3^0 Lista de Exercício de MAT5711 (1^0 semestre 2006)

Questão 1. a) Enuncie o teorema de Fubini.

b) Demonstre o teorema de Fubini.

Questão 2. Calcule $\int_U f$ para $f(x,y) = y$ e

$$U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq y^2, x + y \leq 2\}$$

Questão 3. Calcule $\int_1^4 \int_{\frac{\ln(y)}{2}}^{\ln(2)} \frac{1}{\exp(x)+1} dxdy$

Questão 4. Calcule a integral de $f(x,y,z) = x$ no tetraedro limitado pelos planos coordenados e o plano $x + 2y + 3z = 6$.

Questão 5. 1. Exercicio 2.26 do Spivak (construção da função chapeu).

2. Enuncie e demonstre o teorema da partição da unidade com suporte compacto, quando o espaço em questao é compacto.

Questão 6. a) Enuncie o teorema de mudança de variaveis.

b) Seja $g : U \subset \mathbb{R}^2 \to V \subset \mathbb{R}^2$ uma aplicacao suave tal que $g(x,y) = (g_1(x,y), y)$. Suponha que $\frac{\partial g_1}{\partial x}$ é sempre diferente de zero. Demonstre o teorema de mudança de variaveis para $f = 1$ e considerando g como a mudança de variaveis.

Questão 7. Calcule $\int_U \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ onde

$$U := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z \geq \sqrt{3x^2 + 3y^2}, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

Questão 8. Calcule $\int_U x^2 + y^2$ onde

$$U := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2\}$$

Questão 9. Calcule $\int_U \sqrt{x^2 + y^2}$ onde

$$U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$$

Questão 10. 1. Faça o Exercicio 4-3 do Spivak.

2. Leia as demonstrações dos teoremas 4-8, 4-9, 4-10 do Spivak

3. Faça Exercícios 4-19, 4-20, 4-21 do Spivak.

Questão 11. Uma k-forma ω em uma variedade suave M. Suponha que $\psi^*\omega$ é suave onde $\psi : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset M$ é uma parametrização. Mostre que $\tilde{\psi}^*\omega$ é suave para qualquer outra parametrização $\tilde{\psi}$ de M.

Questão 12. Seja ω uma k-forma suave em uma variedade suave M. Para $i = 1, 2$ considere parametrizações $\psi_i : U_i \subset \mathbb{R}^n \to V_i \subset M$ e aplicações suaves H_i tais que $H_i | V_i = \psi_i^{-1}$. Suponha que a interseção de V_1 com V_2 não é vazia. Mostre que $H_1^* d\psi_1^*\omega = H_2^* d\psi_2^*\omega$.

Questão 13. Sejam $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ e $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ aplicações definidas como $s(x) = (x, 0)$ e $\pi(x, t) = x$ respectivamente. Dado $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^{n+1})$ (i.e., ω é uma k forma suave em $\mathbb{R}^{n+1}$) é possivel notar que ela é combinação linear das seguintes formas:

I) $\pi^*\phi \cdot f(x,t)$ onde ϕ é k-forma suave em $\mathbb{R}^n$.

II) $\pi^*\phi \wedge f(x,t)dt$ onde ϕ é $(k-1)$-forma suave em $\mathbb{R}^n$.

Seja $K : \Omega^k(\mathbb{R}^{n+1}) \to \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^{n+1})$ uma aplicação linear definida como $K(\omega) = 0$ se ω é do tipo I) e $K(\omega) = \pi^*\phi \cdot \int_0^t f(x,s)ds$ para ω do tipo II).

a) Prove que $Id - \pi^* s^* = (-1)^{k-1}(dK - Kd)$.

b) Mostre que $H^k(\mathbb{R}^{n+1}) = H^k(\mathbb{R}^n)$

c) Conclua que $H^k(\mathbb{R}^n) = 0$ se $k > 0$ e $H^k(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ se $k = 0$.

Questão 14. Seja S uma superfície mergulhada em $\mathbb{R}^3$ orientada por um vetor normal unitário N. Suponha que existe uma parametrização $\psi : U \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$ injetora tal que U é limitado e $N = \frac{\frac{\partial\psi}{\partial u_1} \times \frac{\partial\psi}{\partial u_2}}{\|\frac{\partial\psi}{\partial u_1} \times \frac{\partial\psi}{\partial u_2}\|}$. Seja ω a forma volume de $\mathbb{R}^3$ e $\tilde{\omega}$ a forma volume de S, i.e., a 2-forma $\omega(N, \cdot, \cdot)$ restrita a S.

a) Mostre que
$$\psi^*\tilde{\omega} = \|\frac{\partial\psi}{\partial u_1} \times \frac{\partial\psi}{\partial u_2}\| du_1 \wedge du_2$$
. Conclua que
$$\int_S f \cdot \tilde{\omega} = \int_U f \circ \psi \cdot \|\frac{\partial\psi}{\partial u_1} \times \frac{\partial\psi}{\partial u_2}\|$$
onde f é uma função suave definida em $\mathbb{R}^3$.

b) Suponha que S é definida pelas equações abaixo.
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 9 + 2x - y, x^2 + y^2 \leq 1\}$$
Calcule a area de S.

Questão 15 (Exame de Maio 2006)**.** Considere a superfície definida abaixo:
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0\}$$

a) Calcule a integral de $f(x, y, z) = 1 - z$ sobre S.

b) Considere o campo definido abaixo:
$$F(x, y, z) = (x + \exp(y), y\,z + \sin^2(x), 5 + z^2)$$
Calcule o fluxo do campo F através da superfície S orientada pelo vetor normal unitário n o qual tem terceira componente positiva.

Questão 16 (Exame de Maio de 2006)**.** a) Enuncie o teorema de Stokes para uma variedade M de classe C^∞ que tem dimensão m.

b) Demonstre o teorema de Stokes para os seguintes casos particulares:

b.1) $M = \mathbb{R}^2$

b.2) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0\}$

c) Utilizando partição da unidade, demonstre o teorema de Stokes para uma variedade de classe C^∞ de dimensão 2.

Questão 17 (Exame de Maio de 2006)**.** a) Sejam ω a forma volume de $\mathbb{R}^3$ e X um campo de classe C^∞ em $\mathbb{R}^3$. Defina $i_X\omega$ como sendo a 2-forma $\omega(X, \cdot, \cdot)$. Mostre que $d(i_X\omega) = \mathrm{div}\,(X)\omega$.

b) Sejam S uma superfície mergulhada em $\mathbb{R}^3$ fechada de classe C^∞ e U o sólido que tem S como fronteira. Suponha que S é orientada por um vetor normal unitário n apontando para fora. Mostre que $i_X\omega$ restrita a S é a 2-forma $< X, n > \tilde{\omega}$ onde $\tilde{\omega}$ é a 2-forma volume de S.

c) Por fim, demonstre o teorema de Gauss, i.e.,

$$\int_U \mathrm{div}\,(X)\omega = \int_S < n, X > \tilde{\omega}$$