2^0 **Lista de Exercício de MAT5711 (1^0 semestre 2006)**

1. Exercícios da Primeira Prova

Questão 1.1. Assumindo o teorema da função inversa, enuncie e demonstre os teoremas abaixo:

(1) O teorema da função implicita.
(2) O teorema da submersão.
(3) O teorema da imersão.
(4) O teorema do posto.
(5) O teorema da retificação do fluxo.
(6) O teorema da existência de $n-1$ integrais primeiras.

Questão 1.2 (Lema de Morse)**.** Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função suave. Suponha que p é um ponto crítico não degenerado, i.e., Hess $f(p)$ é invertível. Mostre que existe uma vizinhança V de 0 e W de p e um difeomorfismo $\psi : V \to W$ tal que: $f \circ \psi(x) = f(p) - x_1^2 - \cdots x_i^2 + x_{i+1}^2 + \cdots + x_n^2$

Questão 1.3. Mostre que se M é variedade suave mergulhada em $\mathbb{R}^n$, então para todo $p \in M$ existe uma vizinhança W de p tal que $M \cap W$ é gráfico em relação a T_pM.

Questão 1.4. Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ e $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^l$ variedades suaves mergulhadas de dimensão m e $\tilde{m}$ respectivamente. Seja $f : M \to \tilde{M}$ aplicação. Mostre que as afirmações abaixo são equivalentes.

(1) Para todo $p \in M$ existem parametrizações $\phi : V \to U \subset M$ (onde U é vizinhança de p) e $\tilde{\phi} : \tilde{V} \to \tilde{U} \subset \tilde{M}$ (onde $\tilde{U}$ é vizinhança de $f(p)$) tal que $\tilde{\phi}^{-1} \circ f \circ \phi$ é de classe C^k.
(2) Para todo $p \in M$ existe uma vizinhança W de p em $\mathbb{R}^n$ e uma vizinhança $\tilde{W}$ em $\mathbb{R}^l$ de $f(p)$ e uma aplicação $F : W \to \tilde{W}$ de classe C^k tal que $F|_{M\cap W} = f|_{M\cap W}$.

Uma função f que atendem uma das afirmações acima é chamada *aplicação de classe* C^k.

Questão 1.5. Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2/4 + z^2/9 = 1\}$ um elipsoide. Qual o maior volume que pode ser ocupado por um paralelepípedo que tem faces paralelas aos planos coordenados e está dentro de S?

2. Exercícios de Exames de Qualificação para Mestrado na USP

Questão 2.1 (Fevereiro de 1983)**.** Seja M uma superfície de $\mathbb{R}^3$ definida como imagem inversa de um valor regular de uma função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

de classe C^1. Mostre que se q é o ponto de M mais próximo de um ponto $p \in \mathbb{R}^3$ não pertencente a M então o vetor $p - q$ é normal ao plano tangente a M em q.

Questão 2.2 (Agosto de 1984)**.** Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular diferenciável compacta com bordo C. Mostre que não existe uma aplicação suave $f : S \to C$ tal que $f|_C = Id|_C$(dita retração de S em C.) Obs: pelo Teorema de Sard, uma aplicação suave de S em C admite valores regulares.

Questão 2.3 (Fevereiro de 1985)**.** Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1. Mostre que a imagem de $f([a, b])$ tem medida nula em $\mathbb{R}^2$.

Questão 2.4 (Agosto de 1985)**.** Sejam $M \subset \mathbb{R}^m$ e $N \subset \mathbb{R}^n$ superfícies de classe C^1 e mesma dimensão p com $0 < p < \min(m, n)$ com M compacta. Sejam ainda $f : M \to N$ de classe C^1 e $y \in N$ tais que para qualquer $x \in f^{-1}(y)$ $Df(x) : T_xM \to T_yN$ tem posto p. Mostre que $f^{-1}(y)$ é um conjunto finito.

3. Problema Desafio

Questão 3.1 (Teorema de Sard)**.** Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ aplicação suave e C o conjunto dos pontos críticos. Então $f(C) \subset \mathbb{R}^p$ tem medida nula. (Sugestão: Consulte o livro de J.W. Milnor: *Topology from the differentiable viewpoint*).