MAT0147 - Cálculo Diferencial e Integral II-FEA

Teste 1 - 16/09/2022 GABARITO

O test BONUS foi baseada na primeira lista de exercícios e Guia Resumido 1. Em particular compare:

- Questão 1 com Prob depois da Def 13, Sec 3 Guia 1,
- Questão 2 com Exemplo 7 Sec 2 Guia 1,
- Questão 3 com Problema 1.14, 1.15, 1.16 da Lista 1.

Questão 1 (1,0pt)**.** Seja $v = (3, 4) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Determine o vetor w com mesma direção e sentido do vetor v (i.e., $w = \lambda v$ para número positivo $\lambda > 0$) tal que $\|w\| = 1$.

(b) Determine um vetor u ortogonal a w com $\|u\| = 1$.

Respostas:

(a) $w = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

(b) $u = (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$

Questão 2 (1,0 pt)**.** Consideremos o modelo onde x_1 é número de indivíduos com trabalho, x_2 numero indivíduos sem trabalho. Sejam $q = \frac{2}{3}$ probabilidade do individuo (com trabalho) manter o trabalho depois de uma semana, $p = \frac{1}{3}$ probabilidade do individuo (sem trabalho) achar um trabalho depois de uma semana. Definamos $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$T(x_1, x_2) = \big(\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2, \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2\big)$$

(a) Determine a representação matricial $[T]$ de T na base canônica, ou seja a matriz $A = [T]$ tal que $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ para $x = x_1e_1 + x_2e_2$.

(b) Determine a aplicação linear $T^2 = T \circ T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, i.e., a aplicação que descrever empregabilidade após duas semanas.

Respostas:

(a) $[T] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

(b) $T^2 = (\frac{5}{9}x_1 + \frac{4}{9}x_2, \frac{4}{9}x_1 + \frac{5}{9}x_2)$

Questão 3 (2,0pt)**.** Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida como $T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 2x_1 + x_2, x_1 + x_2)$

(a) Determine a representação matricial $[T]$ de T na base canônica, ou seja a matriz $A = [T]$ tal que $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ para $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$

(b) Determine a equação Cartesiana do plano que é a imagem de T.

(c) Dado $p = (1, 1, 1)$ determine a projeção ortogonal de p no plano que é a imagem de T.

(d) Determine a distância do ponto p ao plano dado pela imagem de T.

Respostas:

(a) $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $-x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$

(c) $\pi(p) = (\frac{12}{11}, \frac{12}{11}, \frac{8}{11})$

(d) $d = \frac{\sqrt{11}}{11}$