1^0 Lista de Exercício de MAT5771 (1^0 semestre 2019)

Esta lista contêm problemas cujas soluções poderão ser cobradas em prova.

Bibliografia Principal:

1. M. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides.
2. S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Universitext, Springer.
3. J. Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Universitext, Springer.
4. R.S. Palais, C-L Terng, *Critical Point Theory and Submanifold Geometry*, Lectures Notes in Mathematics 1353, Springer Verlag. (see Terng).

Bibliografia de Apoio:

1. R. Bisphop, R. Crittenden, *Geometry of Manifolds*, AMS, Chelsea.
2. C. Gorodski, *Notes on Riemannian Geometry*, Notas de Aula, IME-USP, 2007.
3. W. Kuhnel, *Differential Geometry, Curves-surfaces-manifolds.* American Mathematical Society, Second Edition 2005.
4. P. Petersen, *Riemannian Geometry*, Graduate texts in mathematics, Springer.
5. M. Spivak, *A comprehensive Introduction to Differential Geometry,* V. 1 Publish or Perish,Inc. 1979.

1. Variedades Riemannianas

1.1. Recordação: Variedades e Cálculo no $\mathbb{R}^n$.

Problema 1.1.

a) Sejam $F : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ de classe C^n e $p \in \Omega$. Prove que existe $\delta > 0$ tal que para todo $q \in B_\delta(p)$ temos que $\operatorname{Rank} DF(q) \geq \operatorname{Rank} DF(p)$.

b) Seja $G : \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}^k$ uma aplicação suave. Prove que G é uma submersão se e somente se $\{\nabla g_1, \ldots, \nabla g_k\}$ são linearmente independentes, onde $G(p) = (g_1(p) \ldots g_k(p))$, para cada $p \in \mathbb{R}^{m+k}$.

Problema 1.2. Prove os teoremas de Imersão, de Submersão, da Função Implícita e do Posto.

Problema 1.3. Parametrize as superfícies abaixo:

a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$
b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$
c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y + 3z = 10, x^2 + y^2 \leq 1\}$
d) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 9, 0 \leq z \leq 20 + 2x - y\}$
e) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\}$
f) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y^2 + x^2 - z^2 = 1\}$
g) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}$

Problema 1.4. Seja $G : \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}^k$ uma submersão suave, e $G(p) = (g_1(p), \ldots, g_k(p))$, para cada $p \in \mathbb{R}^{m+k}$. Sejam c um valor regular de G, $M := G^{-1}(c)$ e $q \in M$. Dado que

$$T_q M := \{v \in \mathbb{R}^{m+k} \,:\, \langle \nabla g_i(q), v \rangle = 0, \text{ para cada } i = 1, 2, \ldots, k-1, k\}$$

prove que

(a) se $\alpha : (-\epsilon\,, \epsilon) \to M$, com $\epsilon > 0$, e α é diferenciável, então $\alpha'(0) \in T_{\alpha(0)}M$.
(b) Dado $v \in T_q M$, existe uma curva diferenciálvel $\beta : (-\delta\,, \delta) \to M$ tal que $\beta(0) = q$ e $\beta'(0) = v$.

Problema 1.5. Seja $G : \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}^{k}$ uma submersão suave e $M := G^{-1}(c)$. Dado $p \in M$ prove que M é localmente descrito como gráfico em relação ao espaço tangente T_pM.

Problema 1.6. Seja $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ a aplicação definida por $f(A) = A\,A^t$, onde $M_n(\mathbb{R})$ são as matrizes quadradas $n \times n$ com entradas reais, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ são as matrizes simétricas com entradas reais, e A^t denota a matriz transposta de A.

a) Verifique que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial real.
b) Verifique f é de clase C^{∞}.
c) Prove $\mathbb{O}_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,:\, A\,A^t = I\}$ é uma subvariedade compacta mergulhada de $M_n(\mathbb{R})$.
d) Determine a dimensão de $\mathbb{O}_n(\mathbb{R})$.
e) Verifique que $\mathbb{SO}_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,:\, A\,A^t = I \text{ e } det(A) = 1\}$ é uma variedade compacta.
f) Verifique que $\mathbb{G}l_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,: det(A) \neq 0\}$ é variedade não compacta
g) Verifique $\mathbb{S}l_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,: det(A) = 1\ \}$ é variedade não compacta.

Problema 1.7. Determine $T_I\mathbb{O}_n(\mathbb{R})$, $T_A\mathbb{O}_n(\mathbb{R})$, onde A é qualquer matriz em $\mathbb{O}_n(\mathbb{R})$ e I é o a matriz identidade de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. O que você pode dizer sobre $T_I\mathbb{SO}_n(\mathbb{R})$? E sobre $T_B\mathbb{SO}_n(\mathbb{R})$, para $B \in \mathbb{SO}_n(\mathbb{R})$?

Problema 1.8. Seja $f : \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}$ uma função suave. Seja $G : \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}^{k}$ uma submersão suave, com $G(p) = (g_1(p), \ldots,\ g_k(p))$, para cada $p \in \mathbb{R}^{m+k}$. Sejam c um valor regular de G, e definamos $M := G^{-1}(c)$. Prove que se $f\,|_{\,M}$ tem um máximo ou mínimo local em $q \in M$ então $\nabla f(q) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(q)$.

Problema 1.9. Seja $G : \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}^{k}$ uma submersão C^{∞}, com $G(p) = (g_1(p), \ldots,\ g_k(p))$, para cada $p \in \mathbb{R}^{m+k}$. Sejam c um valor regular de G, e definamos $M := G^{-1}(c)$. Seja $a \in \mathbb{R}^{m+k} \setminus M$, e definamos $h_a : \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}$ como $h_a(x) = ||x - a||^2$. Prove que se q é ponto mínimo para h_a então $a - p$ é ortogonal a M.

Problema 1.10. Sejam $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \frac{(x-2)^2}{9} + y^2 + z^2 = 1\}$ e $f(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2$.

a) Determine a equação do plano tangente a superfície S no ponto $(3, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$
b) Determine o <u>valor máximo</u> e o <u>valor mínimo</u> da função f restrita a superfície S e os <u>pontos</u> onde f assume tais valores.

Problema 1.11. Determine o volume da maior caixa retangular com arestas paralelas aos eixos e que pode ser inscrita no elipsóide $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 = 36$.

Problema 1.12. Sejam H e K dois subgrupos fechados de $\mathbb{O}_n(\mathbb{R})$, e suponha que eles são variedades. Seja $\phi : K \longrightarrow H$ um homomorfismo de grupos que é de classe C^∞. Prove que $d\phi$ tem posto constante.

Problema 1.13. Definamos $\mathfrak{so}_n := T_I\mathbb{O}_n(\mathbb{R})$. Fixe $A \in \mathfrak{so}_n$, e seja a curva

$$\begin{array}{rccc} \alpha_A : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \\ & t & \longrightarrow & exp\,(tA) \end{array}$$

Prove que α_A é uma curva suave e que $\alpha_A(t)$ está em $\mathbb{SO}_n(\mathbb{R})$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Problema 1.14. Seja $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$, e defina A_ξ como a matriz $\begin{pmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix}$.

Prove que:

a) $A_\xi(v) = \xi \times v$, para todo $v \in \mathbb{R}^3$.

b) Dada a curva

$$\begin{array}{rccc} \alpha_A : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \\ & t & \longrightarrow & exp\,(tA_\xi), \end{array}$$

fixando $t \in \mathbb{R}$, $\alpha(t)$ é uma rotação que fixa ξ e tem velocidade angular $||\xi||$.

Problema 1.15. Seja $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$. Prove que:

a) Existem matrices $B, C \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ tais que B é simétrica, C é antisimétrica e $A = B + C$;

b) $\operatorname{Div} \vec{A}(x) = \operatorname{Div} \vec{B}(x)$;

c) $\operatorname{Rot} \vec{A}(x) = \operatorname{Rot} \vec{C}(x)$;

d) dado $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$, e definindo A_ξ como seguinte matriz $\begin{pmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix}$, prove que se $F(x) = \vec{A}_\xi(x)$, então $\operatorname{Rot} F = 2\,\xi$. Conclua que $||\operatorname{Rot} F|| = 2$ vezes a velocidade angular.

Problema 1.16. Seja $\vec{F}(x_1, x_2) = f_1(x_1, x_2)\,\vec{e}_1 + f_2(x_1, x_2)\,\vec{e}_2$, onde $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são suaves. Suponha que para $\epsilon_0 > 0$ temos que $\vec{F}(\epsilon_0, 0) = a\,\vec{e}_1$ onde $a \neq 0$. Seja ϕ_t o fluxo de $\vec{F}$. Verifique que existe uma vizinhança Ω_0 de $(0,0)$ tal que a aplicação $\hat{\phi} : \Omega_0 \to \Omega_1$, definida por $\hat{\phi}(t, x_2) = \phi_t(\epsilon_0, x_2)$ é um difeomorfismo. A aplicação $\hat{\phi}$ costuma ser chamada **retificação do fluxo**.

Problema 1.17. Considere o campo linear $\vec{F}$ em $\mathbb{R}^2$, definido como

$$\vec{F}(x) = \lambda_1 x_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 x_2 \vec{e}_2,$$

i.e.,

$$F(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

a) Esboce o fluxo para $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$.

b) Seja $\hat{\phi}$ a retificação do fluxo, vide Problema 1.16. Definindo $A(t, s) = \det(D\hat{\phi}(t, s))$ como o elemento de área, verifique que

$$\operatorname{Div} \vec{F}(\epsilon, 0) = \frac{d}{dt}\left[\ln A(t, 0)\right]\big|_{t=0}.$$

Problema 1.18. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ a trajetoria de uma partícula sobe a ação de uma força conservativa com energia potêncial U, i.e, $m\alpha^{''}(t) = -\nabla U(\alpha(t))$. Seja $E(q, v)$ a energia total, i.e., $E(q, v) = \frac{1}{2}m\langle v, v\rangle + U(q)$. Verifique que $E(\alpha, \alpha^{'})$ é constante, i.e., a energia total é constante ao longo de α.

Problema 1.19. Seja $\vec{F} \in \mathfrak{X}(\Omega)$ onde Ω é aberto conexo em $\mathbb{R}^n$. Prove que as afirmações abaixo são equivalentes:

1. $\vec{F}$ é conservativo,
2. o trabalho de $\vec{F}$ independe do caminho,
3. o trabalho ao longo de um caminho fechado é zero.

Problema 1.20. Dado aberto Ω em $\mathbb{R}^n$, considere campos $\vec{F}, \vec{G} \in \mathfrak{X}(\Omega)$ definidos como $\vec{F} = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $\vec{G} = \sum_j g_j \frac{\partial}{\partial x_j}$. Seja $[\vec{F}, \vec{G}]$ o campo definido como $[\vec{F}, \vec{G}]\, h = \vec{F}\vec{G}\, h - \vec{G}\vec{F}\, h$, para todo $h \in C^\infty(\Omega)$. Prove que $[\vec{F}, \vec{G}] = \nabla_{\vec{F}}\vec{G} - \nabla_{\vec{G}}\vec{F}$, onde $\nabla_X \vec{F}_p := (p\, ,\, D(F)_p X\,)$.

1.2. Variedades e Métricas.

Problema 1.21. Seja M^2 superfície mergulhada em $\mathbb{R}^3$ invariante por rotação no eixo x_3, ou seja, uma superfície de rotação. Seja g a métrica induzida em M do espaço Euclidiano, i.e., $g = i^* g_0$ onde g_0 é a métrica Euclidiana e $i : M \to \mathbb{R}^3$ é a inclusão. Considere a parametrização $\varphi : \Omega \to M$ definida como $\varphi(t\, ,\, \theta\,) = (r\,(t\,)\cos(\theta\,)\, ;\, r(t)\sin(\theta\,)\, ;\, h\,(t\,)\,)$ onde $(r\,(t\,)\, ;\, 0\, ;\, h\,(t\,))$ é uma paramatrização da curva geratriz. Determine $\varphi^* g$, i.e., descreva a *primeira forma* em termos de dt e $d\theta$.

Problema 1.22. Sejam $X, Y \in \mathfrak{so}(\mathfrak{n}) := T_e SO(n)$ e considere os difeomorfismos $L_g : SO(n) \to SO(n)$ e $R_g : SO(n) \to SO(n)$ definidos como $L_g(x) = gx$ e $R_g(x) = xg$. Verifique:

1. $dL_g X = gX$ e $dR_g X = Xg$.
2. $\mathrm{Ad}(g)Y := \frac{d}{dt}(g\exp(tY)g^{-1})|_{t=0} = gYg^{-1} \in \mathfrak{so}(\mathfrak{n})$
3. Usando o fato (não precisa demonstrar) que $\frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(\exp(tX))Y|_{t=0} = [\vec{X}, \vec{Y}](e)$ onde $\vec{X}(g) := dL_g X$ e $\vec{Y}(g) := dL_g Y$ mostre que $[\vec{X}, \vec{Y}](e) = XY - YX$ (comutador de matrizes).

Problema 1.23. Considere $\mathfrak{so}(n) = T_e SO(n)$ com produto interno definido como $\langle X, Y\rangle_e = \mathrm{Re}\,\mathrm{tr} XY^t$ onde $X, Y \in \mathfrak{so}(n)$. Defina uma métrica em $SO(n)$ como $\langle \tilde{X}, \tilde{Y}\rangle_g := \langle dL_{g^{-1}}\tilde{X}, dL_{g^{-1}}\tilde{Y}\rangle_e$. Conclua que tal métrica é bi-invariante, ou seja L_g e R_g são isometrias para todo $g \in SO(n)$.

Problema 1.24. Prove que toda variedade M admite uma métrica Riemanniana.

Problema 1.25. Considere um difeomorfismo $F : (M, g) \to (M, g)$ de uma variedade Riemanniana (M, g). Prove que se $F^* g = g$ (i.e, se ele é uma isometria) então F preserva distância, ou seja $d\big(F(x), F(y)\big) = d(x, y)$ para todo $x, y \in M$.

Problema 1.26. Considere $\mathbb{H}^2$ o modelo hiperbólico do semi-plano superior, ou seja $\mathbb{H}^2 := \{x+iy \,|\, y>0\}$ com métrica $g=\frac{1}{y^2}\big(dx^2+dy^2\big)$. Considere o difeomorphismo $F:\mathbb{H}^2\to\mathbb{H}^2$ definido como $F(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ onde $ad-bc=1$ e $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Prove que F é uma isometria.

Sugestão: Verifique que $\mathrm{Im}(F(z))=\frac{\mathrm{Im(z)}}{|cz+d|^2}$ e utilize o fato de variável complexa que $\frac{d}{dt}(F\circ\alpha)=\frac{dF}{dz}(\alpha(t))\alpha'(t)$ para $t\to\alpha(t)=x(t)+iy(t)$, afim de concluir que $\sqrt{g(\frac{d}{dt}F\circ\alpha\,,\,\frac{d}{dt}F\circ\alpha)}=\sqrt{g(\alpha'(t)\,,\,\alpha'(t))}$

Problema 1.27 (* Espaço hiperbólico)**.** Neste problema iremos ver as diferentes representações do espaço hiperbólico.

(a) O *espaço de Minkowski* é definido como $\mathbb{R}^{n+1}$ com a forma quadratica $\langle x,x\rangle=-x_0^2+x_1^2+\cdots+x_n^2$. Considere $\mathbb{H}^{n+1}$ a subvariedade de $\mathbb{R}^{n+1}$ definida como: $\mathbb{H}^n:=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}|\langle x,x\rangle=-1,x_0>0\}$. Verifique que a forma quadratica $-dx_0^2+dx_1^2+\cdots+dx_n^2$ restrita a $\mathbb{H}^n$ é uma métrica Riemanniana g.

(b) Seja f a *pseudo-inversão* com polo $s=(-1,0,\cdots,0)$ definida por $f(x)=s-\frac{2(x-s)}{\langle x-s,x-s\rangle}$, onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é a forma quadratica definida no Item (a). Para $X=(0,X_1,\ldots,X_n)$ no plano $x_0=0$ denote $|X|^2:=\langle X,X\rangle=\sum_{i=1}^n X_i^2$. Mostre que f é difeomorfismo de $\mathbb{H}^n$ no disco unitário $\{x\in\mathbb{R}^n,|x|<1\}$ e que $g_1:=(f^{-1})^*g=4\sum_{i=1}^n\frac{dx_i^2}{(1-|x|^2)^2}$.

(c) Seja h a inversão no $\mathbb{R}^n$ definida como $h(x):=s+\frac{2(x-s)}{|x-s|^2}$, com polo $s=(-1,0,\ldots,0)$. Mostre que h é um difeomorfismo do disco unitário no semi-espaço $x_1>0$ e que $h^*g_1=\sum_{i=1}^n\frac{dx_i^2}{x_1}$.

Obtemos assim duas variedades Riemannianas que são isométricas a $(\mathbb{H}^n,g)$, a primeira é chamada *disco de Poincaré* (Item (b)) e a segunda *semi-espaco de Poincaré* (Item (c)).

Sugestão Consulte e.g. Gallot, Hulin, Lafontaine (Seção 2.A, página 56,57) e Carmo (Capitulo 8, página 196,197).

Problema 1.28. Sejam g_1 e dr^2 métricas canônicas de $\mathbb{S}^{n-1}$ e $I=(0,\infty)$, respectivamente. Defina em $\mathbf{S}^{n-1}\times I$ a metrica $g_{(m,r)}:=r^2g_1+dr^2$.

(a) A métrica g é métrica produto?

(b) Mostre $(\mathbb{S}^{n-1}\times I\,,\,g)$ é isométrico a $(\mathbb{R}^n\backslash 0\,,\,\mathrm{can})$ e que $(\mathbb{S}^{n-1}\times I, g_1\times dr^2)$ é isométrico ao cilindro $\{x\in\mathbb{R}^{n+1}\,|\,x_1^2+\ldots+x_n^2=1,\mathrm{e}\, x_0>0\}$.

Sugestão: Consulte Gallot, Hulin, Lafontaine (Seção 2.A, página 58,59).

Problema 1.29 (*)**.** Sejam (E,π,B) e $(\tilde{E},\tilde{\pi},B)$ fibrados vetorias de posto n. Dizemos que eles são *isomorfos* se existe uma aplicação $F:E\to\tilde{E}$ tal que $\pi=\tilde{\pi}\circ F$ e $F:E_p\to\tilde{E}_p$ é um isomorfismo. Em particular um fibrado (E,π,B) de posto n é chamado *fibrado trivial* se ele é isomorfo a $B\times\mathbb{R}^n$.

(1) Mostre que $SO(n)$ tem fibrado tangente trivial.

(2) Mostre que o fibrado tangente da esfera $\mathbb{S}^2$ não é trivial.

Problema 1.30. Seja $\{(U_\alpha,\psi_\alpha)\}$ uma atlas de uma variedade M. Utilize tal atlas para construir um atlas para o fibrado tangente $TM:=\cup_{p\in M}T_pM$ demonstrando que TM é uma variedade. Qual seria uma parametrização para uma vizinhança do fibrado cotangente $TM^*=\cup_{p\in M}T_pM^*$?

Problema 1.31. Considere (M, g) variedade Riemanniana e considere o Lagrangeano $L : TM \to \mathbb{R}$ definido como $L(v_q) = \frac{1}{2} g(v_q, v_q)$. Defina a transformada de Legendre $\mathcal{L} : TM \to TM^*$ como $\mathcal{L}(v_q) w_q := \frac{d}{dt} L(v_q + t\, w_q)|_{t=0}$. Verifique que $\mathcal{L}$ é bijetora.

Problema 1.32. Seja G um grupo de Lie compacto. Demonstre que G admite métrica bi-invariante.

Problema 1.33. Seja H subgrupo fechado de um grupo de Lie G. Mostre que a ação $G \times H \to G$ definida como $g \cdot h := gh$ é uma ação a direita, livre, própria.

Problema 1.34. Verifique os difeomorfismos abaixo:

(a) $\mathbb{S}^n = SO(n+1)/SO(n)$.
(b) $P^n(\mathbb{R}) = SO(n+1)/S(O(n) \times O(1))$.
(c) $P^n(\mathbb{C}) = SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$.

Problema 1.35. Seja G um grupo discreto (i.e., com topologia discreta). Suponha que G age em uma variedade M. Mostre que a ação é *propriamente descontinua* se e somente se a ação é livre e própria.

Problema 1.36. Seja G um subgrupo discreto de isometrias de uma variedade Riemanniana M. Mostre que M/G é variedade Riemanniana e $\pi : M \to M/G$ é recobrimento Riemanniano.

Comentário: O Problema 1.36 deve ser resolvido diretamente, i.e., sem utilizar o Problema 1.38.

Problema 1.37. Seja $\{a_i\}$ uma base de $\mathbb{R}^n$. Um lattice Γ associado a esta base é o conjunto de todos os vetores $\sum k_j a_j$ para $k_j \in \mathbb{Z}$. Identificando Γ com o subgrupo de translações podemos fornecer ao quociente $\mathbb{R}^n/\Gamma$ estrutura de variedade (vide Problema 1.36).

(a) Mostre que existe um difeomorfismo $\hat{p} : \mathbb{R}^n/\Gamma \to T^n$.
(b) Seja g_Γ métrica definida em T^n tal que $\hat{p} : \mathbb{R}^n/\Gamma \to T^n$ é isometria, onde a métrica em $\mathbb{R}^n/\Gamma$ foi definida no Problema 1.36. Mostre que g_Γ e $g_{\tilde{\Gamma}}$ definidas em T^n são isométricas se e somente se existe uma isometria em $\mathbb{R}^n$ que envia o lattice Γ no lattice $\tilde{\Gamma}$.

Problema 1.38. Sejam M variedade Riemanniana com métrica g^M e G subgrupo fechado de isometrias de M. Suponha que a ação $G \times M \to M$ é livre. Então existe uma métrica $g^{M/G}$ em M/G tal que $\pi : (M, g^M) \to (M/G, g^{M/G})$ é submersão Riemanniana.

Comentário: Visto que $P^n(\mathbb{C}) = S^{2n+1}/S^1$, segue do teorema acima que a submersão $\pi : S^{2n+1} \to S^{2n+1}/S^1$ induz uma métrica Riemanniana em $P^n(\mathbb{C})$. Tal métrica é chamada de métrica de *Fubini-Study*.

1.3. Recordação: Formas diferenciáveis.

Problema 1.39. a) Sejam η um $(0\,,\,n)$ tensor aleternado em $\mathbb{R}^n$.
Verifique que $\eta \,=\, c\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1} \wedge dx_n$, onde c é uma constante real. Conclua que se ω é uma n- forma suave em $\mathbb{R}^n$, então $\omega \;=\; f\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1} \wedge dx_n$, onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é suave.

b) Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Prove que se ω é $(0\,,\,n)$ tensor alternado em $\mathbb{R}^n$, então

$$\omega\,(A\,v_1\,,\,A\,v_2\,,\,\ldots\,,\,A\,v_n) \,=\, det\,(A\,)\,\omega\,(v_1\,,\,v_2\,,\,\ldots\,,\,v_n).$$

Conclua que se $\phi : \Omega_0 \subset \mathbb{R}^n \to \Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação suave e ω é uma n-forma

$$f\,dx_1 \,\wedge\, dx_2 \,\wedge\, \ldots\, dx_{n-1} \,\wedge\, dx_n,$$

então

$$\phi^*\omega \,=\, f\,\circ\,\phi\; det\,(D\,\phi\,)\,dx_1 \,\wedge\, dx_2 \,\wedge\, \ldots\, dx_{n-1} \,\wedge\, dx_n.$$

Problema 1.40.
a) Sejam $\alpha\; \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada e $\hat{F}\,(\cdot) \,=\, \langle \vec{F}\,,\,\cdot\,\rangle$. Verifique que

$$\alpha^*\,\hat{F} \,=\, \langle \vec{F}\,(\alpha\,(t\,))\,,\,\alpha'(t\,)\,\rangle\,dt$$

b) Sejam

$$\begin{aligned} \psi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \;&\longrightarrow\; \mathbb{R}^3 \\ (\mu_1\,,\,\mu_2) \;&\longrightarrow\; \Big(\psi_1(\mu_1,\mu_2)\,,\,\psi_2(\mu_1,\mu_2)\,,\,\psi_3(\mu_1,\mu_2)\Big) \end{aligned}$$

um mergulho e $\omega \,=\, f_1\,dx_2 \,\wedge\, dx_3 \,-\, f_2\,dx_1 \,\wedge\, dx_3 \,+\, f_3\,dx_1 \,\wedge\, dx_2$, i.e.,

$$i_{\vec{F}}\,dx_1 \,\wedge\, dx_2 \,\wedge\, dx_3(V_1,V_2) \,=\, \omega\,(V_1\,,\,V_2) \,=\, det\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ v_{1\,1} & v_{1\,2} & v_{1\,3} \\ v_{2\,1} & v_{2\,2} & v_{2\,3} \end{bmatrix},$$

onde cada $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é suave. Verifique que $\psi^*\,\omega \,=\, \langle \vec{F}\,\circ\,\psi\,,\,\frac{\partial\,\psi}{\partial\,\mu_1} \,\times\, \frac{\partial\,\psi}{\partial\,\mu_2}\,\rangle\,d\mu_1 \wedge d\mu_2$, onde $\vec{F} \,=\, \sum_{i=1}^3 f_i\,\frac{\partial}{\partial\,x_i}$.

Problema 1.41. Prove que
a) $d\,(i_{\vec{F}}\,dx_1 \,\wedge\, dx_2 \,\wedge\, dx_3) \,=\, div\,\vec{F} dx_1 \,\wedge\, dx_2 \,\wedge\, dx_3$.

b) $d\,\hat{F} \,=\, i_{rot\vec{F}}\,dx_1 \,\wedge\, dx_2 \,\wedge\, dx_3$

Problema 1.42. Sejam

$$\vec{E}\,(t\,,\,\cdot\,) \,=\, \sum_{i=1}^{3} E_i(t\,,\,\cdot\,)\,\frac{\partial}{\partial\,x_i} \;\;\text{e}\;\; \vec{B}\,(t\,,\,\cdot\,) \,=\, \sum_{i=1}^{3} B_i(t\,,\,\cdot\,)\,\frac{\partial}{\partial\,x_i}$$

e F uma 2-forma em $\mathbb{R}^4$ definida como

$$F\,([t\,,\,x_1\,,\,x_2\,,\,x_3]\,;\,[\tilde{t}\,,\,\tilde{x}_1\,,\,\tilde{x}_2\,,\,\tilde{x}_3]) \,=\, \begin{bmatrix} t_1, & x_1, & x_2, & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{t}_1 \\ \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix}.$$

a) Descreva F em termos de $d\,t$ e $d\,x_i$;

b) verifique que $dF = 0$ se e somente se $\frac{dB}{dt} = -\nabla \times E$ e $\operatorname{div}(B) = 0$;

c) seja $\epsilon_\mu = \begin{cases} 1 & se \quad \mu = 0; \\ -1 & se \quad \mu = 1, 2, 3. \end{cases}$
e considere o operador linear $* \; \Omega^2(\mathbb{R}^4) \to \Omega^2(\mathbb{R}^4)$ definido como

$$*dx^\mu \wedge dx^\nu = \epsilon_\mu \epsilon_\nu \, dx^\rho \wedge dx^\sigma,$$

onde (μ, ν, ρ, σ) é uma permutação par de $(0, 1, 2, 3)$ e $dt = dx_0$. Verifique que $d * F = 0$ se e somente se $\frac{dE}{dt} = \nabla \times B$ e $\operatorname{div}(E) = 0$.

Problema 1.43. Sejam (M^m, g) variedade Riemanniana orientada e ω a m-forma volume (i.e, a única m-forma tal que $\omega(e_1, \ldots, e_m)_p = 1$ para qualquer referencial ortonormal $\{e_i\}$ de T_pM coerente com a orientação de T_pM). Mostre que em coordenadas $\omega = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$.

Problema 1.44.

a) Enuncie o teorema de Stokes para formas diferenciáveis em variedade com bordo.
b) Prove o teorema de Stokes em dimensão 2.

Problema 1.45. Seja S superfície mergulhada orientável em $\mathbb{R}^3$ e $\vec{n}$ o vetor unitário normal a S dando sua orientação. Seja $I : S \to \mathbb{R}^3$ a inclusão e considere $\mathcal{A}$ o elemento de área de S ou seja, $\mathcal{A}$ é a 2-forma definida como $\mathcal{A} := I^*(i_{\vec{n}} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)$. Mostre que: $\langle \vec{F}, \vec{n} \rangle \mathcal{A} = I^*(i_{\vec{F}} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)$

Problema 1.46. Sejam M^3 uma variedade orientável com bordo em $\mathbb{R}^3$ e $\vec{F} = \sum_{i=1}^3 f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Prove que

$$\int_M \operatorname{div}(\vec{F})\; dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = \int_{\partial M} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle \mathcal{A},$$

onde $\vec{n}$ é unitário, ortogonal a ∂M apontando para fora, e ∂M tem orientação induzida.

Problema 1.47. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superficie mergulhada orientável com bordo. Então

$$\int_S \langle Rot(\vec{F}), \vec{n} \rangle \mathcal{A} = \int_{\partial S} \langle \vec{F}, \vec{t} \rangle \mathcal{L},$$

onde $\vec{F} = \sum_{i=1}^3 f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, o bordo ∂S tem orientação induzida, $\mathcal{A}$ é o elemento de área e $\mathcal{L}$ é o elemento de comprimento de ∂S, ou seja a 1-forma volume de ∂S dual ao vetor $\vec{t}$ que dá a orientação de ∂S.

Problema 1.48. Calcule $\int_{\mathbb{S}^2} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle \mathcal{A}$, onde $\vec{n}$ é vetor unitário apontando para fora da esfera $\mathbb{S}^2$ e $\vec{F} = (x^3 + z^3)\frac{\partial}{\partial x} + (y^3 + z^3)\frac{\partial}{\partial y} + \cos(x^2 + y^4)\frac{\partial}{\partial z}$

Resposta: $8\pi/5$.

Problema 1.49. Calcule $\int_C \langle \vec{F}\,, \vec{t}\,\rangle\,\mathcal{L}$, onde C é a curva que é a interseção da esfera de raio 1 com $z = \frac{1}{2}$ orientada no sentido anti-horário quando visto de cima e $\vec{F} = (-y + \cos(x^2))\frac{\partial}{\partial x} + (x + \sin(y^2))\frac{\partial}{\partial y}$.

Resposta: $3\pi/2$.

Problema 1.50. Considere a 1-forma $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 - \{0,0\})$ definida como $\omega := \frac{1}{x^2+y^2}\big(-ydx + xdy\big)$.

(a) verifique que ω é fechada, ou seja $d\omega = 0$,
(b) verifique que $\int_{S^1} \omega = 2\pi$,
(c) conclua que ω não é exata, ou seja não existe η tal que $d\eta = \omega$.

Problema 1.51 (**Lema de Poincaré). Dado um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ denotamos $H^k(U)$ o grupo de cohomologia de de Rham, i.e., o conjunto das k-formas fechadas em U (i.e, $d\omega = 0$ onde ω é k-forma em U) quociente pelas formas exatas (i.e., $\omega = d\eta$ onde η é $k-1$ forma).

a) Sejam

$$\begin{array}{rcc} s : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & (x\,, 0\,) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcc} \pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x\,, t\,) & \to & x. \end{array}$$

Prove que se $\pi^* \circ s^* : H^k(\mathbb{R}^{n+1}) \to H^k(\mathbb{R}^{n+1})$ é um isomorfismo então $s^* : H^k(\mathbb{R}^{n+1}) \to H^k(\mathbb{R}^n)$ é um isomorfismo.

b) Toda forma em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ pode ser vista como combinação de 2 tipos de formas:
(I) $\pi^*\phi\, f(x\,, t\,)$
(II) $\pi^*\phi\, f(x\,, t\,)\, dt$,
onde ϕ é forma em $\mathbb{R}^n$. Seja $K : \Omega^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \to \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ operador linear definido da seguinte maneira:
(I) $K(\pi^*\phi\, f(x\,, t\,)) = 0$
(II) $K(\pi^*\phi\, f(x\,, t\,)) = \pi^*\phi \int_0^t f\,(x\,, s\,)\, ds$
Prove que $1 - \pi^* s^* = (-1)^{k-1} dK - K\,d$.

c) Conclua que

$$H^k(\mathbb{R}^n\,) = \begin{cases} 0 & se \quad k > 0; \\ \\ \mathbb{R} & se \quad k = 0. \end{cases}$$

Problema 1.52. Seja $\vec{F} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$. Prove que $\mathrm{Rot}\,(\vec{F}\,) = 0$ se e somente se $\vec{F}$ é conservativo.

2. Conexão e Curvatura

Problema 2.1. Sejam (E, M, π) um fibrado vetorial com conexão ∇ e $\{\xi_i\}$ um referencial local definido em uma vizinhança coordenada U em M. Para $V = \sum_k v_k \xi_k$ denote $D_X V := \sum X \cdot v_k \xi_k$.

(a) Mostre que $\nabla_X V = D_X V + A(X)V$ determinando a matriz de 1-formas A em função dos simbolos de Christoffel ($\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \xi_j = \sum_k \Gamma^k_{i\,j} \xi_k$);

(b) descreva A e em termos das 1-formas de conexão ($\nabla \xi_i = \sum_j \omega_{i\,j} \otimes \xi_j$).

Problema 2.2. Sejam (E, M, π) um fibrado vetorial com conexão ∇ e $\alpha : [0,1] \to M$ uma curva suave. Considere $V_0 \in E_{\alpha(0)}$. Demonstre que existe uma única seção V ao longo de α tal que $\frac{\nabla}{dt} V = 0$ (seção paralela) e $V(0) = V$.

Problema 2.3. Seja (M, g) variedade Riemanniana. Demonstre que ela admite uma única conexão Riemanniana, i.e, conexão em TM compatível com a métrica e livre de torção.

Problema 2.4. Sejam (M, g) e $(\tilde{M}, \tilde{g})$ variedades Riemannianas com conexões Riemannianas ∇ e $\widetilde{\nabla}$. Seja $F : M \to \widetilde{M}$ isometria. Mostre que:

(1) $dF_p \nabla_{X_1} X_2 = (\tilde{\nabla}_{\widetilde{x}_1} \widetilde{X}_2)_{F(p)}$, onde $\widetilde{X}_i \circ F = dF X_i$ para $X_i \in \mathfrak{X}(M)$.

(2) F preserva transporte paralelo.

Problema 2.5. Seja (M, g) variedade Riemanniana com conexão Riemanniana ∇. Seja $\alpha : [0,1] \to M$ curva suave por partes. Demonstre que o transporte paralelo ao longo de α induz isometria entre $T_{\alpha(0)}M$ e $T_{\alpha(1)}M$.

Problema 2.6. Seja (M, g) variedade Riemanniana e ∇ sua conexão Riemanniana. Demonstre que as afirmações abaixo são equivalentes:

(1) Para todo $p \in M$ existe uma vizinhança U de p em M e um referencial local $\{\xi_i\}$ definido em U tal que $\nabla \xi_i = 0$.

(2) O tensor curvatura R é nulo, onde $R(X,Y)\xi = \nabla_{[X,Y]}\xi - \nabla_X \nabla_Y \xi + \nabla_Y \nabla_X \xi$.

(3) Para todo $p \in M$ existe uma vizinhança U de p em M tal que o transporte paralelo em U independe do caminho.

Problema 2.7. Seja (E, M, π) fibrado vetorial com conexão ∇. Sejam $\{\xi_i\}$ um refencial local definido em uma vizinhança U de M e $\omega_{i\,j}$ as 1-formas de conexão em relação ao referencial $\{\xi_i\}$, i.e., $\nabla \xi_i = \sum_j \omega_{i\,j} \otimes \xi_j$. Considere um outro referencial local $\{\tilde{\xi}_i\}$ na vizinhança U de M. Sejam $b_{i,j}$ as funções tais $\tilde{\xi}_i = \sum_j b_{i\,j} \xi_j$. Demonstre que $\tilde{\omega} = (db)b^{-1} + b\omega b^{-1}$ onde $\tilde{\omega}$ denota a matriz de formas de conexão em relação ao referencial $\{\tilde{\xi}_i\}$.

Problema 2.8. Seja (E, M, π) fibrado vetorial com conexão ∇. Sejam $\{\xi_i\}$ um refencial local definido em uma vizinhança U de M, $\omega_{i\,j}$ as 1-formas de conexão em relação ao referencial $\{\xi_i\}$ e $\Omega_{i\,j}$ as 2-formas de curvatura em relação ao referencial $\{\xi_i\}$, i.e, $R(\cdot,\cdot)\xi_i = \sum_j \Omega_{i\,j} \otimes \xi_j$. Demonstre que $-\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega$

Problema 2.9. Sejam (M, g) variedade Riemanniana e ∇ sua conexão Riemanniana. Sejam $\{e_i\}$ um referencial ortonormal definido em uma vizinhança U, θ_i as suas 1-formas duais, i.e, $\theta_i(e_j) = \delta_{ij}$, e ω_{ij} as 1-formas de conexão em relação ao referencial $\{e_i\}$. Demonstre que:

(a) $\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$
(b) $d\theta_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \theta_j$.

Problema 2.10. Considere $SO(n)$ com uma métrica bi-invariante (vide Problema 1.23) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ campos invariantes a esquerda (recorde Problema 1.22). Mostre que:

(a) $\langle [\vec{X}, \vec{Y}], \vec{Z} \rangle = -\langle \vec{Y}, [\vec{X}, \vec{Z}] \rangle$
(b) $\nabla_{\vec{X}} \vec{Y} = \frac{1}{2}[\vec{X}, \vec{Y}]$
(c) $R(\vec{X}, \vec{Y})\vec{Z} = \frac{1}{4}[[\vec{X}, \vec{Y}], \vec{Z}]$
(d) $\langle R(\vec{X}, \vec{Y})\vec{X}, \vec{Y} \rangle = \frac{1}{4}\langle [\vec{X}, \vec{Y}], [\vec{X}, \vec{Y}] \rangle$. Em particular conclua que a curvatura sectional K é sempre maior ou igual a 0.

Problema 2.11. Seja M aberto de $\mathbb{R}^2$. Suponha que $\theta_1 = A(x, y)dx$ e $\theta_2 = B(x, y)dy$, onde θ_i foi definida em Problema 2.9. Verifique

(a) $\omega_{1\,2} = \frac{-A_y}{B}\, dx + \frac{B_x}{A} dy$ onde $A_y := \frac{\partial A}{\partial y}$ e $B_x := \frac{\partial B}{\partial x}$
(b) $K = \frac{-1}{AB}\Big(\big(\frac{A_y}{B}\big)_y + \big(\frac{B_x}{A}\big)_x\Big)$
(c) Conclua que $K = -1$ quando M é o semi-plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$, vide definição no Problema 1.26.

Problema 2.12. Faça os exercicios 1,2,3 e 8 do livro Carmo, Cap 2.

Problema 2.13. Faça os exercícios 6,7,8 do livro Carmo, Cap 4.

3. Geodésicas e campos de Jacobi

Ao longo desta seção (M, g) denotará variedade Riemanniana com métrica g.

Problema 3.1. Seja M uma superfície mergulhada de revolução em $\mathbb{R}^3$, onde g é métrica induzida. Demonstre que sua curva geratriz é geodésica de M. Conclua que os grandes círculos são geodésicas de $\mathbb{S}^2$.

Problema 3.2. Dado $q \in M$ demonstre que existe $\epsilon > 0$ tal que $\exp_q : B_\epsilon(0) \to M$ é difeomorfismo sobre um aberto de M.

Problema 3.3. Seja $e^{(\cdot)} : T_eSO(n) \to SO(n)$ a aplicação exponencial de matrizes, i.e., $e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}$.

(a) Verifique que $t \to e^{tA}$ é linha integral do campo invariante a esquerda $\vec{A}(g) = gA$.
(b) Dado uma métrica bi-invariante g de $SO(n)$ mostre que $t \to e^{tA}$ é a geodésica α com $\alpha(0) = e$ e $\alpha'(0) = A$. Conclua que $\exp_e A = e^A$ ou seja a exponencial Riemanniana em e (com respeito a g) coincide com a exponencial matricial.

Problema 3.4. Suponha que M é variedade Riemanniana compacta. Mostre que toda geodésica está definida para todos valores de $\mathbb{R}$.

Dica: Considere o campo geodésico $\vec{G} \in \mathfrak{X}(TM)$ restrito ao fibrado tangente unitario $T^1(M) := \{V_x \in T_xM, \|V_x\| = 1\}_{x \in M}$ e aplique o resultado que afirma que *todo campo suave definido em variedade compacta gera um grupo a 1 parametro de difeomorfismos.*

Problema 3.5 (*Lema de Gauss*)**.** Sejam $\exp_q : B_\delta(0) \to M$ bem definida, $S_{\tilde{\delta}}^{n-1}(0)$ esfera contida em $B_\delta(0)$ com $\tilde{\delta} < \delta$ e $v : (-\epsilon, \epsilon) \to S_{\tilde{\delta}}^{n-1}(0)$ curva suave. Defina $f(s,t) := \exp_q(tv(s))$. Demonstre que $g(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}) = 0$.

Problema 3.6. Seja $B_\delta(q)$ uma bola normal. Defina $\alpha : [0,1] \to B_\delta(q)$ como $\alpha(t) := \exp_q(tv)$ com $\|v\| < \delta$. Seja $\beta : [0,1] \to M$ curva suave por partes tal que $\alpha(0) = \beta(0)$ e $\alpha(1) = \beta(1)$. Demonstre que $L(\alpha) \leq L(\beta)$. Se a igualdade vale mostre que $\beta[0,1] = \alpha[0,1]$.

Problema 3.7 (*)**.** Dado $q \in M$ demonstre que existe vizinhança W de q tal que, se x, y pertencem a W então existe uma única geodésica minimizante ligando x a y.

Problema 3.8. Seja $\gamma : [0,1] \to M$ uma curva suave por partes tal que $d(\gamma(0), \gamma(1)) = L(\gamma)$. Mostre que γ é imagem de uma geodésica.

Problema 3.9.

(a) Demonstre que a curva $C := \{x = c, y > 0\}$ é imagem de uma geodésica do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^2$ (modelo do semi-plano).

(b) Utlizando o fato que aplicações $z \to T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $ad - bc = 1$ (a, b, c, d reais) levam C ou em semi-circulos (com centro em $\partial\mathbb{H}^2$) ou em semi retas $x = x_0$, $y > 0$ conclua que tais curvas são imagens de geodésicas de $\mathbb{H}^2$.

Problema 3.10 (*referencial geodésico em p_0*)**.** Seja p_0 um ponto fixo de M. Demonstre que:

(a) existe uma vizinhança U de p_0 e um referencial ortonormal $\{\vec{e}_i\}$ (para $i = 1 \cdots n$) suave em U tal que $\nabla_{(\cdot)}\vec{e}_i(p_0) = 0$

(b) grad $f(p_0) = \sum_i \big(\vec{e}_i \cdot f(p_0)\big)\vec{e}_i(p_0)$

(c) div $\vec{v}(p_0) = \sum_i \vec{e}_i \cdot v_i(p_0)$, onde $\vec{v} = \sum_i v_i\vec{e}_i$

(d) $\triangle f(p_0) = \sum_i \big(\vec{e}_i \cdot (\vec{e}_i \cdot f)\big)(p_0)$

(e) $\triangle\big(fg\big)(x) = f(x) \triangle g(x) + g(x) \triangle f(x) + 2\langle \text{grad } f, \text{grad } g\rangle(x)$, para qualquer $x \in M$, onde $f, g \in C^\infty(M)$

(f) $d\big(i_{\vec{w}} vol\big) = \text{div}\, \vec{w}\, vol$ onde vol é forma volume de M (supondo M orientável) e $\vec{w} \in \mathfrak{X}(M)$

Problema 3.11. Sejam M variedade compacta orientável, sem bordo e $f \in C^\infty(M)$. Demonstre que se $\triangle f \geq 0$ então f é constante.

Problema 3.12 (*)**.** Sejam $\vec{F}$ campo não nulo em p e S uma hipersuperfície transversal a $\vec{F}(p)$, i.e., $p \in S$ e $T_pM = T_pS \oplus \{\mathbb{R}\vec{F}_p\}$. Reduzindo S se necessário seja $\hat{\phi} : (-\epsilon, \epsilon) \times S \to M$ a retificação do fluxo de $\vec{F}$ com respeito a S. Defina $A = (\hat{\phi})^* vol$. Mostre que div $\vec{F}(p) = \frac{d}{dt}\left[\ln A\,(t\,,\,p\,)\right]\,|_{\,t=0}$.

Problema 3.13. Suponha que M é variedade Riemanniana compacta. Demonstre que:

(a) para todo $q \in M$ a aplicação exponencial $\exp_q : T_qM \to M$ está bem definida;

(b) dados q e p em M, existe um segmento de geodésica $\gamma : [0, R] \to M$ (parametrizado por comprimento de arco) ligando q a p (i.e., $\gamma(0) = q$ e $\gamma(R) = p$) que realiza distância, i.e, $L(\gamma) = R = d(q, p)$. que realiza distância (i.e,

Dica:

(a) Considere o campo geodésico $\vec{G} \in \mathfrak{X}(TM)$ restrito ao fibrado tangente unitario $T^1(M) := \{V_x \in T_xM, \|V_x\| = 1\}_{x \in M}$ e aplique o resultado que afirma que *todo campo suave definido em variedade compacta gera um grupo a 1 parametro de difeomorfismos.*

(b) Utilize os seguintes ingredientes: uma sequencia de cuvas γ_n (cada γ_n concatenação de segmentos de geodésicas) com $L(\gamma_n) \to R$; exitencia das vizinhanças completamente normais (vide Problema 3.7); o fato de M ser compacto, i.e., sequencias de pontos $\{x_n^i\}_n$ (e.,g $x_n^i \in \gamma_n$) admite subsequencia convergente.

Problema 3.14 (*)**.** Seja M variedade Riemanniana compacta não simplesmente conexa. Demonstre que por cada q existe um loop geodésico (i.,e uma geodésica $\gamma : [0, 1] \to M$ tal que $\gamma(0) = \gamma(1)$, porém $\gamma'(0)$ não precisa ser igual a $\gamma'(1)$).

Problema 3.15. Seja $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [a,b] \to M$ uma aplicação suave tal que $f(s_0, \cdot)$ é geodésica para todo $s_0 \in (-\epsilon, \epsilon)$. Demonstre que $J(t) := \frac{\partial f}{\partial s}(0,t)$ é campo de Jacobi ao longo da geodésica $\alpha(t) := f(0,t)$.

Problema 3.16. Seja δ tal que $\exp_p : B_\delta(p) \to M$ está bem definida. Defina a curva $\alpha(t) := \exp_p(tv_0)$ com $\|v_0\| = 1$ e $|t| < \delta$. Para $w \in T_pM$ considere o campo tw ao longo do segmento $t \to tv_0$. Demonstre que $J(t) := d(\exp_p)_{tv_0} tw$ é campo de Jacobi com $J(0) = 0$ e $\frac{\nabla}{dt}J(0) = w$.

Problema 3.17 (*)**.** Suponha que M é geodesicamente completa, i.e, $\exp_p : T_pM \to M$ está bem definida para todo $p \in M$. Seja $\alpha : (-\delta, \delta) \to M$ geodésica e J campo de Jacobi ao longo de α. Demonstre que $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0,t)$ para $f(s,t) = \exp_{\beta(s)}(tv(s))$ onde $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ é uma curva tal que $\beta'(0) = J(0)$ e $v : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ é um campo ao longo de β com $v(0) = \alpha'(0)$ e $\frac{\nabla}{ds}v(0) = \frac{\nabla}{dt}J(0)$.

Problema 3.18. Sejam M variedade Riemanniana com curvaturas seccionais constantes K e $\alpha : [0,a] \to M$ geodésica com vetor velocidade 1. Demonstre que o campo de Jacobi J ao longo de α com condições iniciais $J(0) = 0$ e $\frac{\nabla}{dt}J(0) = w$ para w perpendicular a $\alpha'(0)$ é $J(t) = c_K(t)w(t)$ onde $w(\cdot)$ é o transporte paralelo de w ao longo de α e c_K é a função definida como $c_K(t) := \frac{\sin(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}}$ se $K > 0$, $c_K(t) := t$ se $K = 0$ e $c_K(t) := \frac{\sinh(t\sqrt{-K})}{\sqrt{-K}}$ se $K < 0$.

Problema 3.19. Sejam (M^n, g) variedade Riemanniana com curvaturas seccionais constantes K e $\psi : (0,\delta) \times \mathbb{S}^{n-1} \to B_\delta(p)$ parametrização geodésica polar, i.e., $\psi(r,v) := \exp_p(rAv)$ onde $A : (\mathbb{R}^n, g_0) \to (T_pM, g)$ é isometria linear. Demonstre que a métrica g em coordenadas geodésicas polares é $dr^2 + (c_k(r))^2 ds^2$ onde ds^2 é a métrica canônica da esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ e a função c_K foi definida na Proposição 3.18. Em particular conclua que duas variedades Riemannianas com mesma dimensão e mesmas curvaturas seccionais constantes iguais a K são localmente isométricas.

Problema 3.20. Sejam δ tal que $\exp_p : B_\delta(p) \to M$ está bem definida. Defina $\alpha(t) = \exp_p(tv)$ com $|t| < \delta$ e $\|v\| = 1$. Então $\alpha(t_0)$ é *ponto conjugado* a $\alpha(0)$ ao longo de α (i.e, existe campo de Jacobi J com $J(0) = 0$ e $J(t_0) = 0$) se e somente se $\dim(\ker d(\exp_p)_{t_0 v}) > 0$.

Problema 3.21. Sejam $U : M \to \mathbb{R}$ função suave (potêncial) e $(s,t) \to f(s,t)$ uma variação suave própria (i.e, $f(s,0) = f(0,0)$ e $f(s,1) = f(0,1)$) onde $t \to \alpha(t) = f(0,t)$ atende $m\frac{\nabla \alpha'}{dt} = -\nabla U(\alpha(t))$ (*equação de Newton*). Verifique que $\frac{d}{ds}\mathcal{A}(0) = 0$ onde $\mathcal{A}(s) := \int_0^1 \mathcal{L}\big(\frac{\partial f}{\partial s}(s,t)\big)dt$ e $\mathcal{L}(V_x) := \frac{m}{2}g(V_x, V_x) - U(x)$;

Problema 3.22 (*)**.** Seja α curva atendendo a equação de Newton $\frac{\nabla \alpha'}{dt} = -\nabla U(\alpha(t))$. Demonstre que

(a) $E(\alpha'(t)) = c$ onde $E(V_x) = \frac{1}{2}g(V_x, V_x) + U(x)$.
(b) existe uma função h e um intervalo I tal que $\beta = \alpha \circ h|_I$ é geodésica para a métrica $\tilde{g} = (c - U)g$

Dica: compare $\widetilde{\nabla}$ com ∇ e lembre que $\frac{\widetilde{\nabla}}{dt}\beta'(t) = \alpha'(h(t))h''(t) + \frac{\widetilde{\nabla}}{dt}\alpha'(h(t))(h'(t))^2$