

## MAT0147 - Cálculo Diferencial e Integral II

GABARITO SUB - 14/12/22

**Questão 1** (2,5 pt). Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear  $T(\vec{x}) = A\vec{x}$  onde  $A$  é a matriz definida como:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a, 1.0 pt) Determine a equação Cartesiana do plano que é a imagem de  $T$ , i.e., o espaço coluna de  $A$  (sub espaço gerado pelas colunas de  $A$ ).
- (b, 1.0 pt) Dado  $p = (1, 1, 2)$  determine a projeção ortogonal de  $p$  no plano que é a imagem de  $T$ .
- (c, 0.5 pt) Determine a distância do ponto  $p$  ao plano dado pela imagem de  $T$ .

### Respostas:

(a)  $-2x - y + 3z = 0$

(b)  $\pi(p) = p - \langle p, \frac{N}{\|N\|} \rangle \frac{N}{\|N\|} = (\frac{20}{14}, \frac{17}{14}, \frac{19}{14})$

(c)  $d = \frac{3\sqrt{14}}{14}$

**Questão 2** (2,5 pt). Seja  $f(x, y) = \ln(4x^2 + 4y^2)$ .

(a, 0.5 pt) Esboce o gráfico de  $f$ .

(b, 1.0 pt) Determine o vetor  $v \in \mathbb{R}^2$  com  $\|v\| = 1$  tal que a derivada direcional de  $f$  na direção de  $v$  no ponto  $q = (\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$  assumam maior valor e determine tal valor.

(c, 1.0 pt ) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, 0)$

**Respostas:**

(b)  $v = \frac{\nabla f(q)}{\|\nabla f(q)\|} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  e maior valor  $\frac{\partial f}{\partial v}(q) = \|\nabla f(q)\| = 4$

(c)  $-2(x - \frac{1}{4}) - 2\sqrt{3}(y - \frac{\sqrt{3}}{4}) + z = 0$

**Questão 3** (2,5 pt). Seja  $f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 3x^2y + 7$ .

(a, 1.0 pt) Determine os pontos críticos de  $f$ .

(b, 1.5 pt) Classifique os pontos críticos de  $f$  em pontos de sela, máximos e/ou mínimos locais.

**Respostas:**

(a)  $(0, 0); (\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}); (-\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3})$

(b)  $(0, 0)$  é ponto de mínimo local,  $(\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}); (-\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3})$  são pontos de sela.

**Questão 4** (2,5 pt). Seja  $U(x, y, z) = x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}z^{\frac{2}{4}}$  a função utilidade onde  $x, y, z$  representam o número de unidades das mercadorias  $A, B, C$  consumidas mensalmente por uma pessoa. Sejam  $R\$ 4,00$ ,  $R\$ 5,00$  e  $R\$ 8,00$  os preços unitários de  $A, B, C$  respectivamente. Suponha que as despesas para mercadorias sejam  $R\$ 100,00$ . Quantas unidades de cada mercadoria de cada tipo devem ser adquiridas para maximizar a utilidade?

**Respostas:**  $x = \frac{25}{4}, y = 5, z = \frac{25}{4}$