2^0 **Lista de Exercício: MAT0146, turma 21**

Cálculo Diferencial e Integral I para Economia (1^0 semestre 2019)

Referências principais(nas quais a lista foi baseada):

1. J. Stewart ,*Cálculo I* Pioneira Thomson Learning, 4 Edição ou 5 Edição
2. J. E. Weber, *Matemática para Economia e Administração*, 2 Edição
3. S.T. Tan, *Matemática Aplicada a Administração e Economia*, Cengage Learning

1 Parte 1: Integração, área e volume

Problema 1.1. Esboce a região A limitada pelas curvas $y = -x^2 + 4x$ e $y = x^2$ e encontre a area de A.

Problema 1.2. Esboce a região limitada pela parabola $y^2 = 2x + 6$ e pela reta $y = x - 1$, decida se é melhor integrar em relação a x ou y e calcule a área da região.

Problema 1.3. O volume de um sólido de revolução obtido pela rotação ao redor do eixo y da região limitada por $y = 0$ e $y = f(x)$ (onde f é positiva e definida em intervalo $[a, b]$ com $a \geq 0$) é

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

(1) Esboce a região A limitada por $y = 2x^2 - x^3$ e $y = 0$ e ache o volume do sólido obtido pela rotação da região A em torno do eixo y.

(2) Esboce a região A limitada por $y = x$ e $y = x^2$ e ache o volume do sólido obtido pela rotação da região A em torno do eixo y.

Problema 1.4. Esboce a região limitada pelas curvas dadas. Decida quando integrar em relação a x ou a y e calcule a área da região.

(1) $y = x + 1$, $y = 9 - x^2$, $x = -1$, $x = 2$.

(2) $y = 12 - x^2$, $y = x^2 - 6$

(3) $x = 2y^2$, $x + y = 1$

(4) $x = 1 - y^2$ $x = y^2 - 1$

1.1 Respostas da Parte 1

Problema 1.1: $\frac{8}{3}$.

Problema 1.2: 18

Problema 1.3

(1) $\frac{16\pi}{5}$

(2) $\frac{\pi}{6}$

Obs: Problema 1.3 resolvido na Seção 6.3 do livro Stewart

Problema 1.4

(1) $19,5$

(2) 72

(3) 9/8

(4) 8/3

2 Parte 2: Integração, teoremas fundamentais do Cálculo, mudança de variáveis e integração por partes

Problema 2.1. Calcule:

(1) $\int_0^1 x(x^2+1)^3\,dx$

(2) $\int_0^{\pi/2} \sin^3(x)\cos(x)\,dx$

(3) $\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx$

(4) $\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,dx$

Problema 2.2. Calcule

(1) $\int_1^2 t^2\sqrt{t^3+1}\,dx$

(2) $\int_0^1 \frac{(y^2+2y)}{\sqrt[3]{y^3+3y^2+4}}\,dx$

(3) $\int_0^{15} \frac{w}{(1+w)^{\frac{3}{4}}}\,dw$

(4) $\int_{-2}^5 |x-3|\,dx$

(5) $\int_{-1}^1 \sqrt{|x|-x}\,dx$

(6) $\int_0^3 (x+2)\sqrt{x+1}\,dx$

(7) $\int_1^2 \frac{x^3+2x^2+x+2}{(x+1)^2}\,dx$

(8) $\int_0^1 \sin(\pi x)\cos(\pi x)\,dx$

(9) $\frac{d}{dx}\int_x^3 \sqrt{\sin(t)}\,dt$

(10) $\frac{d}{dx}\int_{-x}^x \frac{1}{3+t^2}\,dt$

(11) $\frac{d}{dx}\int_1^{x^3} \sqrt[3]{t^2+1}\,dt$

(12) $\frac{d}{dx}\int_2^{\tan(x)} \frac{1}{1+t^2}\,dt$

Problema 2.3. Utilizando o teorema do valor médio e o teorema fundamental do Cálculo I prove que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua então existe $c \in (a, b)$ tal que $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a)$

Problema 2.4. Calcule:

(1) $\int x \exp(x)\,dx$

(2) $\int \ln(x)\,dx$

(3) $x^2 \sin(x)\,dx$

(4) $\int \frac{2x}{(x+1)^2}\,dx$

(5) $\int \tan(x)\,dx$

(6) $\int \sec(x)\,dx$

(7) $\int \cos^2(x)\,dx$

(8) $\int \sin^2(x)\,dx$

(9) $\int \cos^3(x)\,dx$

(10) $\int \sin^3(x)\,dx$

(11) $\int \sec^4(x)\,dx$

Problema 2.5. Calcule:

(1) $\int \frac{x \exp(x)}{(1+x)^2}\,dx$

(2) $\int x^2 \exp(x)\,dx$

(3) $\int t \ln(t)\,dt$

(4) $\int \exp(x)(x + 1)^2\,dx$

(5) $\int \frac{x+1}{(x+1)^2+4}\,dx$

(6) $\int \exp(x) \cos(x)\,dx$

(7) $\int x^2 \exp(-x)\, dx$

(8) $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}\, dx$

Problema 2.6. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua por partes é chamada *função freqüência* se :

(a) $f \geq 0$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

A probabilidade de um evento x ocorrer em um intervalo $[a, b]$ é definida por

$$P(a < x < b) := \int_a^b f(x)\, dx$$

Num estabelecimento de autopeças, a proporção de encomendas atendidas por dia tem uma função de freqüência dada por $f(x) = 20(x^3 - x^4)$ para $x \in [0, 1]$ e $f(x) = 0$ para $x \notin [0,1]$. Qual a probabilidade de se atender menos de 20 por cento das encomendas num dia?

2.1 Respostas da Parte 2

Problema 2.1

(1) $\frac{15}{8}$

(2) $\frac{1}{4}$

(3) $\frac{116}{15}$

(4) $\frac{16}{3}$

Problema 2.2

(1) $\frac{2}{9}(27 - 2\sqrt{2})$

(2) $2 - \sqrt[3]{2}$

(3) $\frac{104}{5}$

(4) $\frac{29}{2}$

(5) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$

(6) $\frac{256}{15}$

(7) $\frac{11}{6}$

(8) 0

(9) $-\sqrt{\sin(x)}$

(10) $\frac{2}{3+x^2}$

(11) $3x^2\sqrt[3]{x^6+1}$

(12) 1

Problema 2.3: Defina $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Pelo teorema do valor médio existe c tal que

$$\begin{aligned} F'(c) &= \frac{F(b)-F(a)}{b-a} \\ &= \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \end{aligned}$$

Por outro lado, o teorema fundamental do Cáculo I implica que

$$F'(c) = f(c)$$

O resultado segue então das equações acima.

Problema 2.4

(1) $x\exp(x) - \exp(x) + C$

(2) $x\ln(x) - x + C$

(3) $-\cos(x)x^2 + 2x\sin(x) + 2\cos(x) + C$

(4) $2\ln|x+1| + \frac{2}{|x+1|} + C$

(5) $-\ln|\cos(x)| + C$

(6) $\ln|\sec(x)+\tan(x)|+C$

(7) $\frac{x}{2}+\frac{\sin(2x)}{4}+C$

(8) $\frac{x}{2}-\frac{\sin(2x)}{4}+C$

(9) $\sin(x)-\frac{\sin^3(x)}{3}+C$

(10) $-\cos(x)+\frac{\cos^3(x)}{3}+C$

(11) $\frac{\tan^3(x)}{3}+\tan(x)+C$

Problema 2.5:

(1) $\frac{exp(x)}{1+x}+C$

(2) $\exp(x)(x^2-2x+2)+C$

(3) $\frac{1}{2}(t^2\ln(t)-\frac{1}{4}t^2+C$

(4) $\exp(x)(x^2+1)+C$

(5) $\frac{1}{2}\ln((x+1)^2+4)+C$

(6) $\frac{1}{2}\exp(x)(\sin(x)+\cos(x))+C$

(7) $-\exp(-x)(x^2+2x+2)+C$

(8) $2(x+1)^{1/2}(\ln(x+1)-2)+C$

Problema 2.6: $20(\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5})|_0^{0.2}=0,00672$

3 Parte 3: Aplicações da integral na economia

Problema 3.1. Seja $q = f(p)$ a função demanda onde p é o preço e q a quantidade. A função demanda é positiva, em geral decrescente e em geral existe M (preço máximo) tal que $f(M) = 0$. O *excedente do consumidor* (a partir do preço p_0) é definido como

$$ec := \int_{p_0}^{M} f(p)\, dp.$$

(a) Seja $p_0 < \cdots < p_n = M$ uma partição por preços do intervalo $[p_0, M]$ e defina $\Delta p_i = p_{i+1} - p_i$. Defina $ec(p_i)$ como sendo o gasto de um consumidor que consome $f(p_i)$ produtos ao preço $p_i + \Delta p_i$ menos o gasto de um consumidor que consome $f(p_i)$ produtos ao preço p_i. Em outras palavras, $ec(p_i)$ mede a diferença do gasto de um consumidor que, apesar do aumento de preço Δp_i no preço p_i, continua consumindo a mesma quantidade de produtos (i.e., $f(p_i)$) com o gasto do consumidor que consome $f(p_i)$ produtos a um preço p_i. Verifique que para uma partição com Δp_i pequenos o excedente do consumidor pode ser aproximado por $\sum_i ec(p_i.)$

(b) Sejam $p = f^{-1}(q)$ a inversa da função demanda e $q_0 = f(p_0)$. Verifique que

$$ec = \int_{0}^{q_0} f^{-1}(q)\, dq - p_0 q_0.$$

(c) Seja $p = 32 - 4q - q^2$ a inversa da função demanda. Ache o excedente do consumidor a partir de $p_0 = 27$.

Problema 3.2. Seja $p = 39 - q^2$ a inversa da função demanda. Ache o excedente do consumidor se

(a) $q_0 = \frac{5}{2}$.

(b) O bem é gratuito, i.e., $p_0 = 0$.

Problema 3.3. Seja $q = g(p)$ a função que representa a quantidade q de um produto que pode ser ofertada por uma empresa de acordo com o preço p. A função oferta é positiva, em geral crescente e em geral existe m (preço mínimo) tal que $g(m) = 0$. O *excedente do produtor* (até do preço p_f) é definido como

$$ep := \int_m^{p_f} g(p)\,dp.$$

(a) Seja $m = p_0 < \cdots < p_n = p_f$ uma partição por preços do intervalo $[m, p_f]$ e defina $\Delta p_i = p_{i+1} - p_i$. Defina $ep(p_i)$ como sendo o ganho do produtor que oferta $g(p_{i+1})$ produtos ao preço p_{i+1} menos o ganho de um produtor que consegue oferecer $g(p_{i+1})$ produtos ao preço menor $p_i = p_{i+1} - \Delta p_i$. Verifique que para uma partição com Δp_i pequenos o excedente do produtor pode ser aproximado por $\sum_i ep(p_i.)$

(b) Sejam $p = g^{-1}(q)$ a inversa da função oferta e $q_f = g(p_f)$. Verifique que

$$ep = p_f q_f - \int_0^{q_f} g^{-1}(q)\,dq.$$

(c) Seja $p = (q+2)^2$ a inversa da função oferta. Ache o excedente do produtor até o preço $p_f = 25$.

Problema 3.4. Seja $p = \sqrt{9+q}$ a inversa da função oferta. Ache o excedente do produtor com $q_f = 7$.

Problema 3.5. A quantidade demandada q_{conc} e o preço correspondente p_{conc}, sob condições de concorrência perfeita, são determinadas pela inversa da demanda $p = 36 - q^2$ e pela inversa da oferta $p = 6 + \frac{q^2}{4}$, i.e., o ponto (q_{conc}, p_{conc}) esta na interseção da curva demanda com a curva oferta. Determine os correspondentes excedente do consumidor e produtor.

Problema 3.6. Sejam $p = 20 - 3q^2$ a função inversa da demanda e $p = 2q^2$ a função inversa da oferta. Ache o excedente do consumidor e excedente do produtor sob condições de concorrência perfeita.

Problema 3.7. Sejam $C(R)$ a função consumo, $P(R)$ a função poupança, $\frac{dC}{dR}$ a propensão marginal a consumir e $\frac{dP}{dR}$ a propensão marginal a poupar. Suponha que $R = C + P$. Seja $1/3$ a propensão marginal a poupar. Suponha que quando a renda é zero o consumo é 11. Ache a função consumo.

Problema 3.8. Sejam $K(t)$ a formação de capital, $I(t) := \frac{dK}{dt}$ o fluxo de investimento líquido. Se o fluxo de investimento líquido é $I(t) = 15t^{1/4}$ e o estoque de capital inicial em $t = 0$ é 30, calcule a função formação de capital.

3.1 Respostas da Parte 3

Problema 3.1: (c) $\frac{8}{3}$.

Problema 3.2

(a) $\frac{31}{4}$

(b) $26\sqrt{13}$

Problema 3.3: (c) 36

Problema 3.4: $\frac{10}{3}$

Problema 3.5:

Neste caso o ponto (q_{conc}, p_{conc}) coincide com o ponto (q_0, p_0) do excedente do consumidor e com o ponto (q_f, p_f) do excedente do produtor. Assim sendo temos que excedente do consumidor é $32\sqrt{6}$ e o excedente do produtor é $8\sqrt{6}$.

Problema 3.6: $ec = 16$, $ep = \frac{32}{3}$

Problema 3.7: $C = \frac{2}{3}R + 11$.

Problema 3.8: $K(t) = 12t^{5/4} + 30$.

4 Exercícios Complementares

Problema 4.1. Em certa empresa, custo marginal de importação por ano é dado por $C_M(x) = 10380 - 0,06x$. Sabendo-se que os custos fixos de uma tal importação montam a 30 mil dólares, calcule a função custo.

Dica: $C_M(x) = C'(x)$

Problema 4.2. Suponha que a receita marginal de certa companhia seja dada pela função $R_M(x) = 20 - 3x$ Calcule a receita $R(x)$.

Problema 4.3. Suponha que em certo modelo de mercado tenhamos que $P = 14 - Q_d^2$ e $P = 2 + Q_0$. Calcule o excedente do consumidor e o excedente do produtor em caso de concorrência perfeita.

Problema 4.4. No estudo da distribuição de renda em uma sociedade, os economistas utilizam-se com frequência de um método que se baseia nas chamadas curvas de Lorenz, que foram introduzidas em 1905 pelo economista Max O. Lorenz. As curvas de Lorenz são gráficos de certas funções contínuas $f : [0, 1] \to [0, 1]$ e tais que:

- f é crescente;
- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$;
- $f(x) \leqslant x$, para todo $x \in [0, 1]$.

Note que uma curva de Lorenz está sempre contida no retângulo $[0, 1] \times [0, 1]$ do plano. Além disso, se $x = \frac{i}{100}$ e $y = \frac{j}{100}$, então

$$f(x) = y$$

se, e somente se, $i\%$ da população mais pobre recebe $j\%$ da renda total da sociedade.

Suponha que a distribuição de renda de uma certa sociedade seja dada pela função $f : [0, 1] \to [0, 1]$, em que $f(x) = \frac{4}{5}x^2 + \frac{1}{5}x$. Verifique essa função satisfaz as propriedades de uma curva de Lorenz e calcule a renda de 50% da população mais pobre.

Problema 4.5. Suponha que a distribuição de renda de uma sociedade seja dada pela função

$$g : [0,1] \to [0,1],$$

em que $g(x) = x$ para todo $x \in [0,1]$. A curva de Lorenz dada por $y = g(x)$ é chamada de reta de perfeita equidade. Note que, neste caso,

$$g(\frac{i}{100}) = \frac{i}{100}.$$

Isso significa que $i\%$ da população mais pobre recebe os mesmos $i\%$ da renda total da sociedade. Para mensurar a aproximação da curva de Lorenz com a reta de perfeita equidade, em 1912, o estatístico Conrado Gini introduziu o chamado índice de Gini.

O coeficiente de desigualdade, ou índice de Gini de uma curva de Lorenz $f : [0,1] \to [0,1]$ é dado por

$$L = 2\int_0^1 [x - f(x)]\, dx.$$

Suponha em que duas sociedades tenhamos as distribuições de renda definidas por $f_1(x) = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}x^2$ e $f_2(x) = \frac{1}{6}x + \frac{5}{6}x^2$. Qual sociedade possui distribuição de renda mais uniforme e porquê?

4.1 Respostas dos exercícios complementares

Problema 4.1 $C(x) = 3(10000 + 3460x - 0,01x^2)$

Problema 4.2 $R(x) = 20x - \frac{3}{2}x^2$

Problema 4.3 Excedente do consumidor = 18 e excedente do produtor = $\frac{9}{2}$

Problema 4.4 50% da população mais pobre recebe 30% da renda total da sociedade

Problema 4.5 A primeira sociedade.