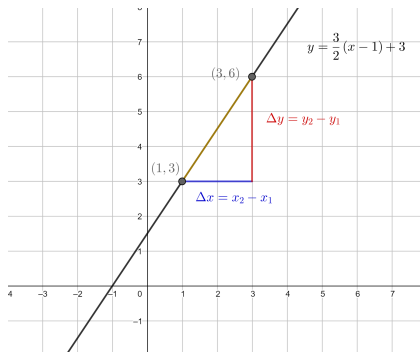


Figura: reta **única** ligando $(1, 3)$ a $(3, 6)$

Obs Por 2 pontos distintos em $\mathbb{R}^2$ passa uma única reta.

Prob: Quando o preço for de R\$50,00 o fabricante consegue ofertar 50 produtos, ao passo que quando o produto custar R\$75,00 ele consegue ofertar 100 produtos. Supondo que a função oferta é modelada por uma reta, determine a função oferta f .

Prob: Considere $f(q) = \frac{3}{2}q + 1$ a função **função oferta** e $h(q) = 10 - 2q$ a função **demanda**. Determine o **ponto de equilíbrio** (i.e, a interseção do gráfico da **função oferta** com a **demanda**).

Prob: Quando o preço for de R\$50,00 o fabricante consegue ofertar 50 produtos, ao passo que quando o produto custar R\$75,00 ele consegue ofertar 100 produtos. Supondo que a função oferta é modelada por uma reta, determine a função oferta f .

solução Sejam $(x_1, y_1) = (50, 50)$ e $(x_2, y_2) = (100, 75)$. Então:
 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{75 - 50}{100 - 50} = \frac{1}{2}$ Visto que $y = m(x - x_1) + y_1$ temos que
 $y = \frac{1}{2}(x - 50) + 50$

Prob: Considere $f(q) = \frac{3}{2}q + 1$ a função **função oferta** e $h(q) = 10 - 2q$ a função **demanda**. Determine o **ponto de equilíbrio** (i.e, a interseção do gráfico da **função oferta** com a **demanda**).

Solução: $\frac{3}{2}q_0 + 1 = p_0 = 10 - 2q_0$. Assim $q_0 = \frac{18}{7}$ e substituindo em (qualquer uma) das equações temos $p_0 = \frac{34}{7}$.

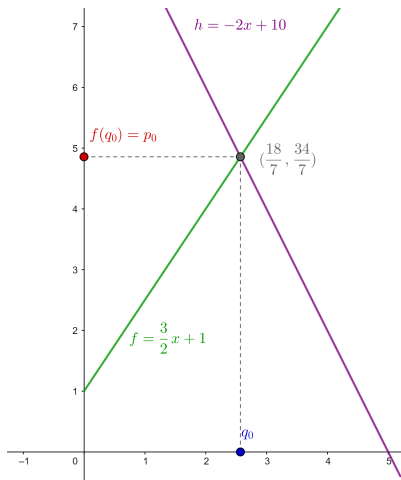
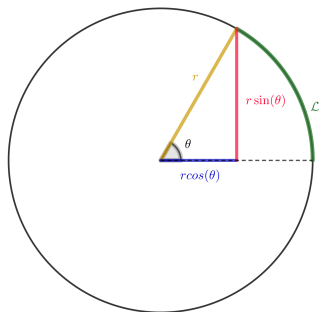


Figura: $f(q) = \frac{3}{2}q + 1$ a função oferta, $h(q) = 10 - 2q$ a função demanda e $(q_0, p_0) = (\frac{18}{7}, \frac{34}{7})$ ponto de equilíbrio.

Funções trigonométricas

Dado um círculo de **raio** r o ângulo θ em **radianos** é tal que o comprimento do setor circular $\mathcal{L}$ definido pelo ângulo θ é $\mathcal{L} = \theta \times r$. Em particular o comprimento do círculo é $2\pi r$. As funções $\cos(\theta)$ e $\sin(\theta)$ são definidas (para $0 \leq \theta \leq \pi/2$) como o **cateto adjacente** ao ângulo e o **cateto oposto** ao ângulo de um triângulo retângulo com hipotenusa de tamanho 1, respectivamente; (sinal é dado pelo círculo trigonométrico). A **função tangente** é definida como $\tan(x) = \operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.



Utilizando triangulo equilátero a seguir concluimos:

$$\sin(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

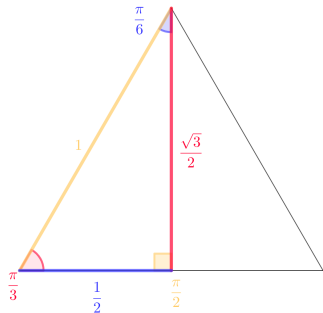
$$\cos(\pi/3) = \frac{1}{2}$$

$$\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$$

$$\sin(\pi/6) = \frac{1}{2}$$

$$\cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

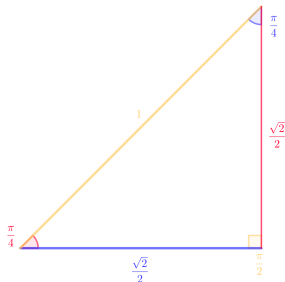


Utilizando triângulo retângulo isósceles a seguir concluímos:

$$\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(\pi/4) = 1$$



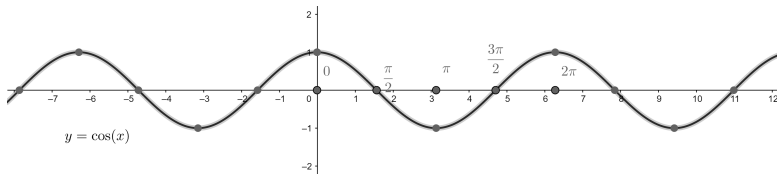


Figura: Gráfico da função $f(x) = \cos(x)$

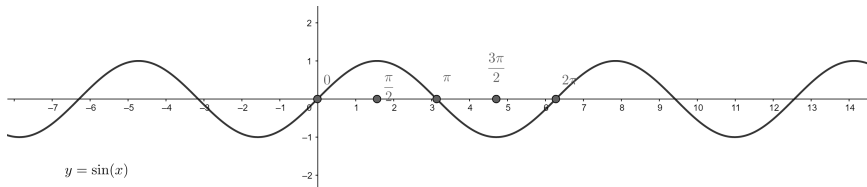


Figura: Gráfico da função $f(x) = \sin(x)$

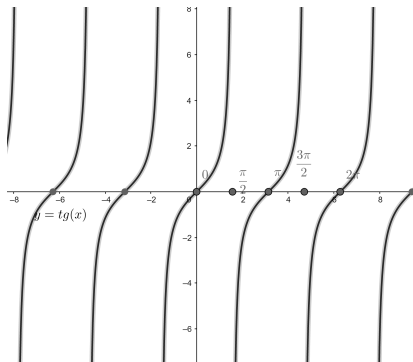
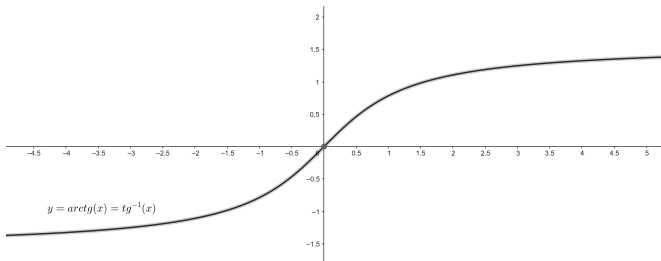
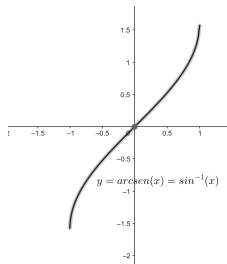
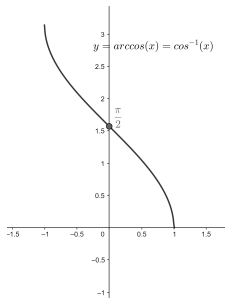


Figura: Gráfico da função $f(x) = \tan(x)$

Gráficos das funções inversas:



Algumas igualdades trigonométricas:

$$1 = \sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2$$

$$\cos(A + B) = \cos(A) \cos(B) - \sin(A) \sin(B)$$

$$\sin(A + B) = \sin(A) \cos(B) + \sin(B) \cos(A)$$

Prob

- (1) Determine $\cos^2(\theta)$ em termos de $\cos(2\theta)$
- (2) Determine $\sin^2(\theta)$ em termos de $\cos(2\theta)$
- (3) Relacione $\sec^2(\theta) = \left(\frac{1}{\cos(\theta)}\right)^2$ com $\tan^2(\theta)$

Soluções

$$\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

$$\sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

$$\sec^2(\theta) = 1 + \tan^2(\theta)$$

Obs: As igualdades acima (deduzidas das básicas anteriores) serão importantes por exemplo no processo de integração.

Polinômios, deslocamentos, reflexão e módulo

Dizemos que uma função f é um polinômio de grau n se

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Em particular para $f(x) = ax^2 + bx + c$ podemos determinar as raízes reais (quando estas existem) pela formula $x_0 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

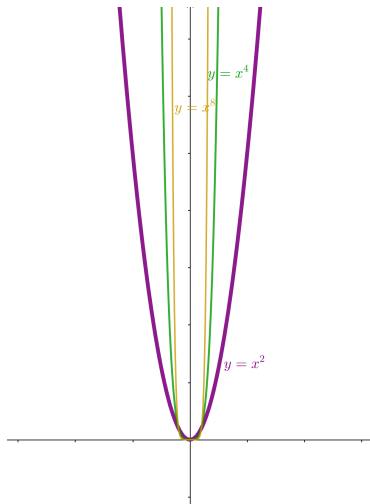


Figura: Gráfico das funções pares: $f = x^2$, $f = x^4$, $f = x^8$

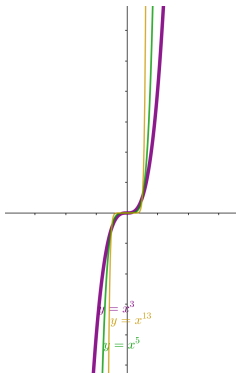
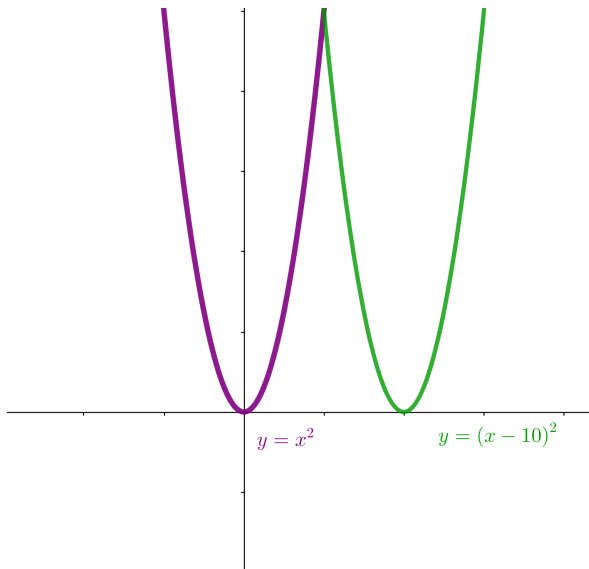
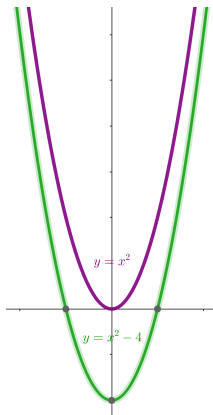


Figura: Gráfico das funções ímpares: $f = x^3$, $f = x^5$, $f = x^{13}$

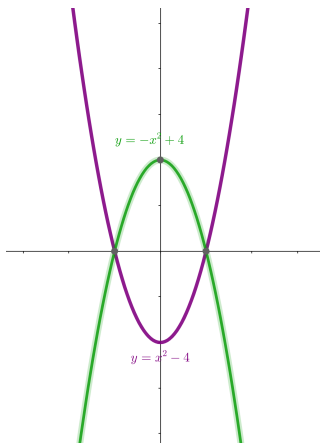
Dado $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ então o gráfico de $h(x) = f(x - a)$ é o gráfico de f deslocado (horizontalmente) de a



Dado $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ então o gráfico de $h(x) = f(x) + a$ é o gráfico de f deslocado (verticalmente) de a



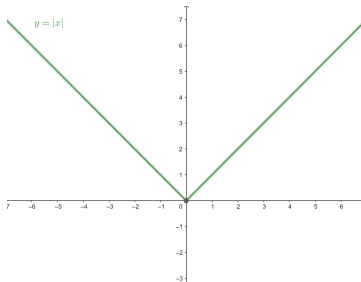
Dado $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ então o gráfico de $h(x) = -f(x)$ é o gráfico de f refletido pelo eixo x .



A **função módulo** $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ é definida como $|x| = \sqrt{x^2}$
ou de forma equivalente: $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Obs: $|a - b|$ mede a distância de a e b na reta.

Prop: $|a + b| \leq |a| + |b|$.



Prob: Resolva $|x - 3| + |x + 2| < 11$

solução

Primeiro deve-se compreender melhor as funções compostas:

$$f(x) = |x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{se } 3 \leq x \\ -x + 3 & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

$$g(x) = |x + 2| = \begin{cases} x + 2 & \text{se } -2 \leq x \\ -x - 2 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

Assim a função $h = f + g$ é

$$h(x) = |x - 3| + |x + 2| = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } 3 \leq x \\ 5 & \text{se } -2 \leq x < 3 \\ -2x + 1 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

- ▶ quando $x \in (-\infty, -2)$ então $h(x) < 11$ é satisfeita para $x \in (-5, -2)$
- ▶ quando $x \in [-2, 3)$ então $h(x) < 11$ é satisfeita para $x \in [-2, 3)$.
- ▶ quando $x \in [3, +\infty)$ então $h(x) < 11$ é satisfeita para $x \in [3, 6)$.

Juntando os intervalos temos que o resultado é $(-5, 6)$.

