

MAT 0147: Cálculo II Economia (noturno)

Guia 3: Derivada de funções de varias variáveis

Prof. M Alexandrino (IME-USP)

2022

Alerta: Este é apenas um guia resumido de parte das transparências das aulas. Ele não substitui as aulas (onde existem discussões, resoluções de exercícios, figuras, etc) e não substitui a leitura da bibliografia recomendada. Figuras foram produzidas com o GeoGebra <http://www.geogebra.org>

Motivação: Discutir derivada de funções, gradientes de funções, regra da cadeia, suas interpretações geométricas e suas várias aplicações (e.g otimização da função utilidade de Cobb-Douglas, lei de Walras etc).

Objetivo:

- (▶ 1) Derivada parcial
- (▶ 2) Aplicação derivada
- (▶ 3) Plano tangente
- (▶ 4) Derivada de aplicações
- (▶ 5) Campos de vetores e gradientes
- (▶ 6) Regra da Cadeia
- (▶ 7) Gradiente é perpendicular a curva de nível
- (▶ 8) Multiplicadores de Lagrange (baby version)
- (▶ 9) Reta tangente a curva de nível
- (▶ 10) Derivada direcional
- (▶ 11) Gradiente indica sentido de maior crescimento
- (▶ 12) Regra da cadeia para aplicações

Derivada parcial

Definição 1

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. A **derivada parcial** com respeito a variável x_i é definida (quando existir) como:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i} f(p) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + t e_i) - f(p)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p_1, \dots, p_{i-1}, p_i + t, \dots, p_m) - f(p)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(p_i + t) - h(p_i)}{t} \\ &= \frac{d}{dx_i} h(p_i)\end{aligned}$$

onde $h(x_i) = f(p_1, \dots, p_{i-1}, x_i, \dots, p_m)$ ou seja a função de uma única variável (recorde Cálculo I) obtida fixando todas as variáveis de f com exceção da variável x_i

Exemplo 2

Considere $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Temos então que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= \frac{d}{dx_1} h(x_1) \\ &= 2x_1.\end{aligned}$$

onde $h(x_1) = x_1^2 + x_2^2$ Em particular $\frac{\partial f}{\partial x_1}(1, 1) = 2$.

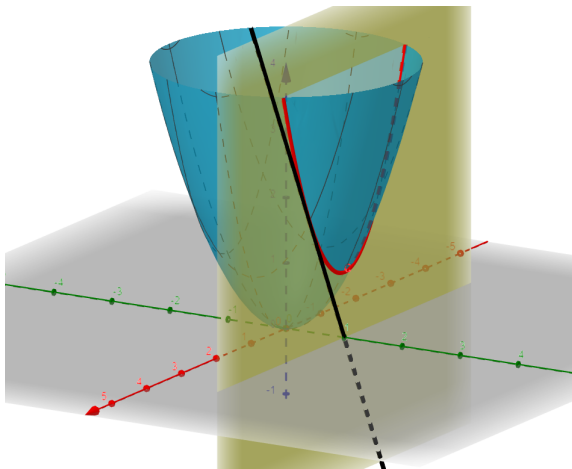


Figura: Ex 2: $\frac{\partial f}{\partial x_1}(1, 1) = 2$ é a inclinação da reta tangente a curva plana $S \cap \{x_2 = 1\} = C = \{(x_1, 1, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3 = x_1^2\}$ no ponto $(1, 1, 2)$.

Prob Considere a função de produção de Cobb-Douglas

$$Q = F(K, L) = 4K^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{4}} \text{ Calcule } \frac{\partial F}{\partial K}$$

Prob Calcule $\frac{\partial}{\partial x_1} \sin(x_1 x_2)$.

Prob Seja $f(x_1, x_2) = x_1(x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{3}{2}} \exp(\sin(x_1^2 x_2))$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x_1}(1, 0)$.

Várias derivadas parciais

Def: Uma função $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 se $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ é contínua para qualquer i .

Def: Uma função $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^k se $\frac{\partial^n f}{\partial^{i_1} x_1 \dots \partial^{i_m} x_m}$ para $n \leq k$ e $i_1 + \dots + i_m = n$.

Prop: Compostas, somas, diferenças, multiplicação e divisão (onde fizer sentido) de funções C^k ou suaves são funções C^k ou suaves.

Proposição 3

Se $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Exemplo 4

$$f(x_1, x_2) = \sin(x_1 x_2).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = x_2 \cos(x_1 x_2).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1 \cos(x_1 x_2).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \cos(x_1 x_2) - x_1 x_2 \sin(x_1 x_2)$$

Aplicação derivada

Uma função $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto $p \in U$ se: existem

- ▶ uma aplicação linear $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$;
- ▶ uma função $R : B_\epsilon(0) \rightarrow \mathbb{R}$

que atendem para $\forall x \in B_\epsilon(p)$:

$$f(x) = f(p) + A(x - p) + R(x - p)$$

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{R(x - p)}{\|x - p\|} = 0$$

A aplicação linear A que atende a eq. acima é única, é chamada **derivada no ponto** p e denotada por $df(p) = A$;

Prop Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $p \in U$.
Então

$$df(p) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_m}(p) \right]$$

Prova: Vamos considerar o caso $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(p_1 + t, p_2) &= f(p) + df(p)\left((p_1 + t, p_2) - (p_1, p_2)\right) + R(x - p) \\ &= f(p) + df(p)(t, 0) + R(x - p) \\ &= f(p) + t df(p)(1, 0) + R(x - p) \end{aligned}$$

$$\frac{f(p_1+t, p_2) - f(p)}{t} = df(p)(1, 0) + \frac{R(x-p)}{t}, \text{ tomando } t \rightarrow 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = df(p)(1, 0) \text{ Q.E.D.}$$

Teorema 5

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Se $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ são contínuas então f é diferenciável.

Plano tangente

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \end{bmatrix} + R(x - p) \\ &= f(p) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)(x_1 - p_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)(x_2 - p_2) + R(x - p) \end{aligned}$$

onde

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{R(x - p)}{\|x - p\|} = 0$$

Assim sendo o **plano tangente** em $q = (p_1, p_2, f(p))$ definido como: $x_3 = f(p) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)(x_1 - p_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)(x_2 - p_2)$ aproxima o gráfico $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3 = f(x_1, x_2)\}$ perto do ponto $q = (p_1, p_2, f(p))$

Visto que o **plano tangente** é definido como

$$-\frac{\partial f}{\partial x_1}(p)(x_1 - p_1) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)(x_2 - p_2) + (x_3 - f(p)) = 0$$

um vetor **normal** ao plano tangente (e assim normal ao gráfico **S**) é

$$N = \left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), -\frac{\partial f}{\partial x_2}(p), 1\right)$$

Prob: Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.
Determine o plano tangente ao gráfico de f no ponto $q = (1, 1, 2)$.

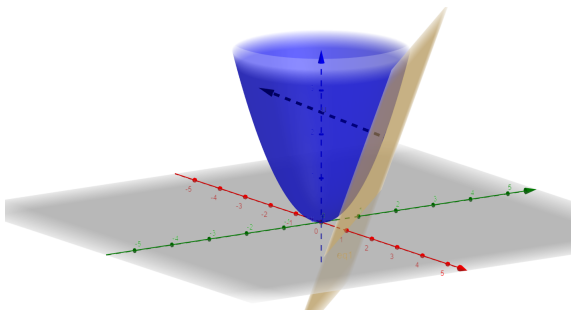


Figura: plano tangente $-2x_1 - 2x_2 + x_3 = -2$ ao gráfico de $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ no ponto $q = (1, 1, 2)$ Em destaque também vetor normal $N = (-2, -2, 1)$

Derivada de aplicações

Uma aplicação $F : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto $p \in U$ se: existem

- ▶ uma aplicação linear $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$;
- ▶ uma função $R : B_\epsilon(0) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

que atendem para $\forall x \in B_\epsilon(p)$:

$$F(x) = F(p) + A(x - p) + R(x - p)$$

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{R(x - p)}{\|x - p\|} = 0$$

A aplicação linear A que atende a eq. acima é única, é chamada **derivada no ponto** p e denotada por $DF(p) = A$;

Prop Seja $F : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável em $p \in U$ com $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Então

$$DF(p) = \begin{bmatrix} df_1(p) \\ \vdots \\ df_n(p) \end{bmatrix}$$

onde $df_i(p) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é $df_i(p) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(p) \quad \dots \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_m}(p) \right]$ ou seja

$$DF(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(p) \end{bmatrix}$$

Teorema 6

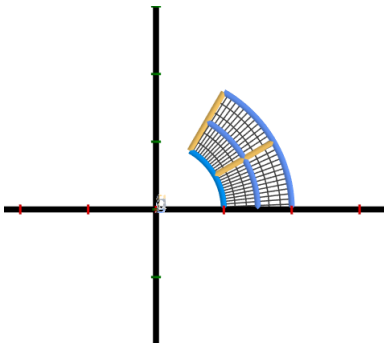
Seja $F : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ são contínuas então F é diferenciável.

Exemplo 7

Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $F(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$

- (a) Calcule $DF(r, \theta)$.
- (b) Esboce a imagem $F([\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{\pi}{3}])$ destacando as curvas $r \rightarrow F(r, \theta_0)$ e $\theta \rightarrow F(r_0, \theta)$.

$$DF(r, \theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{bmatrix}$$



Prob: Seja $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 3)^2 + x_3^2 = 1\}$

1. Determine se S é gráfico, superfície de revolução ou cilindro sobre curva plana.
2. Esboce S .
3. Determine uma parametrização $\psi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e determine $D\psi$.

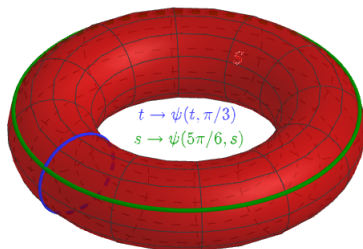


Figura: $\psi(t, s) = (\cos(t) - 3) \cos(s), (\cos(t) - 3) \sin(s), \sin(t)$,
 $t \in (0, 2\pi)$, $s \in (0, 2\pi)$

$$D\psi(t, s) = \begin{bmatrix} -\sin(t) \cos(s) & -(\cos(t) - 3) \sin(s) \\ -\sin(t) \sin(s) & (\cos(t) - 3) \cos(s) \\ \cos(t) & 0 \end{bmatrix}$$

Campos de vetores e gradientes

Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto. Então definimos $TU = U \times \mathbb{R}^m$. Dado um $p \in U$ então $T_p U = \{p\} \times \mathbb{R}^m$ (espaço tangente) deve ser considerado o espaço dos vetores $v_p = (p, v) \in TU$ **com pé em p** . O espaço $T_p U$ tem uma estrutura de espaço vetorial, i.e.,
 $v_p + w_p = (v + w)_p$, $\lambda v_p = (\lambda v)_p$.

Dado uma aplicação C^k $F : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ definimos o **campo associado** $\vec{F} : U \rightarrow TU$ como $\vec{F}(p) = (p, F(p))$.

Campos canônicos: Dado a base canônica $\{e_i\}$ de $\mathbb{R}^m$ definimos o campo canônico como $\vec{e}_i(p) = (p, e_i)$

Obs Se $F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ então $\vec{F} = \sum_{i=1}^m f_i(x) \vec{e}_i$.

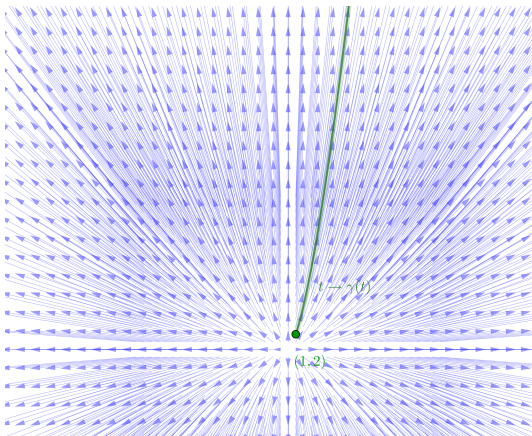


Figura: Ex: 9 $\vec{F}(x) = x_1\vec{e}_1 + \frac{3}{2}x_2\vec{e}_2$

Teorema 8

Seja $\vec{F}$ campo em $U \subset \mathbb{R}^m$ de classe C^k e $p \in U$. Então existe uma (única) curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ de classe C^k tal que

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= \vec{F}(\gamma(t)) \\ p &= \gamma(0)\end{aligned}$$

Exemplo 9

Seja $F(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ i.e., $\vec{F}(x_1, x_2) = x_1 \vec{e}_1 + \frac{3}{2}x_2 \vec{e}_2$ e

$p = (1, 2)$. Então, por Cálculo I, $\gamma(t) = (\exp(t), 2 \exp(\frac{3}{2}t))$

Comentários (campos lineares): Seja $\vec{F}$ um campo em $\mathbb{R}^2$ definido por $F(x) = Ax$ onde A é matriz 2×2 . Suponha que existe uma base de vetores em $\mathbb{R}^2$ $\{v, w\}$ tal que $Av = \lambda_1 v$ e $Aw = \lambda_2 w$ ou seja v, w são **auto-vetores** e λ_1 e λ_2 **auto-valores** associados (por exemplo, pelo **teorema espectral** isto acontece quando A é uma matriz simétrica).

Nesta situação a solução de $\gamma'(t) = \vec{F}(\gamma(t))$ $\gamma(0) = p$ é

$$\gamma(t) = c_1 \exp(\lambda_1 t) v + c_2 \exp(\lambda_2 t) w$$

onde c_1 e c_2 são determinados resolvendo o **sistema linear**

$p = \gamma(0) = c_1 v + c_2 w$ (vide Guia Resumido 1).

No Ex 9 $\lambda_1 = 1$, $v = (1, 0)$, $\lambda_2 = \frac{3}{2}$, $w = (0, 1)$, $c_1 = 1$ e $c_2 = 2$.

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^k , o **campo gradiente** é definido como

$$\nabla f = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \vec{e}_i$$

Ex: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definido como $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Então
 $\nabla f = 2x_1 \vec{e}_1 + 2x_2 \vec{e}_2$

Ex: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definido como $f(x_1, x_2) = -\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}$. Então
 $\nabla f = -x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$

Obs: Nem sempre um campo vetorial é gradiente de uma função.
Por exemplo seja $\vec{F}(x_1, x_2) = x_2 \vec{e}_1 - x_1 \vec{e}_2$

Vamos supor por absurdo que existisse uma função f tal que $\nabla f = \vec{F}$. Então teríamos $\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2$ e $\frac{\partial f}{\partial x_2} = -x_1$ e pela Proposição 3 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$. Chegariamos a um absurdo pois $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = -1$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 1$. Logo não existe a função f .

Regra da cadeia

Teorema 10

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ função diferenciável, $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$ curva diferenciável definida como $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t))$. Considere a função $h : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $h(t) = f \circ \alpha(t)$ Então:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}h(t_0) &= df(\alpha(t_0))\alpha'(t_0) \\ &= \langle \nabla f(\alpha(t_0)), \alpha'(t_0) \rangle \\ &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha(t_0))\alpha'_i(t_0)\end{aligned}$$

Problema 11

Considere uma *função utilidade* u suave com $\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) \neq 0$.

Suponha que a curva indiferença $C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid u(x_1, x_2) = c\}$ seja um gráfico ou seja existe uma função g suave tal que $x_2 = g(x_1)$

Determinemos *taxa de marginal de substituição* $\frac{dg}{dx_1}$ (i.e, a taxa a qual o consumidor está propenso a substituir um bem pelo outro mantendo o mesmo índice de satisfação) em termos das derivadas parciais de u .

Solução: Defina $\alpha(x_1) = (x_1, g(x_1))$ e $h(x_1) = u(\alpha(x_1)) = c$

$$\begin{aligned} 0 = \frac{dh}{dx_1} &= \langle \nabla u(\alpha(x_1)), \alpha'(x_1) \rangle \\ &= \frac{\partial u}{\partial x_1}(\alpha(x_1)) + \frac{\partial u}{\partial x_2}(\alpha(x_1)) \frac{dg}{dx_1}(x_1) \\ \frac{dg}{dx_1}(x_1) &= - \frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}(\alpha(x_1))}{\frac{\partial u}{\partial x_2}(\alpha(x_1))} \end{aligned}$$

Gradiente é "perpendicular" a curva de nível

Proposição 12

Dado uma função diferenciável $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e a curva de nível associada $C = f^{-1}(c) = \{x \in U \mid f(x) = c\}$ Suponha que tal curva admite uma parametrização $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow C \subset U$ com $\alpha'(t) \neq (0, 0)$ para todo t . Então

$$\langle \nabla f(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle = 0$$

Prova:

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle &= \frac{d}{dt} f \circ \alpha(t) \\ &= \frac{d}{dt} c \\ &= 0 \end{aligned}$$

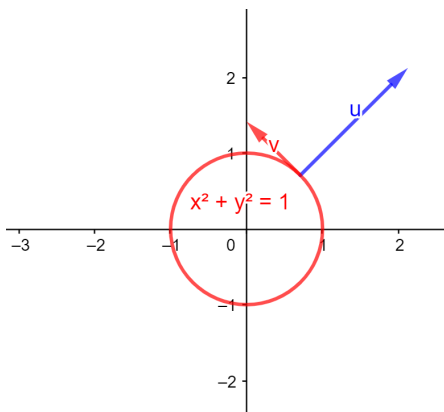


Figura: $u = \nabla f(\alpha(t_0))$, $v = \alpha'(t_0)$ onde $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \alpha(t_0)$,
 $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$

Multiplicadores de Lagrange (baby version)

Proposição 13

Sejam $g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ função diferenciável,

$C = g^{-1}(c) = \{x \in U | g(x) = c\}$ a curva de nível associada e

$u : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ função diferenciável com domínio $\tilde{U}$ contendo U .

Suponha que:

(a) $\vec{\nabla} g(x) \neq (0, 0) \forall x \in C;$

(b) $u|_C$ (função **restrita a C**) tenha **máximo ou mínimo em um ponto $p \in C$** ;

Então $\nabla u(p)$ é perpendicular a curva C ou seja:

$$\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p)$$

$$c = g(p)$$

Obs No futuro, veremos pelo teorema da função implícita que condição

(a) implica que C admite uma parametrização $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow C \subset U$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(t) \neq (0, 0)$ para todo t . Aqui aceitaremos este fato na demonstração da proposição.

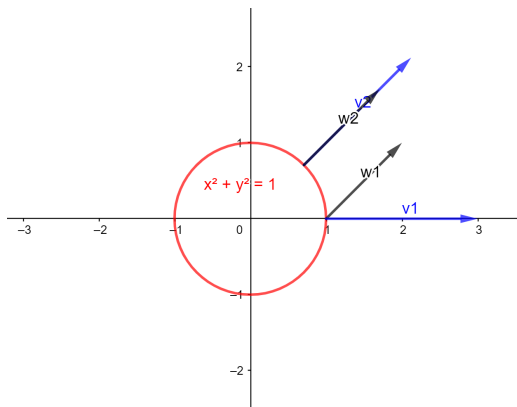


Figura: Dado $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ e $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$
 $w_2 = \nabla u(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \lambda \nabla g(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \lambda v_2$ isto não acontece por ex no
 ponto $(1, 0)$.

Dem: Primeiro lembre que ∇g é sempre ortogonal a C ou seja escolhida $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow C \subset \mathbb{R}^2$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(t) \neq (0, 0)$ temos

$$\langle \nabla g(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle = 0 \quad (1)$$

Por outro lado como $u|_C$ (função **restrita a C**) tem **máximo ou mínimo em $\alpha(0) = p \in C$** , temos que a função $h(t) = u(\alpha(t))$ tem máximo ou mínimo interior em $t = 0$, i.e., $h'(0) = 0$. Assim, **pela regra da cadeia**,

$$0 = h'(0) = \langle \nabla u(p), \alpha'(0) \rangle \quad (2)$$

Equações (1) e (2) implicam que

$$\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p)$$

o que termina a demonstração.

Multiplicadores de Lagrange junto com o teorema a baixo (que generaliza resultado de Calculo I) permitem estudar mínimos e máximos de funções restritas a conjuntos.

Teorema 14

Sejam $u : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $K \subset U$ um conjunto fechado e limitado (ou seja fechado tal que $K \subset B_R(0)$). Então a função restrita $u|_K$ possui um valor máximo e um valor mínimo.

Ex ??: Dado $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ e $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ Obtenha os pontos de máximo e mínimo de $u|_C$ onde

$$C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

Como C é fechado e limitado existe de fato valor máximo e mínimo. Se p é máximo ou mínimo temos:

$$\begin{aligned}(1, 1) = \nabla u(p) &= \lambda \nabla g(p) = \lambda(2p_1, 2p_2) \\ 1 &= p_1^2 + p_2^2\end{aligned}$$

Obs que $p_i \neq 0$. Isto e a primeira eq. implicam que $p_2 = p_1$, o qual substituido na segunda eq. permite concluir que as soluções do sistema são $p = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $\tilde{p} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

Como $u(p) = \frac{2}{\sqrt{2}}$ e $u(\tilde{p}) = -\frac{2}{\sqrt{2}}$, concluímos que p é o ponto onde u assume o maior valor e $\tilde{p}$ o ponto onde u assume menor valor.

Problema 15

Sejam $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 - 6\sqrt{3}x + y^2 + 9 = 3\}$ e $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ função definida como $u(x, y) = 3x + y$. Encontre $p \in C$ tal que $u(p)$ assumo maior valor e $q \in C$ tal que $u(q)$ menor valor em C .

Obs: Este problema pode ser resolvido de 2 formas. A primeira podemos parametrizar C por uma curva $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow C$ e usarmos Calculo I para ver os pontos de máximo e mínimos de $h(t) = u \circ \alpha(t)$. A segunda é utilizar Multiplicadores de Lagrange como fizemos no exemplo anterior.

Sol: Visto que C é compacta, existe máximo e mínimo de $u|_C$ e eles estarão entre as soluções do sistema:

$$\begin{aligned}3 &= \frac{\partial u}{\partial x_1} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} = \lambda 2(x_1 - \sqrt{3}) \\1 &= \frac{\partial u}{\partial x_2} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} = \lambda \frac{2}{3}x_2 \\1 &= (x_1 - \sqrt{3})^2 + \frac{1}{3}x_2^2\end{aligned}$$

Note que $\lambda \neq 0 \neq x_2$. Dividindo as 2 primeiras equações concluímos que $(x_1 - \sqrt{3}) = x_2$. Substituindo na terceira concluímos que $x_2^2 = \frac{3}{4}$. Como temos 2 soluções: $p = (\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $q = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, uma deve ser máximo e outra mínimo.

1. $p = (\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $u(p) = 5\sqrt{3}$ máximo absoluto.
2. $q = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $u(q) = \sqrt{3}$ mínimo absoluto.

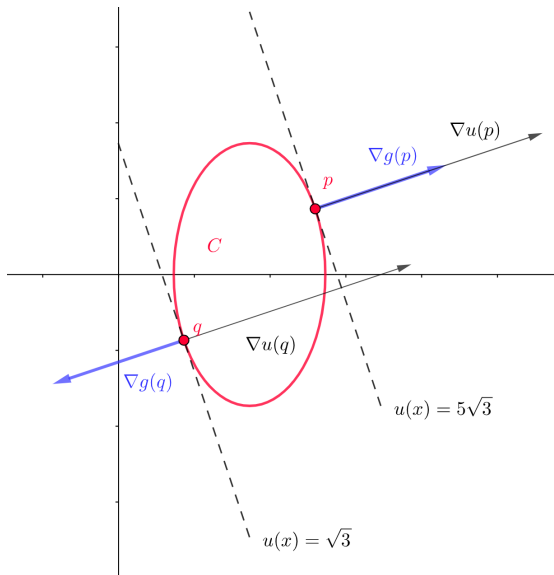


Figura: Vide Problema 15

Exemplo 16 (Cobb-Douglas e orçamentos)

Considere o vínculo $C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 + x_2 = w \mid x_i \geq 0\}$ onde w é um valor fixo (orçamento). Considere a função Cobb-Douglas $u(x) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$. Determine o máximo de $u|_C$.

Se $s = (s_1, s_2)$ é ponto de máximo, ele deve antender:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} s_1^{-\frac{1}{2}} s_2^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2} s_2^{-\frac{1}{2}} s_1^{\frac{1}{2}} \right) = \nabla u(s) &= \lambda \nabla g(s) = \lambda(2, 1) \\ w &= 2s_1 + s_2 \end{aligned}$$

Resposta: $s(w) = \left(\frac{w}{4}, \frac{w}{2} \right)$

Comentários (shadow prices): No caso **bem particular** de Cobb Douglas temos a existência de um **único máximo** $s(w)$ para cada **vínculo** $C_w = g^{-1}(w)$, o que nos dá uma curva diferenciável $w \rightarrow s(w) \in C_w$. Em particular $g \circ s(w) = w$ Por ser máximo temos: $\nabla u(s(w)) = \lambda(w) \nabla g(s(w))$ Assim, ao multiplicar ambos os lados por $s'(w)$ concluímos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dw} u \circ s(w) &= \langle \nabla u(s(w)), s'(w) \rangle \\ &= \lambda(w) \langle \nabla g(s(w)), s'(w) \rangle \\ &= \lambda(w) \frac{d}{dw} g \circ s(w) \\ &= \lambda(w) \end{aligned}$$

Note porém que **em Cálculo II** estamos interessados em minimizar e maximizar funções u **em um vínculo fixo**. Para este tipo de problema λ é uma variável auxiliar que **não tem papel no problema em si**. Em particular observe que se tivermos 2 funções u e $\tilde{u}$ diferentes mas como $u|_C = \tilde{u}|_C$ obteremos os mesmos máximos e mínimos (mas $\lambda \neq \tilde{\lambda}$). Além disto no processo de resolução podemos ter casos e cada caso lidar com variáveis auxiliares diferentes λ .

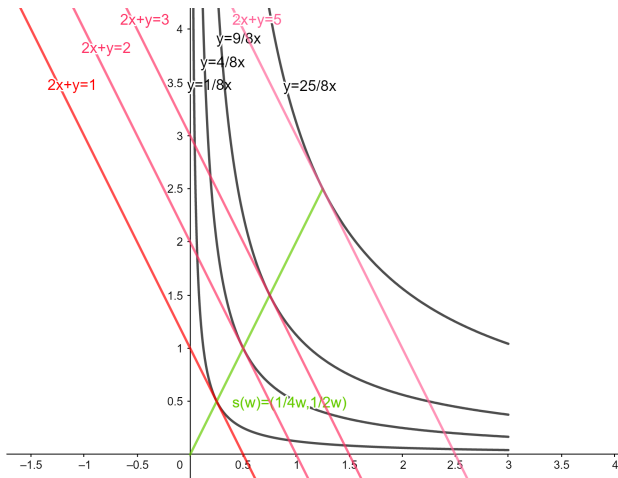


Figura: curvas de máximos no caso particular de u sendo **Cobb Douglas** e vários vínculos dado por orçamentos

Reta tangente a curva de nível

Prob Calcule a equação cartesiana da reta tangente a curva de nível $C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 4x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ no ponto $p = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$

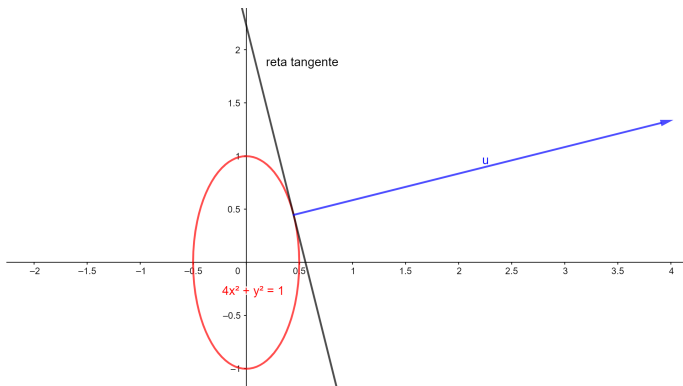


Figura: O vetor normal é $u = \vec{\nabla} f(p) = (\frac{8}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ onde

$f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + x_2^2$ e a reta tangente é

$$\frac{8}{\sqrt{5}}(x_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}) + \frac{2}{\sqrt{5}}(x_2 - \frac{1}{\sqrt{5}}) = 0$$

Derivada direcional

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ função e $v \in \mathbb{R}^m$ como $\|v\| = 1$. A **derivada direcional** na direção v_p é definida:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t}$$

Obs Se f é diferenciável, segue da regra da cadeia (considerando $\alpha(t) = p + tv$)

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \langle \nabla f(p), v_p \rangle$$

$\frac{\partial f}{\partial v}(p)$ é assim uma *taxa de variação* de f no ponto p no sentido de v .

Problema 17

Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + x_2^2$. Calcule as derivadas direcionais.

(a) $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ onde $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(b) $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ onde $\mathbf{v} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$

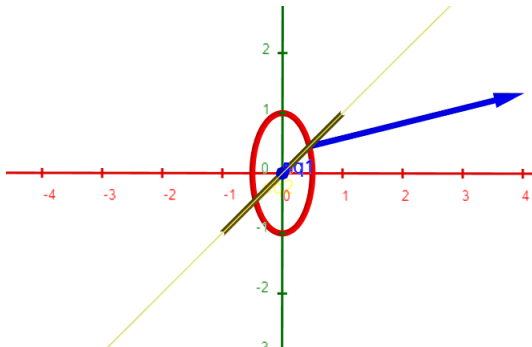


Figura: Prob 17: curva de nível $4x_1^2 + x_2^2 = 1$, $\nabla f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, e direção dada $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Obs que em geral $\mathbf{v}_p$ não precisa sempre estar contido em plano contendo $(0,0)$

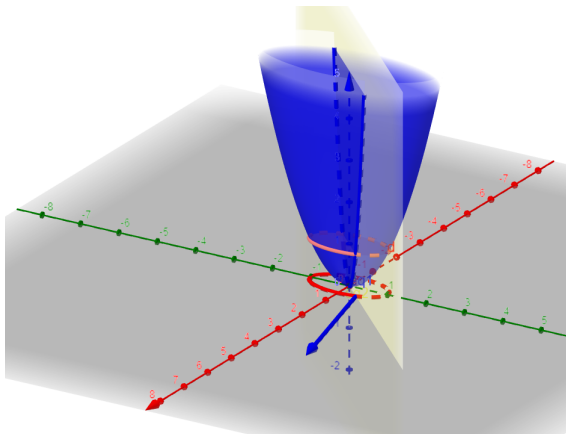


Figura: Prob 17

$\nabla f(p) \neq 0$ indica sentido de maior crescimento de f

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável com $\nabla f(p) \neq 0$. Se $\|v\| = 1$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(p) &= \langle \nabla f(p), v \rangle \\ &= \|\nabla f(p)\| \|v\| \cos(\theta) \\ &= \|\nabla f(p)\| \cos(\theta)\end{aligned}$$

onde θ é o ângulo entre $\nabla f(p)$ e v (lembre que $\|v\| = 1$).

(a) $\frac{\partial f}{\partial v}(p)$ é máxima se $v = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$

(b) $\frac{\partial f}{\partial v}(p)$ é mínima se $v = -\frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$

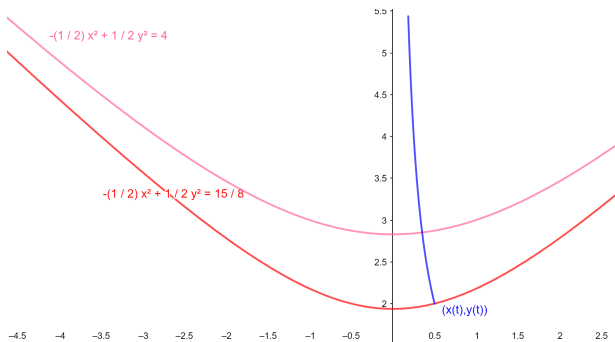


Figura: Dado $\vec{F}(x_1, x_2) = (-x_1, x_2) = \nabla f(x)$ onde $f(x) = -\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$ e $p = (\frac{1}{2}, 2)$. Então a solução $\alpha'(t) = \vec{F}(\gamma(t))$ $\alpha(0) = p$ passa das **curvas de nível** mais baixas para as mais altas.

Regra da cadeia para aplicações

Prop Compostas de aplicações de ordem C^k são de ordem C^k .

Teorema 18

Sejam $F : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n$ e $G : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ aplicações diferenciáveis. Seja $H : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ definida como $H(x) = G \circ F(x)$ Então:

$$DH(p) = DG(F(p))DF(p)$$

Prob : Sejam $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $g : W \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ resp.

$F(p_1, p_2, w) = (\frac{1}{2} \frac{w}{p_1}, \frac{1}{2} \frac{w}{p_2})$ e $g(y_1, y_2) = \frac{1}{2} \ln(y_1) + \frac{1}{2} \ln(y_2)$. Seja $h : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $h(x) = g \circ F(x)$. Calcule $dh(x)$.

Comentários (teorema da função inversa): Seja $F : \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ aplicação de classe C^1 . Suponha que $DF(p)$ é invertível para $p \in \Omega$. Então existe uma vizinhança U de p e uma vizinhança V de $F(p)$ tais que $F : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo de classe C^1 , i.e., $F : U \rightarrow V$ é bijeção de classe C^1 com inversa $F^{-1} : V \rightarrow U$ de classe C^1 .

Visto que $x = H(x) = F^{-1} \circ F(x)$ temos pela regra da cadeia que $Id = D(F^{-1})(q)DF(p)$ onde $q = F(p)$. Em particular $D(F^{-1})(q) = (DF(p))^{-1}$ (compare com Cálculo I).