Introdução a Geometria Riemanniana

Marcos M. Alexandrino (USP)

Sumário

Prefácio

Estas são notas de aula do curso Introdução a Geometria Riemanniana o qual esta sendo ministrado no Departamento de Matemática do IME-USP durante o primeiro semestre de 2019, ministrado pelo Prof. associado Marcos. M. Alexandrino.

A referências para este curso (no qual estas notas foram baseadas) são:

BIBLIOGRAFIA PRINCIPAL: [3], [6], [7] e [8].

BIBLIOGRAFIA DE APOIO: [1],[2], [4], [5], [9].

As notas aqui apresentadas estão **ainda em preparação.** Haja vista que elas estão sendo digitadas simultaneamente com o curso devem conter imprecisões e erros tipográficos. Também o sistema de referência e citações ainda será implementado.

Sugestões e correções são bem vindas e podem ser enviadas para alexandrino.usp@gmail.com

Parte I

Ferramentas básicas

CAPíTULO 1

Do cálculo a teoria de variedades

Neste capítulo vamos apresentar alguns resultados sobre teoria das variedades e fixar algumas notações. Não temos intensão de desenvolver neste curto capítulo toda a teoria de variedades. No entanto, por meio de recordações de alguns resultados e exercícios de *Analise no* $\mathbb{R}^m$ ou *Cálculo Avançado*, esperamos destacar ao leitor ou leitora que muitos dos conceitos e resultados sobre variedades que iremos utilizar são generalizações naturais daqueles que foram apresentados em disciplinas anteriores.

1.1. Submersões e imersões

Já nos primeiros semestres de graduação, engenheiros, matemáticos e físicos encontram naturalmente problemas descritos por vínculos e conjuntos de níveis. Iniciemos esta seção recordando dois exemplos elementares.

EXEMPLO 1.1.

(a) Dados 2 partículas $p, q \in \mathbb{R}^3$ a uma distância fixa de 1 unidade, o *espaço de configuração deste sistema*, pode ser descrito como $g^{-1}(1) = \{(p,q) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, g(p,q) = 1\}$ onde a função $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como $g(p,q) = \|p-q\|^2 = \sum_{i=1}^{3} |p_i - q_i|^2$ é nosso *vinculo.*

(b) Considere uma particular com massa m localizada em uma reta presa a uma mola perfeita. O movimento de tal partícula é descrita pelo *oscilador harmônico* $m\alpha''(t) = -k\alpha(t) = -U'(\alpha(t))$ onde $U(q) = \frac{k}{2}q^2$ é a função potencial. Defina $E : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como a *energia total*, i.e., $E(q, \dot{q}) = \frac{m}{2}(\dot{q})^2 + U(q)$. Visto que $\frac{d}{dt}E(\alpha(t), \alpha'(t)) = 0$, (o que pode ser facilmente verificado pela regra da cadeia) concluimos que $E(\alpha(t), \alpha'(t)) = c$. Em outras palavras posição e velocidade da particula ficam restritas a elipse

$$E^{-1}(c) = \{(q, \dot{q}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, E(q, \dot{q}) = c\}.$$

Os conjuntos de níveis descritos acima são exemplos do que chamaremos de variedades mergulhadas.

DEFINIÇÃO 1.2 (Variedade mergulhada). Um conjunto $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$ é uma *m-variedade mergulhada* no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{m+k}$ (ou subvariedade do $\mathbb{R}^{m+k}$) se para cada $p \in M$ existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^{m+k}$

de p e vizinhança $V \subset \mathbb{R}^{m+k}$ de 0 e um difeomorfismo $\psi : U \to V$ tal que $\psi(p) = 0$ e $\psi(U \cap M) = V \cap \{\mathbb{R}^m \times \{0\}\}$. Chamamos a aplicação $\psi|_{U\cap M}$ de *sistema de coordenada*, e $\varphi := \psi^{-1}|_{V\cap\{\mathbb{R}^m\times\{0\}\}}$ é chamada *parametrização.*

Subvariedades mergulhadas do espaço Euclidiano apareciam naturalmente descrita por "bons vinculos", ou seja via submersões. Recorde que uma aplicação suave $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}^k$ é chamada *submersão* se DG_x é sobrejetora $\forall x \in U$.

TEOREMA 1.3 (Teorema da Submersão). *Seja $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}^k$ uma submersão suave. Então para todo $p_0 \in U$ existe uma vizinhança $U_0 \subset U$ de p_0 tal que a partição $\mathcal{F} = \{G^{-1}(c)\} \cap U_0$ é difeomorfa a folheação canônica $\mathcal{F}_0 = \{\pi^{-1}(c)\}$, onde $\pi : \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}^k$ é definida como $\pi(x, y) = y$. Mais precisamente existe um difeomorfismo $\varphi : V_0 \to U_0$ tal que $G \circ \varphi(x, y) = \pi(x, y) = y$.*

Demonstração. Seja $A : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ movimento rígido (isometria no espaço Euclidiano) tal que a matriz $D_y\widetilde{G}_{p_0}$ é invertível onde $\widetilde{G} = G \circ A$. Defina $\psi(x, y) = (x, \widetilde{G}(x, y))$ e observe que

$D\psi_{p_0} = \begin{bmatrix} Id & 0 \\ D_x\widetilde{G}_{p_0} & D_y\widetilde{G}_{p_0} \end{bmatrix}$ é um isomorfismo. Logo pelo teorema da função inversa $\psi : U_0 \to V_0$ é um difeomorfismo. Seja $L = \{(x, c) \in \big(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k\big) \cap V_0\}$.

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(L) &= \{(x, y) \in U_0, \psi(x, y) = (x, c)\} \\ &= \{(x, c) \in U_0, \widetilde{G}(x, y) = c\} \end{aligned}$$

Assim $G \circ A \circ \psi^{-1}(x, c) = c$. A demonstração termina definindo $\varphi = A \circ \psi^{-1}$. $\square$

Dado uma aplicação $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}^k$ suave. Suponha que para $c \in G(U)$ temos que DG_x é sobrejetor $\forall x \in G^{-1}(c)$. Neste caso dizemos que c é *valor regular.*

Observe que dado um valor regular c e um ponto $x \in G^{-1}(c)$ então, como DG_x é sobrejetor, DG_p é sobrejetor para todos os pontos p próximos a x ou seja G se torna uma submersão na vizinhança de $x \in G^{-1}(c)$. Podemos então inferir o seguinte corolário usualmente conhecimento como *teorema do valor regular.*

COROLÁRIO 1.4. *Seja $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}^k$ uma aplicação suave e c um valor regular. Então $M = G^{-1}(c)$ é variedade mergulhada no $\mathbb{R}^{m+k}$.*

EXERCÍCIO 1.5 (Gráficos). Seja $H : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ aplicação suave. Defina o gráfico

$$M = \{(x, y) \in U \times \mathbb{R}^k, y = H(x)\}$$

e a função $G : U \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ como $G(x,y) = \sum_{i=1}^{k}(h_i(x) - y_i)e_{m+i}$. Verifique que:

(a) $M = G^{-1}(0)$,
(b) G é submersão.

Segue também da demonstração do Teorema 1.3 o resultado a seguir.

TEOREMA 1.6 (Teorema da Função Implícita). *Seja $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}^k$ uma submersão suave. Então $M = G^{-1}(c)$ é um gráfico local. Mais precisamente suponha que a matriz $D_yG_{(p_1,p_2)}$ é um isomorfismo onde (p_1,p_2) é tal que $c = G(p_1,p_2)$. Então existe uma vizinhança B de (p_1,p_2), uma vizinhança $W \subset \mathbb{R}^m$ de p_1 uma aplicação suave $H : W \to \mathbb{R}^k$ tal que: $(x,y) \in B \cap M$ se e somente se $y = H(x)$ com $x \in W$. Em particular $G(x, H(x)) = c$.*

Demonstração. Na demonstração do Teorema 1.3 basta considerar $A = Id$. Com c fixado temos $\psi^{-1}(x,c) = (x, \widetilde{H}(x,c))$. Então definimos $H(x) = \widetilde{H}(x,c)$. □

EXERCÍCIO 1.7 (Superfície de Revolução). Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função suave. Suponha que c é valor regular da função $(r, x_3) \to g(r^2, x_3)$. Seja

$$M = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3, g(x_1^2 + x_2^2, x_3) = c\}.$$

Verifique que M é *superfície de revolução*, i.e., variedade mergulhada de dimensão 2 invariante por rotações que fixam o eixo x_3.

No exercício anterior temos então uma variedade M que admite uma ação $\mu : G \times M \to M$ (onde $G = S^1$), tópico que será explorado no próximo capítulo. No exercício que se segue, temos um exemplo de uma variedade que admite a estrutura (suave) de um grupo, i.e., um exemplo de um grupo de Lie (vide detalhes no próximo capítulo).

EXERCÍCIO 1.8. Seja $f : M^{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}^{n\times n}(\mathbb{R})$ a aplicação definida por $f(A) = A\,A^t$, onde $M^{n\times n}(\mathbb{R})$ são as matrizes quadradas $n \times n$ com entradas reais, $\mathcal{S}^{n\times n}(\mathbb{R})$ são as matrizes simétricas com entradas reais, e A^t denota a matriz transposta de A.

(1) Verifique que $\mathcal{S}^{n\times n}(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial real.
(2) Verifique f é de clase C^∞.
(3) Prove $\mathbb{O}(n) := \{A \in M^{n\times n}(\mathbb{R}) : A\,A^t = I\}$ é uma subvariedade compacta mergulhada de $M^{n\times n}(\mathbb{R})$.
(4) Determine a dimensão de $\mathbb{O}(n)$.
(5) Verifique que $\mathbb{SO}(n) := \{A \in M^{n\times n}(\mathbb{R}) : A\,A^t = I$ e $det(A) = 1\}$ é uma variedade compacta.
(6) Verifique que $\mathbb{G}l^{n\times n}(\mathbb{R}) := \{A \in M^{n\times n}(\mathbb{R}) : det(A) \neq 0\}$ é variedade não compacta

(7) Verifique $\mathbb{S}l(n) := \{A \in M^{n\times n}(\mathbb{R}) \,:\, det\,(A) = 1\,\}$ é variedade não compacta.

Uma outra forma em que encontravamos variedades mergulhadas no espaço Euclidiano era via as imersões (as parametrizações). Recorde que uma aplicação suave $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+k}$ é chamada *imersão* se $D\varphi_x$ é injetora para todo $x \in U$.

TEOREMA 1.9 (Teorema de imersão). *Seja $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+k}$ uma imersão. Então dado $p \in U$ existe uma vizinhança $U_0 \subset U$ de p tal que $\varphi(U_0)$ é variedade mergulhada. Mais precisamente existe uma vizinhança U_1 de $\varphi(p_0)$, uma vizinhança U_2 de $(p, 0)$ em $\mathbb{R}^{m+k}$ e um difeomorfismo $\psi : U_1 \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to U_2 \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ tal que $\psi \circ \varphi(x) = (x, 0)$.*

Demonstração. Escolha um movimento rígido $A : \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}^{m+k}$ tal que a aplicação $\widetilde{\varphi} = A \circ \varphi$ tem a propriedade que a matriz $(\frac{\partial \widetilde{\varphi}_i}{\partial x_j})(p)$ é invertível onde $1 \leq j \leq m$ e $1 \leq i \leq m$.

Vamos definir então

$$\begin{aligned} F(x,y) &= (\widetilde{\varphi}_1(x), \ldots, \widetilde{\varphi}_m(x), \widetilde{\varphi}_{m+1}(x) + y_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_{m+k}(x) + y_k) \\ &= \widetilde{\varphi}(x) + (0, y) \end{aligned}$$

Observe que a matriz

$$DF_p = \begin{bmatrix} \pi_1 \circ D\varphi_p & 0 \\ \pi_2 \circ D\varphi_p & Id \end{bmatrix}$$

é invertível, onde $\pi_1(x,y) = x$ e $\pi_2(x,y) = y$.

Concluimos assim pelo teorema da função inversa que $F : U_2 \to U_1$ é um difeomorfismo, para vizinhanças U_i apropriadas. A demonstração termina observando que a aplicação definada como $\psi = F^{-1} \circ A$ atende as propriedades necessárias. $\square$

EXERCÍCIO 1.10. Seja M^2 superfície mergulhada em $\mathbb{R}^3$ invariante por rotação no eixo x_3, ou seja, uma superfície de rotação. Verifique que a aplicação $\varphi : U \to M$ definida como

$$\varphi(t\,,\,\theta\,) = (r\,(t\,)\cos(\theta\,)\,;\,r(t)\sin(\theta\,)\,;\,h\,(t\,)\,)$$

é uma parametrização de M^2, onde $\beta(t) = (r\,(t\,)\,;\,0\,;\,h\,(t\,))$ é uma paramatrização da curva geratriz com as propriedades que $\|\beta'\| \neq 0$ e $r(t) \neq 0$. Em outras palavras verifique que φ é uma imersão e sua imagem está contida em M^2.

1.2. Variedades

Utilizando a regra da cadeia e a Definição 1.2 temos o seguinte exercício, que irá motivar a definição de variedades intrinsicamente definidas.

EXERCÍCIO 1.11 (Mudança de coordenadas). Seja $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$ subvariedade mergulhada. Considere 2 parametrizações $\varphi_i : V_i \subset \mathbb{R}^m \to M$ tal que $W := \varphi_1(V_1) \cap \varphi_2(V_2) \neq \emptyset$. Verifique: $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1|_{V_{12}}$ é um difeomorfismo na sua imagem, onde $V_{1,2} = \varphi_1^{-1}(W)$.

DEFINIÇÃO 1.12. Uma variedade M^m de dimensão m é um espaço topológico Hausdorff com base enumerável que admite uma estrutura diferenciável, i.e., duplas (U_α, ψ_α) (*cartas*) tal que para cada α, , U_α é aberto de M e homeomorfismos $\psi_\alpha : U_\alpha \to \psi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^m$ entre abertos, tais que:

(a) $M = \cup_\alpha U_\alpha$,
(b) $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(W) \to \psi_\beta(W)$ é um difeomorfismo, quando $U_\alpha \cap U_\beta = W \neq \emptyset$.
(c) a coleção $\{(U_\alpha, \psi_\alpha\}_\alpha$ (*atlas*) é máxima em relação aos itens acima.

Interessante observar que, para dimensões baixas, por exemplo menor ou igual a três, uma variedade só pode ter uma estrutura diferenciável. Porém para dimensões maiores, a mesma variedade pode ter estruturas diferenciáveis diferentes i.e., se (U_α, ψ_α) e $(\tilde{U}_\beta, \tilde{\psi}_\beta)$ são estruturas diferenciáveis, então $\tilde{\psi}_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ pode ser apenas um homeomorfismo. Por exemplo esferas $\mathbb{S}^7$ podem ter mais do que uma estrutura diferenciável.

Outra observação relevante é que toda variedade M^m pode ser vista, de acordo com *Teorema de mergulho de Whitney*, como variedade mergulhada em $\mathbb{R}^{m+k}$ para um k suficientemente grande (i.e., admite um mergulho, vide próxima seção). Mesmo assim, como por vezes as variedades que estudamos carregam estruturais adicionais que nos interessam, pode não ser conveniente considera-las como subvariedades mergulhadas em espaço Euclidiano, se o preço a pagar for a perda das estruturas adicionais pela quais temos interesse ou da facilidade de lidar com tais estruturas da forma natural com que elas aparecem. Por exemplo, algumas variedades são do tipo $M = G/N$ onde G é grupo fechado de matrizes e N é grupo normal de matrizes de G. Assim M admite uma estrutura natural de grupo, de fato são grupos de Lie (vide próximo capítulo) porém não admitem *representação matricial* ou seja não serão visto diretamente como subgrupos de matrizes, tais como no Exercício 1.8.

DEFINIÇÃO 1.13. Sejam duas variedades M e N com atlas $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ e $\{(\tilde{U}_\beta, \tilde{\psi}_\beta)\}$. Uma aplicação $F : M \to N$ é achamada uma aplicação suave em um ponto p se existe uma vizinhança U_α de p e uma vizinhança $\tilde{U}_\beta$ de $F(p)$ tal que a aplicação $\tilde{\psi}_\beta \circ F \circ \psi_\alpha^{-1}$ é suave em $\psi_\alpha(p)$. É possível verificar que tal definição não depende da escolha de cartas. A aplicação F será então chamada suave se for suave para todo $p \in M$.

EXERCÍCIO 1.14. Sejam M^m e N^n subvariedades de $\mathbb{R}^{m+k}$ e $\mathbb{R}^{n+l}$ respectivamente. Suponha que exista uma aplicação suave $F : \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}^{n+l}$ tal que $F(M) = N$. Verifique que $F|_M : M \to N$ é uma aplicação suave, no sentido definido acima. Conclua que:

(a) se M é superfície invariante por rotação (recorde Exercício 1.7) então a rotação $F = R_\theta$ induz um difeomorfimos $F_M : M \to M$;

(b) Se $M = \mathbb{O}(n)$ o grupo ortogonal (recorde Exercício 1.8) então a aplicação $L_g : M \to M$ definida como $L_g(x) = g \cdot x$ é suave, onde $g \in \mathbb{O}(n)$ é uma matriz fixa.

1.3. Velocidades e derivações

Recordemos que se $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$ é uma m-variedade mergulhada e $\varphi : V \subset \mathbb{R}^m \to U \subset M$ é uma parametrização, então o subespaço afim $T_pM = D\varphi_0\mathbb{R}^m$ é chamado de *espaço tangente* no ponto p.

EXERCÍCIO 1.15. Considere 2 parametrizações $\varphi_i : V_i \subset \mathbb{R}^m \to M$ de uma variedade mergulhada $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$ tal que $W := \varphi_1(V_1) \cap \varphi_2(V_2) \neq \emptyset$.

(a) Verifique que se $\varphi_1(0) = p = \varphi_2(0)$ então $(D\varphi_1)_0\mathbb{R}^m = (D\varphi_2)_0\mathbb{R}^m$, i.e., *o espaço tangente está bem definido ou seja não depende da parametrização escolhida.*

(b) Verifique que $v \in T_pM$ se e somente se existe curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$, ou seja v é *uma velocidade de uma curva contida em M.*

(c) Verifique que se M é pré imagem de valor c de uma submersão $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}^k$, i.e., $M = G^{-1}(c)$, então T_pM coincide com o núcleo de DG em p, ou seja *os vetores de T_pM são ortogonais a ∇g_i $(i = 1 \cdots k)$ onde g_i são as funções componentes de G.*

EXERCÍCIO 1.16. Determine $T_I\mathbb{O}(n)$, $T_A\mathbb{O}(n)$, onde A é qualquer matriz em $\mathbb{O}(n)$ e I é o a matriz identidade de $\mathbb{M}^{n\times n}(\mathbb{R})$.

O Exercício 1.15 também permite inferir o clássico resultado sobre multiplicadores de Lagrange, um dos primeiros lugares nas disciplinas de Cálculo onde derivada de funções em variedades aparecia.

EXERCÍCIO 1.17. Sejam $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$ variedade mergulhada e $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}$ função suave, onde $M \subset U$. Defina $f = \tilde{f}|_M$ e suponha que f tem máximo ou mínimo local em $p \in M$.

(a) Verifique que $\nabla\tilde{f}(p)$ é perpendicular a T_pM ou seja

$$df_p v = 0 \;\; \forall v \in T_pM$$

onde $df(p) : T_pM \to \mathbb{R}$ é aplicação linear definida como

$$df_p v := v_p \cdot \tilde{f} = d\tilde{f}_p v = \frac{d}{dt} f \circ \alpha(t)|_{t=0},$$

e $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ curva suave com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$.

(b) Conclua em particular que se $M = G^{-1}(c)$, i.e., é pre imagem de valor regular então

$$\nabla \tilde{f}(p) = \sum_i \lambda_i \nabla g_i(p),$$

onde g_i são as funções compomentes de G.

No exercício acima observe que $\frac{d}{dt}\tilde{f} \circ \alpha(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt} f \circ \alpha(t)|_{t=0}$, ou seja a derivada $df_p : T_pM \to \mathbb{R}$ de $f : M \to \mathbb{R}$ não depende da extensão $\tilde{f} : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}$.

Mudemos agora um pouco nossa abordagem. No lugar de pensarmos em f como uma função dada (dando origem a aplicação $df_p : T_pM \to \mathbb{R}$) podemos fixar $v_p \in T_pM$ e considera-lo como operador atuando nas funções suaves em M. Em particular a notação de derivada direcional $v_p \cdot f = v_p \cdot \tilde{f}$ destaca este caminho o qual será seguido para definir vetores e espaços tangentes em variedades abstratas.

DEFINIÇÃO 1.18. Seja M variedade e $p \in M$. Considere $C^\infty(p)$ a álgebra dos germes de funções suaves em p [1] O espaço tangente T_pM é definido como o espaço das *derivações lineares* em p ou seja o conjunto das aplicações $v_p \colon C^\infty(p) \to \mathbb{R}$ tais que:

(1) $v_p \cdot (af + bg) = av_p \cdot f + bv_p \cdot g$ ($\mathbb{R}$-lineares);
(2) $v_p \cdot (fg) = (v_p \cdot f)g(p) + f(p)(v_p \cdot g)$ (regra de Leibniz).

para todos $f, g \in C^\infty(p)$ e $a, b \in \mathbb{R}$.

Seja (U, ψ) um sistema de coordenadas onde $\psi(\cdot) = \big(x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot)\big)$ é o sistema de coordenadas da vizinhança U contendo p. Considere $\widetilde{f} := f \circ \psi^{-1}$ a representação de $f \in C^\infty(p)$ no sistema de coordenadas ψ. Chamaremos *vetores coordenados* as derivações lineares:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \right) \cdot f := \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_i}\Big|_{\psi(p)}$$

EXERCÍCIO 1.19. Demonstre que $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\}$ é uma base de T_pM e em particular $\dim T_pM = \dim M$. Em particular se $v_p = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \in T_pM$, então

$$v_p \cdot f = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_i}\Big|_{\psi(p)}$$

SUGESTÃO: Após compor com uma carta reduza o problema a entender o caso em que M é um aberto de $\mathbb{R}^m$ e $p = 0$. Lembrando que toda $f \in C^\infty(0)$ pode ser escrita como $f(x) = f(0) + \sum_i x_i g_i(x)$

[1] Dizemos que duas funções f e g tem *o mesmo germe* em p se p está no domínio das duas e se existe uma vizinhança de p (comum aos dois domínios) onde f e g coincidem.

verifique que $\big(v_p - \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_p\big) \cdot f = 0$ para todo f, onde $a_i := v_p \cdot x_i$. Isto provará que os vetores coordenados geram T_pM.

DEFINIÇÃO 1.20. Seja $F\colon M \to N$ uma aplicação suave e $p \in M$. A derivada de F em p é a aplicação linear $dF_p\colon T_pM \to T_{f(p)}N$, tal que se $v \in T_pM$, então dF_pv é o vetor tangent a $F(p)$ atendendo

$$dF_p(v) \cdot f = v_p \cdot (f \circ F)$$

para todo $f \in C^\infty(F(p))$.

Observação 1.21. Vale a pena aqui fixar algumas notações que iremos usar ao longo do texto. Reservaremos D para derivadas de aplicações de espaço Euclidianos (como era usual em Cálculo Diferencial) e para a conexão Euclidiana (vide próximos capítulos) enquanto d será reservado para diferenciação de aplicação entre variedades, e d para derivação exterior de formas (vide próximas seções).

A definição acima em particular implica que a regra da cadeia passa a valer para variedades.

EXERCÍCIO 1.22. Sejam $F : M^m \to \widehat{M}^n$ aplicação suave, $\psi(\cdot) = (x_1(\cdot), \ldots, x_m(\cdot))$ e $\hat{\psi}(\cdot) = (y_1(\cdot), \ldots, y_n(\cdot))$ sistema de coordenadas de M e $\widehat{M}$ em tornos de p_0 e $F(p_0)$ respectivamente. Verifique que a representação matricial de dF_{p_0} nas base $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1}^m$ e $\{\frac{\partial}{\partial y_j}\}_{j=1}^n$ é $[d\widetilde{F}_{\psi(p)}]$ onde $\widetilde{F} = \widetilde{\psi} \circ F \circ \psi^{-1}$.

SUGESTÃO: Dado $h \in C^\infty(F(p_0))$ e definido $\tilde{h}$ como $h = \tilde{h} \circ \hat{\psi}$ verifique que $dF \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot h = \big(\sum_j \frac{\partial \tilde{f}_j}{x_i} \frac{\partial}{\partial y_j}\big) \cdot \tilde{h}$

A definição também permite inferir a definição de vetor tangente a uma curva. De fato considerando $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \to M$ como aplicação F temos

$$\alpha'(0) \cdot f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \alpha)\big|_{t=0},$$

tal como haviamos encontrado no Exercício 1.17. Em particular considerando o sistema de coordenadas ψ e a curva $(u_1(t), \ldots, u_n(t)) = \psi \circ \alpha$, temos

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^n u_i'(0) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \in T_pM.$$

Com as definições acima os conceitos de imersão, submersão e difeomorfismo, podem ser facilmente generalizados. Neste contexto mais geral, uma imersão $F\colon M \to N$ é chamada um *mergulho* se $F\colon M \to f(M) \subset N$ é um homeomorfismo, considerando $F(M)$ com a topologia induzida. Considere variedades P e N com $P \subset N$. Diremos que P é chamada *subvariedade imersa* de N se a inclusão $i\colon P \hookrightarrow N$ é uma imersão. Além disto se $i\colon P \hookrightarrow N$ for um mergulho, então P será uma *variedade mergulhada*. Convidamos o leitor ou leitora a comparar este conceito de variedade mergulhada com o conceito apresentado na primeira seção.

Terminamos esta seção recordando o teorema do posto, que generaliza os teoremas de submersão e imersão.

Teorema 1.23. *Seja $F : M^{m+n} \to N^{m+l}$ aplicação suave entre variedades. Suponha que dF_x tem posto m para todo $x \in M$. Então para todo $p \in M$ existe uma vizinhança U_0 de p tal que:*

(a) *$L = F(U_0)$ é variedade mergulhada,*
(b) *$\{F^{-1}(c)\}_{c\in L} \cap U_0$ são fibras de uma submersão.*

Demonstração. Compondo a aplicação F com sistemas de coordenadas de M e N podemos supor que $F : U \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^{m+l}$. Desejamos demonstrar que existem vizinhanças U_1 de $F(p)$ e difeomorfismos $\alpha : \tilde{U}_0 \to U_0$ e $\beta : U_1 \to \tilde{U}_1$ tais que

$$\beta \circ F \circ \alpha(x, y) = (x, 0)$$

Podemos supor, após aplicar movimentos rígidos que $\mathbb{R}^m \times \{0\} = DF_p(\mathbb{R}^{m+n})$. Observe que $D(\pi_1 \circ F)_x$ é sobrejetor para x próximo a p, onde $\pi_1(x, y) = x$. Concluimos assim pelo teorema de submersão que existe um difeomorfismo α tal que $\pi_1 \circ F \circ \alpha(x, y) = x$. Consequentemente $F \circ \alpha(x, y) = (x, H(x, y))$

Observe que:

$$D(F \circ \alpha)_p = \begin{bmatrix} Id & 0 \\ D_x H & D_y H \end{bmatrix}$$

Isto e o fato que posto $D(F \circ \alpha) =$ posto $DF = m$ nos permite concluir que $D_y H = 0$ ou seja $H(x, y)$ é independente de y. Defina $\widetilde{H}(x) = H(x, y)$. Assim $(x, \widetilde{H}(x)) = F \circ \alpha(x, y) = F \circ \alpha(x, 0)$. Logo $F \circ \alpha(x, 0)$ é um gráfico o que nos mermite concluir, pelo teorema da imersão (apos reduzir as vizinhanças se necessário) que existe um difeomorfimos β tal que $(x, 0) = \beta \circ F \circ \alpha(x, 0) = \beta \circ F \circ \alpha(x, y)$ o que termina a demonstração. □

Exercício 1.24. Sejam H e K dois subgrupos fechados de $\mathbb{O}(n\,)$. Aceite o fato que todo grupo fechado se torna variedade mergulhadas. Seja $\phi : K \longrightarrow H$ um homomorfismo de grupos que é de classe C^∞. Prove que $d\phi$ tem posto constante.

1.4. Campos e fibrados vetoriais

Recordemos que um campo $\vec{F}$ suave em um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ era uma aplicação suave $\vec{F} : U \to U \times \mathbb{R}^m$ definida como $\vec{F}(x) = (x, F(x))$ onde $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ era uma aplicação suave $F : U \to \mathbb{R}^m$. Ou seja uma aplição do nosso *espaço de configurações* U para o nosso *espaço de fases* $U \times \mathbb{R}^m$ tal que $\pi \circ \vec{F}(x) = x$ onde $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to$

$\mathbb{R}^m$ era a projeção canonica $\pi(x,v) = x$. Visto que nosso espaço de fases era um produto trivial era possível escreve o campo $\vec{F}$ em termos dos *campos canônicos* $\vec{e}_i(x) = (x, e_i)$ da seguinte forma $\vec{F} = \sum_i f_i \vec{e}_i$. Agora inspirados pela discussão da seção anterior, também podemos identificar os campos canônicos com as derivações canônicas e assim escrever $\vec{F} = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Desejamos agora generalizar a discussão acima para variedades e assim precisamos discutir qual objeto desempenhará o papel do espaço de fases.

DEFINIÇÃO 1.25 (Fibrado vetorial). Sejam E e M variedades, $\pi : E \to M$ uma submersão e $G = GL(n)$ os autormorfismos de $\mathbb{R}^n$. Suponha que existe uma cobertura $\{U_\alpha\}$ de M e difeomorfismos $\varphi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ tais que:

(a) $\pi \circ \varphi_\alpha(p,v) = p$ para todo $(p,v) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^n$
(b) se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ então $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha(p,v) = (p, \theta_{\beta,\alpha}(p)v)$ onde $\theta_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ é suave
(c) $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ é máximo em relação aos itens acima.

A tripla (E, M, π) (por vezes também denotada por $\mathbb{R}^n \to E \to M$) é chamada *fibrado vetorial de posto* n e projeção π. Para cada $p \in M$ o espaço $E_p := \pi^{-1}(p)$ é chamado fibra sobre p e herda naturalmente uma estrutura de espaço vetorial.

EXEMPLO 1.26. Seja M^m variedade.

(a) *O fibrado tangente* de M é definido como $TM = \cup_{p\in M} T_pM$ onde a projeção $\pi : TM \to M$ é a projeção canonica $\pi(v_p) = p$.
(b) *Fibrado cotangente* de M é definido como $TM^* = \cup_{p\in M} T_pM^*$ onde T_pM^* é o espaço dual de T_pM.
(c) *o fibrado normal* de M é definido como $\nu(M) = \cup_{p\in M} \nu_p(M)$ onde ν_pM é espaço normal a T_pM, no caso em que $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$ é subvariedade do espaço Euclidiano.

DEFINIÇÃO 1.27. Dado um fibrado vetorial (E, M, π) uma *seção* é uma aplicação $\xi : M \to E$ tal que $\pi \circ \xi = id$. Em particular um *campo vetorial* $\vec{F}$ é uma seção de TM. Denotaremos o conjunto (modulo) de campos vetoriais de M por $\mathfrak{X}(M)$.

De forma análoga, uma 1-forma diferencial de uma variedade M^m é uma seção de TM^* e se $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$ for variedade mergulhada então um *campo normal* a M é uma seção de $\nu(M)$.

Dado 2 fibrados vetoriais (E, M, π) e $(\widetilde{E}, \widetilde{M}, \tilde{\pi})$ um *homomorfismo* $F : E \to \widetilde{E}$ é uma aplicação suave que induz uma aplicação suave $f : M \to \widetilde{M}$ que comuta com as projeções e que induz um homomorfismo linear entre E_p e $E_{f(p)}$ para todo p.

Usando campos invariantes a esquerda (a ser definido no próximo capítulo) não é difícil verificar que o fibrado tangente TG de um grupo de Lie é de fato isomorfo a $G \times T_eG$. Isto porém não custuma acontecer com uma variedade geralmente.

Exercício 1.28. Prove que o fibrado tangente da esfera $\mathbb{S}^2$ não é trivial, ou seja $T(\mathbb{S}^2)$ não é isomorfo a $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$

Também é conveniente rever alguns resultados associados a campos tais como fluxos e e alguns exercícios clássicos.

Dado um aberto U de uma variedade M e $\vec{F} \in \mathfrak{X}(U)$. Uma curva $\alpha : I \to U \subset M$ é chamada *curva integral* se $\alpha'(t) = \vec{F}(\alpha(t))$.

Teorema 1.29. *Dado $\vec{F} \in \mathfrak{X}(U)$ e $p \in U$ existe uma única curva integral $\alpha_p : I_p \to U$ de $\vec{F}$ onde I_p é o maior intervalo contendo 0 e $\alpha_p(0) = p$.*

Seja $\mathrm{U}_F = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times U, t \in I_x\}$. Defina o *fluxo* $\vec{F}$ como $\varphi^F : \mathrm{U}_F \to U$ como $\varphi_t^F(x) = \varphi^F(t, x) = \alpha_x(t)$

Teorema 1.30. *Seja $\vec{F} \in \mathfrak{X}(U)$ então U_F é um conjunto aberto de $\mathbb{R} \times U$ contendo $\{0\} \times U$ e φ^F é aplicação suave. Além disto:*

(a) *φ_t^F é um difeomorfismo,*
(b) *$\varphi_{t+s}^F = \varphi_t^F \circ \varphi_s^F$ quando eles estiverem bem definidos.*

Chamaremos um campo $\vec{F} \in \mathfrak{X}(M)$ (ou seu fluxo) de *completo* se $\mathrm{U}_F = \mathbb{R} \times M$. Exemplo de campos completos são campos definido em variedades compactas. Outro exemplo são os campos lineares.

Exemplo 1.31 (Fluxo de campo linear). Dado $A \in M^{m\times m}(\mathbb{R})$ a E.D.O

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= A\alpha(t) \\ \alpha(0) &= p \end{aligned}$$

Tem como solução $\alpha(t) = e^{tA}p$ onde $e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n}$. Assim sendo o fluxo de um campo linear $F(x) = Ax$ é dado por $\varphi(t, x) = e^{tA}(x)$. Vale também observar que a aplicação

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to GL(n, \mathbb{R}) \\ t &\mapsto e^{tA} \end{aligned}$$

é uma homomorfismo de grupos. Em particular $e^A e^B = e^B e^A$ se e somente se $[A, B] = AB - BA = 0$.

Exercício 1.32. Seja $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$, e defina A_ξ como a matriz $\begin{pmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix}$.

Prove que:

(1) $A_\xi(v) = \xi \times v$, para todo $v \in \mathbb{R}^3$.

(2) Dada a curva

$$\begin{array}{rccc} \alpha_A: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{M}^{3\times 3}(\mathbb{R}) \\ & t & \longrightarrow & exp\,(tA_\xi), \end{array}$$

fixando $t \in \mathbb{R}$, $\alpha(t)$ é uma rotação que fixa ξ e tem velocidade angular $||\xi||$.

EXERCÍCIO 1.33. Seja $\vec{F}(x_1, x_2) = f_1(x_1, x_2)\vec{e}_1 + f_2(x_1, x_2)\vec{e}_2$, onde $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são suaves. Suponha que para $\epsilon_0 > 0$ temos que $\vec{F}(\epsilon_0, 0) = a\,\vec{e}_1$ onde $a \neq 0$. Seja ϕ_t o fluxo de $\vec{F}$. Verifique que existe uma vizinhança U_0 de $(0,0)$ tal que a aplicação $\hat{\phi} : U_0 \to U_1$, definida por $\hat{\phi}(t, x_2) = \phi_t(\epsilon_0, x_2)$ é um difeomorfismo. A aplicação $\hat{\phi}$ costuma ser chamada *retificação do fluxo.*

EXERCÍCIO 1.34. Considere o campo linear $\vec{F}$ em $\mathbb{R}^2$, definido como

$$\vec{F}(x) = \lambda_1 x_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 x_2 \vec{e}_2,$$

i.e.,

$$F(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

(1) Esboce o fluxo para $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$.
(2) Seja $\hat{\phi}$ a retificação do fluxo, vide Problema 1.33. Definindo $A(t, s) = \det(D\,\hat{\phi}(t, s))$ como o elemento de área, verifique que

$$\operatorname{Div} \vec{F}(\epsilon, 0) = \frac{d}{dt}[\ln A(t, 0)]\,|\,|_{t=0}.$$

onde $\operatorname{Div}(\vec{F}) = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ para $\vec{F} = \sum_i f_i e_i \in \mathfrak{X}(\Omega)$

Também precisamos rever o conceito de colchete de Lie. Dados 2 campos $\vec{X}, \vec{Y} \in \mathfrak{X}(M)$ para variedade M vamos definir o campo

$$[\vec{X}, \vec{Y}] \cdot f := \vec{X} \cdot (\vec{Y} \cdot f) - \vec{Y} \cdot (\vec{X} \cdot f)$$

EXERCÍCIO 1.35. Dado aberto Ω em $\mathbb{R}^n$, considere campos $\vec{F}, \vec{G} \in \mathfrak{X}(\Omega)$ definidos como $\vec{F} = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $\vec{G} = \sum_j g_j \frac{\partial}{\partial x_j}$. Prove que $[\vec{F}, \vec{G}] = \nabla_{\vec{F}} \vec{G} - \nabla_{\vec{G}} \vec{F}$, onde $\nabla_X \vec{F}_p := (p, D(F)_p X)$.

Uma interpretação do colchete de Lie é descrita no resultado a seguir.

LEMA 1.36. *Sejam $\vec{X}$ e $\vec{Y}$ campos de uma variedade M e φ_t^X e φ_s^Y seus respectivos fluxos. Então $[\vec{X}, \vec{Y}] = 0$ se e somente se $\varphi_t^X \circ \varphi_s^Y = \varphi_s^Y \circ \varphi_t^X$.*

O colchete de Lie também preserva difeomorfismos e mais geralmente campos φ relacionados.

Lema 1.37. *Considere uma aplicação suave $\varphi : M \to N$ e campos $\vec{X}_i \in \mathfrak{X}(M)$ e $\vec{Y}_i \in \mathfrak{X}(N)$ (para $i = 1, 2$) tal que $\vec{Y}_i$ é φ-relacionado a $\vec{X}_i$, ou seja $\vec{Y}_i \circ \varphi(\cdot) = d\varphi \vec{X}_i(\cdot)$. Então $[\vec{Y}_1, \vec{Y}_2]$ é φ relacionado a $[\vec{X}_1, \vec{X}_2]$ ou seja $[\vec{Y}_1, \vec{Y}_2] \circ \varphi = d\varphi[\vec{X}_1, \vec{X}_2]$.*

Por vezes também é relevante interpretar o colchete de Lie como uma *derivação de Lie.*

Lema 1.38. *Sejam $\vec{X}$ e $\vec{Y}$ campos de uma variedade M e φ_t^X e φ_s^Y seus respectivos fluxos.*

$$\begin{aligned} [\vec{X}, \vec{Y}]_p &= \frac{d}{dt}(\varphi_t^X)^* Y\Big|_{t=0} \\ &:= \lim_{t\to 0} \frac{d\varphi_{-t}^X Y_{\varphi_t^X(p)} - Y(p)}{t}. \end{aligned}$$

1.5. Formas diferenciáveis

Formas diferenciáveis aparecem nas disciplinas de Cálculo na teoria de integração (sintentizando e unificando vários resultados tais como teorema de Gauss, Stokes e Green) e também na descrição de algumas EDPs.

Façamos aqui um resumo destes resultados para comodidade do leitor ou leitora, seguindo de perto o apendice de Alexandrino e Bettiol, e complementando com resultados de Bott and Tu e Spivak.

1.5.1. Produto wedge e formas. Dado um espaço vetorial V, lembremos que um $(0, k)$-*tensor* τ é simplesmente um k-funcional linear $\tau \colon V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$. O espaço dos $(0, k)$ tensores (aqui denotado por $T^k(V)$) admite um *produto tensorial.* Dados $\tau_1 \in T^k(V)$ e $\tau_2 \in T^l(V)$ então seu produto tensorial $\tau_1 \otimes \tau_2 \in T^{k+l}(V)$ é definido como

$$(\tau_1 \otimes \tau_2)(X_1, \ldots, X_k, X_{k+1}, \ldots, X_{k+l}) := \tau_1(X_1, \ldots, X_k)\tau_2(X_{k+1}, \ldots, X_{k+l}).$$

onde $X_i \in V$. Um tensor $\tau \in T^k(V)$ é chamado *simétrico* se ele for invariante por permutações, ou seja

$$\tau(X_1, \ldots, X_k) = \tau(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(k)}),$$

para todas permutações σ no grupo de permutações $\mathfrak{S}_k$. Um tensor $\tau \in T^k(V)$ será chamado *anti-simétrico* se

$$\tau(X_1, \ldots, X_k) = \operatorname{sgn}(\sigma)\, \tau(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(k)}),$$

$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_k$, onde $\operatorname{sgn}(\sigma)$ denota o sinal da permutação σ.

Denotando $\Lambda^k(V)$ como espaço dos k tensores alternados, podemos definir a projeção $\operatorname{Alt}_k \colon T^k(V) \to \Lambda^k(V)$ como:

$$\operatorname{Alt}_k(\tau)(X_1, \ldots, X_k) = \tfrac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \tau(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(k)}),$$

e com tal projeção podemos definir o *produto wedge* (produto cunha). Dados $\omega \in \Lambda^k(V)$ e $\eta \in \Lambda^l(V)$ o produto wedge $\omega \wedge \eta \in \Lambda^{k+l}(V)$ é:

$$\omega \wedge \eta := \tfrac{(k+l)!}{k!\,l!}\,\mathrm{Alt}_{(k+l)}(\omega \otimes \eta).$$

EXEMPLO 1.39. Sejam $Z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$, $c \in \mathbb{R}$ e $\mathrm{d}x_i$ base dual da base canônica em $\mathbb{R}^3$. Então podemos construir:

(a) um $(0,1)$ tensor em $\mathbb{R}^3$ como $\omega(X) = \langle X, Z\rangle$ ou seja $\omega = \sum z_i \mathrm{d}x_i$

(b) um $(0,2)$ tensor em $\mathbb{R}^3$ como

$$\omega\,(V_1\,,\,V_2) \;=\; \det\begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ v_{1\,1} & v_{1\,2} & v_{1\,3} \\ v_{2\,1} & v_{2\,2} & v_{2\,3} \end{bmatrix}$$

ou seja $\omega = z_1 \mathrm{d}x_2 \wedge x_3 - z_2 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + z_3 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$

(c) um $(0,3)$ tensor em $\mathbb{R}^3$ como

$$\omega\,(V_1, V_2, V_3) \;=\; c\det\begin{bmatrix} v_{1\,1} & v_{1\,2} & v_{1\,3} \\ v_{2\,1} & v_{2\,2} & v_{2\,3} \\ v_{3\,1} & v_{3\,2} & v_{3\,3} \end{bmatrix}$$

ou seja $\omega = c\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$.

De fato segue da observação e lema a seguir que estes são todos os exemplos de $(0,k)$ tensores em $\mathbb{R}^3$.

Observação 1.40. Se $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \Lambda^1(V) = T^1(V)$ são $(0,1)$-tensores, então

$$(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k)(X_1, X_2, \ldots, X_k) = \det\begin{pmatrix} \omega_1(X_1) & \omega_1(X_2) & \cdots & \omega_1(X_k) \\ \omega_2(X_1) & \omega_2(X_2) & \cdots & \omega_2(X_k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_k(X_1) & \omega_k(X_2) & \cdots & \omega_k(X_k) \end{pmatrix}.$$

PROPOSIÇÃO 1.41. *Para todo $\omega, \xi \in \Lambda^k(V)$, $\eta \in \Lambda^l(V)$, $\theta \in \Lambda^m(V)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,*

(1) $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$;
(2) $(\omega + \xi) \wedge \eta = \omega \wedge \eta + \xi \wedge \eta$;
(3) $(\lambda\omega) \wedge \eta = \lambda(\omega \wedge \eta)$;
(4) $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$.

Além disto, se $\omega_1, \ldots, \omega_n$ is a basis of $T^1(V)$, então $\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_r}$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$, se torna uma base de $\Lambda^r(V)$, e assim tem dimensão $\binom{n}{r}$, onde $n = \dim V$. Em particular $\Lambda^n(V) \cong \mathbb{R}$.

DEFINIÇÃO 1.42. Um $(0,k)$ *campo tensorial suave* em uma variedade M é uma seção do fibrado tensorial $TM^* \otimes \cdots \otimes TM^*$. Dito de outra forma, é uma aplicação τ que para cada $p \in M$ associa um $(0,k)$ tensor $\tau_p \in T^k(T_pM)$ tal que para qualquer campos vetoriais $\vec{X}_1, \ldots \vec{X}_k$

em um aberto $U \subset M$, a função real $\tau(\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_k)$ se torna uma função suave em U. De forma similar uma *k-forma diferencial* em M é uma seção do fibrado dos $(0,k)$-tensores anti-simétricos $\Lambda^k TM^*$. Dito de outra forma, é um $(0,k)$-campo tensorial ω em M que a cada $p \in M$ associa $\omega_p \in \Lambda^k(T_pM)$ i.e., um um $(0,k)$-tensor anti-simétrico de T_pM. De agora em diantes iremos denotar $\Omega^k(M)$ o conjunto das k-formas (diferenciais) em M.

Em particular, no Exemplo 1.39 ao trocarmos os vectores $Z \in \mathbb{R}^3$ por campos $\vec{Z} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ e os números c por funções $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ teremos todas as k-formas em $\mathbb{R}^3$ ou seja descrevemos $\Omega^k(\mathbb{R}^3)$. Mais geralmente dada uma variedade M e uma carta (U,ψ), uma k-forma $\omega \in \Omega^k(M)$ pode ser descrita como

$$\omega|_U = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} a_{i_1,\dots,i_k}\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}, \tag{1.5.1}$$

onde $a_{i_1,\dots,i_k} \colon U \to \mathbb{R}$ são funções suaves e $\mathrm{d}x_i\big(\frac{\partial}{\partial x_j}\big) = \delta_{ij}$.

Dado um $(0,k)$-tensor τ em uma variedade N e uma aplicação suave $F \colon M \to N$, entre variedades, o *pull-back* de τ por F é o $(0,k)$-tensor $F^*\tau$ em M definido por

$$(F^*\tau)_p(X_1, \dots, X_k) := \tau_{F(p)}(dF_pX_1, \dots, dF_pX_k), \quad X_i \in T_pN. \tag{1.5.2}$$

Observa-se que o pull-back de k-formas por F induz um homomorfismo $F^* \colon \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$.

Exercício 1.43. Seja $A \in M^{m\times m}(\mathbb{R})$. Prove que se ω é $(0,m)$-tensor alternado em $\mathbb{R}^m$, então

$$\omega\,(A\,v_1\,,\, A\,v_2\,,\, \dots\,,\, A\,v_m) \;=\; \det\,(A\,)\,\omega\,(v_1\,,\, v_2\,,\, \dots\,,\, v_m).$$

Conclua que se $\phi : U_0 \subset \mathbb{R}^m \to U_1 \subset \mathbb{R}^m$ é uma aplicação suave e ω é uma m-forma $f\,\mathrm{d}\,x_1 \wedge \mathrm{d}\,x_2 \wedge \dots \mathrm{d}\,x_{m-1} \wedge \mathrm{d}\,x_m$, então

$$\phi^*\omega \;=\; f \circ \phi\;\det\,(d\,\phi\,)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \dots \mathrm{d}x_{m-1} \wedge \mathrm{d}x_m.$$

Exercício 1.44.

(1) Sejam $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada e $\hat{F}\,(\cdot) = \langle \vec{F}\,,\,\cdot\rangle$. Verifique que $\alpha^*\,\hat{F} \;=\; \langle \vec{F}\,(\alpha\,(t\,))\,,\,\alpha'(t\,)\,\rangle\, dt$

(2) Sejam

$$\begin{array}{rcc} \psi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\mu_1\,,\,\mu_2) & \longrightarrow & \Big(\psi_1(\mu_1,\mu_2)\,,\,\psi_2(\mu_1,\mu_2)\,,\,\psi_3(\mu_1,\mu_2)\Big) \end{array}$$

um mergulho e $\omega \;=\; f_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 - f_2\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + f_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$, i.e.,

$$i_{\vec{F}}\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3(V_1,V_2) \;=\; \omega\,(V_1\,,\,V_2) \;=\; det\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ v_{1\,1} & v_{1\,2} & v_{1\,3} \\ v_{2\,1} & v_{2\,2} & v_{2\,3} \end{bmatrix},$$

onde cada $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é suave. Verifique que

$$\psi^* \omega = \langle \vec{F} \circ \psi , \frac{\partial \psi}{\partial \mu_1} \times \frac{\partial \psi}{\partial \mu_2} \rangle \, \mathrm{d}\mu_1 \wedge \mathrm{d}\mu_2,$$

onde $\vec{F} = \sum_{i=1}^3 f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

1.5.2. Derivada exterior. Lembremos que quando tinhamos uma 0-forma f (ou seja uma função) por meio da diferenciação podiamos obter uma 1-forma $\mathrm{d}f$. A *derivada exterior* é um operador $\mathrm{d}\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$, que generaliza a diferenciação das 0-formas e é explicitamente definida da sequinte maneira.

Dado uma k-forma ω e $k+1$ campos suaves $\vec{X}_0, \dots, \vec{X}_k \in \mathfrak{X}(M)$ temos:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega(X_0,\dots,X_k) &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i X_i\big(\omega(X_0,\dots,\widehat{X_i},\dots,X_k)\big) \\ &\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega\big([X_i,X_j],X_0,\dots,\widehat{X_i},\dots,\widehat{X_j},\dots,X_k\big), \end{aligned} \tag{1.5.3}$$

onde $\widehat{X_i}$ denota a omissão daquele elemento X_i.

PROPOSIÇÃO 1.45. (a) *Se $f \in \Omega^0(M)$, então $\mathrm{d}f \in \Omega^1(M)$ é a diferencial da função $f \in C^\infty(M)$, i.e.,*

$$\mathrm{d}f_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p \mathrm{d}x_i.$$

(b) *A composição $\Omega^k(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^{k+1}(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^{k+2}(M)$ é identicamente nula, i.e. $\mathrm{d}^2 = 0$;*
(c) *$\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) = \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^j \omega \wedge \mathrm{d}\eta$, para todos $\omega \in \Omega^j(M)$ e $\eta \in \Omega^{k-j}(M)$.*
(d) *$F^* \circ \mathrm{d} = \mathrm{d} \circ F^*$, onde $F : M \to N$ é aplicação suave.*

A derivação externa é o único operado linear atendendo os itens (a), (b) e (c).

Dado uma carta (U, ψ) podemos diferenciar a forma ω expressa em Eq. (1.5.1) em coordenadas locais como:

$$\mathrm{d}\omega|_U = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} \mathrm{d}a_{i_1,\dots,i_k} \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}. \tag{1.5.4}$$

EXERCÍCIO 1.46. Sejam $\vec{F} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ e $\hat{F}(\cdot) = \langle \vec{F}, \cdot \rangle$. Prove que

(1) $\mathrm{d}(i_{\vec{F}} \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3) = div\, \vec{F} \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$.

(2) $\mathrm{d}\hat{F} = i_{rot \vec{F}} \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$

EXERCÍCIO 1.47. Sejam $\vec{E}\,(t\,\cdot) = \sum_{i=1}^{3} E_i(t\,,\,\cdot\,)\,\frac{\partial}{\partial x_i}$ e $\vec{B}\,(t,\cdot) = \sum_{i=1}^{3} B_i(t\,,\,\cdot\,)\,\frac{\partial}{\partial x_i}$ e F uma 2-forma em $\mathbb{R}^4$ definida como

$$F\left([t,x_1,x_2,x_3],[\tilde{t},\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_3]\right) = \begin{bmatrix} t, & x_1, & x_2, & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{t} \\ \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix}.$$

(a) Descreva F em termos de $\mathrm{d}t$ e $\mathrm{d}x_i$;

(b) verifique que $\mathrm{d}F = 0$ se e somente se $\frac{d\vec{B}}{dt} = -\nabla \times \vec{E}$ e $\operatorname{div}(\vec{B}) = 0$;

(c) seja $\epsilon_\mu = \begin{cases} 1 & se \quad \mu = 0; \\ -1 & se \quad \mu = 1,\,2,\,3. \end{cases}$
e considere o operador linear $*\ \Omega^2(\mathbb{R}^4) \to \Omega^2(\mathbb{R}^4)$ definido como

$$*\mathrm{d}x_\mu \wedge \mathrm{d}\;x_\nu = \epsilon_\mu \epsilon_\nu\, \mathrm{d}x_\rho \wedge \mathrm{d}x_\sigma,$$

onde $(\mu\,,\,\nu\,,\,\rho\,,\,\sigma\,)$ é uma permutação par de $(0\,,\,1\,,\,2\,,\,3\,)$ e $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x_0$. Verifique que $\mathrm{d} * F = 0$ se e somente se $\frac{d\vec{E}}{dt} = \nabla \times \vec{B}$ e $\operatorname{div}(\vec{E}\,) = 0$.

1.5.3. Integração e teorema de Stokes. Seja $\omega = f\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$, uma n-forma com suporte compacto em $\mathbb{R}^n$. Defina

$$\int_U \omega := \int_U f\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

Se $F\colon V \to U$ é um difeomorfismo entre dois abertos de $\mathbb{R}^n$ que preserva orientação (i.e, tal que $\det DF > 0$), então por mudança de variáveis temos:

$$\int_U \omega = \int_V F^*\omega. \tag{1.5.5}$$

Como veremos a seguir esta equação será peça fundamental para integração em variedades orientáveis. Uma variedade M^n é *orientável* se ela admite uma n-forma $\omega \in \Omega^n(M)$ (por vezes denotada por $[M]$) que nunca se anula. Neste caso dizemos que M é orientada pela escolha de ω.

PROPOSIÇÃO 1.48. *Uma variedade M é orientável se e somente se M admite um atlas coerentemente orientável $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$, i.e, tal que* $\det d(\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}) > 0$.

Vamos agora definir integração de n-formas com *pequeno suporte* em variedade orientável M^n. Seja $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ um atlas coerente de M

e ω uma n-forma com suporte compacto contido em U_α. Podemos então definir:

$$\int_{U_\alpha} \omega := \int_{\psi(U_\alpha)} (\psi^{-1})^* \omega.$$

Observe que se consideramos outra carta (U_β, ψ_β) e acontecer que o suporte ω esteja contido em $U_\beta \cap U_\alpha$, então obtemos o mesmo número. Isto segue da Eq. (1.5.5), da Proposição 1.48 e do fato que $(\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1})^* = (\psi_\alpha^{-1})^* \circ \psi_\beta^*$.

Afim definir a integração de uma n-forma com suporte compacto (mas não necessáriamente com suporte pequeno) necessitamos recordar a definião de partição da unidade.

Uma *partição da unidade* em M é uma coleção de funções $\{f_\alpha \colon M \to [0,1]\}$ tal que:

(1) $\{\operatorname{supp} \mathrm{f}_\alpha\}$ é recobrimento localmente finito M;
(2) $\sum_\alpha f_\alpha(x) = 1$ para todo $x \in M$.

Dada uma variedade M (orientável ou não), qualquer cobertura $\{U_\alpha\}$ de M admite uma *partição da unidade subordinada*, i.e., uma partição que atende $\operatorname{supp} f_\alpha \subset U_\alpha$.

Dado uma forma com suporte ω considere $K = \operatorname{supp} \omega$ e uma cobertura finita de K por vizinhanças coordenadas U_α. Considere $\{f_\alpha\}$ uma partição da unidade subordinada $\{U_\alpha\}$. Observe que $f_\alpha \omega$ tem suporte compacto contido em U_α e defina

$$\int_M \omega := \sum_\alpha \int_{U_\alpha} f_\alpha \omega.$$

É possível mostrar que esta definição não depende da cobertura ou da partição da unidade. Também nota-se aqui que o fato de K ser compacto foi importante, e.,g garante que a soma acima é finita.

Uma vez definida a integração de n-formas com suporte compacto podemos generalizar (1.5.5).

PROPOSIÇÃO 1.49. *Sejam M^n e N^n varieadades orientáveis $F\colon M \to N$ um difeomorfismo que preserva orientação e ω é uma n-forma com suporte compacto em N. Então*

$$\int_N \omega = \int_M F^* \omega.$$

Afim de enunciar o teorema de Stokes, precisamos ainda recordar o conceito de variedades com bordo.

Uma variedade suave com bordo M^n é um espaço topológico Hausdorff com base enumerável com atlas suave (maximal) $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ formado por conjuntos abertos U_α que são homeomorfos ou ao semi-espaço superior $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n), x_n \geq 0\}$ ou a $\mathbb{R}^n$. O bordo ∂M é o subconjunto de M tal que as parametrizações levam $\partial \mathbb{H}^n$ em ∂M. O bordo em particular herda uma estrutura de subvariedade. Importante aqui perceber que quando lidamos com as mudanças $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : U \subset \mathbb{H}^n \to V \subset \mathbb{H}^n$ devemos pensar em difeomorfismo que admite extensão para aberto em $\mathbb{R}^n$.

Uma forma de construir subvariedades com bordo é dada pelo teorema a seguir.

Teorema 1.50. *Seja M^n variedade (sem bordo) e $g : M \to \mathbb{R}$ aplicação suave com $0 \in g(M)$ sendo valor regular. Então $N := g^{-1}[0, \infty)$ é variedade com bordo, sendo que $\partial N = g^{-1}(0)$.*

Considere o semi-plano superior $\mathbb{H}^n$ em $\mathbb{R}^n$ com orientação dada por $\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$. A orientação induzida no bordo $\partial\mathbb{H}^n = \{x_n = 0\}$ é $(-1)^n \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{n-1}$. É possível demonstrar que se $F : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ é um difeomorfismo que preserva orientação (ou seja se extende localmente para difeomorfismos locais em $\mathbb{R}^n$ e tem $\det dF > 0$) então sua restriçaõ $F|_{\partial\mathbb{H}^n} \to \partial H^n$ também preserva orientação (i.e., $\det d\big(F|_{\partial\mathbb{H}^n}\big) > 0$). Esta observação em particular permite concluir que uma varieade com bordo com atlas coerente tem uma orientação naturalmente induzida em seu bordo. Em particular se ψ é carta deste atlas então $[\partial M]|_{\partial U} = \psi^*[\partial\mathbb{H}^n]$ onde $U \subset M$ é aberto contendo pontos do bordo.

Podemos então enunciar o teorema de Stokes a seguir.

Teorema 1.51. *Seja ω uma $(n-1)$-forma com suporte compacto em uma variedade orientável M^n, e considere ∂M com a orientação induzida. Então*

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Em particular se M for orientável compacta sem bordo então $\int_M \mathrm{d}\omega = 0$ $\forall \omega \in \Omega^{n-1}(M)$.

Demonstração. Consideremos primeiro que o suporte de ω é pequeno ou seja está completamente contido na vizinhança U_α de uma carta, onde $U_\alpha = \mathbb{H}^n$ ou $U_\alpha = \mathbb{R}^n$ e provemos o teorema para esta situação. Por motivos didáticos vamos explicitar a prova deste caso para $n = 2$, deixando para o leitor completar os detalhes para o caso $n > 2$. Ou seja consideramos $\omega = h_1 \mathrm{d}x_1 + h_2 \mathrm{d}x_2$ e assim $\mathrm{d}\omega = \big(\frac{\partial h_2}{\partial x_1} - \frac{\partial h_1}{\partial x_2}\big) dx_1 \wedge dx_2$

Caso 1: $U_\alpha = \mathbb{R}^2$. Neste caso, como não temos bordo, desejamos demonstrar que $\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}\omega = 0$. Vamos supor que o suporte está contido em $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$. Concluimos pelo teorema de Fubinni e pelo teorema fundamental que:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}\omega &= \int_{b_1}^{b_2}\int_{a_1}^{a_2} (\frac{\partial h_2}{\partial x_1} - \frac{\partial h_1}{\partial x_2}) dx_1 dx_2 \\
&= \int_{b_1}^{b_2}\int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} dx_1 dx_2 - \int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} dx_2 dx_1 \\
&= \int_{b_1}^{b_2} h_2(a_2, x_2) - h_2(a_1, x_2) dx_2 - \int_{a_1}^{a_2} h_1(x_1, b_2) - h_1(x_1, b_1) dx_1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Caso 2: $U_\alpha = \mathbb{H}^2$**.** Neste caso teremos que lidar com o bordo e devemos supor que o suporte de ω está contida em $[a_1, a_2] \times [0, b_2]$. Novamente o teorema de Fubinni e teorema fundamental garantem que:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{H}^2} \mathrm{d}\omega &= \int_{0}^{b_2}\int_{a_1}^{a_2} (\frac{\partial h_2}{\partial x_1} - \frac{\partial h_1}{\partial x_2}) dx_1 dx_2 \\
&= \int_{0}^{b_2}\int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} dx_1 dx_2 - \int_{a_1}^{a_2}\int_{0}^{b_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} dx_2 dx_1 \\
&= \int_{0}^{b_2} h_2(a_2, x_2) - h_2(a_1, x_2) dx_2 - \int_{a_1}^{a_2} h_1(x_1, b_2) - h_1(x_1, 0) dx_1 \\
&= \int_{a_1}^{a_2} h_1(x_1, 0) dx_1 = \int_{\partial\mathbb{H}^2} \omega
\end{aligned}$$

Caso geral: Vamos agora supor que o suporte de ω não está contido em uma vizinhança U_α de um sistema de coordenada. Porém é facil verificar que o suporte de $f_\alpha\omega$ está contido no interior de U_α. Temos então pelos casos descritos acima que

$$\int_M \mathrm{d}(f_\alpha\omega) = \int_{U_\alpha} \mathrm{d}(f_\alpha\omega) = \int_{\partial U_\alpha} f_\alpha\omega = \int_{\partial M} f_\alpha\omega$$

A equação acima permite concluir que:

$$\begin{aligned}
\int_M \mathrm{d}\omega &= \int_M \mathrm{d}\big(\sum_\alpha f_\alpha\omega\big) = \sum_\alpha \int_M \mathrm{d}(f_\alpha\omega) \\
&= \sum_\alpha \int_{\partial M} f_\alpha\omega = \int_{\partial M} \sum_\alpha f_\alpha\omega = \int_{\partial M} \omega.
\end{aligned}$$

□

EXERCÍCIO 1.52. Seja S superfície mergulhada orientável em $\mathbb{R}^3$ e $\vec{n}$ o vetor unitário normal a S dando sua orientação. Seja $I : S \to \mathbb{R}^3$ a inclusão e considere $\mathcal{A}$ o elemento de área de S ou seja, $\mathcal{A}$ é a 2-forma definida como $\mathcal{A} := I^*(i_{\vec{n}}\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3)$. Mostre que: $\langle \vec{F}, \vec{n}\rangle\mathcal{A} = I^*(i_{\vec{F}}\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3)$

Exercício 1.53. Sejam M^3 uma variedade orientável com bordo em $\mathbb{R}^3$ e $\vec{F} = \sum_{i=1}^{3} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ campo com suporte compacto. Prove que

$$\int_M \operatorname{div}(\vec{F}\,)\, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 = \int_{\partial M} \langle \vec{F}\,, \vec{n}\,\rangle\, \mathcal{A},$$

onde $\vec{n}$ é unitário, ortogonal a ∂M apontando para fora, e ∂M tem orientação induzida.

Exercício 1.54. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superficie mergulhada orientável com bordo. Então

$$\int_S \langle Rot\,(\vec{F}\,)\,, \vec{n}\,\rangle\, \mathcal{A} = \int_{\partial S} \langle \vec{F}\,, \vec{t}\,\rangle\, \mathcal{L},$$

onde $\vec{F} = \sum_{i=1}^{3} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ é campo com suporte compacto, o bordo $\partial\, S$ tem orientação induzida, $\mathcal{A}$ é o elemento de área e $\mathcal{L}$ é o elemento de comprimento de $\partial\, S$, ou seja a 1-forma volume de ∂S dual ao vetor $\vec{t}$ que dá a orientação de ∂S.

Terminamos esta seção sobre formas com os dois exercícios que destacam como formas podem ser usadas como invariante topológicos, i.e., para identificar espaços que não podem ser difeomorfos um ao outro.

Exercício 1.55. Considere a 1-forma $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 - \{0,0\})$ definida como $\omega := \frac{1}{x^2+y^2}\big(-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y\big)$.

(a) verifique que ω é fechada, ou seja $\mathrm{d}\omega = 0$,
(b) verifique que $\int_{S^1} \omega = 2\pi$,
(c) conclua que ω não é exata, ou seja não existe η tal que $\mathrm{d}\eta = \omega$.

Exercício 1.56 (**Lema de Poincaré). Dado um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ denotamos $H^k(U)$ o grupo de cohomologia de de Rham, i.e., o conjunto das k-formas fechadas em U (i.e, $d\omega = 0$ onde ω é k-forma em U) quociente pelas formas exatas (i.e., $\omega = d\eta$ onde η é $k-1$ forma).

(1) Sejam

$$\begin{array}{rcc} s : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & (x\,, 0\,) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcc} \pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x\,, t\,) & \to & x. \end{array}$$

Prove que se $\pi^* \circ s^* : H^k(\mathbb{R}^{n+1}) \to H^k(\mathbb{R}^{n+1})$ é um isomorfismo então $s^* : H^k(\mathbb{R}^{n+1}) \to H^k(\mathbb{R}^n)$ é um isomorfismo.

(2) Toda forma em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ pode ser vista como combinação de 2 tipos de formas:
(I) $\pi^*\phi\, f(x\,, t\,)$
(II) $\pi^*\phi\, f(x\,, t\,)\, \mathrm{d}t$,

onde ϕ é forma em $\mathbb{R}^n$. Seja $K : \Omega^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \to \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ operador linear definido da seguinte maneira:
(I) $K(\pi^*\phi\, f(x\,,\, t\,)) \,=\, 0$
(II) $K(\pi^*\phi\, f(x\,,\, t\,)) \;=\; \pi^*\phi \int_0^t f\,(x\,,\, s\,)\, ds$
Prove que $1 \;-\; \pi^*\, s^* \;=\; (-1)^{k-1}\mathrm{d}K \;-\; K\mathrm{d}$.

(3) Conclua que

$$H^k(\mathbb{R}^n\,) \;=\; \begin{cases} 0 & se \quad k > 0; \\ \\ \mathbb{R} & se \quad k \,=\, 0. \end{cases}$$

CAPíTULO 2

Variedades Riemannianas

Neste capítulo apresentamos a definição de variedades Riemannianas e alguns exemplos. Dentre estes exemplos discutiremos rapidamente os grupos de Lie compactos com métricas bi-invariantes e os espaços de órbitas M/G no caso em que G é um subgrupo fechado de isometrias da variedade Riemanniana M, agindo livremente em M.

2.1. Métricas Riemannianas

DEFINIÇÃO 2.1. Uma *métrica (Riemanniana)* de uma variedade M é uma seção suave do fibrado dos 2-tensores simétricos positivos definidos em $T(M)$. Em outras palavras é uma aplicação que associa a cada ponto p da variedade M um produto interno g_p de T_pM tal que $\mathrm{g}_{i,j} := \mathrm{g}(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$ é suave. Uma variedade M com uma métrica g é chamada então de *variedade Riemanniana*.

Segue da definição acima que uma métrica g pode ser descrita em coordenada da seguinte forma:

$$\mathrm{g} = \sum_{i,j} \mathrm{g}_{i,j} dx_i \otimes dx_j$$

PROPOSIÇÃO 2.2. *Toda variedade M admite métrica Riemanniana.*

Demonstração. Seja $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$ um atlas de M. Seja g^0 métrica Euclidiana e defina $g_\alpha := \psi_\alpha^* \mathrm{g}^0$. Por fim seja $\{h_\alpha\}$ uma partição da unidade subordinada a $\{U_\alpha\}$ e defina $\mathrm{g} := \sum_\alpha h_\alpha g_\alpha$. □

Observação 2.3. Raciocínio análogo garante que não somente TM mas qualquer fibrado vetorial admite métrica nas fibras.

Observação 2.4. O resultado acima (sem acréscimo de novas hipóteses) não é válido para outras estruturas geométricas. Por exemplo, nem toda variedade admite uma métrica de Lorenz. Em particular uma superfície admite métrica de Lorenz se e somente se a sua característica de Euler for zero. Também nem toda variedade (dimensão par) admite estrutura simplética, ou seja uma 2-forma fechada não degenerada.

Tendo a definição de métrica, podemos definir imersões isométricas e isometrias como se segue. Sejam (M, g^M) e (N, g^N) variedades Riemannianas. Então uma imersão $F : (M, \mathrm{g}^M) \to (N, \mathrm{g}^N)$ é chamada *imersão isométrica* se $\mathrm{g}^M = F^* \mathrm{g}^N$. Segue da definição que uma imersão $F : M \to (N, \mathrm{g}^N)$ torna-se uma imersão isometrica se definimos a métrica de M como $\mathrm{g}^M := F^*\mathrm{g}^N$. Tal métrica será chamada *métrica induzida (canonica)*. Além disto, um difeomorfismo (local) $F : (M, \mathrm{g}^M) \to (N, \mathrm{g}^N)$ é chamado *isometria (local)* se for uma imersão isométrica.

As definições acima nos levam a considerar os exemplos de métricas induzidas em variedades mergulhadas ou imersas em espaços Euclidianos.

EXEMPLO 2.5. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade mergulhada. Então (M, g^M) é variedade Riemanniana com a métrica induzida $\mathrm{g}^M := i^*\mathrm{g}_0$ onde $i : M \to \mathbb{R}^n$ é a inclusão e g_0 é a métrica Euclidiana. Em particular se M for a esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ está será a *métrica canônica da esfera.*

EXERCÍCIO 2.6. Seja M^2 superfície mergulhada em $\mathbb{R}^3$ invariante por rotação no eixo x^3, ou seja, uma superfície de rotação. Seja g a métrica induzida em M do espaço Euclidiano, i.e., $\mathrm{g} = i^*\mathrm{g}_0$ onde g_0 é a métrica Euclidiana e $i : M \to \mathbb{R}^3$ é a inclusão. Considere a parametrização $\varphi : \Omega \to M$ definida como

$$\varphi(t\,,\,\theta\,) = (r\,(t\,)\cos(\theta\,)\,;\,r(t)\sin(\theta\,)\,;\,h\,(t\,)\,)$$

onde $\beta(t) = (r\,(t\,)\,;\,0\,;\,h\,(t\,))$ é paramatrização por comprimento de arco da curva geratriz, i.e., $r(t) \neq 0$ e $\|\beta'\| = 1$. Verifique que a *primeira forma* é $\psi^*\mathrm{g}^0 = dt^2 + r^2(t)d\theta^2$.

Observação 2.7. Segue do teorema de Nash que qualquer variedade Riemanniana M pode ser isométricamente mergulhada em algum $\mathbb{R}^n$.

Um outro exemplo simples de variedades Riemannianas é o exemplo de variedade produto com métrica produto.

EXEMPLO 2.8. Sejam (M, g^M) e (N, g^N) variedades Riemannianas. Então a variedade produto $M \times N$ pode ser dotada da métrica

$$\mathrm{g}^{M\times N}_{(m,n)}(V, W) := \mathrm{g}^M_m(V_1, W_1) + \mathrm{g}^N_n(V_2, W_2)$$

a qual será chamada de *métrica produto.*

EXERCÍCIO 2.9. Sejam g_1 e dr^2 métricas canônicas de $\mathbb{S}^{n-1}$ e $I = (0, \infty)$. Defina em $\mathbb{S}^{n-1} \times I$ a metrica $g_{(m,r)} := r^2 g_1 + dr^2$.

(a) A métrica g é métrica produto?

(b) Mostre $(\mathbb{S}^{n-1} \times I, g)$ é isométrico a $(\mathbb{R}^n - 0, \mathrm{g}_0)$ e que $(\mathbb{S}^{n-1} \times I, g_1 \times dr^2)$ é isométrico ao cilindro $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} | x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1, \mathrm{e}\, x_0 > 0\}$.

SUGESTÃO: Consulte Gallot, Hulin, Lafontaine (Seção 2.A, página 58,59).

Completando a nossa lista de primeiros exemplos de variedades Riemannianas temos o exemplo do espaço hiperpólico e seus diversos modelos.

EXERCÍCIO 2.10. Considere $\mathbb{H}^2$ o modelo hiperbólico do semi-plano superior, ou seja $\mathbb{H}^2 := \{x + iy \,|\, y > 0\}$ com métrica $\mathrm{g} = \frac{1}{y^2}\big(dx^2 + dy^2\big)$. Considere o difeomorphismo $F : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ definido como $F(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ onde $ad - bc = 1$ e $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Prove que F é uma isometria.

SUGESTÃO: Passo 1: verifique (usando $ad-bc = 1$) que $\mathrm{Im}(F(z)) = \frac{\mathrm{Im(z)}}{|cz+d|^2}$. Passo 2: lembre que, por variável complexa, $\frac{d}{dt}(F \circ \alpha) = \frac{dF}{dz}(\alpha(t))\alpha'(t)$ para $t \to \alpha(t) = x(t) + iy(t)$. Passo 3: Visto que $ad - bc = 1$, verifique (usando variável complexa) que $\frac{dF}{dz} = \frac{1}{(cz+d)^2}$. Passo 4: Utilizando os passos anteriores conclua que:

$$\begin{aligned} \|DF\alpha'(t)\| &= \frac{|\frac{d}{dt}F(\alpha(t))|}{\mathrm{Im}(F(\alpha(t)))} \\ &= \frac{|\alpha'(t)|}{|c\alpha(t) + d|^2}\frac{|c\alpha(t) + d|^2}{\mathrm{Im}(\alpha(t))} \\ &= \|\alpha'(t)\|. \end{aligned}$$

EXERCÍCIO 2.11 (*). Neste problema iremos ver as diferentes representações do espaço hiperbólico.

(a) O *espaço de Minkowski* é definido como $\mathbb{R}^{n+1}$ com a forma quadratica $\langle x, x\rangle = -x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2$. Considere $\mathbb{H}^{n+1}$ a subvariedade de $\mathbb{R}^{n+1}$ definida como: $\mathbb{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \langle x, x\rangle = -1, x_0 > 0\}$. Verifique que a forma quadratica $-dx_0^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2$ restrita a $\mathbb{H}^n$ é uma métrica Riemanniana g.

(b) Seja f a *pseudo-inversão* com polo $s = (-1, 0, \cdots, 0)$ definida por $f(x) = s - \frac{2(x-s)}{\langle x-s, x-s\rangle}$, onde $\langle\cdot, \cdot\rangle$ é a forma quadratica definida no Item (a). Para $X = (0, X_1, \ldots, X_n)$ no plano $x_0 = 0$ denote $|X|^2 := \langle X, X\rangle = \sum_{i=1}^n X_i^2$. Mostre que f é difeomorfismo de $\mathbb{H}^n$ no disco unitário $\{x \in \mathbb{R}^n, |x| < 1\}$ e que $g_1 := (f^{-1})^* g = 4\sum_{i=1}^n \frac{dx_i^2}{(1-|x|^2)^2}$.

(c) Seja h a inversão no $\mathbb{R}^n$ definida como $h(x) := s + \frac{2(x-s)}{|x-s|^2}$, com polo $s = (-1, 0, \ldots, 0)$. Mostre que h é um difeomorfismo do disco unitário no semi-espaço $x_1 > 0$ e que $h^* g_1 = \sum_{i=1}^n \frac{dx_i^2}{(x_1)^2}$.

Obtemos assim duas variedades Riemannianas que são isométricas a $(\mathbb{H}^n, g)$, a primeira é chamada *disco de Poincaré* (Item (b)) e a segunda *semi-espaco de Poincaré* (Item (c)).

SUGESTÃO: Consulte e.g. Gallot, Hulin, Lafontaine (Seção 2.A, página 56,57) e Carmo (Capitulo 8, página 196,197).

O conceito de métrica nos permite introduzir de forma natural conceitos como comprimento de curva, distância e volume.

Seja $\alpha : [a,b] \to (M, \mathrm{g})$ uma curva C^1 por partes. O *comprimento da curva* de α é definido como

$$L(\alpha) := \sum_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\mathrm{g}(\alpha'(t), \alpha'(t))}d\,t$$

A *distância entre 2 pontos* q e q de M é definida como

$$d(p,q) = \inf_{\alpha \in \Omega_{p,q}} L(\alpha)$$

onde $\Omega_{p,q}$ é o conjunto das curvas C^1 por partes $\alpha : [0,1] \to M$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$. É possivel mostrar que $d : M \times M \to \mathbb{R}$ é uma função continua e de fato uma função distância. Temos assim que (M, d) é um espaço métrico.

EXERCÍCIO 2.12. Considere um difeomorfismo $F : (M, \mathrm{g}) \to (M, \mathrm{g})$ de uma variedade Riemanniana (M, g). Prove que se $F^*\mathrm{g} = \mathrm{g}$ (i.e, se ele é uma isometria) então F preserva distância, ou seja $d\big(F(x), F(y)\big) = d(x,y)$ para todo $x, y \in M$.

EXERCÍCIO 2.13. Sejam (M^m, g) variedade Riemanniana orientada e ω a *m-forma volume* (i.e, a única m-forma tal que $\omega(e_1, \ldots, e_m)_p = 1$ para qualquer referencial ortonormal $\{e_i\}$ de T_pM coerente com a orientação de T_pM). Mostre que em coordenadas $\omega = \sqrt{\det(\mathrm{g}_{i,j})}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$.

SUGESTÃO: Considere $e_i = \sum_j b_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$. Note que $(b_{ij})^T (g_{ij})(b_{ij}) = Id$. Assim $\det(b_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}}$. Por outro lado se $\omega = c dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ temos $1 = \omega(e_1, \ldots, e_n) = c \det(b_{ij})$. Podemos então concluir que $c = \sqrt{\det(g_{ij})}$.

2.2. Grupos de Lie

Iniciemos apresentando algumas definições e propriedades gerais de grupos de Lie.

DEFINIÇÃO 2.14. Uma variedade G é chamada *grupo de Lie* se G é um grupo e as operações

$$\begin{aligned} G \times G \ni (x,y) &\to xy \in G \\ G \ni x &\to x^{-1} \in G \end{aligned}$$

são suaves

Observe que a definição acima equivale a dizer que G é um grupo e a operação $G \times G \ni (x, y) \to xy^{-1} \in G$ é suave.

Exemplos de grupos de Lie são $(\mathbb{R}^n, +)$, $(S^1, \cdot)$, $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ e os grupos de matrizes $GL(n, K)$, $SL(n, K)$ (onde $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$) e os grupos de matrizes $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$ e $SU(n)$.

Definição 2.15. Um subgrupo H de G é um *um subgrupo de Lie* se H é variedade imersa (sem auto-interseções) e $H \times H \ni (x, y) \to xy^{-1} \in H$ é suave.

Um dos primeiros resultados da teoria de grupos de Lie nos fornece uma ferramenta útil para obter exemplos de grupos e subgrupos de Lie.

Teorema 2.16. *Seja G um grupo de Lie e H um subgrupo fechado. Então H é um sugrupo de Lie de G mergulhado.*

Exercício 2.17. Mostre que $GL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{C})$, $SL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{C})$, $O(n)$ e $U(n)$ são grupos de Lie.

Sugestão: Mostre diretamente que $GL(n, \mathbb{R})$ e $GL(n, \mathbb{C})$ são grupos de Lie. Depois mostre que $SL(n\mathbb{R})$, $O(n)$, $SL(n, \mathbb{C})$, e $U(n)$ são subgrupos fechados de $GL(n, \mathbb{R})$ e $GL(n, \mathbb{C})$ e use o resultado acima.

Recordemos agora que a cada grupo de Lie existe uma algebra de Lie associada. Um campo X é chamado *campo invariante a esquerda* se $X = dL_g X$ onde $L_g : G \ni a \to ga \in G$ é a multiplicação a esquerda. É possivel mostrar que tais campos de fato são suaves. Segue da definição que um campo invariante a esquerda é determinado por seu valor no espaço tangente T_eG, i.e., $X(g) = dL_g X(e)$. Assim chegamos a conclusão que o modulo dos campos invariantes a esquerda, denotado aqui por $\mathfrak{g}$, é um espaço vetorial com a dimensão do grupo de Lie G. Também é possivel mostrar que $\mathfrak{g}$ é fechado pelo colchete de campos de vetores, ou seja o colchete de 2 campos invariantes a esquerda é um campo invariante a esquerda.

Definição 2.18. Seja $\mathfrak{g}$ o modulo dos campos invariantes a esquerda do grupo de Lie G. Então $\mathfrak{g}$ dotado do colchete de campos é uma algebra de Lie chamada *algebra de Lie do grupo de Lie G*.

Observação 2.19. Como $X(g) = dL_g X(e)$ frequentemente estaremos identificando o campo X com o vetor $X(e) \in T_eG$. Também podemos dotar T_eG com o produto de Lie $[V_1, V_2] := [X_1, X_2]_e$ onde $X_i(g) = dL_g V_i$ e provar que T_eG com tal produto de Lie é isomorfo (admite uma bijeção linear que preserva produto de Lie) a $\mathfrak{g}$ com o colchete de campos.

Um outro conceito relevante em grupos de Lie é o da exponencial de Lie. Seja $X \in \mathfrak{g}$. Então é possivel mostrar que existe uma única linha integral $\lambda_X : \mathbb{R} \to G$ do campo X. Ou seja $\lambda'_X(t) = X(\lambda_X(t))$ e

$\lambda_X(0) = e$. A *exponencial de Lie* é definida então como

$$\exp(X) = \lambda_X(1).$$

A seguir algumas propriedades da aplicação exponencial de Lie.

(1) $\exp(tX) = \lambda_X(t)$
(2) $\exp(-tX) = (\exp(tX))^{-1}$
(3) $\exp(tX + sX) = \exp(tX)\exp(sX)$
(4) $\exp : T_eG \to G$ é suave e $d(\exp)_0 = id$

Como podemos perceber tais propriedades são as mesmas da aplicação exponencial de matrizes. De fato quando G é um grupo de matrizes estas 2 exponenciais coincidem.

EXERCÍCIO 2.20. Seja G é um subgrupo de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$. Mostre que a aplicação exponencial de G coincide com a exponencial de matrizes.

SUGESTÃO: Defina $\varphi(t) := \exp(tX)$. Usando o fato que φ é um homomorfismo de Lie a 1-parametro (ou seja $\varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t)$), conclua que φ é solução da E.D.O, $\varphi'(t) = \varphi'(0)\varphi(t)$ com $\varphi(0) = Id$. O resultado segue então da teoria de E.D.O.

Aceitando algumas propriedades da aplicação exponencial e a representação adjunta, podemos determinar explicitamente a algebra de Lie de grupos de Lie matriciais.

EXERCÍCIO 2.21. Sejam G subgrupo de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$ e $X, Y \in \mathfrak{g}$. Verifique:

(1) $dL_gX = gX$ e $dR_gX = Xg$.
(2) $\mathrm{Ad}(g)Y := \frac{d}{dt}(g\exp(tY)g^{-1})|_{t=0} = gYg^{-1}$.
(3) Usando (sem demonstrar) o fato que $\frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(\exp(tX))Y|_{t=0} = [X, Y]$ mostre que $[X, Y] = XY - YX$ (comutador de matrizes).

Támbem é conveniente destacar o próximo resultado sobre quociente entre grupos de Lie que será útil no estudo de órbitas de ações isométricas.

TEOREMA 2.22. *Seja H um subgrupo fechado de um grupo de Lie G. Então G/H admite uma única estrutura diferenciável tal que $\pi : G \to G/H$ é aplicação suave. Além disto se H é normal G/H é grupo de Lie e π é um homomorfismo de Lie, i.e., um homomorfismo suave entre grupos de Lie.*

Observação 2.23. Para que G/H seja um grupo de Lie é necessario que H seja normal. Veremos por exemplo que $SO(3)/SO(2)$ é difeomorfo a esfera $\mathbb{S}^2$, a qual não admite estrutura de grupos de Lie, haja vista que seu fibrado normal não é trivial. O quociente de um grupo de Lie matricial por um grupo normal pode resultar em um grupo de Lie não matricial, i.e., que não admite uma representação injetora matricial (vide detalhes em Carter, Segal e Macdonald).

Por fim vamos considerar algumas métricas nos grupos de Lie.

Seja $R_g : G \ni x \to xg \in G$ a múltiplicação a direita. Uma métrica g em um grupo de Lie G é *invariante a direita* (respectivamente *invariante a esquerda*) se R_g (respectivamente L_g) é isometria da métrica g para todo elemento g do grupo. Note que todo grupo de Lie admite uma métrica invariante a direita. De fato uma tal métrica pode ser definida como

$$\mathrm{g}_h(V, W) := \langle D(R_h)^{-1}V, D(R_h)^{-1}W\rangle$$

onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é um produto internto qualquer em T_eG. De forma analoga, pode-se demonstrar que existe uma n-forma invariante a direita, ou seja $R_h^*\omega = \omega$. Nem todo grupo amite uma métrica que seja invariante a direita e a esquerda ao mesmo tempo (e.g., $SL(2,\mathbb{R})$). Mostramos a seguir que, quando o grupo G é compacto, tal métrica existe.

Proposição 2.24. *Seja G um grupo de Lie compacto. Então G admite uma métrica bi-invariante, i.e., invariante a esquerda e direita.*

Demonstração. Seja ω uma forma volume invariante a direita em G e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ uma métrica invariante a direita qualquer.

Defina para todo $X, Y \in T_xG$,

$$\leqslant X, Y \geqslant_x = \int_G \langle \mathrm{d}L_g X, \mathrm{d}L_g Y\rangle_{gx}\omega.$$

Primeiro afirmarmos que $\leqslant \cdot,\cdot \geqslant$ é invariante a esquerda. De fato,

$$\begin{aligned} \leqslant \mathrm{d}L_h X, \mathrm{d}L_h Y \geqslant_{hx} &= \int_G \langle \mathrm{d}L_g(\mathrm{d}L_h X), \mathrm{d}L_g(\mathrm{d}L_h Y)\rangle_{g(hx)}\omega \\ &= \int_G \langle \mathrm{d}L_{gh} X, \mathrm{d}L_{gh} Y\rangle_{(gh)x}\omega. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Fixe $X, Y \in T_xG$ e defina $f(g) = \langle \mathrm{d}L_g X, \mathrm{d}L_g Y\rangle_{gx}$. Então

$$\begin{aligned} \int_G \langle \mathrm{d}L_{gh} X, \mathrm{d}L_{gh} Y\rangle_{(gh)x}\omega &= \int_G f(gh)\omega \\ &= \int_G R_h^*(f\omega) \\ &= \int_G f\omega \\ &= \int_G \langle \mathrm{d}L_g X, \mathrm{d}L_g Y\rangle_{gx}\omega \\ &= \leqslant X, Y \geqslant_x . \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Das equações (2.2.1) e (2.2.2), segue que $\leqslant \cdot,\cdot \geqslant$ é invariante a esquerda.

Verificamos agora que $\leqslant \cdot,\cdot \geqslant$ é invariante a direita.

$$\leqslant \mathrm{d}R_h X, \mathrm{d}R_h Y \geqslant_{xh} = \int_G \langle \mathrm{d}L_g(\mathrm{d}R_h X), \mathrm{d}L_g(\mathrm{d}R_h Y)\rangle_{g(xh)}\ \omega$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_G \langle \mathrm{d}R_h \mathrm{d}L_g X, \mathrm{d}R_h \mathrm{d}L_g Y\rangle_{(gx)h}\ \omega \\
&= \int_G \langle \mathrm{d}L_g X, \mathrm{d}L_g Y\rangle_{gx}\ \omega \\
&= \leqslant X, Y \geqslant_x . \quad \square
\end{aligned}
$$

2.3. Ações Isométricas

Nesta subseção estamos interassados em considerar variedades que surgem como espaço de órbitas M/G, onde G é um subgrupos fechado de isometrias de M, bem como apresentar métricas naturais nestes espaços, vide Proposition 2.36.

Iniciemos apresentando algumas definições e resultados mais gerais sobre ações próprias.

Sejam G um grupo de Lie, M uma variedade. Uma aplicação $\mu : G \times M \to M$ é chamada *ação a esquerda* se

(a) $\mu(g_1, \mu(g_2, x)) = \mu(g_1 g_2, x)$
(b) $\mu(e, x) = x$.

Vale aqui definição análoga para ação a direita. Por vezes, pode ser conveniente denotar $\mu(g, x)$ simplesmente por $g \cdot x$.

Um exemplo simples de uma ação (a esquerda) observado nos primeiros semestres de graduação é dado por um grupo fechado $G \subset GL(n)$ agindo em $M = \mathbb{R}^n$ via multiplicação matricial. Em outras palavras consideremos $\mu : G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ onde $\mu(g, v) = gv$. Outro exemplo comum são as ações dada por fluxos de campos completos. Em outras palavras considere um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ em uma variedade M e suponha que seu fluxo φ_t esteja definido para todo tempo t. Então podemos definir $\mu : \mathbb{R} \times M \to M$ como $\mu(t, x) = \varphi_t(x)$. Em particular neste último exemplo a linha integral do campo passando por x é um exemplo da assim chamada órbita por x.

Uma *órbita passando por* x é definida como sendo o conjunto

$$G(x) := \{\mu(g, x) | \, \forall g \in G\}.$$

As órbitas particionam o espaço, sendo que o conjunto das órbitas é chamado *espaço de órbitas* e é denotado por:

$$M/G = \{G(x), \forall x \in M\}.$$

Outro conceito relevante é a definição de *grupos de isotropia* G_x de um ponto x.

$$G_x := \{g | \mu(g, x) = x\}.$$

EXEMPLO 2.25.

(a) Sejam $G = SO(3)$, $M = \mathbb{R}^3$ e ação matricial $\mu : SO(3) \times \mathbb{R}^3$, i.e., $\mu(g, v) = gv$. Então se $x \neq (0, 0, 0)$ temos que a órbita $G(x)$ é esfera de raio $\|x\|$ e a isotropia associada a x é

$G_x = SO(2)$. Caso $x = (0,0,0)$ então $G(x) = \{(0,0,0)\}$ e a isotropia $G_{(0,0,0)} = SO(3)$. Note também que neste exemplo $M/G = [0,\infty)$

(b) Seja M^2 superfície mergulhada em $\mathbb{R}^3$ invariante por rotação no eixo x_3, ou seja, uma superfície de rotação. Então a rotação induz uma ação $S^1 \times M \to M$ sendo que a curva geratriz (ou o refletido dela de acordo com a definição usada de curva geratriz) se torna o espaço de orbitas M/G. As orbitas são os círculos ou "paralelos"da superfície de revolução. A isotropia para todo ponto que não é um "polo"i.e., que não está no eixo x_3 é trivial.

(c) Sejam $G = S^1 \times \mathbb{R}$, $M = \mathbb{R}^3$ e considere a ação matricial de G em M. Neste caso as órbitas são ou cilindros (se $x \neq (0,0,0)$) ou o eixo x_3 (se $x = (0,0,0)$) sendo que as isotropias nestes casos são ou triviais ou o S^1 respectivamente. O espaço de orbitas então é o semi-plano $M/G = \{(x_1, x_2, x_3), x_1 = 0, x_2 \geq 0\}$.

Observe que nos exemplos acima as órbitas sempre são subvariedades mergulhadas. Esta é uma das propriedades interessantes da assim chamada ação própria, a qual generaliza ação de grupos compactos.

Definição 2.26 (Ação própria). Uma ação $\mu : G \times M \to M$ é *uma ação própria* se a aplicação $G \times M \ni (g,x) \to (\mu(g,x), x) \in M \times M$ é própria, ou seja se a pré-imagem de conjuntos compactos é compacto. É possível mostrar que uma ação é própria se e somente se para toda sequência $\{x_n\}$ em M e $\mu(g_n, x_n)$ em M tal que $x_n \to x$ e $\mu(g_n, x_n) \to y$ pudermos concluir que existe uma subsequência $\{g_{n_i}\}$ convergente em G.

Segue direto da definição que todo grupo compacto G age sempre propriamente em variedades. A seguir um outro exemplo de ação própria. Lembremos que uma ação é *livre* se senhum $\mu^g(\cdot) := \mu(g,\cdot)$ fixa pontos quando g diferente da identidade.

Exercício 2.27. Seja H subgrupo fechado de um grupo de Lie G. Mostre que a ação $G \times H \to G$ definida como $g \cdot h := gh$ é uma ação a direita, livre, própria.

Proposição 2.28. *Sejam $\mu : G \times M \to M$ ação e $\mu_x : G \to M$ definida como $\mu_x(g) = \mu(g,x)$. Então*

(a) *$\tilde{\mu}_x : G/G_x \to G(x) \subset M$ é uma imersão sem auto-interseções, onde $\tilde{\mu}_x$ é a única função tal que $\tilde{\mu}_x \circ \pi = \mu_x$ e $\pi : G \to G/G_x$ é a projeção canonica.*

(b) *Se a ação for própria então $\tilde{\mu}_x$ é um mergulho. Em particular $G(x)$ é variedade mergulhada.*

Exercício 2.29. Verifique que $\mathbb{S}^n = SO(n+1)/SO(n)$.

Ações próprias estão relacionadas com ações de grupos fechados de isometria. Antes de explorar este relação, apresentamos o teorema a seguir devido a Meyers-Steenrod.

TEOREMA 2.30. *Seja M uma variedade Riemanniana e denote por $Iso(M)$ o grupo de isometrias de M. Então todo subgrupo fechado na topologia da convergência compacta é um grupo de Lie. Em particular $Iso(M)$ é grupo de Lie. Além disto se M for compacta, $Iso(M)$ é compacta.*

TEOREMA 2.31. *Seja $G \subset Iso(M)$ subgrupo fechado. Então a ação $\mu : G \times M \to M$ definida como $\mu(g, x) = g(x)$ é uma ação própria.*

Observação 2.32. É possivel também mostrar um resultado recíproco. Ou seja, para toda ação própria $\mu : G \times M \to M$ existe uma métrica em M tal que $\mu(G, \cdot)$ se torna um subgrupo fechado de isometrias.

TEOREMA 2.33. *Seja $\mu : G \times M \to M$ ação livre e própria. Então M/G tem estrutura de variedade e $\pi : M \to M/G$ é submersão. Além disto para todo $x \in M/G$ e $y \in \pi^{-1}(x)$ existe aplicação suave $S : U \to M$ (seção local) tal que $S(x) = y$ e $\pi \circ S = Id$.*

EXEMPLO 2.34. Considere a esfera $\mathbb{S}^{2n+1} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2}, |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 1\}$ e $\mu : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{S}^{2n+1}$ definida como $\mu(g, z) = (g \cdot z_1, \ldots, g \cdot z_{n+1})$. Então $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ (espaço projetivo complexo) é variedade e $\pi : \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ é submersão.

EXERCÍCIO 2.35. Verifique os difeomorfismos abaixo:

(a) $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = SO(n+1)/S(O(n) \times O(1))$.
(b) $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$.

SUGESTÃO: Para mostrar por exemplo que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = SO(n+1)/S(O(n) \times O(1))$, note que a ação de $SO(n+1)$ na esfera $\mathbb{S}^n$ induz uma ação em $P^n(\mathbb{R})$ (visto que ação de matriz comuta com a ação por multiplicação por escalar).

Considere agora as hipóteses do Teorema 2.33. Desejamos dar uma métrica a M/G de forma que $\pi : M \to M/G$ se torne uma submersão Riemanniana.

Recordemos primeiro que uma submersão $\pi : (M, \mathrm{g}^M) \to (B, \mathrm{g}^B)$ é uma *submersão Riemmanniana* se para qualquer $p \in M$ a derivada $d\pi_p : \mathcal{H}_p \to T_{\pi(p)}B$ é isometria, onde $\mathcal{H}_p$ é o espaço normal as preimagem $\pi^{-1}(\pi(p))$.

PROPOSIÇÃO 2.36. *Sejam (M, g^M) variedade Riemanniana e G subgrupo fechado de isometrias de $Iso(M)$. Suponha que a ação $\mu : G \times M \to M$ definida como $\mu(g, x) = g(x)$ é livre. Então existe uma única métrica $\mathrm{g}^{M/G}$ em M/G tal que $\pi : M \to M/G$ é uma submersão Riemanniana.*

Demonstração. Seja $\mathcal{H}$ a distribuição normal as órbitas. Observe que tal distribuição é suave. Observe também que dado um vetor $V \in T_q(M/G)$ existe um único vetor $\tilde{V} \in \mathcal{H}_p$ tal que $D\pi_p\tilde{V} = V$, onde $p \in \pi^{-1}(q)$. Podemos então definir a métrica como

$$\mathrm{g}^{M/G}(V_1, V_2) = \mathrm{g}^M_p(\tilde{V}_1, \tilde{V}_2).$$

Devemos verificar primeiro que $\mathrm{g}^{M/G}$ está bem definida. Note que como $\mu^g(\cdot) = g(\cdot)$ é isometria, sua derivada leva $\mathcal{H}_p$ em $\mathcal{H}_{g(p)}$. Assim se $\tilde{V} \in \mathcal{H}_p$ temos que $D\mu^g\tilde{V} \in \mathcal{H}_{g(p)}$. Por outro lado sabemos que $\pi = \pi \circ \mu^g$. Assim $D\pi \circ D\mu^g\tilde{V} = D\pi\tilde{V}$. Tais fatos permitem então concluir que $\mathrm{g}^{M/G}$ está bem definida.

Para mostrar que $\mathrm{g}^{M/G}$ é suave defina $P_x : T_xM \to \mathcal{H}_x$ como projeção ortogonal e note que P_x depende suavemente de x. Seja $S : U \to M$ uma seção local. Então

$$\mathrm{g}^{M/G}_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \mathrm{g}^M_{S(x)}\left(P_x d(S)_x \frac{\partial}{\partial x_i}, P_x d(S)_x \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

e o lado direito depende suavemente de x.

□

Visto que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$, segue da proposição acima que a submersão $\pi : \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ induz uma métrica Riemanniana em $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Tal métrica é chamada de métrica de *Fubini-Study*.

Terminamos esta seção considerando um caso particular de ação própria. Lembremos que uma aplicação $\pi : \widetilde{M} \to M$ é um *recobrimento* se:

(a) π é suave e sobrejetora.
(b) para qualquer $p \in M$ existe uma vizinhança U de p tal que $\pi^{-1}(U) = \cup_i V_i$ onde V_i são abertos disjuntos e $\pi_{V_i} : V_i \to U$ é difeomorfismo.

Sabemos que toda variedade M admite recobrimento $\widetilde{M}$ tal que $\widetilde{M}$ é simplesmente conexo. $\widetilde{M}$ é chamado *recobrimento universal* de M. Note que se M é variedade Riemanniana com métrica g então podemos definir uma métrica $\tilde{\mathrm{g}}$ em $\widetilde{M}$ e com esta métrica a aplicação recobrimento se torna uma isometria local. Neste caso dizemos que $\widetilde{M}$ é um recobrimento Riemanniano de M.

Segue então do Teorema 2.33 que *se G um grupo discreto, i.e., com topologia discreta agindo livre e propriamente em M, então $\pi : M \to M/G$ é recobrimento.*

EXERCÍCIO 2.37. Seja $\{a_i\}$ uma base de $\mathbb{R}^n$. Um lattice Γ associado a esta base é o conjunto de todos os vetores $\sum k_j a_j$ para $k_j \in \mathbb{Z}$. Identificando Γ com o subgrupo de translações podemos fornecer ao quociente $\mathbb{R}^n/\Gamma$ estrutura de variedade.

(a) Mostre que existe um difeomorfismo $\hat{p} : \mathbb{R}^n/\Gamma \to T^n$.

(b) Seja g_Γ métrica definida em T^n tal que $\hat{p} : \mathbb{R}^n/\Gamma \to T^n$ é isometria. Mostre que g_Γ e $g_{\tilde{\Gamma}}$ definidas em T^n são isométricas se e somente se existe uma isometria em $\mathbb{R}^n$ que envia o lattice Γ no lattice $\tilde{\Gamma}$.

CAPíTULO 3

Conexão e curvatura

Neste capítulo apresentaremos a definição de conexão afim em fibrados vetorias e conexão Riemanniana. A conexão Riemanniana permitirá que fibras diferentes sejam conectadas via o transporte paralelo. Junto com as conexões afins e Riemannianas também discutiremos o conceito do tensor curvatura o qual medirá quão o transporte paralelo depende de caminhos curtos.

3.1. Conexão afim

DEFINIÇÃO 3.1. Sejam (E, M, π) fibrado vetorial e $\Gamma(E)$ o conjunto das seções de E (isto é, o conjunto das aplicações $s : M \to E$ tais que $\pi \circ s = id$). Uma *conexão afim* é uma aplicação $\mathbb{R}$-bilinear

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$$

atendendo às seguintes condições:

(a) $\nabla_{fW} V = f \nabla_W V$
(b) $\nabla_W fV = f \nabla_W V + (Wf)V$

onde $W \in \mathfrak{X}(M), V \in \Gamma(E), f \in C^\infty(M)$.

A seguir apresentamos uma série de exemplos importantes, vide Capítulo 5.

EXERCÍCIO 3.2.

(a) Se $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ com $V = \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Verifique que a derivação usual de campos $\nabla_W V = D_W V := \sum_i (W \cdot v_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$ é uma conexão afim.
(b) Seja M^m uma subvariedade mergulhada em $\mathbb{R}^{m+k}$. Defina no fibrado tangente TM a conexão $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ como $\nabla_W V := \pi D_W \widetilde{V}$ onde π é a projeção ortogonal em TM e $\widetilde{V} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{m+k})$ é extensão local de $V \in \mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$. Verifique que ela está bem definida e atende as propriedades de uma conexão afim.
(c) Seja M^m uma subvariedade mergulhada em $\mathbb{R}^{m+k}$. Defina no fibrado normal $\nu(M)$ a conexão $\nabla^\nu : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(\nu(M)) \to \Gamma(\nu(M))$ como $\nabla^\nu_W \xi := \pi^\nu D_W \widetilde{\xi}$ onde π^ν é a projeção orgotonal em $\nu(M)$ e $\widetilde{\xi} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{m+k})$ é a extensão de $\xi \in \Gamma(\nu(M))$. Verifique que ∇^ν está bem definida e atende as propriedades de uma conexão afim.

Vamos agora descrever uma conexão afim utilizando coordenadas do fibrado $E \to M$.

Seja U uma vizinhança coordenada de $p \in M$ e $\{\xi_i\}$ referenciais de $E|_U$, i.e., $\xi_j(p) = \psi^{-1}(p, e_j)$ onde $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ é uma trivialização do fibrado E.

Suponha $W = \sum_i w_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $V = \sum_j v_j \xi_j$ Temos então que

$$\begin{aligned}
\nabla_W V &= \nabla_W \sum_j v_j \xi_j \\
&= \sum_j (W \cdot v_j)\xi_j + \sum_j v_j \nabla_W \xi_j \\
&= \sum_k (W \cdot v_k)\xi_k + \sum_{i,j} v_j w_i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \xi_j.
\end{aligned}$$

A equação acima então implica que

$$\nabla_W V = \sum_k \{(W \cdot v_k) + \sum_{i,j} w_i v_j \Gamma^k_{i,j}\}\xi_k \tag{3.1.1}$$

onde a função $\Gamma^k_{i,j}$ é chamada *símbolo de Cristoffel* e é definida como

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \xi_j = \sum_k \Gamma^k_{i,j} \xi_k$$

Observação 3.3. É importante observar que a fórmula acima garante que $(\nabla_W V)_p$ depende apenas do vetor $W(p)$ e não do campo W.

A equação (3.1.1) admite uma formulação matricial.

$$\nabla_W V = D_W V + A(W)V \tag{3.1.2}$$

onde $D_W V$ é a derivada de campos em $\mathbb{R}^n$ (vide item (a) Exercício 3.2) e $A(\cdot)$ é a matriz de 1-formas definida como

$$a_{k,j}(\cdot) := \sum_i \Gamma^k_{i,j} \mathrm{d}x_i.$$

Observação 3.4. A equação (3.1.2) implica que o espaço de conexões é um *espaço afim*, dai o nome conexão afim.

Veremos a seguir que dado uma conexão em um fibrado vetorial (E, M, π), existe uma conexão no espaço das seções de E ao longo de uma curva α, i.e., no espaço dos campos de vetores do tipo $t \to V(t) \in E_{\alpha(t)}$. Tal conexão será chamada de *derivada covariante*.

PROPOSIÇÃO 3.5. *Sejam (E, π, M) um fibrado vetorial com conexão ∇. Seja $\alpha : I \to M$ uma curva suave. Denote $\Gamma(\alpha^* E)$ o espaço das seções de E ao longo de α. Então existe um único operador $\frac{\nabla}{dt} : \Gamma(\alpha^* E) \to \Gamma(\alpha^* E)$ tal que*

(a) $\frac{\nabla}{dt}(V + W) = \frac{\nabla}{dt} V + \frac{\nabla}{dt} W$

(b) $\frac{\nabla}{dt}(fV) = f'V + f\frac{\nabla}{dt}V$ *para* $f : I \to \mathbb{R}$ *suave.*
(c) *Se* $\tilde{V} \in \Gamma(E)$ *e* $V(t) := \tilde{V}(\alpha(t))$ *então* $\frac{\nabla}{dt}V = \nabla_{\alpha'}\tilde{V}$

Demonstração. Se $\frac{\nabla}{dt}$ atende as propriedades acima então ela deve se descrita em coordenadas como:

$$(\frac{\nabla}{dt}V)(t) = \sum_k \{v_k'(t) + \sum_{i,j} x_i'(t)\, v_j(t)\, \Gamma_{i,j}^k \circ \alpha(t)\}\, \xi_k \circ \alpha(t)$$

Onde $V(t) = \sum_k v_k(t)\xi_k \circ \alpha(t)$ e $\alpha'(t) = \sum_i x_i'(t)\frac{\partial}{\partial x_i} \circ \alpha(t)$. A equação acima garante a unicidade do operador. Ao mesmo tempo a equação acima permite definir um operador que atende as propriedades (a), (b) e (c) e assim temos a existência local. A unicidade e existência local garantem então a existência global. □

Note que, não supomos que a velocidade de α é sempre diferente de zero e desta forma nem sempre podemos garantir a existência de uma extensão natural do campo $t \to V(t)$ ao longo de α para um campo $\tilde{V} \in \Gamma(E)$.

A derivada covariante ao longo de uma curva é na verdade a *conexão pull-back* no fibrado pullback $\alpha^*(E)$, conceito que discutimos rapidamente na observação a seguir.

Observação 3.6 (Conexão pull-back). Seja (E, M, π) uma fibrado vetorial com conexão afim ∇. Seja $\varphi : B \to M$ uma aplicação suave entre uma variedade B e a variedade M. O espaço total do fibrado pull-back é definido como

$$\varphi^*E := \{(p, V) \in M \times E | \varphi(p) = \pi(V)\}$$

(E, B, π_1) se torna então um fibrado vetorial, onde a projeção $\pi_1 : \varphi^*E \to B$ é definida como $\pi_1(p, V) = p$. Observe também que $\varphi \circ \pi_1 = \pi \circ \tilde{\varphi}$ onde $\tilde{\varphi} : \varphi^*E \to E$ é definido como $\tilde{\varphi}(p, V) = V$.

De forma análoga a prova da Proposição 3.5 é possível mostrar que existe uma única conexão $\varphi^*\nabla$ em φ^*E tal que

$$(\varphi^*\nabla)_W V \circ \varphi = \nabla_{dF(W)}V$$

onde $V \in \Gamma(E)$ e $W \in \mathfrak{X}(M)$.

Munidos com o conceito de derivada covariante podemos introduzir o conceito de paralelismo. Uma seção $V \in \Gamma(\alpha^*E)$ é chamada *paralela* se $\frac{\nabla}{dt}V(t) = 0$ para todo t.

PROPOSIÇÃO 3.7. *Seja* (E, M, π) *um fibrado vetorial com conexão afim* ∇ *e* $\alpha : [a, b] \to M$ *uma curva suave. Seja* $V \in E_{\alpha(a)}$. *Então existe uma única seção* $V \in \Gamma(\alpha^*E)$ *paralela tal que* $V(a) = V$.

Demonstração. Considere uma partição $a = t_0 < t_1 < \cdots < l_n = b$ tal que a curva restrita $\alpha|_{[t_i,t_{i+1}]}$ está contida em uma vizinhança coordenada. Vamos provar primeiro o resultado para cada uma destas curvas. Como vimos na demonstração da Proposição 3.5, em uma vizinhança coordenada, $\frac{\nabla}{dt}V = 0$ equivale a

$$0 = \sum_k \{v_k'(t) + \sum_{i,j} x_i'(t)\, v_j(t)\, \Gamma_{i,j}^k \circ \alpha(t)\}$$

Tal E.D.O tem uma única solução $\sum_j v_j(t)\xi_j \circ \alpha(t)$ em $[t_i, t_{i+1}]$ que coincide em t_i com um certo vetor dado $V \in E_{\alpha(t_i)}$ e isto demonstra o resultado para $\alpha|_{[t_i,t_{i+1}]}$. Pela unicidade das soluções, as soluções coincide nas interseções das vizinhanças coordenadas e isto permite estender a solução para todo $[a, b]$. □

Com as hipóteses da proposição acima o vetor $V(b) \in E_{\alpha(b)}$ é chamado *transporte paralelo* do vetor $V \in E_{\alpha(a)}$ e denotado por

$$||_\alpha V := V(b).$$

Observação 3.8. Com um transporte paralelo podemos *conectar* as fibras $E_{\alpha(a)}$ com $E_{\alpha(b)}$, dai o nome conexão. É importante observar que em geral o transporte paralelo depende do caminho. Como veremos em breve a curvatura irá medir quão o transporte paralelo depende do caminho.

Dado uma conexão em um fibrado vetorial (E, M, π) podemos definir a *derivada covariante* de um $(0, s)$ (respectivamente $(1, s)$) tensor A da seguinte forma:

$$\begin{aligned}(\nabla_X A)(Y_1, \ldots, Y_s) &:= \nabla_X(A(Y_1, \ldots, Y_s))\\ &- \sum_i A(Y_1, \ldots, Y_{i-1}, \nabla_X Y_i, \ldots, Y_s)\end{aligned}$$

onde $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y_i \in \Gamma(E)$. É possivel mostrar que $\nabla_X A$ depende apenas de $X(p)$ e $Y(p)$. Por vezes também usaremos a seguinte notação

$$(\nabla A)(Y_1, \ldots, Y_s, X) := (\nabla_X A)(Y_1, \ldots, Y_s)$$

3.2. Conexão Riemanniana

DEFINIÇÃO 3.9. Seja (M, g) variedade Riemanniana. Uma conexão ∇ em TM é chamada *conexão Riemanniana* ou conexão de Levi-Civita se para qualquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ temos:

(a) $X\cdot\mathrm{g}(Y, Z) = \mathrm{g}(\nabla_X Y, Z)+\mathrm{g}(Y, \nabla_X Z)$ (*compatível com a métrica*).
(b) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (*simétrica* ou *livre de torsão*)

As conexões descritas nos itens (a) e (b) do Exercício 3.2 são Riemannianas.

Observação 3.10. Observe que a propriedade do item (a) ainda faz sentido para um fibrado vetorial $\pi : E \to M$ com métrica definida nas fibras. Além do fibrado TM poderiamos considerar por exemplo o fibrado normal de uma subvariedade mergulhada M^m em $\mathbb{R}^{m+k}$ com métrica em $E_p := \nu(M)_p$ induzida pela métrica Euclidiana, recorde item (c) do Exercício 3.2.

Proposição 3.11. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Então existe uma única conexão Riemanniana em TM. Tal conexão é dada pela fórmula de Koszul abaixo:*

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{g}(\nabla_Y X, Z) &= X\cdot \mathrm{g}(Y,Z) - Z\cdot \mathrm{g}(X,Y) + Y\cdot \mathrm{g}(Z,X) \\ &- \mathrm{g}([X,Y],Z) - \mathrm{g}([X,Z],Y) - \mathrm{g}([Y,Z],X) \end{aligned}$$

Demonstração. Suponha que a conexão Riemanniana existe. Então temos pela compatibilidade com a métrica que:

$$X\cdot \mathrm{g}(Y,Z) = \mathrm{g}(\nabla_X Y, Z) + \mathrm{g}(Y, \nabla_X Z)$$
$$Z\cdot \mathrm{g}(X,Y) = \mathrm{g}(\nabla_Z X, Y) + \mathrm{g}(X, \nabla_Z Y)$$
$$Y\cdot \mathrm{g}(Z,X) = \mathrm{g}(\nabla_Y Z, X) + \mathrm{g}(Z, \nabla_Y X)$$

As equações acima e o fato da conexão ser livre de torsão implicam que:

$$\begin{aligned} X\cdot \mathrm{g}(Y,Z) - Z\cdot \mathrm{g}(X,Y) + Y\cdot \mathrm{g}(Z,X) &= 2\,\mathrm{g}(\nabla_Y X, Z) + \mathrm{g}([X,Y],Z) \\ &+ \mathrm{g}([X,Z],Y) + \mathrm{g}([Y,Z],X) \end{aligned}$$

a qual por sua vez implica a fórmula de Koszul. Por fim, pode-se verificar que a fórmula de Koszul define uma conexão Riemanniana. □

Corolário 3.12. *Seja (M, g) variedade Riemanniana e ∇ sua conexão Riemanniana. Então:*

$$\Gamma_{i,j}^m = \frac{1}{2}\sum_k \left(\frac{\partial \mathrm{g}_{j,k}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathrm{g}_{k,i}}{\partial x_j} - \frac{\partial \mathrm{g}_{i,j}}{\partial x_k}\right)\mathrm{g}^{k,m}$$

onde (g^{ij}) é a matriz inversa de $(\mathrm{g}_{i,j})$ e $\Gamma_{i,j}^k$ são os símbolos de Cristoffel definidos na subseção anterior.

Exercício 3.13. Sejam (M, g) e $(\widetilde{M}, \tilde{\mathrm{g}})$ variedades Riemannianas e ∇ e $\widetilde{\nabla}$ suas conexões Riemannianas. Seja $F : M \to \widetilde{M}$ isometria. Mostre que:

(1) $dF_p \nabla_{X_1} X_2 = (\tilde{\nabla}_{\widetilde{x}_1} \widetilde{X}_2)_{F(p)}$, onde $\widetilde{X}_i \circ F = dF X_i$ para $X_i \in \mathfrak{X}(M)$.
(2) F preserva transporte paralelo.

Exercício 3.14. Seja (M, g) variedade Riemanniana com conexão Riemanniana ∇. Seja $\alpha : [0,1] \to M$ curva suave por partes. Demonstre que o transporte paralelo ao longo de α induz isometria entre $T_{\alpha(0)}M$ e $T_{\alpha(1)}M$.

EXERCÍCIO 3.15. Seja M uma superfície com métrica g (i.e., $\dim M = 2$). Sejam $\alpha : I \to M$ uma *geodésica* (ou seja $\frac{\nabla}{dt}\alpha'(t) = 0$ para todo t) e $t \to e_2$ um campo unitário normal ao longo de α tal que $\|e_2\| = 1$ e $\mathrm{g}(e_2, \alpha'(t)) = 0$ para todo t. Prove que e_2 é um campo paralelo.

DEFINIÇÃO 3.16. Dado um ponto p de uma variedade M (base de um fibrado E com conexão ∇) e uma curva fechada $\alpha : [0,1] \to M$ (i.,e $\alpha(0) = \alpha(1)$) o transporte paralelo $\|_\alpha : E_p \to E_p$ induz um isomorfismo entre as fibras de E_p. O grupo gerado por tais isomorfismo é chamado *grupo de Holonomia* de p e denotado por Hol_p.

EXERCÍCIO 3.17. Seja $\mathbb{S}^2$ esfera com métrica canônica (i.e, induzida de $\mathbb{R}^3$) e ∇ a conexão Riemanniana associada. Mostre que dado $p \in \mathbb{S}^2$ então $Hol_p = SO(2)$, i.e., o grupo de holonomia é transitivo em $T^1_p\mathbb{S}^2$.

Sugestão: Aceitando o fato que grandes circulos são geodésicas em $\mathbb{S}^2$ (vide Exercício 4.4) transporte vetor unitário $e_2 \in T_p\mathbb{S}^2$ ao longo de um meridiano, seguido pelo transporte no equador e retorne por outro meridiano.

Observação 3.18. O *teorema de Ambrose-Singer* garante entre outras coisas que o grupo de Holonomia Hol_p de uma conexão ∇ em um fibrado $E \to M$ é de fato um grupo de Lie (e relaciona sua algebra de Lie com os assim chamados tensores algébricos de curvatura). No caso em que a conexão é Riemanniana (i.e, $E = TM$ e a conexão é livre de torsão e compatível com a métrica) o grupo de Holonomia passa a desempenhar um papel ainda mais importante. O celebrado *teorema de Berger* garante que *se o grupo de holonomia de uma variedade Riemanniana (irredutível) não agir de forma transitiva em $T^1_pM = \{v \in T_pM, \|v\| = 1\}$ então M será um espaço localmente simétrico.* Aqui vale apena ressaltar que um espaço M é chamadado *localmente simétrico* se para qualquer $p \in M$ existe uma isometria $\sigma_p : B_\epsilon(p) \to B_\epsilon(p)$ que reverte toda geodésica γ saindo de p i.e., $\gamma(0) = p$ ou seja $\sigma_p \circ \gamma(t) = \gamma(-t)$. Por outro lado os espaços simétricos (que recobrem os espaços localmente simétricos) são classificados. Assim sendo o conhecimento da ação do grupo de Hol_p pode determinar completamente uma variedade M se M for simplesmente conexa irredutível e o grupo não agir transitivamente na esfera unitária T_pM^1.

3.3. Tensor curvatura de uma conexão afim

Seja (E, M, π) um fibrado vetorial com conexão afim ∇. Definimos

$$\begin{aligned} R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) &\to \Gamma(E) \\ (X, Y, \xi) &\to R(X,Y)\xi \end{aligned}$$

onde

$$R(X,Y)\xi := \nabla_{[X,Y]}\xi - \nabla_X\nabla_Y\xi + \nabla_Y\nabla_X\xi.$$

PROPOSIÇÃO 3.19. *Sejam* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\xi \in \Gamma(E)$ *e* $f, g, h \in C^{\infty}(M)$ *Então:*

(a) R *é trilinear,*
(b) $R(X,Y) = -R(Y,X)$,
(c) $R(fX, gY)h\xi = fghR(X,Y)\xi$.

A proposição acima garante então que R_p depende apenas dos vetores $X(p)$, $Y(p)$ e $\xi(p)$ e não dos campos X, Y, ξ. Assim R é um $(1,3)$ tensor o qual será chamado *tensor curvatura.*

Segue direto da definição que se o tensor curvatura é nulo então $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}$ comuta com $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}$. Veremos ao longo deste capítulo outras interpretações mais profundas do tensor curvatura. Mais precisamente, veremos que se $R = 0$ então o transporte paralelo não depende de caminhos curtos, ou que uma certa distribuição no fibrado de referenciais é integrável. No caso do tensor curvatura da conexão Riemanniana veremos que R também mede quão rápido geodésicas (curvas que minimizam caminho localmente) se afastam de certo ponto fixo.

Outras interpretações da curvatura de uma conexão Riemanniana tais como teorema de Toponogov e generalizações em espaços métricos serão comentadas em outro capítulo.

Terminamos esta subseção com uma proposição util para campos ao longo de uma superfície. A demonstração segue direto da existência da conexão pull-back.

PROPOSIÇÃO 3.20. *Seja* $\varphi : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to M$ *uma aplicação suave e* $V \in \Gamma(\varphi^* E)$ *então:*

$$\frac{\nabla}{\partial t}\frac{\nabla}{\partial s}V - \frac{\nabla}{\partial s}\frac{\nabla}{\partial t}V = R(\frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial t})V$$

3.4. Tensor curvatura da conexão Riemanniana

Ao longo desta subseção consideraremos (M, g) uma variedade Riemanniana e R o tensor curvatura associado a conexão Riemanniana ∇ em TM e listaremos algumas propriedades de R. Apresentaremos também as definições de curvatura secional, curvatura de Ricci e curvatura escalar.

PROPOSIÇÃO 3.21.
(a) $\mathrm{g}(R(X,Y)Z,T) + \mathrm{g}(R(Y,Z)X,T) + \mathrm{g}(R(Z,X)Y,T) = 0$, *($1^0$ identidade de Bianchi).*
(b) $\mathrm{g}(R(X,Y)Z,T) = -\mathrm{g}(R(X,Y)T,Z)$
(c) $\mathrm{g}(R(X,Y)Z,T) = \mathrm{g}(R(Z,T)X,Y)$

Observação 3.22. A 2^0 *identidade de Bianchi* garante que:

$$\nabla \mathrm{R}(X,Y,Z,W,T) + \nabla \mathrm{R}(X,Y,W,T,Z) + \nabla \mathrm{R}(X,Y,T,Z,W) = 0$$

onde $\mathrm{R}(X,Y,Z,W) := \mathrm{g}(R(X,Y)Z,W)$. A 2^0 identidade de Bianchi (em sua formulação em termos de formas e derivada covariante de endomorfismos) é util no estudo de soluções do funcional de Yang-Mills, garantindo por exemplo que soluções autoduais de conexões métricas são soluções da equação de Yang-Mills, vide Jost capítulo 3.

Seja $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bi-dimensional e $X, Y \in \sigma$ vetores linearmente independente. Então definimos a *curvatura secional* em σ como:

$$K(X,Y) := \frac{\mathrm{g}(R(X,Y)X,Y)}{\mathrm{g}(X,X)\mathrm{g}(Y,Y) - \mathrm{g}(X,Y)^2}$$

De fato é possivel mostrar que $K(X,Y)$ é o mesmo para qualquer outra base de σ. Também é possivel mostrar que tendo todas as curvaturas secionais de todos os subespaços bi-dimensionais de T_pM então pode-se reconstruir o tensor R_p.

PROPOSIÇÃO 3.23. (a) *O espaço $\mathbb{R}^n$ tem curvaturas secionais constantes iguais a zero.*
(b) *O espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$ tem curvaturas secionais constantes iguais a -1*
(c) *A esfera $\mathbb{S}^n$ tem curvaturas secionais constantes iguais a* 1.

Tais espaços são chamados *espaços forma* e denotados por $M(k)$ onde $k = -1, 0, 1$ se $M(k)$ for espaço hiperbólico, Euclidiano ou a esfera.

Como veremos posteriormente todo espaço simplesmente conexo com curvatura $k = -1, 0, 1$ é isometrico a um destes.

Observação 3.24. A proposição acima pode ser demonstrada da seguinte maneira. Primeiro pode-se notar que cada $M(k)$ é homogeneo, ou seja $M(k)$ é orbita da ação isometrica de $Iso(M(k))$. Além disto, fixo $p \in M(k)$ é possivel mostrar que dado 2 subespaços bi-dimensionais de $T_pM(k)$ então existe um elemento do grupo de isotropia G_p que leva um espaço no outro. Isto garante que as curvaturas secionais em p são todas as mesmas e o fato de $M(k)$ ser homogeneo garante que todo o espaço tem curvaturas secionais constantes. Para determinar que de fato tais curvaturas secionais são $k = -1, 0, 1$ existem varias maneiras. A primeira, mais trabalhosa é via coordenadas. Sabendo a métrica calcula-se os simbolos de Cristofell e com eles as curvaturas secionais. Uma outra maneira mais rápida é utilizar a Equação de Gauss (vide Parte II) na esfera e no espaço hiperbólico (modelo do hiperboloide).

A próxima proposição é um resultado útil sobre espaço de curvatura constante.

PROPOSIÇÃO 3.25. (M, g) *tem curvaturas secionais constantes iguais a K_0 se e somente se*

$$\mathrm{g}(R(X,Y)Z,T) = K_0(\mathrm{g}(X,Z)\mathrm{g}(Y,T) - \mathrm{g}(X,T)\mathrm{g}(Y,Z))$$

A seguir uma interpretação do que significa $R = 0$. Tal proposição é um caso particular de uma proposição mais geral a ser provada em breve para conexões afins em fibrados vetorias (E, M, π).

PROPOSIÇÃO 3.26. *Seja* (M, g) *variedade Riemanniana e* ∇ *sua conexão Riemanniana. As afirmações abaixo são equivalentes:*

(a) *Para todo* $p \in M$ *existe uma vizinhança* U *de* p *em* M *e um referencial local* $\{\xi_i\}$ *definido em* U *tal que* $\nabla \xi_i = 0$.
(b) *O tensor curvatura é nulo.*
(c) *Para todo* $p \in M$ *existe uma vizinhança* U *de* p *em* M *tal que o transporte paralelo em* U *independe do caminho.*

Demonstração. O fato que (a) implica (b) segue diretamente da definição de R. No momento vamos aceitar o fato a ser provado mais tarde que *se as curvaturas secionais de* M *são zero então* M *é localmente isométrica a* $\mathbb{R}^n$. Isto implicará que o item (c) segue do item (b).

Para monstrar que o item (c) implica o item (a) vamos proceder da seguinte forma. Considere $\{\xi_i\}$ uma base de T_pM e $(\psi, \tilde{U})$ um sistema de coordenada de p onde $\tilde{U} \subset U$. Por meio do transporte paralelo ao longo das linhas coordenadas podemos definir campos $\xi_1 \ldots, \xi_n$ em $\tilde{U}$. Tal referencial é suave devido a dependência suave das soluções de E.D.0.

Desejamos provar que $\nabla_V \xi_i(q) = 0$ para $q \in \tilde{U}$ e $V \in T_qM$. Escolha $\alpha : [-\epsilon, \epsilon] \to \tilde{U}$ tal que $\alpha(0) = q$ e $\alpha'(0) = V$. Escolha $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \to \tilde{U}$ tal que $\beta(-\epsilon) = p$ e $\beta(0) = \alpha(-\epsilon)$. Note que $\xi_i = ||_{\alpha \cdot \beta} \xi_i = ||_\alpha (||_\beta \xi_i)$. Assim $\frac{\nabla}{dt} \xi_i \circ \alpha = 0$. Logo $\nabla_V \xi_i = 0$ e isto termina a prova.

□

EXERCÍCIO 3.27. Sejam G grupo de Lie com métrica biinvariante $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e X, Y, Z campos invariantes a esquerda. Mostre que:

(a) $\langle [X, Y], Z \rangle = -\langle Y, [X, Z] \rangle$
(b) $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$
(c) $R(X, Y)Z = \frac{1}{4}[[X, Y], Z]$
(d) $\langle R(X, Y)X, Y \rangle = \frac{1}{4}\langle [X, Y], [X, Y] \rangle$. Em particular conclua que a curvatura sectional é sempre maior ou igual a 0.

SUGESTÃO: Afim de provar o item (a) lembre-se primeiro da definição da adjunta dada no exercício 2.21, i.e, $\mathrm{Ad}(g)Y := \frac{d}{dt}(g \exp(tY) g^{-1})|_{t=0}$ e usando a definição de métrica bi-invariante conclua que $\mathrm{Ad}(g)$ é isometria. Depois utilize a fórmula $\frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(\exp(tX))Y|_{t=0} = [X, Y]$ dada no Problema 2.21. O item (b) seguirá do Item (a) e da fórmula de Koszul.

Terminamos esta subseção apresentando as definições de curvatura de Ricci e curvatura escalar.

DEFINIÇÃO 3.28. O *tensor de Ricci* é definido como

$$Ric_p(X, Y) := \mathrm{tr}\, R(X, \cdot)Y$$

Tal tensor é simétrico. A *curvatura de Ricci* na direção X ($\|X\| = 1$) é definida como

$$Ric_p(X) := \frac{1}{n-1} Ric_p(X, X)$$

DEFINIÇÃO 3.29. A *curvatura escalar* é definida como

$$CE(p) := \frac{1}{n} \sum_i Ric_p(\xi_i)$$

onde $\{\xi_i\}$ é base ortonormal de T_pM. É possivel mostrar que $CE(p)$ não depende da escolha da base $\{\xi_i\}$.

Observação 3.30. Veremos em outra parte das notas algumas propriedades das variedades Riemannianas com Ric limitado inferiormente. Dentre tais variedades estão os grupos de Lie compactos semi-simples, vide Alexandrino e Bettiol. Tal como explicado em Morgan e Tian (página 64) a curvatura de Ric pode ser interpretada como a aproximação do laplaciano da métrica, ou mais precisamente:

$$Ric_{i,j} = Ric(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = -\frac{3}{2} \triangle \mathrm{g}_{i,j} + O(|x|)$$

onde $\triangle$ é o laplaciano na métrica Euclidiana e $\mathrm{g}_{i,j}$ está descrito nas coordenadas Gaussianas (vide definições nas próximas seções). Referente a função curvatura escalar, ela é utilizada na definição do funcional de Hilbert-Einstein $HE(\mathrm{g}) := \int_M CE(\mathrm{g})\omega(\mathrm{g})$ para métricas g definidas em uma variedade Riemanniana compacta M fixa. CE também faz parte do tensor de Einstein $T = \frac{CE}{2}\mathrm{g} - Ric$ o qual é livre de divergência e pode ser visto como gradiente de HE, vide Kühnel, página 323 .

3.5. Formas de conexão e curvatura

3.5.1. Conexão afim.

Seja (E, M, π) fibrado vetorial, $\{\xi_i\}$ referencial local e ∇ uma conexão afim em E. A conexão afim pode então ser vista como um operador $\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$ que atende

$$\nabla(f\xi) = df \otimes \xi + f\nabla\xi$$

Podemos agora definir as 1-formas de conexão $\omega_{i,j}$ como

$$\nabla_{(\cdot)}\xi_i = \sum \omega_{ij}(\cdot) \otimes \xi_j \tag{3.5.1}$$

Observe que a matriz de 1-formas A definida na equação (3.1.2) é a matriz $(\omega_{i,j})^t$, ou seja a transposta da matriz de 1-formas $\omega := (\omega_{i,j})$.

PROPOSIÇÃO 3.31 (Transformação de gauge). *Seja* $\{\widetilde{\xi}_i\}$ *outro referencial. Sejam* $(b_{i,j})$ *e* $(\tilde{\omega}_{i,j})$ *tais que:* $\widetilde{\xi}_i = \sum_j b_{ij}\xi_j$ $\nabla\widetilde{\xi}_i = \sum_j \widetilde{w}_{ij} \otimes \widetilde{\xi}_j$ *Então*

$$\widetilde{\omega} = (\mathrm{d}b)b^{-1} + b\,\omega b^{-1}$$

Demonstração. A prova será um calculo simples se utlizarmos a notação de produto tensorial de matrizes. Vamos rapidamente recordar esta linguagem em um caso de baixa dimensão. Suponha que $E_p = \mathbb{R}^2$. A matriz b se torna então uma matriz 2×2 e $\{\xi_i\}_{i=1}^2$ $\{\tilde{\xi}_i\}_{i=1}^2$ se tornam base de $\mathbb{R}^2$. Vamos denotar $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ e $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)$ os vetores em $\mathbb{R}^4$. Por fim dado a matriz 2×2 Id podemos definir então o produto tensorial como a matriz 4×4 abaixo:

$$b \otimes \mathrm{Id} := \begin{bmatrix} b_{1,1}\mathrm{Id} & b_{1,2}\mathrm{Id} \\ b_{2,1}\mathrm{Id} & b_{2,2}\mathrm{Id} \end{bmatrix}$$

Por fim vamos denotar $[b] := b \otimes \mathrm{Id}$. Com estas notações temos então que $\tilde{\xi} = [b]\xi$. Também não é dificil de verificar que dado 2 matrizes a, c então $[a][c] = [ac]$ e que se $[a]\xi = [c]\xi$ então $a = c$.

Uma vez estabelecido esta linguagem (ilustrada acima em um caso de baixa dimensão) vamos aos calculos. Da regra de derivação temos:

$$\nabla\widetilde{\xi_i} = \sum_j \mathrm{d}b_{ij} \otimes \xi_j + \sum_j b_{ij} \nabla \xi_j$$

Logo com a notação estabelecida acima temos:

$$\begin{aligned} [\widetilde{w}]\widetilde{\xi} &= \nabla\widetilde{\xi} \\ &= [\mathrm{d}b]\xi + [b]\nabla\xi \\ &= [\mathrm{d}bb^{-1}]\tilde{\xi} + [b\omega b^{-1}]\tilde{\xi} \end{aligned}$$

Assim como $[\widetilde{w}]\widetilde{\xi} = \big([\mathrm{d}bb^{-1}] + [b\omega b^{-1}]\big)\tilde{\xi}$ concluimos que

$$\widetilde{w} = \mathrm{d}bb^{-1} + b\omega b^{-1}$$

□

Podemos também expressar o tensor R em termos de 2-formas $\Omega_{i,j}$ chamadas *2-formas de curvatura* as quais são definidas abaixo.

$$R(\cdot,\cdot)\xi_i := \sum_j \Omega_{ij}(\cdot,\cdot) \otimes \xi_j \tag{3.5.2}$$

Vamos a seguir demonstrar a assim chamada equação de curvatura, a qual relacionará a matriz de curvatura $\Omega := (\Omega_{ij})$ com a matriz de conexão $\omega = (\omega_{i,j})$. Para tanto vamos precisar recordar o lema a seguir, o qual vimos no Capítulo 1 Seção 1.5.2.

Lema 3.32. *Seja η uma p forma. Então*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\eta(X_0, \ldots, X_p) &= \sum_i (-1)^i X_i \cdot \eta(X_0, X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_p) \\ &= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \eta([X_i, X_j], X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_p) \end{aligned}$$

Onde $\widehat{X_i}$ significa que este termo não está presente. Em particular se η for uma 1-forma temos:

$$d\eta(X,Y) = X \cdot \eta(Y) - Y \cdot \eta(X) - \eta([X,Y]).$$

TEOREMA 3.33 (Equação de curvatura).

$$-\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
-\sum_j \Omega_{ij}(X,Y) \otimes \xi_j &= -R(X,Y)\xi_i \\
&= \nabla_X \nabla_Y \xi_i - \nabla_Y \nabla_X \xi_i - \nabla_{[X,Y]}\xi_i \\
&= \nabla_X(\sum_j \omega_{ij}(Y) \otimes \xi_j) - \nabla_Y(\sum_j \omega_{ij}(X) \otimes \xi_j) \\
&- \sum_j \omega_{ij}([X,Y]) \otimes \xi_j \\
&= \sum_j (X \cdot \omega_{ij}(Y) - Y \cdot \omega_{ij}(X) - \omega_{ij}([X,Y])) \otimes \xi_j \\
&+ \sum_{jk} (\omega_{ij}(Y)\omega_{jk}(X) - \omega_{ij}(X)\omega_{jk}(Y)) \otimes \xi_k \\
&= \sum_j d\omega_{ij}(X,Y) \otimes \xi_j - \sum_{i,j} \omega_{il} \wedge \omega_{lj}(X,Y) \otimes \xi_j
\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do lema anterior. □

3.5.2. Conexão Riemanniana.

Consideremos agora (M, g) uma variedade Riemanniana e seja ∇ a conexão Riemanniana associada.

PROPOSIÇÃO 3.34 (Equações de estrutura). *Sejam $\{e_i\}$ um referencial ortonormal local definido em uma vizinhança U, θ_i as suas 1-formas duais, i.e, $\theta_i(e_j) = \delta_{ij}$, e ω_{ij} as 1-formas de conexão em relação ao referencial $\{e_i\}$. Então:*

(a) $\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$ *(compatível com a métrica)*
(b) $d\theta_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \theta_j = \sum_j \theta_j \wedge \omega_{ji}$ *(livre de torsão).*

Demonstração. (a) Pela compatibilidade da métrica temos:

$$\begin{aligned}
0 = X \cdot g(e_i, e_j) &= g(\nabla_X e_i, e_j) + g(e_i, \nabla_X e_j) \\
&= g(\sum_k \omega_{ik}(X) \otimes e_k, e_j) + g(e_i, \sum_k \omega_{jk}(X) \otimes e_k) \\
&= \omega_{ij}(X) + \omega_{ji}(X)
\end{aligned}$$

(b) Como a métrica é livre de torsão temos:

$$\begin{aligned}[e_i, e_j] &= \nabla_{e_i} e_j - \nabla_{e_j} e_i \\ &= \sum_k (\omega_{jk}(e_i) - \omega_{ik}(e_j)) e_k\end{aligned}$$

A equação acima e o Lema 3.32 implicam

$$\begin{aligned}-\mathrm{d}\theta_k(e_i, e_j) &= \theta_k([e_i, e_j]) \\ &= \omega_{jk}(e_i) - \omega_{ik}(e_j) \\ &= -\sum_s \theta_s \wedge \omega_{sk}(e_i, e_j)\end{aligned}$$

□

Conveniente utilizar as equações de estrutura acima para resolver o clássico exercício a seguir, que entre outras coisas nos permite concluir que a curvatura seccional de $\mathbb{H}^2$ é $K = -1$.

Exercício 3.35. Seja M aberto de $\mathbb{R}^2$. Suponha que $\theta_1 = A(x, y)dx$ e $\theta_2 = B(x, y)dy$. Verifique

(a) $\omega_{1\,2} = \frac{-A_y}{B}\,dx + \frac{B_x}{A}dy$ onde $A_y := \frac{\partial A}{\partial y}$ e $B_x := \frac{\partial B}{\partial x}$

(b) $K = \frac{-1}{AB}\Big(\big(\frac{A_y}{B}\big)_y + \big(\frac{B_x}{A}\big)_x\Big)$

(c) Conclua que $K = -1$ quando M é o semi-plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$.

Utilizando o item (b) do exercício acima, podemos também calcular curvatura de superfícies de revolução, em particular concluir que a curvatura seccional de $\mathbb{S}^2$ é 1, (recorde aqui o Exercício 2.6).

Exercício 3.36. Seja M uma superfície de revolução em $\mathbb{R}^3$ e uma parametrização $\psi(t, \theta) = (r(t)\cos(\theta), r(t)\sin(\theta), h(t))$ onde a curva geratriz $t \to (r(t), 0, h(t))$ está parametrizada por comprimento de arco.

(a) Mostre a curvatura seccional $K \circ \psi(t, \theta) = \frac{-r''(t)}{r(t)}$.

(b) Mostre que a curvatura seccional da esfera $\mathbb{S}^2$ é $K = 1$

(c) Seja $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 |, \big(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2\big)^2 + x_3^2 = 1\}$. Calcule $K(3, 0, 0)$ e $K(1, 0, 0)$ e conclua que o toro M tem pontos com curvatura seccional positiva e outros com curvatura seccional negativa.

Observação 3.37. Concluimos esta subseção apresentando algumas fórmulas uteis.

$$\Omega_{ij} = \sum_{k<l} \mathrm{R}_{k,l,i,j} \theta_k \wedge \theta_l$$

onde $\mathrm{R}_{k,l,i,j} := \mathrm{g}(R(e_k, e_l)e_i, e_j) = \Omega_{ij}(e_k, e_l)$ ou como $\mathrm{R}_{klij} = -\mathrm{R}_{lkij}$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{k,l} \mathrm{R}_{k,l,i,j}\theta_k \wedge \theta_l$$

Definindo $\mathrm{R}_{ij} = \sum_k \mathrm{R}_{ikjk}$ temos que a seguinte descrição local do tensor de Ricci e da curvatura escalar:

$$Ric = \sum_{ij} \mathrm{R}_{ij}\theta_i \otimes \theta_j$$

$$CE = \sum_i \mathrm{R}_{ii}$$

Por fim, se M tem curvatura constante K temos

$$\Omega_{ij} = K\theta_i \wedge \theta_j$$

3.6. $\star$ Conexão e fibrados de referenciais

Nesta subseção apresentaremos o fibrado de referenciais e demonstraremos que se $R = 0$ então a assim chamada conexão linear é integrável. Seguirá como consequência direta que se $R = 0$ então o transporte paralelo não depende de caminhos curtos. *Avisamos ao leitor que esta é uma subseção avançada. Leitores iniciantes podem (caso queiram) deixar de ler esta seção.*

Seja (E, M, π) fibrado vetorial. A cada referencial $\xi_p = \{\xi_i\} \subset E_p$ está associado um isomorfismo linear $z : \mathbb{R}^n \to E_p$ definido como $z(e_i) = \xi_i$. Vamos agora definir:

(1) $B(E_p)$ como sendo o conjunto dos referenciais ξ_p em E_p.
(2) $B(E) := \cup_{p\in M} B(E_p)$ (*espaço dos referenciais*)
(3) a projeção $\pi : B(E) \to M$ como $\pi(\xi_p) := p$
(4) a ação (a direita) $\mu : B(E) \times GL(n, \mathbb{R}) \to B(E)$ como $\xi_p \cdot g := \mu(\xi_p, g) := z \circ g$.

Não é dificil verificar que a ação μ é livre e transitiva em $B(E_p)$.

PROPOSIÇÃO 3.38. *$(B(E), M, \pi, GL(n, \mathbb{R}))$ é um fibrado principal chamado fibrado de referenciais. Em outras palavras, $B(E)$ é uma variedade, a ação μ é livre e própria, $M = B(E)/GL(n, \mathbb{R})$ e π é submersão suave. Alem disto todo referencial local ξ se torna seção local, i.e., $\pi \circ \xi = Id$.*

Suponha agora que o fibrado vetorial (E, M, π) admite uma métrica, i.e., um produto interno definido em cada fibra E_p que depende suavemente de p. Podemos então definir o fibrado *fibrado de referenciais ortonormais* $(O(E), M, \pi, O(n))$ de forma análoga a definição do fibrado de referenciais ou seja podemos definir

(1) $O(E_p)$ é o conjunto dos referenciais ortonormais ξ_p de E_p.
(2) $O(E) := \cup_{p\in M} O(E_p)$
(3) $\pi : O(E) \to M$ é definido $\pi(\xi_p) = p$

(4) $O(n)$ age em $O(E)$ pela restrição da ação μ definida acima ou seja se $g \in O(n)$ e z o isomomorfismo associado a ξ_p então $\mu(\xi_p, g) = z \circ g$

Observação 3.39. $(O(E), M, \pi, O(n))$ é um subfibrado do fibrado de referenciais.

Observação 3.40. No fibrado de referenciais de TM i.e., em $B(TM)$ existe uma $\mathbb{R}^n$-forma canônica: $\theta_z(X) := z^{-1}d\pi(X)$ para $z \in B(TM)$ e $X \in T_zB(TM)$. É possivel mostrar que $\theta \circ d\mu^g = g^{-1} \circ \theta$.

Uma distribuição H no fibrado $B(E)$ é chamada *conexão linear* se

(1) H_y é complementar a fibra $B(E_{\pi(y)})$
(2) H é invariante pela ação a direita μ

Se além disto (E, M, π) admite métrica nas fibras, dizemos que uma distruição H em $B(E)$ é *adaptada* a $O(E)$ se $H_z \subset T_zO(E)$ para qualquer $z \in O(E)$.

Necessitamos também definir uma $\mathfrak{g}$-forma de conexão $\hat{\omega}$ em $B(E)$ a qual é definida como sendo uma $\mathfrak{g}$-forma (ou seja com imagens em $\mathfrak{g}$) e que atende as seguintes propriedades:

(1) $\hat{\omega}(d\mu_z(X)) = X$ para $X \in \mathfrak{g}$
(2) $\hat{\omega}(d\mu^g(\cdot)) = \mathrm{Ad}(g^{-1})\hat{\omega}$

Proposição 3.41. *Uma $\mathfrak{g}$-forma de conexão determina uma conexão linear H da seguinte maneira: $X_z \in H_z$ se e somente se $\hat{\omega}(X_z) = 0$.*

Proposição 3.42. *Seja ∇ uma conexão afim em (E, M, π) e $\{\xi_i\}$ referencial local em uma vizinhança U de $p \in M$. Considere então $\xi : U \ni x \to \{\xi_i(x)\} \in B(E)$ a seção local e defina*

$$\psi : U \times GL(N, \mathbb{R}) \ni (x, g) \to \mu(\xi(x), g) \in \pi^{-1}(U).$$

Então podemos associar uma $\mathfrak{g}$-forma de conexão $\hat{\omega}$ em $B(E)$ da seguinte maneira:

$$\psi^*\hat{\omega}_{(x,g)}(V_1, V_2) = g^{-1}\omega^t(V_1)g + g^{-1}V_2$$

onde $\omega = (\omega_{ij})$ é a matriz de 1-formas de conexão definidas por

$$\nabla\xi_i = \sum_j \omega_{ij} \otimes \xi_j.$$

Demonstração. Iremos demonstrar que $\hat{\omega}$ está bem definida, i.e., não depende da definição de ψ (ou seja da escolha de ξ).

Seja $\tilde{\xi}$ um outro referencial e $h : U \to Gl(n, \mathbb{R})$ a aplicação tal que

$$\xi(x) = \mu(\tilde{\xi}(x), h(x)).$$

Temos então que:

$$\psi(x, g) = \tilde{\psi}(x, h(x)g)$$

Derivando a equação acima temos que se $d\psi_{(x,g)}(V_1,V_2) = d\tilde{\psi}_{(x,hg)}(\tilde{V}_1,\tilde{V}_2)$ então:

$$(\tilde{V}_1,\tilde{V}_2) = (V_1, \mathrm{d}hV_1 g + hV_2). \tag{3.6.1}$$

Note também que:

$$h^{-1}\tilde{\omega}^t h = -h^{-1}\mathrm{d}h + \omega^t \tag{3.6.2}$$

De fato sabemos pela transformação de gauge (vide Proposição 3.31) que

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= d(h^{-1})^t h^t + (h^{-1})^t \omega h^t \\ \tilde{\omega}^t &= h\mathrm{d}h^{-1} + h\omega^t h^{-1} \end{aligned}$$

Assim sendo $h^{-1}\tilde{\omega}^t h = \mathrm{d}h^{-1}h + \omega^t$. Tal equação e o fato de $\mathrm{d}h^{-1}h + h^{-1}\mathrm{d}h = 0$ implicam a equação (3.6.2). Podemos finalmente concluir que:

$$\begin{aligned} \psi^*\hat{\omega}_{(x,g)}(V_1,V_2) &:= g^{-1}\omega^t(V_1)g + g^{-1}V_2 \\ &= g^{-1}h^{-1}\tilde{\omega}^t(V_1)hg + g^{-1}h^{-1}\mathrm{d}h(V_1)g + g^{-1}V_2 \\ &= (hg)^{-1}\tilde{\omega}^t(\tilde{V}_1)(hg) + (hg)^{-1}(\tilde{V}_2) \\ &=: (\tilde{\psi}^*\hat{\omega})_{(x,hg)}(\tilde{V}_1,\tilde{V}_2) \end{aligned}$$

onde utilizamos a equação (3.6.2) na segunda igualdade e a equação (3.6.1) na terceira igualdade. □

COROLÁRIO 3.43. *Seja $\{\xi_i\}$ um referencial local e $\xi : U \ni x \to \{\xi_i(x)\} \in B(E)$ uma seção. Então $\xi^*\hat{\omega} = \omega = (\omega_{ij})$.*

Vimos que dado uma conexão em (E, M, π) é possivel construir uma $\mathfrak{g}$-forma de conexão $\hat{\omega}$ em $B(E)$ a qual por sua vez defina uma conexão linear H em $B(E)$.

Observação 3.44. É possivel mostar que se $\alpha : I \to M$ é uma curva suave, $\{\xi_i\}$ base de E_p e $t \to \xi_i(t)$ o transporte paralelo ao longo de α então $t \to \beta(t) := \{\xi_i(t)\}$ é uma curva em $B(E)$ tangente a H e tal que $\pi \circ \beta = \alpha$.

Observação 3.45. Dado um referencial $\{\xi_i\}$ em E_p podemos via transporte paralelo definir um referencial locam em uma vizinhança U de $p \in M$ com a propriedade que $(\nabla_{(\cdot)}\xi_i)_p = 0$. Da Observação 3.44 podemos então concluir que este referencial local $\xi : U \to B(E)$ é um gráfico cujo o espaço tangente no ponto ξ_p coincide com H_{ξ_p}.

Chegamos ao resultado principal desta subseção.

TEOREMA 3.46. *Seja (E, M, π) um fibrado vetorial com conexão afim ∇ tal que o tensor curvatura R é sempre nulo. Então a conexão linear H em $B(E)$ associada a ∇ é integrável.*

Demonstração. Visto que $R = 0$ então para todo referencial local ξ temos pelo Corolário 3.43

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{d}\xi^*\hat{\omega} - \xi^*\hat{\omega} \wedge \xi^*\hat{\omega} \\ &= \xi^*(\mathrm{d}\hat{\omega} - \hat{\omega} \wedge \hat{\omega}) \end{aligned}$$

Como a equação acima é valida para todo referencial local ξ temos pela Observação 3.45 que

$$0 = (\mathrm{d}\hat{\omega} - \hat{\omega} \wedge \hat{\omega})|_H$$

Assim $\hat{\omega}([X, Y]) = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(H)$. Logo pelo teorema de Frobenius H é integrável. □

Corolário 3.47. *Seja (E, M, π) um fibrado vetorial com conexão afim ∇ tal que o tensor curvatura R é sempre nulo. Então para todo $p \in M$ existe uma vizinhança U e o transporte paralelo não depende de caminhos contidos em U. Além disto para cada base $\{v_i\}$ de E_p existe um referencial ξ em U paralelo, i.e., $\nabla\xi_i = 0$, com $\xi_i(p) = v_i$.*

Demonstração. Pelo teorema anterior H é integrável. Assim para toda base $v \in B(E_p)$ podemos encontrar uma vizinhança suficentemente pequena de p e uma seção $s : U \to B(E)$ que é tangente a distribuição H e tal que $s(p) = v$. Observe que a invariância de H pela ação de $Gl(n, \mathbb{R})$ garante que o tamanho de U não depende da escolha de v. Estes fatos e a Observação 3.44 terminam a prova. □

Terminamos esta seção demonstrando um belo resultado de equações diferenciais, o qual será muito relevante para demonstrar o teorema fundamental das imersões isométricas (vide capítulo 2).

Teorema 3.48. *Seja $G = Gl(n, \mathbb{R})$ (ou $G = O(n)$) e $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie. Seja ω uma $\mathfrak{g}$-forma definida em um domínio U. Então para todo $p \in U$ e $g \in G$ existe uma única solução $\varphi : \tilde{U} \to G$ da equação diferencial*

$$\mathrm{d}\varphi = \omega\varphi \ , \ \ \varphi(p) = g$$

para uma vizinhança $\tilde{U}$ de p se somente se

$$\mathrm{d}\omega = \omega \wedge \omega$$

Demonstração. Vamos supor primeiro que $\mathrm{d}\omega = \omega \wedge \omega$. Considere o espaço total $E := U \times \mathbb{R}^n$ e a conexão $\nabla e_i = \sum_j \omega_{ij} \otimes e_j$. Temos então que a curvatura de tal conexão R é nula. Assim sendo pelo Corolário 3.47 existe $\tilde{\xi} : \tilde{U} \to B(E)$ ($\tilde{\xi} : \tilde{U} \to O(E)$) com $0 = \tilde{\omega} = \tilde{\xi}^*\hat{\omega}$ e tal que $e(p) \cdot (g^t)^{-1} = \tilde{\xi}(p)$. Seja φ a matriz com $e_i = \sum_j \varphi_{ij}\tilde{\xi}_j$. Então pela transformação de gauge (vide Proposição 3.31) temos

$$\omega = (\mathrm{d}\varphi)\varphi^{-1} + \varphi\tilde{\omega}\varphi^{-1}$$

A equação acima e o fato de $\tilde{\omega} = 0$ implicam que $\mathrm{d}\varphi = \omega\varphi$ e $\varphi(p) = g$.

Vamos agora supor que $\mathrm{d}\varphi = \omega\varphi$ e verificar que $\mathrm{d}\omega = \omega \wedge \omega$. Visto que $\mathrm{d}\varphi = \omega\varphi$ temos que $\omega = \mathrm{d}\varphi\varphi^{-1}$. Como $\mathrm{d}\varphi\varphi^{-1} + \varphi\mathrm{d}(\varphi^{-1}) = 0$ concluimos que $\mathrm{d}(\varphi^{-1}) = -\varphi^{-1}\mathrm{d}\varphi\varphi^{-1}$. Logo

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}(\mathrm{d}\varphi\varphi^{-1}) \\ &= -\mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}(\varphi^{-1}) \\ &= \mathrm{d}\varphi \wedge (\varphi^{-1}\mathrm{d}\varphi\varphi^{-1}) \\ &= \omega \wedge \omega \end{aligned}$$

□

CAPíTULO 4

Geodésicas e campos de Jacobi

Neste capítulo estudaremos geodesicas i.e., curvas que minimizam localmente caminho e os campos velocidades das variações por geodésicas, i.e., os campos de Jacobi.

4.1. Propriedades básicas de geodésicas

No espaço Euclidiano as curvas de aceleração zero são justamente as curvas que minimizam distâncias. Assim um candidato natural para curvas que minimizam pelo menos localmente distâncias em uma variedade Riemanniana serão as curvas de aceleração nula.

DEFINIÇÃO 4.1. Uma curva suave $\alpha : [a, b] \to M$ é chamada *geodésica* se $\frac{\nabla}{dt}\alpha'(t) = 0$.

Observação 4.2. Observe que se $\alpha : I \to M$ é geodésica, então $\|\alpha'(t)\|$ é constante. De fato $\frac{d}{dt}(\mathrm{g}(\alpha'(t), \alpha'(t))) = 2\mathrm{g}(\frac{\nabla}{dt}\alpha'(t), \alpha'(t)) = 0$. Segue então que se α é geodésica, $L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = c(b - a)$ onde $c = \|\alpha'(t)\|$.

EXERCÍCIO 4.3. Seja M^m subvariedade mergulhada em $\mathbb{R}^{m+k}$. Dado uma curva $\alpha : I \to M$ verifique que α é geodésica se e somente se α'' é perpendicular a M. Conclua que segmentos dos grandes círculos da esfera $\mathbb{S}^m$ são geodésicas.

EXERCÍCIO 4.4. Seja M uma superfície mergulhada de revolução em $\mathbb{R}^3$, onde g é métrica induzida. Demonstre que sua curva geratriz é geodésica de M.

Observação 4.5. Segmentos de grandes círculos não precisam minimizar distâncias. Por exemplo se $\alpha : [0, \frac{3\pi}{2}] \to \mathbb{S}^m$ é uma geodésica com velocidade unitária, então ela não minimiza distância. Mas existe um outro segmento do mesmo grande círculo $\beta : [0, \pi/2] \to \mathbb{S}^m$ com $\alpha(0) = \beta(0)$ e $\alpha(\frac{3\pi}{2}) = \beta(\pi/2)$ que minimiza distância. Ou seja geodésicas não precisam minimizar distâncias, mas como veremos em breve sempre minimizam "localmente"distâncias.

Em coordenadas $\frac{\nabla}{dt}\alpha'(t) = 0$ equivale, pela equação (3.1.1) a seguinte EDO de segunda ordem.

$$0 = x_k''(t) + \sum_{ij} x_i'(t) x_j'(t) \Gamma_{ij}^k(x(t)), \ \forall\ k \tag{4.1.1}$$

A equação (4.1.1) pode ser transformada em uma EDO de primeira ordem

$$
\begin{aligned}
v_k(t) &= x_k'(t)\\
v_k'(t) &= -\sum_{ij} v_i v_j \Gamma_{ij}^k(x(t))
\end{aligned}
$$

Por fim a equação acima define um campo em $U \times \mathbb{R}^n$ e assim em um aberto de TM. A unicidade de EDO e o fato da derivada covariante ser intrinsicamente definida em M garantem então que podemos definir um único campo $G \in \mathfrak{X}(TM)$, chamado *campo geodésico*, tal que $\varphi(\cdot, V_q) = \pi \circ \varphi^G(\cdot, V_q)$ são geodésicas, onde φ^G é o fluxo de G, assim chamado *fluxo geodésico*. O teorema de existência de fluxo e a definição de campo geodésico implicam

PROPOSIÇÃO 4.6. *Dado $p \in M$ existe uma vizinhança U de p em M, números $\delta, \epsilon > 0$ e uma aplicação $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times \mathcal{U} \to M$ com $\mathcal{U} := \{V_q \in TM, q \in U, \|V_q\| < \delta\}$ tal que $\varphi(\cdot, V_q)$ é a única geodésica com $\frac{d}{dt}\varphi(t, V_q)|_{t=0} = V_q$ e $\varphi(0, V_q) = q$.*

A equação (4.1.1) implica o próximo resultado;

PROPOSIÇÃO 4.7. *Seja $\varphi(\cdot, V_q)$ geodésica definida em $(-\epsilon, \epsilon)$. Seja $a > 0$ então:*

(a) *A geodésica $t \to \varphi(t, aV_q)$ está definida em $(-\frac{\epsilon}{a}, \frac{\epsilon}{a})$*
(b) $\varphi(t, aV_q) = \varphi(at, V_q)$

Demonstração. Note que o item (b) implica o item (a). Visto que $\frac{d}{dt}\varphi(at, V_q)|_{t=0} = aV_q$ basta mostrar que $t \to \varphi(at, V_q)$ é geodésica. Isto segue do fato que em coordenadas $x(at)$ atende a equação (4.1.1). $\square$

As duas proposições acima então implicam que:

PROPOSIÇÃO 4.8. *Dado $p \in M$ existe uma vizinhança U de p em M, um número $\delta > 0$ e uma aplicação $\varphi : (-2, 2) \times \mathcal{U} \to M$ com $\mathcal{U} := \{V_q \in TM, q \in U, \|V_q\| < \delta\}$ tal que $\varphi(\cdot, V_q)$ é a única geodésica com $\frac{d}{dt}\varphi(t, V_q)|_{t=0} = V_q$ e $\varphi(0, V_q) = q$.*

EXERCÍCIO 4.9. Seja (M, g) variedade Riemanniana compacta. Mostre que toda geodésica está definida para todos valores de $\mathbb{R}$.
SUGESTÃO: Considere o campo geodésico restrito ao fibrado tangente unitario $T^1(M) := \{V_x \in T_xM, \|V_x\| = 1\}_{x \in M}$ e aplique o resultado que afirma que *todo campo suave definido em variedade compacta gera um grupo a 1 parametro de difeomorfismos.*

Podemos definir agora a *aplicação exponencial* como

$$
\begin{aligned}
\exp_q : B_\delta(0) \subset T_qM &\to M\\
V_q &\to \varphi(1, V_q)
\end{aligned}
$$

Visto que $\varphi(1, V_q) = \varphi(\|V_q\|, \frac{V_q}{\|V_q\|})$ temos que $\exp_q(V)$ é o ponto em M obtido percorrendo um comprimento $\|V_q\|$ ao longo da imagem da geodésica que sai de q com velocidade $\frac{V_q}{\|V_q\|}$.

PROPOSIÇÃO 4.10. *Seja $q \in M$. Então $\mathrm{d}(\exp_q)_0 = Id$ e assim sendo existe um $\epsilon > 0$ tal que $\exp_q : B_\epsilon(0) \to M$ é um difeomorfismo sobre um aberto em M.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\exp_q(tV)|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\varphi(1, tV_q)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\varphi(t, V_q)|_{t=0} \\ &= V_q \end{aligned}$$

e assim $\mathrm{d}(\exp_q)_0$ é a identidade. O resto da proposição segue do teorema da função inversa. □

Tal vizinhança B_ϵ será chamada de *vizinhança normal*.

EXERCÍCIO 4.11. Seja G um grupo de Lie com métrica bi-invariante. Mostre que $\exp_e$ (a exponencial Riemanniana em e) coincide com a exponencial de Lie.
SUGESTÃO: Utilize o Exercício 3.27.

No que se segue, demonstraremos o conhecido lema de Gauss o qual garante que geodésicas radiais são ortogonais as esferas normais. Antes porém faz-se necessário apresentar o lema abaixo, o qual será útil em diversos momentos.

LEMA 4.12. *Seja $f : [a, b] \times [c, d] \to M$ aplicação suave. Então*

$$\frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}$$

TEOREMA 4.13 (Lema de Gauss). *Seja $B_{\tilde{\delta}}(0)$ uma bola em T_qM tal que a restrição da exponencial $\exp_q : B_{\tilde{\delta}}(0) \to M$ está bem definida. Sejam $\mathbb{S}^{n-1}_\delta$ a esfera contida em $B_{\tilde{\delta}}(0)$ com $\delta < \tilde{\delta}$ e $v : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{S}^{n-1}_\delta$ curva suave. Defina $f(s, t) = \exp_q(tv(s))$. Então*

$$\mathrm{g}(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}) = 0$$

Demonstração. Observe primeiro que

$$\mathrm{g}(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t})_{f(s,t)} = \mathrm{g}(\mathrm{d}(\exp_q)_{tv(s)}tv'(s), \mathrm{d}(\exp_q)_{tv(s)}v(s))$$

Podemos então concluir que:

$$\mathrm{g}(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t})_{f(s,0)} = 0.$$

Assim para demonstrar o lema de Gauss é suficiente verificar que a derivada em relação a t da funçao $\mathrm{g}(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t})_{f(s,t)}$ é zero para todo t.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\big(\mathrm{g}(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t})\big) &= \mathrm{g}(\frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}) + \mathrm{g}(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}) \\
&= \mathrm{g}(\frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}) \\
&= \mathrm{g}(\frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\mathrm{g}(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\|v(s)\|^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

onde a segunda igualdade deve-se ao fato de $f(s, \cdot)$ ser geodésica, a terceira igualdade deve-se ao Lema 4.12 e a última igualdade deve-se ao fato de $v(\cdot)$ ser uma curva contida em uma esfera. □

O lema de Gauss nos permite demonstrar que geodésicas minizam localmente caminhos. Mais precisamente temos a seguinte proposição.

PROPOSIÇÃO 4.14. *Seja $B_\delta(q)$ uma bola normal. Defina $\alpha : [0, 1] \to B_\delta(0)$ como $\alpha(t) = \exp_q(tv)$ com $\|v\| < \delta$. Seja $\beta : [0, 1] \to M$ curva suave por partes tal que $\alpha(0) = \beta(0)$ e $\alpha(1) = \beta(1)$. Então*

$$L(\alpha) \leq L(\beta)$$

Se a igualdade vale, então as imagens de α e β coincidem.

Demonstração. Vamos primeiro considerar o caso em que $\beta([0, 1]) \subset B_\delta(q)$.

Podemos supor sem perda de generalidade que $\beta(t) \neq q$ para $t > 0$.

Seja $\tilde{\beta} := (\exp_q|_{B_\delta(0)})^{-1} \circ \beta$. Defina as seguintes funções suaves por partes:

$$\begin{aligned}
f : [0, \delta) \times \mathbb{S}_1^{n-1} \ni (R, V) &\to \exp_q(RV) \in B_\delta(q) \\
r : [0, 1] \ni t &\to \|\tilde{\beta}(t)\| \in [0, \delta) \\
v : (0, 1] \ni t &\to \frac{\tilde{\beta}(t)}{\|\tilde{\beta}(t)\|} \in \mathbb{S}_1^{n-1}
\end{aligned}$$

Observe que $\beta(t) = f(r(t), v(t))$. Temos então pelo lema de Gauss que:

$$\begin{aligned}
\int_{\epsilon}^{1} \|\beta'(t)\| dt &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\beta'(t)\| dt \\
&= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{(r'(t))^2 + \mathrm{g}(\frac{\partial f}{\partial V} v'(t), \frac{\partial f}{\partial V} v'(t))} dt \\
&\geq \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} |r'(t)| dt \\
&\geq \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} r'(t) dt \\
&= r(1) - r(\epsilon)
\end{aligned}$$

Logo $L(\beta) \geq r(1) = L(\alpha)$. Note que se as igualdades são satisfeitas então as imagens de α e β coincidem.

Por fim vamos considerar o caso em que $\beta([0,1])$ não está completamente contido em $B_\delta(q)$. Seja t_1 o primeiro tempo tal que $\beta(t_1)$ está na fronteira da bola. Então temos pela discussão anterior:

$$L(\beta) > L(\beta|_{[0,t_1]}) \geq \delta > L(\alpha).$$

□

Terminamos esta seção com 2 exercícios ilustrando a relação de geodésicas e problemas elementares de mecânica.

Exercício 4.15. Sejam $U : M \to \mathbb{R}$ função suave (potêncial) e $(s,t) \to f(s,t)$ uma variação suave própria (i.e, $f(s,0) = f(0,0)$ e $f(s,1) = f(0,1)$) onde $t \to \alpha(t) = f(0,t)$ atende $m\frac{\nabla \alpha'}{dt} = -\nabla U(\alpha(t))$ (*equação de Newton*). Seja $\mathcal{A}(s) := \int_0^1 \mathcal{L}\big(\frac{\partial f}{\partial t}(s,t)\big) dt$ onde $\mathcal{L}(V_x) := \frac{m}{2} g(V_x, V_x) - U(x)$; Verifique que $\frac{d}{ds}\mathcal{A}(0) = 0$.

Exercício 4.16 (*). Seja α curva atendendo a equação de Newton $\frac{\nabla \alpha'}{dt} = -\nabla U(\alpha(t))$. Demonstre que

(a) $E(\alpha'(t)) = c$ onde $E(V_x) = \frac{1}{2} g(V_x, V_x) + U(x)$.
(b) existe uma função h e um intervalo I tal que $\beta = \alpha \circ h|_I$ é geodésica para a métrica $\tilde{g} = (c - U) g$

Dica: compare $\widetilde{\nabla}$ com ∇ e lembre que $\frac{\widetilde{\nabla}}{dt}\beta'(t) = \alpha'(h(t)) h''(t) + \frac{\widetilde{\nabla}}{dt}\alpha'(h(t))(h'(t))^2$

4.2. Vizinhança normal convexa

Teorema 4.17. *Seja (M, g) variedade Riemanniana. Então para cada $q \in M$ existem números $\delta > 0$, $\epsilon > 0$ tal que as seguintes afirmações são validas.*

(a) *Para qualquer* $p \in B_\epsilon(q)$ *temos* $\exp_p|_{B_\delta(0)}$ *é um difeomorfismo e que* $B_\epsilon(q) \subset \exp_p(B_\delta(0))$.

(b) *Para cada 2 pontos* p_1 *e* p_2 *em* $B_\epsilon(q)$ *existe um único segmento minimizante de geodésica ligando* p_1 *a* p_2. *Tal segmento fica contido em* $B_\epsilon(q)$ *e depende suavemente dos pontos inicial e final.*

Demonstração. Para demonstrar o teorema precisaremos dos 2 lemas abaixo.

LEMA 4.18. *Para cada* $q \in M$ *existe um* $c > 0$ *com a seguinte propriedade: Se* $r < c$ *e* $\alpha : [-a, a] \to M$ *é geodésica tangente a* $B_r(q)$ *em* $\alpha(0)$ *então* $\alpha(t) \notin B_r(q)$ *para* t *pequeno.*

Demonstração. Seja $\widetilde{W}$ uma vizinhança normal de q. Pela Proposição 4.7 podemos encontrar uma vizinhança $W \subset \widetilde{W}$ de q e um numero ϵ tal que $\varphi((-\epsilon, \epsilon), T^1W) \subset \widetilde{W}$ onde φ é a projeção do fluxo geodésico em M e T^1W o fibrado unitário sobre W. Defina $\varphi^0(t, V_x) := \exp_q^{-1}(\varphi(t, V_x))$ e aplicação $H : (-\epsilon, \epsilon) \times T^1W \to \mathbb{R}$ como $H(t, V_x) := \|\varphi^0(t, V_x)\|^2$. Ou seja H mede a distância ao quadrado de $\varphi(t, V_x)$ a q.

Note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} &= 2\langle \frac{\partial \varphi^0}{\partial t}, \varphi^0 \rangle \\ \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} &= 2\langle \frac{\partial^2 \varphi^0}{\partial^2 t}, \varphi^0 \rangle + 2\langle \frac{\partial \varphi^0}{\partial t}, \frac{\partial \varphi^0}{\partial t} \rangle \end{aligned}$$

Logo $\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}(0, V_q) = 2$ e assim podemos encontrar $c > 0$ pequeno tal que

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}(0, V_x) > 0 \tag{4.2.1}$$

para $x \in B_c(q)$ e $V_x \in T^1(B_c(q))$.

Observe que se $p \in S_r(q)$ com $r < c$ e $\gamma(t, V_p)$ é uma geodésica tangente em $S_r(q)$ no ponto p então pelo lema de Gauss temos:

$$\frac{\partial H}{\partial t}(0, V_p) = 0. \tag{4.2.2}$$

Equações (4.2.1) (4.2.2) implicam que $h(t) := H(t, V_p)$ tem mínimo em $t = 0$ e assim que $\varphi^0(t, V_p)$ fica fora de $B_r(0)$ e logo $\varphi(t, V_p)$ fica fora de $B_r(q)$ para t pequeno diferente de zero. □

LEMA 4.19. *Existem* $\delta < \frac{c}{2}$ *e* $\epsilon < \delta$ *tal que para todo* $p \in B_\epsilon(q)$

(1) $\exp_p|_{B_\delta(0)}$ *é difeomorfismo*

(2) $B_\epsilon(q) \subset \exp_p(B_\delta(0))$

Demonstração. Considere a aplicação $F : \mathcal{U} \subset TM \to M \times M$ definida como $F(V_p) = (p, \exp_p(V_p))$, onde $\pi(\mathcal{U})$ é uma vizinhança de q. Utilizando a Proposição 4.10 pode-se verificar que $dF_{(q,0)}$ é invertível. Desta forma reduzindo $\mathcal{U}$ podemos garantir que $F|_{\mathcal{U}}$ é um difeomorfismo. Observe que $F(T_pM \cap \mathcal{U}) \subset p \times M$ e que $F|_{T_pM\cap\mathcal{U}}$ é um difeomorfismo. Assim sendo para terminar a prova do lema basta encontrar $\epsilon < \delta$ e $\delta < \frac{c}{2}$ tal que $B_\epsilon(q) \subset \exp_p(B_\delta(0))$ para todo $p \in B_\epsilon(q)$. Reduza c tal que $B_{\frac{c}{4}}(q) \times B_{\frac{c}{4}}(q) \subset F(\mathcal{U})$. Levando em conta que $F(p,0) = (p,p)$ pode-se verificar que $\delta < \frac{2}{3}(\frac{c}{4})$ e $\epsilon < \frac{\delta}{4}$ atendem as propriedades desejadas.

□

Vamos agora demonstrar o teorema. O item (a) segue direto do Lemma 4.19. Este lema támbem garante que qualquer 2 pontos em $B_\epsilon(q)$ podem ser ligados por um único segmento de geodésica que depende suavemente dos pontos inicial e final. Devemos então provar que este segmento fica contido na bola $B_\epsilon(q)$.

Seja $\alpha : [0,1] \to B_\epsilon(q)$ segmento de geodésica com $\alpha(0)$ e $\alpha(1)$ contidos em $B_\epsilon(q)$. Note que $L(\alpha) < \delta$. Suponha por absurdo que o segmento de geodésica não fica completamente contido na bola. Então existe um t_0 tal que

$$c > 2\delta > r_0 := d(\alpha(t_0), q) = \sup_{t\in[0,1]} (d(\alpha(t), q)).$$

Note α é tangente a $B_{r_0}(q)$ no ponto $\alpha(t_0)$ o que contraria então o Lemma 4.18.

□

A bola definida no teorema acima é chamada *bola (vizinhança) normal convexa*. A existência de tais vizinhanças permite demonstrar o resultado a seguir, o qual garante que se uma curva miniza caminho (não necessáriamente com pequeno comprimento) então esta curva é imagem de uma geodésica.

Proposição 4.20. *Seja $\gamma : [0,1] \to (M, \mathrm{g})$ curva suave por partes tal que $d(\gamma(0), \gamma(1)) = L(\alpha)$. Então γ é imagem de uma geodésica.*

Demonstração. Observe primeiro que para cada $t \in [0,1]$ existe um intervalo I_t tal que $\gamma(I_t)$ está contida em uma bola normal convexa.

Afirmamos que $\gamma(I_t)$ é imagem de um segmento de geodésica. De fato seja $I_t = [a,b]$ então como $\gamma(I_t)$ está contida em uma bola normal convexa então existe uma único segmento de geodésica α ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$ tal que $L(\alpha) = d(\gamma(a), \gamma(b))$. Suponha por absurdo que $\gamma(I_t)$ seja diferente de α. Então defina a concatenação $\beta = \gamma_{[a,b]} * \alpha * \gamma_{[0,a]}$ Note que $\beta(0) = \gamma(0)$, $\beta(1) = \gamma(1)$ e $L(\beta) < L(\alpha)$ o que contraria a definição de γ.

Seja $I_{t_i}^0$ uma cobertura finita do intervalo compacto $[0,1]$ tais que $\gamma(I_{t_i})$ está em uma bola normal convexa. Se $s \in I_{t_i}^0 \cap I_{t_{i+1}}^0$ então considere um intervalo I_s^0 tal que $I_s^0 \subset I_{t_i}^0 \cap I_{t_{i+1}}^0$ e tal que $\gamma(I_s)$ esta contida em uma bola normal convexa. Como vimos acima $\gamma(I_s)$ é um segmento de geodesica contido nos segmentos de geodésicas $\gamma(I_{t_i})$ e $\gamma(I_{t_{i+1}})$. Logo por EDO os segmentos de geodésicas $\gamma(I_{t_i})$ $\gamma(I_{t_{i+1}})$ ficam contidos em um segmento de geodésica maior e isto termina a prova.

□

EXERCÍCIO 4.21.

(a) Demonstre que a curva $C := \{x = c, y > 0\}$ é imagem de uma geodésica do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^2$ (modelo do semi-plano).

(b) Utlizando o fato que aplicações $z \to T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $ad-bc = 1$ $(a, b, c, d$ reais) levam C ou em semi-circulos (com centro em $\partial\mathbb{H}^2$) ou em semi retas $x = x_0$, $y > 0$ conclua que tais curvas são imagens de geodésicas de $\mathbb{H}^2$.

Vamos terminar esta seção com mais uma interessante aplicação do teorema de bola normal (convexa). Lembre que se M é compacta então ela é completa como espaço métrico e ao mesmo tempo como já vimos em exercício ela é geodésicamente completa (vide item (a) abaixo). Como veremos na outra parte destas notas no assim chamado teorema de Hopf Rinow, tais conceitos de completude de fato serão equivalentes (o que permitirá chamar tais variedades simplesmente de *variedades completas*). Também o teorema de Hopf-Rinow irá assegurar que dados 2 pontos q e p existe uma geodésica minimizante ligando tais pontos. No teorema abaixo provamos o teorema de Hopf-Rinow para o caso compacto usando apenas o conceito de bola normal e um argumento chamado *encurtamento* o qual é util no estudo de geodésicas em particular das geodésicas fechadas.

TEOREMA 4.22. *Suponha que M é variedade Riemanniana compacta. Demonstre que:*

(a) *para todo $q \in M$ a aplicação exponencial $\exp_q : T_qM \to M$ está bem definida (ie., M é* geodesicamente completo*).*

(b) *dados q e p em M, existe um segmento de geodésica $\gamma : [0, R] \to M$ (parametrizado por comprimento de arco) ligando q a p (i.e., $\gamma(0) = q$ e $\gamma(R) = p$) que realiza distância, i.e, $L(\gamma) = R = d(q, p)$. que realiza distância (i.e,*

Demonstração. O item (a) já havia sido deixado como exercício para o leitor. Recordemos agora qual era a ideia. Considere o campo geodésico $\vec{G} \in \mathfrak{X}(TM)$ restrito ao fibrado tangente unitario $T^1(M) := \{V_x \in T_xM, \|V_x\| = 1\}_{x\in M}$. Ao aplicar o resultado que afirma que *todo campo suave definido em variedade compacta gera um grupo a 1 parametro de difeomorfismos* podemos concluir que o fluxo de $\vec{G}$ restrito $T^1(M)$ é completo (i.e, está definido para todo tempo) e assim projetando em M concluimos que M é geodesicamente completo.

Vamos agora provar o item (b). Como M é compacta podemos considerar uma cobertura finita de bolas B_{δ_i} que são vizinhanças normais convexas (vide Teorema 4.17). A esta cobertura considere δ o *número de Lebesgue* associado a ela, ou seja se $d(x,y) < \delta$ então $x, y \in B_{\delta_i}$ para algum i. Sejam $R = d(q,p)$ e $0 < t_1 < t_2 \cdots t_{m-1} = R$ uma partição tal que $\Delta t_i := (t_i - t_{i-1}) < \frac{\delta}{4}$

Considere uma sequencia de curvas $\tilde{\gamma}_n : [0, b_n] \to M$ parametrizadas por comprimento de arco tal que $L(\tilde{\gamma}_n)$ converge a R com $\tilde{\gamma}_n(0) = q$ e $\tilde{\gamma}_n(b_n) = p$. Considere $N > N_0$ tal que $R \leq L(\tilde{\gamma}_n) < R + \epsilon_0$ onde $\epsilon_0 < \frac{\delta}{8}$. Em particular observe que $b_n < R + \epsilon_0$ Defina $t_m^n := b_n$ (sendo que $t_{m-1} \leq t_m$).

Finalmente defina γ_n como a curva composta por união de segmentos de geodésicas ligando $x_n^{i-1} := \tilde{\gamma}_n(t_{i-1})$ com $x_n^i := \tilde{\gamma}_n(t_i)$. De fato a escolha de Δt_i garante que existe uma única geodésica ligando tais pontos. Chamaremos γ_n o *encurtamento de* $\tilde{\gamma}_n$. Visto que M é compacta, passando por uma subsequencia (que continuaremos a denotar por $\{x_n^i\}_n$) podemos garantir que $\lim_{n\to\infty} x_n^i = x^i$. Novamente a escolha de Δt_i e propriedade do número de Lebesgue δ garante que existe um único segmento de geodésica ligando x^{i-1} e x^i. Vamos denotar por γ a curva que é a união destes segmentos de geodésicas. Note que $\gamma_n|_{[t_{i-1},t_i]}$ converge para $\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$. Visto que $L(\gamma_n)$ converge para R concluimos que $L(\gamma) = R$. Logo pela Proposição 4.20 concluimos que γ é a geodésica minimizante ligando q a p.

□

Exercício 4.23 (*). Seja M variedade Riemanniana compacta não simplesmente conexa. Demonstre que por cada q existe um loop geodésico (i.,e uma geodésica $\gamma : [0,1] \to M$ tal que $\gamma(0) = \gamma(1)$, porém $\gamma'(0)$ não precisa ser igual a $\gamma'(1)$).

Observação 4.24. Dado as técnicas apresentadas acima é conveniente dizer algumas palavras sobre um dos primeiros resultados sobre *existência de geodésicas fechadas em variedades compactas* (assunto muito estudado na Geometria Riemanniana). Seja $\beta : [0,1] \to M$ uma curva fechada (i.e, $\beta(0) = \beta(1)$) em uma variedade compacta M. Considere 2 partições τ_i e t_i definidas da seguinte forma, $\tau_0 = \tau_k - 1 < t_0 = 0 < \tau_1 < t_1 < \tau_2 < t_2 \cdots \tau_k < t_k = 1$ com Δt_i e $\Delta \tau_i$ pequenos o suficiente (onde a estimativa é feita adequadamente usando cobertura de bolas convexas e o número de Lebesgue). Aplicando o processo de encurtamento a curva fechada β (referente a partição t_i) discutido na demonstração acima, obetemos uma curva fechada γ_1 união de segmentos de geodésicas. Agora usando o encurtamento (referente a partição τ_i) a curva γ_1 obtemos uma nova curva fechada união de segmentos de geodésicas. Vamos denota-la por γ. Criamos então um processo que chamaremos *duplo-encurtamento* $\mathcal{P}(\beta) = \gamma$. É possível demonstrar que as curvas fechadas união de segmentos de geodésicas $\mathcal{P}^n(\beta)$ converge para uma geodésica fechada γ, i.e, $\gamma'(0) = \gamma'(1)$, que em princípio poderia ser um ponto. Então surge a questão de como garantir que γ não é trivial. Podemos então pensar em 2 casos. O primeiro mais simples onde $\pi_1(M)$ é não trivial. Neste caso poderiamos ter começado com uma curva fechada β que não é homotopica a um ponto e aplicarmos o processo duplo a esta curva. Temos assim neste caso que γ é uma geodésica fechada não trivial, pois γ e β estão na mesma classe de homotopia que não fixa extremos e β não pode ser deformada a um ponto. Finalmente considere o caso em que M é simplesmente conexo. Sabe-se por topologia algébrica que pelo menos um dos grupos de homotopia $\pi_k(M)$ é não trivial. Considere uma aplicação $\psi : \mathbb{S}^k \to M$ não homotopica a um ponto. Aplicando duplo encurtamento a cada um dos paralelos concluimos que deve existir uma geodésica fechada, pois caso contrário a esfera seria homotópica a um disco, que por sua vez é homotópico a um ponto.

O leitor poderá encontrar em literatura mais especializada outros resultados sobre geodésicas fechadas em variedades (e.,g se existem mais de uma, como elas crescem etc). Alguns resultados sobre geodésicas fechadas em espaços singulares tais como orbifolds, podem ser encontrados em Alexandrino Javaloyes-*on closed geodesics in the leaf space of singular Riemannian foliations.*

4.3. Campos de Jacobi e variações por geodésicas

Seja $\alpha : I \to (M, \mathrm{g})$ geodésica em uma variedade Riemanniana M com dimensão n. Um campo suave J ao longo de α é chamado *campo de Jacobi* se ele atende a *equação de Jacobi*:

$$\frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{dt}J + R(\alpha', J)\alpha' = 0.$$

Como vemos a seguir todo vetor velocidade de uma variação por geodésica é um campo de Jacobi.

PROPOSIÇÃO 4.25. *Seja $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \to M$ uma aplicação suave tal que $f(s, \cdot)$ é geodésica para todo $s \in (-\epsilon, \epsilon)$. Então $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$ é campo de Jacobi ao longo da geodésica $t \to \alpha(t) = f(0, t)$.*

Demonstração. Temos pela Proposição 3.20

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{dt}J &= \frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial s} \\
&= \frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial f}{\partial t} \\
&= \frac{\nabla}{ds}\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial t} - R(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s})\frac{\partial f}{\partial t} \\
&= -R(\alpha', J)\alpha'
\end{aligned}$$

□

Veremos na Proposição 4.27 que o resultado reciproco também será verdadeiro ou seja todo campo de Jacobi pode ser obtido por variações por geodésicas. Antes porém vamos descrever um campo de Jacobi em termos de um referencial paralelo e observar que ele de fato atende uma EDO e extrair algumas conclusões simples de tal equação diferencial.

Sejam J um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica α e $t \to \{e_i(t)\}_{i=0\ldots n-1}$ um referencial ortonormal paralelo ao longo de α onde $e_0 := \alpha'/\|\alpha'\|$. Neste caso para

$$J(t) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(t)e_i(t)$$

temos

$$\frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{dt}J = \sum_{i=o}^{n-1} f_i''(t)e_i(t).$$

Concluimos então que a equação de Jacobi pode ser escrita como

$$f_j''(t) + \sum_i f_i \mathrm{g}(R(\alpha', e_i)\alpha', e_j) = 0 \; \forall j \tag{4.3.1}$$

Em termos matricias temos

$$J'' + BJ = 0 \tag{4.3.2}$$

onde $B = (b_{ij})$ e $b_{ij} = \mathrm{g}(R(\alpha', e_i)\alpha', e_j)$. Note que $b_{ij} = b_{ji}$ e $b_{0j} = 0$.

As equações acima nos permite inferir algumas conclusões imediatas sobre campos de Jacobi as quais resumimos na proposição a seguir.

Proposição 4.26. (a) *Se $V, W \in T_{\alpha(0)}M$ então existe um único campo de Jacobi J ao longo da geodésica $\alpha : [0,1] \to M$ tal que $J(0) = V$ e $\frac{\nabla}{dt}J(0) = W$.*

(b) *Existem 2 n campos de Jacobi linearmente independentes.*

(c) *α' e $t\alpha'$ são campos de Jacobi, os quais são soluções de $f_0'' = 0$*

(d) *Existem $2(n-1)$ campos de Jacobi perpendicular à α (não necessáriamente ortogonais entre si).*

(e) *$\mathrm{g}(J, \alpha') = t\,\mathrm{g}(J'(0), \alpha') + \mathrm{g}(J(0), \alpha'(0))$*

Demonstração. Os itens (a),(b),(c) são imediatos. O item (d) segue da equação (4.3.2) levando em conta que $b_{0j} = 0$. Para verificar o item (e) basta observar que

$$\begin{aligned}
\mathrm{g}(J, \alpha') &= \|\alpha'\| f_0 \\
&= \|\alpha'\|(t f_0'(0) + f_0(0)) \\
&= \|\alpha'\|\big(t\,\mathrm{g}(J'(0), \frac{\alpha'(0)}{\|\alpha'(0)\|}) + \mathrm{g}(J(0), \frac{\alpha'(0)}{\|\alpha'(0)\|})\big).
\end{aligned}$$

□

Podemos agora mostrar que todo campo de Jacobi é vetor velocidade de uma variação por geodésicas.

PROPOSIÇÃO 4.27. *Seja J um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$. Considere uma curva $\beta : (-1, 1) \to W$ com $\beta'(0) = J(0)$, um campo $s \to V(s)$ao longo de β com $V(0) = \alpha'(0)$ e $\frac{\nabla}{ds} V(0) = \frac{\nabla}{dt} J(0)$. Suponha que a variação $f(s,t) := \exp_{\beta(s)}(tV(s))$ está bem definida. Então $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0,t)$.*

Demonstração. Observe que $\frac{\partial f}{\partial s}(0,0) = J(0)$. Devemos verificar que $\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial s}(0,0) = \frac{\nabla}{dt} J(0)$ e o resultado seguirá pela Proposição 4.25 e pela unicidade de EDO. Para tanto basta observar que

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial s}(0,0) &= \frac{\nabla}{ds}\frac{\partial f}{\partial t}(0,0) \\
&= \frac{\nabla}{ds}(\mathrm{d}(\exp_{\beta(s)})_0 V(s))|_{s=0} \\
&= \frac{\nabla}{ds}(V(s))|_{s=0} \\
&= \frac{\nabla}{dt} J(0).
\end{aligned}$$

□

Observação 4.28. É facil achar uma curva β tal que $\beta'(0) = J(0)$. Sejam $s \to X(s)$ e $s \to Y(s)$ os campos paralelos ao longo de β com $X(0) = \alpha'(0)$ e $Y(0) = \frac{\nabla}{dt} J(0)$. O campo $s \to V(s)$ pode então ser definido como $V(s) := X(s) + sY(s)$. Se a aplicação exp está sempre bem definida, e.g., M compacta (ou M completa, vide Parte 2) então f está bem definida. Caso contrário, pode-se proceder da seguinte forma. Primeiro verifica-se que f está certamente bem definida para intervalos pequenos de s e t. Depois, grudando variações f_i ao longo de γ podemos construir a desejada variação f.

É conveniente considerar o caso particular de campos de Jacobi com $J(0) = 0$.

COROLÁRIO 4.29. *Suponha que $\exp_p : B_\delta(0) \to M$ está bem definida e seja $B := \exp_p(B_\delta(0))$. Seja J um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica $\alpha \subset B$ com condições iniciais $J(0) = 0$ e $\frac{\nabla}{dt} J(0) = W$. Então*

$$J(t) = \mathrm{d}(\exp_p)_{t\alpha'(0)} tW$$

Demonstração. Basta considerar na demonstração anterior a curva $\beta(s) = p$ e um campo $V(s) = \sum_i a_i(s) e_i(p)$ com $V(0) = \alpha'(0)$ e $V'(0) = W$. Observe que

$$\frac{\nabla}{ds} V(0) = V'(0) = \sum_i a_i'(0) e_i(p).$$

O resultado segue observando que

$$\frac{\partial f}{\partial s}(0,t) = \mathrm{d}(\exp_p)_{tV(0)} tV'(0).$$

□

Observação 4.30. Por vezes é conveniente reescrever o corolário acima em termos de variações. Mais precisamente se J é um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica α com $J(0) = 0$ e $W = \frac{\nabla}{dt}J(0)$ então $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0,t)$ onde $f(s,t) = \exp_p(tV(s))$ e $V : (-\epsilon, \epsilon) \to T_pM$ é curva com $V'(0) = W$ e $V(0) = \alpha'(0)$.

4.4. Campos de Jacobi em espaços de curvatura constante

Consideraremos agora campos de Jacobi em espaços de curvatura constante.

PROPOSIÇÃO 4.31. *Sejam (M, g) variedade Riemanniana com curvaturas secionais constantes K e $\alpha : [0,a] \to M$ geodésica com vetor velocidade 1. Então o campo de Jacobi J ao longo de α com condições iniciais $J(0) = 0$ e $\frac{\nabla}{dt}J(0) = w$ para w perpendicular a $\alpha'(0)$ é $J(t) = c_K(t)w(t)$ onde $w(\cdot)$ é o transporte paralelo de w ao longo de α e c_K é a função definida como $c_K(t) := \frac{\sin(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}}$ se $K > 0$, $c_K(t) := t$ se $K = 0$ e $c_K(t) := \frac{\sinh(t\sqrt{-K})}{\sqrt{-K}}$ se $K < 0$.*

Demonstração. Considere o campo $\widetilde{J}(t) := c_K(t)w(t)$. Sabemos pela Proposição 3.25 que

$$\mathrm{g}(R(\alpha', \widetilde{J})\alpha', e_i) = K\mathrm{g}(\widetilde{J}, e_i)$$

Assim

$$R(\alpha', \widetilde{J})\alpha' = K\widetilde{J}$$

Loco o campo $\widetilde{J}$ atende a equação de Jacobi, ou seja

$$\frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{dt}\widetilde{J} + K\widetilde{J} = 0.$$

O resultado segue da unicidade das soluções da equação de Jacobi, dado condições iniciais.

□

Temos então o seguinte corolário.

COROLÁRIO 4.32. *Seja M variedade Riemanniana com curvatura constante K. Suponha que $\exp_p : B_\delta(0) \to M$ está bem definida. Seja $f(s,t) = \exp_p(tv(s))$ onde $v : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{S}_1^{n-1} \subset T_pM$ é curva com $\|V'(0)\| = 1$ e $|t| < \delta$. Então $\|J(t)\| = |c_K|$ onde c_K foi definido na proposição anterior e $J(t) := \frac{\partial f}{\partial s}(0,t)$.*

Observação 4.33 (Fórmula de Taylor). Caso M não possuia curvaturas secionais constante, ainda sim podemos ter uma estimativa de $\|J\|$. De fato sejam f e J definidos como no corolário anterior. Então:

$$\|J(t)\|^2 = t^2 - \frac{1}{3}K(p,\sigma)t^4 + O(t^4)$$

$$\|J(t)\| = t - \frac{1}{6}K(p,\sigma)t^3 + O(t^3)$$

onde σ é o espaço bi-dimensional gerado por $V(0)$ e $V'(0)$.

A seguir iremos utilizar nosso conhecimento sobre campos de Jacobi em espaços de curvatura constante para descrever a métrica g em termos de *coordenadas geodésicas polares*. Tal descrição implicará em particular que variedades Riemannianas de mesma curvatura constante são localmente isométricas.

PROPOSIÇÃO 4.34.
Sejam (M^n, g) *variedade Riemanniana com curvaturas secionais constantes* K *e* $\psi : (0,\delta) \times \mathbb{S}^{n-1} \to B_\delta(p)$ *parametrização geodésica polar, i.e.,* $\psi(r,v) := \exp_p(rAv)$ *onde* $A : (\mathbb{R}^n, \mathrm{g}_0) \to (T_pM, \mathrm{g})$ *é isometria linear. Então a métrica* g *em coordenadas geodésicas polares é* $dr^2 + (c_k(r))^2 ds^2$ *onde* ds^2 *é a métrica canônica da esfera* $\mathbb{S}^{n-1}$ *e a função* c_K *foi definida na Proposição 4.31. Em particular, duas variedades Riemannianas com mesma dimensão e mesmas curvaturas secionais constantes iguais a* K *são localmente isométricas.*

Demonstração. Seja $\{e_i\} \subset T_v\mathbb{S}^{n-1}$ referencial ortonormal. Pelo Corolário 4.29

$$\begin{aligned} J_i(r) &:= d(\exp_p)_{rAv} rAe_i \\ &= d\psi_{(r,v)}(0, e_i), \end{aligned}$$

é campo de Jacobi ao longo da geodésica $r \to \exp_p(rAv)$. Utilizando Proposição 4.31 podemos verificar que

$$g(J_i, J_j) = \delta_{i,j} c_K^2. \tag{4.4.1}$$

Por fim defina

$$\begin{aligned} J_0(r) &:= d(\exp_p)_{rAv} Av \\ &= d\psi_{(r,v)}(1, 0) \end{aligned}$$

e utilizando o Lema de Gauss concluimos que

$$g(J_0, J_i) = 0. \tag{4.4.2}$$

O resultado então seguirá das equações (4.4.1) e (4.4.2). □

4.5. Pontos conjugados

Terminamos a nossa discussão sobre campos de Jacobi com alguns comentários sobre pontos conjugados.

Seja $\alpha : [0,a] \to (M,\mathrm{g})$ geodésica. O ponto $\alpha(t_0)$ é *conjugado* a $\alpha(0)$ ao longo de α se existe um campo de Jacobi J ao longo de α com $J(0) = 0 = J(t_0)$.

O número máximo de campos linearamente independentes é chamado *multiplicidade* de $\alpha(t_0)$.

EXEMPLO 4.35. Seja $\alpha : [0,\pi] \to \mathbb{S}^n_1$ geodésica, i.e., um segmento de um grande círculo, com $\alpha(0) = p$ e $\alpha(\pi) = -p$. Então $\alpha(\pi)$ é ponto conjugado a $\alpha(0)$ com multiplicidade $n-1$.

EXERCÍCIO 4.36. Seja α geodésica em uma variedade Riemanniana M. Verifique

(a) $\alpha(t_0)$ é ponto conjugado a $\alpha(0)$ se e somente se $\alpha(0)$ é conjugado a $\alpha(t_0)$

(b) A múltiplicidade de um ponto conjugado é no máximo $n-1$

SUGESTÃO: Para o item (b) utilize a Proposição 4.26

PROPOSIÇÃO 4.37. *Sejam* $\exp_p : B_\delta(0) \to M$ *bem definida,* $t \to \alpha(t) := \exp_p(tV_0)$ *com* $|t| < \delta$ *e* $\|V_0\| = 1$. *Então* $\alpha(t_0)$ *é conjugado a* $\alpha(0)$ *com múltiplicidade* k *se e somente se* $\dim(\ker \mathrm{d}(\exp_p)_{t_0 V_0}) = k$.

Demonstração. Basta observar que as afirmações abaixo são todas equivalentes.

(1) $J_1 \ldots, J_k$ são campos de Jacobi linearmente independentes com $J_i(0) = J_i(t_0) = 0$.

(2) $J_i(t) = \mathrm{d}(\exp_p)_{t_0 V_0}(t_0 W_i)$ com W_i linearmente independentes e $J_i(t_0) = 0$, onde $1 \leq i \leq k$.

(3) W_i são linearmente independentes e $W_i \in \ker \mathrm{d}(\exp_p)_{t_0 V_0}$, onde $1 \leq i \leq k$.

□

PROPOSIÇÃO 4.38. *Seja* $\alpha : [0,a] \to (M,\mathrm{g})$ *uma geodésica. Suponha que* $\alpha(a)$ *não é conjugado a* $\alpha(0)$ *ao longo* α. *Então dado* $X \in T_{\alpha(0)}M$ *e* $Y \in T_{\alpha(a)}M$ *existe um único campo de Jacobi ao longo de* α *tal que* $J(0) = X$ *e* $J(a) = Y$

Demonstração. Seja $\mathcal{J}_{0,a}$ o espaço dos campos de Jacobi com $J(0) = 0$. Defina a aplicação $A : \mathcal{J}_{0,a} \to T_{\alpha(a)}M$ como $A(J) := J(a)$. Claramente A é aplicação linear. Como $\alpha(a)$ não é ponto conjugado, concluimos que A é injetora. Como os espaços vetorias $\mathcal{J}_{0,a}$ e $T_{\alpha(a)}M$ tem dimensão n concluimos que A é um isomorfismo. Este fato implica então que existe um campo J_1 com $J_1(0) = 0$ e $J_1(a) = Y$. Por raciocínio analogo obtemos um capo de Jacobi J_2 com $J_2(0) = X$ e $J_2(a) = 0$. Por fim defina $J = J_1 + J_2$. A unicidade segue do fato de $\alpha(a)$ não ser ponto conjugado a $\alpha(0)$. □

Parte II

Resultados clássicos

CAPíTULO 5

Imersões isométricas

Neste capítulo estudaremos imersões isométricas. Em particular demonstraremos o teorema fundamental das imersões isométricas que, a grosso modo falando, garante que uma imersão isométrica é localmente determinada por candidatos a primeira e segunda forma, quando tais candidatos atendem certas equações de compatibilidade, i.e., as equações de Gauss, Codazzi e Ricci, as quais de fato são partes de uma única equação, a assim chamada equação de curvatura.

Ele é baseado no livro de Terng e Palais, do Carmo, Kühnel, Jost.

5.1. Convenções e a segunda forma

Como discutimos no capítulo 1 uma imersão $\varphi : (M, \mathrm{g}) \mapsto (\widetilde{M}, \tilde{\mathrm{g}})$ é *isométrica* se $\varphi^*\tilde{\mathrm{g}} = \mathrm{g}$. Em particular uma imersão $\varphi : M \mapsto (\widetilde{M}, \tilde{\mathrm{g}})$ torna-se isométrica se definimos a *métrica induzida* $\mathrm{g} := \varphi^*\tilde{\mathrm{g}}$.

Ao longo do texto, a menos que algo seja dito ao contrário, estaremos supondo que M é subvariedade mergulhada de $\widetilde{M}$ e φ é a inclusão $i : M \mapsto \widetilde{M}$. Isto porque estamos interessados principalmente nos aspectos locais da teoria das imersões isométricas. Assim a métrica em M será sempre considerada a métrica induzida. Estaremos denotando a métrica do espaço ambiente $\widetilde{M}$ simplesmente por g (no lugar de $\tilde{\mathrm{g}}$). A métrica induzida $i^*\mathrm{g}$ na variedade mergulhada M é chamada *primeira forma* (por vezes também será denotada por g). A subvariedade M dotada da primeira forma é chamada então de *subvariedade Riemanniana.*

É conveniente aqui discutir o conceito de *referencial adaptado a imersão.* Dado a subvariedade Riemanniana M e um ponto $p \in M$ podemos sempre encontrar uma vizinhança p em $\widetilde{M}$ e um referencial local ortonormal $e_1 \dots e_{\tilde{m}}$ (onde $\tilde{m} = \dim \widetilde{M}$) definido em uma vizinhança de p com as seguintes propriedades:

(1) Para $1 \leq i \leq m = \dim(M)$ temos que $e_i(x)$ é tangente a M se $x \in M$

(2) Para $m + 1 \leq \alpha \leq \tilde{m} = \dim(\widetilde{M})$ temos que $e_\alpha(x)$ é normal a M se $x \in M$.

Também é conveniente estabelecer uma *convenção* sobre as letra que usaremos para os indices do referencial adaptado. Estaremos reservando as letras maiúsculas A, B, C para indices de 1 ate $\tilde{m} = \dim(\widetilde{M})$.

Estaremos reservando as letras minúsculas i, j, k para os primeiros indices, de 1 ate $m = \dim(M)$. Por fim estaremos reservando as letras gregas α, β, γ para os últimos indices variando de $m+1$ ate $\tilde{m} = \dim(\widetilde{M})$.

Estaremos considerando no nosso estudo duas conexões afins.

A primeira conexão é a conexão Riemanniana em M associada a primeira forma $i^*\mathrm{g}$. Tal conexão é chamada *conexão tangente* e será denotada por ∇.

EXERCÍCIO 5.1. Verifique que a conexão tangente de M é a projeção ortogonal da conexão Riemanniana em $\widetilde{M}$. Mais precisamente, verifique que:

$$\nabla_X Y(p) = \pi \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}(p)$$

onde $\pi : T_p M \mapsto T_p N$ é a projeção ortogonal, X, Y são campos suaves de N, $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ são extensões locais de X, Y em uma vizinhança de $p \in N$ e $\widetilde{\nabla}$ é a conexão Riemanniana de $\widetilde{M}$

A outra conexão relevante em nossos estudos será uma conexão definida no espaço normal. Seja $\nu(M)_p$ o espaço normal a $T_p M$. O (espaço total do) *fibrado normal* é definido como $\nu(M) := \cup_{p\in M} \nu_p(M)$.

A *conexão normal* $\nabla^\nu : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(\nu(M)) \mapsto \Gamma(\nu(M))$ é então definida como

$$\nabla^\nu_X \xi := \pi^\nu \widetilde{\nabla}_X \tilde{\xi}$$

onde $\pi^\nu : T_p\widetilde{M} \mapsto \nu_p(M)$ é a projeção ortogonal, X é um campo em M, $\tilde{\xi}$ uma extensão de ξ em uma vizinhança de $p \in M$. É possivel mostrar que tal conexão está bem definida, ou seja não depende da extensão.

A relação entre a conexão do ambiente $\widetilde{\nabla}$ e a conexão tangente ∇ é descrita pelo tensor $B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(\nu(M))$ definido a seguir

DEFINIÇÃO 5.2 (*Tensor Segunda Forma*).

$$B(X, Y) = \widetilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} - \nabla_X Y$$

onde $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ são extensões de X e Y.

PROPOSIÇÃO 5.3.

(a) *B é bem definido (não depende das extensões)*

(b) *B é $(1,2)$ tensor simétrico.*

Demonstração. O item (a) e o fato de B ser um $(1,2)$ tensor pode ser demonstrado utilizando referencial adaptado e o fato de

$$\widetilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} = D_X \tilde{Y} + \widetilde{A}(X)\tilde{Y}.$$

Para demonstrar que B é simétrico note

$$\begin{aligned} B(X,Y) &= \widetilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} - \nabla_X Y \\ &= \widetilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{X} + [\tilde{X}, \tilde{Y}] \\ &- (\nabla_Y X + [X, Y]) \\ &= B(Y, X). \end{aligned}$$

□

Por vezes também será conveniente tratar o $(1,2)$ tensor B acima, como o $(0,3)$ tensor abaixo.

DEFINIÇÃO 5.4 (Segunda forma).

$$\Pi_\eta(X,Y) = \mathrm{g}(B(X,Y),\eta)$$

onde X, Y são tangentes a M e η é um vetor normal.

Visto que B é simétrico, podemos então definir um operador simétrico (em relação ao produto g) $\mathcal{S}_\xi : T_pM \to T_pM$ via o tensor segunda forma:

DEFINIÇÃO 5.5 (Operador forma). $\mathrm{g}(\mathcal{S}_\eta X, Y) = \Pi_\eta(X,Y)$

O significado geométrico do operador forma pode ser compreendido mais claramente na proposição a seguir. Em particular para hipersuperfícies no espaço Euclidiano pode ser interpretado como *uma forma de medir quão rapido o vetor normal unitário varia, ou seja quão rápido uma hipersuperfície "curva". Em particular se o operador forma for sempre zero a hipersuperfície será um hiperespaço.*

PROPOSIÇÃO 5.6. *Seja $\eta \in \nu_p(M)$ e $\tilde{\eta}$ uma extensão de η em uma vizinhança de p em $\widetilde{M}$. Então*

$$\mathcal{S}_\eta(X) = -\pi\big(\widetilde{\nabla}_X \tilde{\eta}\big)$$

onde $\pi : T_p\widetilde{M} \to T_pM$ é a projeção ortogonal e $X \in T_pM$

Demonstração. Seja $Y \in T_pM$ um vetor qualquer fixo e $\tilde{Y}$ uma extensão deste vetor. Observe primeiro que como $\mathrm{g}(\eta, Y) = 0$ temos, apos derivar por X que $\mathrm{g}(\widetilde{\nabla}_X \tilde{Y}, \tilde{\eta}) = -\mathrm{g}(\tilde{Y}, \widetilde{\nabla}_X \tilde{\eta})$ e assim

$$\begin{aligned}
\mathrm{g}(\mathcal{S}_\eta X, Y) &= \mathrm{g}(\widetilde{\nabla}_X \tilde{Y} - \nabla_X Y, \tilde{\eta}) \\
&= \mathrm{g}(\widetilde{\nabla}_X \tilde{Y}, \tilde{\eta}) \\
&= \mathrm{g}(Y, -\widetilde{\nabla}_X \tilde{\eta})
\end{aligned}$$

A equação acima e a arbitrariedade da escolha do vetor Y conclue a prova da proposição. □

Uma vez definidos B e $\mathcal{S}_\eta$ é natural perguntar o que significa estes operadores serem zero em variedades Riemannianas.

DEFINIÇÃO 5.7. Uma subvariedade mergulhada M em $\widetilde{M}$ é totalmente geodésica em p se $B_p = 0$. Mais geralmente M é totalmente geodésica se $B_p = 0$ para todo $p \in M$.

O próximo exercício (o qual pode ser facilmente resolvido usando a definição de B), justifica o nome *totalmente geodésico.*

EXERCÍCIO 5.8. Mostre que M é totalmente geodésica se e somente se toda geodésica de M é geodésica de $\tilde{M}$.

Além dos subespaços em $\mathbb{R}^n$ os 3 exercícios a seguir garante outros exemplos de totalmente geodésicos típicos, em particular os 2 últimos fornecem exemplos de folheações totalmente geodésicas.

EXERCÍCIO 5.9. Seja V um subespaço de $\mathbb{R}^n$ e defina $M := V \cap \mathbb{S}^{n-1}$. Mostre que M é subvariedade totalmente geodésica de $\mathbb{S}^{n-1}$.

EXERCÍCIO 5.10. Sejam M_1 e M_2 variedades Riemannianas e $M = M_1 \times M_2$ variedade com a métrica produto. Mostre que:

(a) $M_1 \times \{p_2\}$ é totalmente geodésica em M

(b) $K(X, Y) = 0$ se X, Y são vetores ortonormais tais que X é tangente a $M_1 \times \{p_2\}$ e Y é tangente a $\{p_1\} \times M_2$

EXERCÍCIO 5.11. Seja G um grupo de Lie com métrica bi-invariante e $H \subset G$ subgrupo fechado. Mostre que H é subvariedade totalmente geodésica.

Observação 5.12. Subvariedades totalmente geodésicas são subvariedades bem especiais, e como os exemplos acima sugerem podem aparecer de forma natural em várias situações. De fato elas podem aparecer com alguma frequencia por exemplo quando $\widetilde{M}$ é um espaço simétrico (vide ??) , ou quando $\widetilde{M}$ é não compacta com curvatura $K \geq 0$ (e.,g quando a variedade admite uma alma que não é um ponto, vide ??). Porém devemos observar que em geral não é possível movelas ou coloca-las em qualquer posição. Mas precisamente como observado por Cartan, *se para qualquer* $p \in \widetilde{M}$ *e para qualquer plano* $\sigma \subset T_pM$, $\exp_p(\sigma \cap B_\epsilon(0))$ *é totalmente geodésica, então* $\widetilde{M}$ *tem curvatura constante.*

Uma vez estabelecidos alguns exemplos onde S_η são nulas, é natural considerarmos casos onde tais operadores simétricos não são nulos e assim somos lavados a considerar seus auto-valores e tentarmos entender o significado destes.

DEFINIÇÃO 5.13. Seja η vetor normal unitário de M. Os autovalores λ_i do operador forma $S_\eta : T_pM \to T_pM$ são chamados *curvaturas principais*. Frequentemente os auto-vetores são chamados direções principais e os auto-espaço E_λ associados a uma curvatura principal λ de auto-espaço principal.

O exercício abaixo, apresenta uma das interpretações mais clássicas das curvaturas principais.

EXERCÍCIO 5.14. Seja M o gráfico em $\mathbb{R}^3$ de uma função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suave tal que $(0, 0) \in \Omega$, $f(0, 0) = 0$ e $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ Verifique:

(a) $T_{(0,0,0)}M = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$,
(b) se $\xi(0,0,0) = (0,0,1)$ então $S_\xi(v,0) = (\mathrm{Hess}f(0,0)v, 0)$, onde S_ξ é o operador forma.
(c) Conclua que as curvaturas principais são auto-valores λ_1 e λ_2 do $\mathrm{Hess}f(0,0)$ e assim que M pode ser aproximado por um parabolóide (respectivamente hiperboloide) se $\lambda_1\lambda_2 > 0$ (respectivamente se $\lambda_1\lambda_2 < 0$).

Visto que toda superfície M mergulhada em $\mathbb{R}^3$, após movimento rígido, pode ser destrica como a um gráfico em relação ao T_pM, o exercício acima nos permite concluir que toda superfície é aproximada ou por um paraboloide ou por um hiperboloide se $\lambda_1\lambda_2 > 0$ ou se $\lambda_1\lambda_2 < 0$. O produto $\lambda_1\lambda_2$ em p será chamado *Curvatura de Gauss* e como ficará claro no teorema Egregium de Gauss, tal curvatura coincide de fato com a curvatura seccional em p.

O próximo exercício fornece mais uma interessante interpretação sobre as curvaturas principais, agora destacando o significado de $\frac{1}{\lambda_i}$, as assim chamadas *distancias focais* que a grosso modo medem lugares onde superfícies "focalizam".

EXERCÍCIO 5.15. Seja M uma superfície mergulhada em $\mathbb{R}^3$ e ξ vetor normal unitário a M. Defina $\eta_{r\xi} : M \to \mathbb{R}^3$ como $\eta_{r\xi}(x) = x + r\xi$

(a) Sejam e_1 e e_2 direções principais em T_pM com curvaturas principais λ_1 e λ_2. Verifique que $d\eta_{r\xi}e_i = (1 - r\lambda_i)e_i$
(b) Conclua que se $r \neq \frac{1}{\lambda_i}$ em vizinhança $\tilde{U}$ de p, então existe vizinhança $U \subset \tilde{U}$ de p tal que $\eta_{r\xi}(U)$ é superfície mergulhada.

5.2. Vetor curvatura média

Seja M uma superfície mergulhada em $\mathbb{R}^3$ com vetor unitário normal η. Sejam λ_1 e λ_2 as curvaturas principais associadas a η (ou seja os auto-valores de $\mathcal{S}_\eta$) no ponto $p \in M$. Podemos então definir *curvatura média* de p como $H(p) = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}$. A seguir generalizamos este conceito para subvariedades M mergulhadas em $\widetilde{M}$.

DEFINIÇÃO 5.16 (vetor curvatura média).

$$\begin{aligned} H(p) &= \mathrm{tr}B_p \\ &= \sum_\beta \left(\mathrm{tr}\mathcal{S}_{e_\beta}\right)_p e_\beta \end{aligned}$$

onde $\{e_\beta\}$ é referencial ornormal de $\nu_p(M)$

O resultado a seguir nos dá uma interpretação geométrica do significado do vetor curvatura média. Em particular podemos concluir que se H é sempre zero, então a subvariedade M é um ponto crítico das variações de volume. Tais variedades são chamadas *variedades minimas* e de fato é possível demonstrar (mas não o faremos nestas notas) que elas minimizam localmente o volume.

PROPOSIÇÃO 5.17. *Seja* $\Psi : V \subset \mathbb{R}^m \to U \subset M$ *parametrização com* $\overline{U}$ *compacto. Considere* $\varphi : U \to \mathbb{R}$ *tal que* $\varphi|_{M-U} = 0$ *e* $0 < \varphi|_U \leq 1$. *Para* U^1 *compacto com* $\overline{U} \subset U^1$ *defina* $F : (-\delta, \delta) \times U^1 \to \tilde{M}$ *como* $F(t, x) := \exp_x(t\xi)$ *e* $\hat{\Psi} : (-\delta, \delta) \times V \to \tilde{M}$ *como* $\hat{\Psi}(t, x) := F(t\varphi(x), \Psi(x))$. *Escolha* δ *para* F *ser imersão injetora. Defina* $g^t_{i,j} := \mathrm{g}\big(d\Psi^t e_i, d\Psi^t e_j\big)$ *onde* $\Psi^t(x) = \hat{\Psi}(t, x)$. *Então:*

$$
\begin{array}{lll}
(a) \quad -m\mathrm{g}(H, \varphi\,\xi) & = & \frac{\frac{d}{dt}\sqrt{|g^t_{i,j}|}|_{t=0}}{\sqrt{|g^0_{i,j}|}} \\
(b) \quad \frac{d}{dt}\mathrm{Vol}(\Psi^t(V))_{|t=0} & = & -m\int_U \mathrm{g}(H, \varphi\,\xi)\,\omega
\end{array}
$$

onde H *é o vetor curvatura média e* ω *é a forma volume (com orientação induzida por* Ψ.*)*

Demonstração. Considere a subvariedade $\widehat{M} := F\big((-\epsilon, \epsilon), U^1\big)$ com a métrica induzida g. A subvariedade U então se torna uma hipersuperfície em $\widehat{M}$. Ao longo desta prova o ambiente de U será sempre $\widehat{M}$, e o sistema de coordenadas que iremos considerar será $\widehat{\psi}^{-1}$. Neste sistema de coordenadas a forma volume $\widehat{\omega}$ (com respeito a g) se escreve como

$$\widehat{\omega} = \sqrt{|g_{i,j}|}dt \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$$

e assim temos:

$$i_{\frac{\partial}{\partial t}}\widehat{\omega} = \sqrt{|g_{i,j}|}dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m.$$

Por outro lado, é possível provar que

$$d\big(i_{\frac{\partial}{\partial t}}\widehat{\omega}\big) = \mathrm{div}(\frac{\partial}{\partial t})\,\widehat{\omega}$$

As equações acima nos permite concluir que:

$$\mathrm{div}(\frac{\partial}{\partial t}) = \frac{\frac{d}{dt}\sqrt{|g_{i,j}|}}{\sqrt{|g_{i,j}|}} \tag{5.2.1}$$

Também é possivel verificar que

$$\frac{\frac{d}{dt}\sqrt{|g_{i,j}|}}{\sqrt{|g_{i,j}|}}(0, x) = \frac{\frac{d}{dt}\sqrt{|g^t_{i,j}|}|_{t=0}}{\sqrt{|g^0_{i,j}|}}. \tag{5.2.2}$$

De fato a equação acima pode ser obtida usando o calculo de determinantes via co-fatores e as observações abaixo:

(1) $g_{0,i}(0, x) = 0$ onde $g_{0,i} = \mathrm{g}(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_i})$,
(2) $g_{i,j}(t, x) = g^t_{i,j}$ para $i, j \geq 1$,
(3) $g_{0,0} = \|\frac{\partial}{\partial t}\|^2$ e $\frac{\partial}{\partial t}g_{0,0} = 0$

Finalmente utilizando o fato que $t \to \psi(t,x)$ são geodésicas de tamanho $\|\varphi(x)\|$ temos que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(\frac{\partial}{\partial t})(0,x) &= \sum_{i=1}^{m} \mathrm{g}(\nabla_{e_i}\frac{\partial}{\partial t}, e_i)\\
&+ \mathrm{g}(\nabla_{\xi}\frac{\partial}{\partial t}, \xi)\\
&= -\varphi \mathrm{tr}\mathcal{S}_{\xi}\\
&= -m\varphi \mathrm{g}(H,\xi)
\end{aligned}$$

e assim inferimos:

$$\mathrm{div}(\frac{\partial}{\partial t})(0,x) = -m\mathrm{g}(H,\varphi\xi) \tag{5.2.3}$$

Equações (5.2.1), (5.2.2) e (5.2.3) implicam o item (a).

Por fim o item(b) pode ser provado usando o item (a) como vemos a seguir:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathrm{Vol}(\Psi^t(V))_{|t=0} &= \frac{d}{dt}\Big(\int_V \sqrt{|g_{i,j}^t|}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_m\Big)_{|t=0}\\
&= \int_V \frac{d}{dt}\Big(\sqrt{|g_{i,j}^t|}\Big)_{|t=0} dx_1\wedge\cdots\wedge dx_m\\
&= -m\int_U \mathrm{g}(H,\varphi\,\xi)\,\omega
\end{aligned}$$

□

A teoria das subvariedades mímimas e hipersuperfícies de curvatura média constante são tópicos de grande relevancia em geometria, talvez pela naturalidade e beleza dos problemas ou talvez pelo uso das várias tecnicas envolvidas (de variáveis complexa a EDP) e ainda um tópico ativo de pesquisa. Em particular elas aparecem em algumas aplicações, tais como teoria dos fluidos e relatividade. Não é nossa intensão explorar um tópico tão amplo e sugerimos ao leitor a procura de textos mais especializados para entrar neste universo a parte. Porém gostariamos de dizer algumas palavras sobre o assim chamado fluxo de curvatura média associado a orbita de uma ação isométrica, com o objetivo de dar um pouco mais de intuição do que seja o vetor curvatura média.

Seja G um grupo compacto de isometrias de uma variedade Riemanniana compacta $\widetilde{M}$. Considere $M = G(p)$ uma orbita principal, ou seja que tem máxima dimensão e que tem o fibrado normal trivial. Uma fato bem conhecido é que o vetor curvatura média de M é básico ou seja se projeta no quociente $\widetilde{M}/G$ e que a norma de H ao longo de M é constante.

Uma família de imersões $\varphi_t : M \to \widetilde{M}$ com $\varphi_0 = id$ e $t \in [0,T)$ é chamado *fluxo de curvatura média* se

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t = H(t)$$

onde $H(t)$ é o vetor curvatura média de $M(t) = \varphi_t(M)$. É possível mostrar que que $M(t)$ são orbitas da ação.

Vamos agora apresentar (sem demonstração) alguns resultados contidos em Alexandrino and Radeschi, *Mean curvature flow of singular Riemannian foliations*, The Journal of Geometric Analysis, v. 26, (2015) p. 2204-2220.

PROPOSIÇÃO 5.18. *Seja M, $M(t)$ e $\widetilde{M}$ definidos acima. Se $G(q)$ é uma orbita singular, existe uma vizinhança U tal que se $M \subset U$ então*

(1) *$M(t) \subset U$,*
(2) *o tempo T é finito,*
(3) *$M(t)$ converge para uma orbita $G(\tilde{q})$ em U.*

Mas o que acontece se M não está tão próximo de uma orbita singular? $M(t)$ pode convergir? E se converge como se comporta o vetor curvatura média perto da orbita para o qual converge? O resultado a seguir responde tais perguntas.

TEOREMA 5.19. *Seja M, $M(t)$ e $\widetilde{M}$ definidos acima. se o tempo T é finito, então $M(t)$ converge para alguma orbita singular. Além disto*

$$\lim_{t\to T^-} \sup \|B_t\|^2_\infty (T-t) < \infty$$

De fato o resultado acima admite melhoras.Ele pode ser aplicado se M é uma orbita singular. Assim se soubermos que o tempo T é sempre finito podemos iteragir o processo várias vezes, até encontrar uma orbita mínima (que eventualmente pode ser um ponto). Isto nos leva a procurar por condições suficiente para T ser finito.

TEOREMA 5.20. *Se a ação é polar, i.,e a distribuição normal das orbitas regulares é integrável, e a curvatura de $\widetilde{M}$ é não negativa, então T sempre é finito se $M = M(0)$ é uma orbita regular (não mínima).*

5.3. Eq. de Gauss, Codazzi e Ricci

Nesta seção iremos apresentar 3 equações fundamentais que relacionam tensor curvaturas e segunda forma.

Iniciemos com a proposição abaixo que é um caso particular da *Equação de Gauss* a ser demonstrada na Proposição 5.23

PROPOSIÇÃO 5.21. *Denote R, $\tilde{R}$ os tensores curvaturas de M e $\widetilde{M}$ e B o $(1,2)$ tensor segunda forma de M. Então*

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)X,Y) - g(\tilde{R}(X,Y)X,Y) &= g\big(B(X,X),B(Y,Y)\big) \\ &- g\big(B(X,Y),B(X,Y)\big) \end{aligned}$$

Antes de demonstar a equação de Gauss vamos extrair algumas consequencias diretas. Em particular no item (b) do exercício abaixo vemos o celebrado *teorema Egregium de Gauss*, que observa que a curvatura secional de uma superfície em $\mathbb{R}^3$ (que é definido intrinsiciamente) pode ser calculada como o produto das curvaturas principais (que é calculado extrinsicamente). Para interpretação geométrica da curvatura de Gauss relembre o Exercício 5.14.

Exercício 5.22. Seja M hipersuperfície de $(\widetilde{M}, \tilde{g})$.

(a) Verifique que $K(e_1, e_2) - \tilde{K}(e_1, e_2) = \lambda_1 \lambda_2$ onde e_1, e_2 são direções principais de T_pM associadas as curvaturas principais λ_1 e λ_2.

(b) Conclua que se $\widetilde{M} = \mathbb{R}^3$ com métrica Euclidiana, então a curvatura sectional da superfície M é $K(p) = \lambda_1 \lambda_2$.

Proposição 5.23 (eq. de Gauss).

$$\begin{aligned} \mathrm{g}\big(R(X,Y)Z, W\big) - \mathrm{g}\big(\widetilde{R}(X,Y)Z, W\big) &= \mathrm{g}\big(B(X,Z), B(Y,W)\big) \\ &- \mathrm{g}\big(B(X,W), B(Y,Z)\big) \end{aligned}$$

onde X, Y, Z, W são tangentes a M.

Demonstração. Seja $\{e_A\}$ referencial adaptado a vizinhança de $p \in M$. Temos então que $B(X,Y) = \sum_\beta \mathrm{g}(\widetilde{\nabla}_X Y, e_\beta) e_\beta$ Estamos aqui usando a notação $\widetilde{\nabla}_X Y$ para denotar $\widetilde{\nabla}_X \widetilde{Y}$ onde $\widetilde{Y}$ é extensão de Y próximo a p. Logo

$$\widetilde{\nabla}_Y Z = \nabla_Y Z + \sum_\beta \mathrm{g}(\widetilde{\nabla}_Y Z, e_\beta) e_\beta$$

Uma vez que $\mathrm{g}(e_\beta, W) = 0$ temos que:

$$\begin{aligned} \mathrm{g}(\widetilde{\nabla}_X \widetilde{\nabla}_Y Z, W) &= \mathrm{g}(\widetilde{\nabla}_X \nabla_Y Z, W) \\ &+ \sum_\beta \mathrm{g}(\nabla_Y Z, e_\beta) \mathrm{g}(\widetilde{\nabla}_X e_\beta, W) \\ &= \mathrm{g}(\nabla_X \nabla_Y Z, W) \\ &- \sum_\beta \mathrm{g}(\nabla_Y Z, e_\beta) \mathrm{g}(e_\beta, \widetilde{\nabla}_X W) \end{aligned}$$

e assim concluimos:

$$\mathrm{g}(\widetilde{\nabla}_X \widetilde{\nabla}_Y Z, W) = \mathrm{g}(\nabla_X \nabla_Y Z, W) - \mathrm{g}\big(B(X,W), B(Y,Z)\big). \tag{5.3.1}$$

De forma análoga obtemos

$$\mathrm{g}(\widetilde{\nabla}_Y \widetilde{\nabla}_X Z, W) = \mathrm{g}(\nabla_Y \nabla_X Z, W) - \mathrm{g}\big(B(X,Z), B(Y,W)\big). \tag{5.3.2}$$

Por fim note que:

$$\mathrm{g}(\widetilde{\nabla}_{[X,Y]} Z, W) = \mathrm{g}(\nabla_{[X,Y]} Z, W). \tag{5.3.3}$$

As eq. (5.3.1), (5.3.2) e (5.3.3) implicam a Equação de Gauss. $\square$

A demonstração da próxima equação pode ser encontrada no livro de do Carmo, e veremos nos 2 exercícios logo depois uma formulação mais simples e uma aplicação no caso em que M é hipersuperficie de $\mathbb{S}^{m+1}$.

PROPOSIÇÃO 5.24 (Eq. de Codazzi).

$$\big(\widetilde{\nabla}_X\Pi\big)(Y,Z,\eta)-\big(\widetilde{\nabla}_Y\Pi\big)(X,Z,\eta)=\mathrm{g}(\widetilde{R}(X,Y)Z,\eta)$$

onde $\big(\widetilde{\nabla}_X\Pi\big)$ *é a derivada da segunda forma* Π *ou seja*

$$\begin{aligned}\big(\widetilde{\nabla}_X\Pi\big)(Y,Z,\eta) &:= X\cdot\big(\Pi(Y,Z,\eta)\big)-\Pi(\nabla_XY,Z,\eta)\\ &- \Pi(Y,\nabla_XZ,\eta)-\Pi(Y,Z,\nabla^{\nu}_X\eta)\end{aligned}$$

e X*,* Y*,* Z *são tangentes a* M *e* η *é normal a* M*.*

EXERCÍCIO 5.25. Suponha que $\widetilde{M}$ tem curvatura constante K igual a c e M é uma hipersuperfície. Verifique que

$$\nabla_X\mathcal{S}_\eta(Y)-\nabla_Y\mathcal{S}_\eta(X)=\mathcal{S}_\eta[X,Y]$$

Observação 5.26. Uma hipersuperfície M^m em um espaço simplesmente conexo $\widetilde{M}^{m+1}$ com curvatura constante c (os assim chamados *espaços formas*) é chamada *isoparamétrica* se suas curvaturas principais são constantes. Tais hipersuperficies começaram a ser estudadas por Cartan e até hoje em dia são exemplos relevantes. Por exemplo em $\mathbb{R}^3$ superfícies isoparamétricas são cilindros de raio r (que tem curvaturas principais $\lambda_1=r$ e $\lambda_2=0$), esferas de raio r (onde $\lambda_1=\lambda_2=r$) e planos. De fato no espaços Euclidianos e hiperbólicos os unicos exemplos são hipersuperfícies totalmente geodésicas ou cilindros que tenham como eixo subvariedades totalmente geodésicas. Porém nas esferas $\mathbb{S}^{m+1}$ existem infinitos exemplos de de hipersuperfícies isoparamétricas não homogêneos.

EXERCÍCIO 5.27. Seja M^m em $\mathbb{S}^{m+1}$ uma hipersuperfície isoparamétrica. Aceitando que a multiplicidade das curvaturas principais λ_i é constante, i.e, para cada ponto p existe uma distribuição de curvatura E_i (i.,e auto-espaço de $\mathcal{S}_\eta$ associado a λ_i), verifique que tais distribuições são integráveis, ou seja E_i coincidem com espaços tangentes das folhas de folheações $\mathcal{F}_i$ em M (as assim chamadas folheações de curvatura) em M.

Vemos a seguir a última equação fundamental.

PROPOSIÇÃO 5.28 (Eq. de Ricci).

$$\mathrm{g}\big(\widetilde{R}(X,Y)\eta,\xi\big)-\mathrm{g}\big(R^{\nu}(X,Y)\eta,\xi\big)=\mathrm{g}\big([\mathcal{S}_\eta,\mathcal{S}_\eta]X,Y\big)$$

onde η *e* ξ *são vetores normais a* M *e* X *e* Y *tangentes a* M*.*

EXERCÍCIO 5.29. Suponha que $\widetilde{M}$ tem curvatura constante K igual a c. Verifique que as afirmações abaixo são equivalentes:

(a) $R^\nu = 0$ (a conexão normal é flat),
(b) $[\mathcal{S}_\eta, \mathcal{S}_\xi] = 0$ para qualquer η, ξ normal a M,
(c) existe uma base ortonormal que diagonaliza todos os $\mathcal{S}_\eta$.

Observação 5.30. Exemplos de subvariedades com conexão normal flat são órbitas principais da ação $\mathrm{Ad} : G \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ (ação Adjunta) de um grupo de Lie G na sua algebra de Lie $\mathfrak{g}$, quando G admite métrica bi-invariante. Por exemplo considere $G = SU(3)$. Neste caso a algebra de Lie é $\mathrm{su}(3) = \{X, X + X^* = 0, \mathrm{tr}X = 0\}$, uma métrica bi-invariante é $\mathrm{g}(X, Y) = \mathrm{tr}\mathrm{Re}X, Y^*$ e a ação $\mathrm{Ad} : G \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é $\mathrm{Ad}(g)(X) = gXg^{-1}$. Defina $\mathfrak{t}$ o subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$ das matrizes diagonais com traço zero. Seja $Z \in \mathfrak{t}$ a matriz com elementos da diagonal diferentes entre si. Então $G(Z) = SU(3)/T^2$ (onde T^2 é o subgrupo de $SU(3)$ das matrizes diagonais) é uma orbita principal com fibrado normal flat. Além disto tal órbita intersecta $\mathfrak{t}$ ortogonalmente e o espaço normal em qualquer ponto $p = gZg^{-1} \in G(Z)$ é $\mathrm{Ad}(g)(\mathfrak{t})$ (vide maiores detalhes em Alexandrino e Bettiol-*Lie groups and Geometric aspects of isometric actions*).

As equações de Gauss, Codazzi e Ricci parecem ter naturezas bem diferentes. Porém veremos a seguir que elas fazem parte da equação de Curvatura. Para entender este fato precisamos fazer algumas observações sobre formas de conexão. Seja $\{e_A\}$ um referencial adaptado a M (i.,e a uma vizinhança de $p \in M$). Então $\widetilde{\nabla}_{(\cdot)} e_A = \sum_A \tilde{\omega}_{A,B}(\cdot) \otimes e_B$. Como $\nabla_{(\cdot)} e_i = \sum_i \omega_{i,j}(\cdot) \otimes e_j$ concluimos que $\tilde{\omega}_{i,j} = \omega_{i,j}$ (para $1 \leq i, j \leq m$). Porém note que a matriz $\tilde{\omega}$ não é a matriz ω pois $\tilde{\omega}$ tem mais linhas e colunas. Note também que $\mathcal{S}_{e_\alpha}(\cdot) = -\pi \widetilde{\nabla}_{(\cdot)} e_\alpha = \sum_i \tilde{\omega}_{i,\alpha}(\cdot) \otimes e_i$ (onde $\pi : TM \to M$ é a projeção ortogonal) e assim que $\Pi_{e_\alpha} = \sum_i \tilde{\omega}_{i,\alpha} \otimes \tilde{\theta}_i$. Posto estas observações estamos prontos para rever as equações fudamentais agora usando a linguagem de formas.

Proposição 5.31. *Seja M subvariedade Riemanniana de uma variedade Riemanniana $\widetilde{M}$. Seja $\{e_A\}$ um referencial adaptado a M e denote $\tilde{\omega}_{A,B}$ as 1-formas de conexão e $\widetilde{\Omega}_{i,j}$ as 2-formas de curvatura de $\widetilde{M}$ associadas a $\{e_A\}$. Então*

(a) $d\tilde{\omega}_{i,j} = \sum_k \tilde{\omega}_{i,k} \wedge \tilde{\omega}_{k,j} + \sum_\alpha \tilde{\omega}_{i,\alpha} \wedge \tilde{\omega}_{\alpha,j} - \widetilde{\Omega}_{i,j}$ *é a equação de Gauss escrita no referêncial adaptado.*
(b) $d\tilde{\omega}_{i,\alpha} = \sum_k \tilde{\omega}_{i,k} \wedge \tilde{\omega}_{k,\alpha} + \sum_\beta \tilde{\omega}_{i,\beta} \wedge \tilde{\omega}_{\beta,\alpha} - \widetilde{\Omega}_{i,\alpha}$ *é a equação de Codazzi escrita no referêncial adaptado.*
(c) $d\tilde{\omega}_{\alpha,\beta} = \sum_i \tilde{\omega}_{\alpha,i} \wedge \tilde{\omega}_{i,\beta} + \sum_\gamma \tilde{\omega}_{\alpha,\gamma} \wedge \tilde{\omega}_{\gamma,\beta} - \widetilde{\Omega}_{\alpha,\beta}$ *é a equação de Ricci escrita no referêncial adaptado.*

Concluimos então que as equações de Gauss, Codazzi e Ricci são partes da equação de curvatura:

$$d\tilde{\omega} = \tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega} - \widetilde{\Omega}.$$

5.4. Teorema fundamental das imersões isométricas

TEOREMA 5.32. *Seja $W = M^m \times \mathbb{R}^k$ um fibrado vetorial trivial.* ***Suponha que:***

- **M** *admite uma* ***primeira forma****, ou seja* g*, admita um referencial ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^m$ com suas formas duais $\{\theta_i\}_{i=1}^m$ e sejam $\{\omega_{i,j}\}$ as formas de conexão Riemanniana;*
- ***o fibrado vetorial*** *W admite uma métrica g^W e uma conexão afim ∇^W compatível com g^W e considere $\{e_\alpha\}_{\alpha=m+1}^{m+k}$ ortonormal de g^W e as formas de conexão $\{\omega_{\alpha,\beta}\}$ das formas da conexão ∇^W;*
- *existem formas $\{\omega_{\mathbf{i},\alpha}\}$ ($\mathbf{i} = 1\cdots m$, $\alpha = m+1,\cdots m+k$) que são candidatos a* ***segunda forma****, i.e., ao definir o $(1,2)$ tensor A como $A(e_\alpha) = \sum_{i=1}^m \omega_{\mathbf{i},\alpha} \otimes \omega_i$ ele se torna (por hipótese) simétrico. Vamos definir $\omega_{\alpha,\mathbf{i}} = -\omega_{\mathbf{i},\alpha}$;*
- *$\tilde{\omega} = (\omega_{A,B})$ ($1 \leq A, B \leq m+k$) atende eq. de* ***Gauss, Codazzi e Ricci*** *em $\mathbb{R}^{m+k}$ ou seja $d\omega = \omega \wedge \omega$.*

Temos então que *dado $p_0 \in M$ e $q_0 \in \mathbb{R}^{m+k}$ e uma base ortonormal $V_1, \cdots, V_{m+k}$ de $\mathbb{R}^{m+k}$ (com métrica canônica) existe uma vizinhança U de p_0 tal que*

(a) *Existe uma única imersão isométrica $\psi : (U, p_0) \to \mathbb{R}^{m+k}$, com $\psi(p_0) = q_0$ tal que $d\psi_{p_0} e_i = v_i$ ($i = 1, \cdots m$).*

(b) *Existe um isomorfismo de fibrado vetorial $H : W \to \nu(\psi(U))$ com*

  (b.1) $H(e_\alpha) = v_\alpha$

  (b.2) $\Pi_{H(\xi)}(d\psi(X), d\psi(Y)) = A(\xi)(X,Y)$

  (b.3) $H\big(\nabla^W_X \xi\big) = \nabla^\nu_{d\psi(X)} H(\xi)$

Demonstração. Visto que $d\omega = \omega \wedge \omega$, temos pelo Teorema 3.48 que existe um única aplicação $\varphi : U \to O(m+k)$ tal que

$$\mathrm{d}\varphi = \omega\varphi\ ,\ \ \varphi(p) = [v] \tag{5.4.1}$$

Onde $[v]$ é a matriz com linhas v_A. Definindo V_A como as linhas de φ, podemos concluir que a equação (5.4.1) equivale a equação

$$\mathrm{d}V_A = \sum_B \omega_{A,B} \otimes V_B\ ,\ \ \ V_A(p_0) = v_A \tag{5.4.2}$$

Para provar o item (a) basta encontrar uma aplicação $\psi : U \to \mathbb{R}^{m+k}$ (diminuindo U se necessário) tal que:

$$\mathrm{d}\psi = \sum_{i=1}^m \theta_i \otimes V_i \tag{5.4.3}$$

De fato, se uma aplicação ψ satisfaz a equação acima, então $\mathrm{d}\psi(e_i) = V_i$ o que implica não só que ela é uma imersão, mas também que leva referencial ortonormal $\{e_i\}$ (com a métrica g) no referencial ortonomal $\{v_i\}$ (com a métrica do espaço Euclidiano) ou seja ψ se torna uma imersão isométrica e assim a demonstração do item (a) terá terminado.

Note que $\eta := \sum_{i=1}^{m} \theta_i \otimes V_i$ é uma 1-forma com valores em $\mathbb{R}^{m+k}$. Assim pelo lema de Poincaré, para uma vizinhaça pequena de p_0 se $d\eta = 0$ então existe uma aplicação ψ tal que $d\psi = \eta$. Assim sendo para demonstrar a eq.(5.4.3) basta provar a equação abaixo:

$$\mathrm{d}\Big(\sum_{i=1}^{m} \theta_i \otimes V_i\Big) = 0 \tag{5.4.4}$$

Afim de provar a eq. (5.4.4) defina $h_{i,\alpha,j}$ como $\omega_{i,\alpha} = \sum_j h_{i,\alpha,j}\theta_j$. Visto que $A(e_\alpha)$ é simétrica temos $h_{i,\alpha,j} = \omega_{i,\alpha}(e_j) = \omega_{j,\alpha}(e_i) = h_{j,\alpha,i}$. Assim concluimos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\sum_{i=1}^{m}\theta_i V_i &= \sum_i \Big(\mathrm{d}\theta_i \otimes V_i - \theta_i \wedge \sum_A \omega_{i,A} \otimes V_A\Big) \\
&= \sum_i \mathrm{d}\theta_i \otimes V_i - \sum_{i,j} \theta_i \wedge \omega_{i,j} \otimes V_j \\
&+ \sum_{i,\alpha} \theta_i \wedge \omega_{i,\alpha} \otimes V_\alpha \\
&= \sum_j \Big(\mathrm{d}\theta_j - \sum_i \theta_i \wedge \omega_{i,j}\Big) \otimes V_j \\
&- \sum_{i,j,\alpha} h_{i,\alpha,j}\theta_i \wedge \theta_j \otimes V_\alpha \\
&= 0
\end{aligned}$$

Os 2 termos da penultima equação se anulam devido a equação estrutural (vide Proposição 3.34) e devido ao fato de $h_{i,\alpha,j} = h_{j,\alpha,i}$. Isto termina a demonstração da eq. (5.4.4) e assim a demonstração da eq.(5.4.3) e consequentemente o item (a).

Afim de provar o item (b) basta definir $H : W \to \nu\big(\psi(U)\big)$ como $H(e_\alpha) = V_\alpha$. O item (b) pode então ser verificado usando a eq. (5.4.2).

Por fim para garantir a unicidade da imersão ψ (a menos da redução da vizinhança de p_0) basta observar que se uma imersão atende item (a) e item (b) então eq. (5.4.2) tem que ser atendida. Visto que eq.(5.4.2) equivale a eq. (5.4.1) a unicidade da aplicação ψ segue da unicidade de (5.4.1).

□

CAPíTULO 6

Teoremas de Hopf Rinow e Hadamard

Neste capítulo discutimos condições para que $\exp_p : T_pM \to M$ esteja bem definida e condições para que tal aplicação seja um difeomorsimo e/ou um recobrimento.

6.1. Teorema de Hopf Rinow

Como discutido anteriormente, uma variedade Riemanniana (M, g) se torna um espaço métrico se consideramos a função distancia induzia por g. Claramente M é um espaço métrico completo (i.e., toda sequencia de Cauchy converge) quando M é variedade compacta. O próximo exercício indica outra classe de exemplos de variedades completas como espaços métricos (que incluiem em particular os espaços hiperbólicos e Euclidianos).

EXERCÍCIO 6.1. Seja M uma variedade Riemanniana homogênea, i.e., dado x e y em M existe uma isometria g tal que $g(x) = y$. Mostre que M é um espaço métrico completo.

Como vimos no item (a) do Teorema 4.22 se M é compacta, ela é *geodesicamente completa* ou seja a aplicação $\exp_p : T_pM \to M$ é bem definida, para todo $p \in M$.

O teorema de Hopf Rinow enunciado e demonstrado a seguir garante que os 2 conceitos de completude são equivalentes. Assim sendo chamaremos M de *variedade completa* se um dos conceitos (geodesicamente completa ou completa como espaço métrico) for atendido. O teorema também garantirá que 2 pontos em uma variedade completa sempre serão ligados por uma geodésica minimizante, generalizando assim o item (b) do Teorema 4.22.

TEOREMA 6.2. *Seja M variedade Riemanniana.*

(a) *As condições abaixo são equivalentes:*
  (a1) *Existe um ponto $p \in M$ tal que $\exp_p : T_pM \to M$ está bem definida;*
  (a2) *os fechados limitados de M são compactos,*
  (a3) *M é completa como espaço métrico;*
  (a4) *M é geodésicamente completa;*
(b) *Suponha que uma das condições acima seja satisfeita. Então dado $p, q \in M$ existe uma geodésica γ minimizante ligando p a q, i.e., $L(\gamma) = d(p, q)$*

Demonstração. $(a1) \Rightarrow (b)$: Vamos primeiro provar que $(a1)$ implica (b) ou seja que se existe um $p \in M$ onde a aplicação $\exp_p : T_pM \to M$ está bem definida então dado qualquer $q \in M$ existe uma geodésica parametrizada por comprimento de arco $\gamma : [0, R] \to M$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(R) = q$ onde $R = d(p, q)$. Este será o coração da prova do teorema de Hopf Rinow.

Seja $B_\delta(p)$ uma bola normal. Como a função $x \to d(x, q)$ restrita $\partial B_\delta(p)$ é continua, ela admite um mínimo $x_0 \in \partial B_\delta(p)$. Seja $v \in T_p^1 M$ tal que $\exp_p(\delta v) = x_0$ e defina $t \to \gamma(t) = \exp_p(tv)$. Nosso objetivo é mostrar que $\gamma(R) = q$. Definamos o conjunto $\mathcal{A} \subset [\delta, R]$ como:

$$\mathcal{A} = \{s \in [\delta, R], \text{tal que} \, \forall t \in [\delta, s] \; d(\gamma(t), q) = R - t\} \tag{6.1.1}$$

Note que:

- $\mathcal{A} \neq \emptyset$, pois $\delta \in \mathcal{A}$ (vide argumento da eq. (6.1.2) abaixo);
- $\sup \mathcal{A} \in \mathcal{A}$ pois a função distancia é continua.

Devemos monstrar que $\sup \mathcal{A} = R$ e para tanto basta mostrar que se $\tilde{s} \in \mathcal{A}$ então existe $\tilde{\delta}$ tal que $\tilde{s} + \tilde{\delta} \in \mathcal{A}$.

Afirmação 1: Seja $\tilde{\delta}$ tal que $B_{\tilde{\delta}}(\gamma(\tilde{s}))$ é bolar normal e $\tilde{x} \in \partial B_{\tilde{\delta}}(\gamma(\tilde{s}))$ tal que $d(\tilde{x}, q) = \inf d(x, q)|_{x \in \partial B_{\tilde{\delta}}(\gamma(\tilde{s}))}$. Então $\tilde{x} = \gamma(\tilde{s} + \tilde{\delta})$.

Como veremos abaixo a ideia da prova da afirmação 1 será provar que se β é a geodésica ligando $\gamma(\tilde{s})$ a $\tilde{x}$, então a curva concatenada $\beta * \gamma|_{[0,\tilde{s}]}$ minimizará a distancia $d(p, \tilde{x})$ o que implicará que ela de fato e uma geodesica (em particular não quebrada). Vamos agora aos detalhes da prova da afirmação 1.

Observe primeiro que:

$$d(\gamma(\tilde{s}), q) = \tilde{\delta} + d(\tilde{x}, q). \tag{6.1.2}$$

De fato se $\alpha : [0, 1] \to M$ é uma curva com $\alpha(0) = \gamma(\tilde{s})$, $\alpha(1) = q$ e $\alpha(1/2) \in \partial B_{\tilde{\delta}}(\gamma(\tilde{s}))$ temos que $L(\alpha) \geq \tilde{\delta} + d(\tilde{x}, q)$ o que implica (tomando o infimum sobre as curvas α) que $d(\gamma(\tilde{s}), q) \geq \tilde{\delta} + d(\tilde{x}, q)$. Por outro lado pela desigualdade triangular $d(\gamma(\tilde{s}, q) \leq \tilde{\delta} + d(\tilde{x}, q)$ e assim conluimos eq. (6.1.2).

Da definição do conjunto $\mathcal{A}$, recorde eq. (6.1.1), temos

$$d(\gamma(\tilde{s}), q) = R - \tilde{s} \tag{6.1.3}$$

Assim pela desigualdade triangular, e equações (6.1.2) e (6.1.3) temos

$$\begin{aligned} d(p, \tilde{x}) &\geq d(p, q) - d(\tilde{x}, q) \\ &\geq R - (R - \tilde{s} - \tilde{\delta}) \\ &= \tilde{s} + \tilde{\delta} \end{aligned}$$

Da equação acima concluimos que $d(p, \tilde{x}) \geq \tilde{s} + \tilde{\delta}$. Por outro lado a curva concatenada $\beta * \gamma|_{[0,\tilde{s}]}$ tem comprimento $\tilde{s} + \tilde{\delta}$. Assim concluimos pela Proposição 4.20 que a curva concatenada $\beta * \gamma|_{[0,\tilde{s}]}$ é uma geodésica e em particular que $\tilde{x} = \gamma(\tilde{s} + \tilde{\delta})$, terminando a prova da Afirmação 1.

Por fim para demonstrar que $\tilde{s} + \tilde{\delta} \in \mathcal{A}$, e assim terminar a demonstração do $(a1) \Rightarrow (b)$, basta aplicar eq. (6.1.2) e (6.1.3) concluindo que:

$$\begin{aligned} d\big(\gamma(\tilde{s} + \tilde{\delta}), q\big) &= d(\tilde{x}, q) \\ &= d(\gamma(\tilde{s}), q) - \tilde{\delta} \\ &= R - \tilde{s} - \tilde{\delta} \\ &= R - (\tilde{s} + \tilde{\delta}) \end{aligned}$$

$(a1) \Rightarrow (a2)$: Seja $K \subset M$ um conjunto fechado e limitado. Então existe um R tal que $K \subset B_R(p)$. Por outro lado como (a1) implica (b) sabemos que $B_R(p) \subset \exp_p(B_R(0))$. Logo $K \subset \exp_p(B_R(0))$, ou seja temos um conjunto fechado limitado contido em um compacto, logo K é compacto.

$(a2) \Rightarrow (a3)$: Seja $\{x_m\}$ uma sequencia de Cauchy. Então dado R existe um N_0 tal que para todo $m > N_0$ temos $x_m \in \overline{B_R(x_{N_0})}$, ou seja a sequencia $\{x_m\}_{m>N_0}$ fica contida (pelo item (a2)) em um compacto, assim possuiu uma subsequencia convergente. Uma sequencia de Cauchy que admite subsequencia convergente, também converge. Assim provamos que M é um espaço métrico completo.

$(a3) \Rightarrow (a4)$: Seja $\gamma : [0, a) \to M$ segmento de geodésica parametrizada por comprimento de arco. Desejamos mostrar que α pode ser extendida para $[0, a + \tilde{\delta})$, para algum $\tilde{\delta}$. Considere uma sequencia $\{s_n\}$ tal que $s_n \to a$. Temos então

$$\begin{aligned} \epsilon > |s_n - s_m| &= \int_{s_m}^{s_n} \|\alpha'(t)\| dt \\ &\geq d(\gamma(s_n), \gamma(s_m)) \end{aligned}$$

Assim $\{\gamma(s_m)\}$ é uma sequencia de Cauchy e como M é completo, ela tem que convergir para um ponto $p \in M$. Seja $B_\delta(p)$ uma bola normal convexa, e escolha N_0 tal que se $m > N_0$ então $\gamma(s_m) \in B_{\delta/3}(p)$ e $a - s_m < \delta/3$. Concluimos pelo teorema da vizinhança convexa (Teorema 4.17) que o segmento de geodésica pode ser extendido para $[0, a + \delta/3)$ e que que fato $\gamma(a) = p$.

$(a4) \Rightarrow (a1)$ claramente e isto termina a demonstração do teorema. □

6.2. Teorema de Hadamard

Teorema 6.3. *Seja M variedade Riemanniana completa com curvatura $K \leq 0$. Então $\exp_p : T_pM \to M$ é um recobrimento. Em* *particular se M for simplesmente conexa então* $\exp_p : T_pM \to M$ *se torna um difeomorfismo.*

Afim de demonstrar este resultado precisamos dos 2 lemas abaixo, sendo que o primeiro lema é um lema mais geral, que não utiliza condição sobre curvatura.

LEMA 6.4. *Seja $F : \widetilde{M} \to M$ uma isometria local. Suponha que $\widetilde{M}$ é completa. Então F é um recobrimento isométrico.*

Demonstração. Seja $p_\alpha \in \mathcal{F}^{-1}(p)$. Observe que como F é uma isometria local então leva geodésica em geodésica. Mais precisamente

$$F(\exp_{p_\alpha}(tv)) = exp_p(tdF_{p_\alpha}v), \forall t. \tag{6.2.1}$$

A equação acima e o item (a) do Teorema 6.2 implicam que M é variedade completa. O item (b) do Teorema 6.2 e a Eq. (6.2.1) implicam que F é sobrejetora.

Seja δ tal que $B_\delta(p)$ é vizinhança normal convexa.

Afirmação 1: $F : B_\delta(p_\alpha) \to B_\delta(p)$ é uma isometria.

Vamos provar a afirmação 1 acima. Primeio observe que dado $\tilde{x} \in B_\delta(p_\alpha)$ existe pelo menos um segmento de geodésica $\tilde{\gamma} : [0,1] \to M$ de comprimento menor do que δ tal que $\tilde{\gamma}(0) = p_\alpha$ e $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{x}$ (visto que $\widetilde{M}$ é completa). Assim sendo pela eq. (6.2.1) concluimos que $F(\tilde{\gamma}(1)) \in B_\delta(p)$ e assim que $F\big(B_\delta(p_\alpha)\big) \subset B_\delta(p)$. Por outro lado dado um $x \in B_\delta(p)$ existe um único $v \in T_pM$ tal que $x = \exp_p(v)$. Defina v_α tal que $dF_{p_\alpha}v_\alpha = v$. Assim pela eq. (6.2.1) $F(\exp_{p_\alpha}(v_\alpha)) = \exp_p(v) = x$ concluindo que $F\big(B_\delta(p_\alpha)\big) \supset B_\delta(p)$. Temos assim que $F\big(B_\delta(p_\alpha)\big) = B_\delta(p)$. Vamos agora provar que $F : B_\delta(p_\alpha) \to B_\delta(p)$ é injetora. Vamos considerar 2 pontos $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in B_\delta(p_\alpha)$ e suponhas que $F(\tilde{x}_1) = F(\tilde{x}_2)$. Existe pelo menos 2 segmentos de geodésicas $\tilde{\gamma}_i$ ligando p_α a $\tilde{x}_i$ com comprimento menor a δ. Pela eq. (6.2.1) temos $F \circ \tilde{\gamma}_1$ e $F \circ \tilde{\gamma}_2$ são geodésicas (de comprimento menor que δ) ligando p a $F(\tilde{x}_1) = F(\tilde{x}_2)$. Como a vizinhança é normal temos que $F\circ\tilde{\gamma}_1 = F\circ\tilde{\gamma}_2$ o que implica que $\tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}_2$ e assim que $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$ concluindo assim que $F : B_\delta(p_\alpha) \to B_\delta(p)$ é injetora terminando a prova da Afirmação 1.

Afirmação 2: $B_\delta(p_\alpha) \cap B_\delta(p_\beta) = \emptyset$ se $\alpha \neq \beta$

Suponha que $\tilde{x} \in B_\delta(p_\alpha) \cap B_\delta(p_\beta)$. Seja $\tilde{\alpha}_i : [0,1] \to M$ segmento de geodésica com $\tilde{\alpha}_i = p_i$ e $\tilde{\alpha}_i(1) = \hat{x}$. Assim pela eq. (6.2.1) as geodésicas $F \circ \tilde{\alpha}_i$ são segmentos de geodésicas que ligam p a x em $B_\delta(p)$ e assim temos $F\circ\tilde{\alpha}_\alpha = F\circ\tilde{\alpha}_\beta$ o que contraria o fato de F ser um difeomorfismo local, terminando a afirmação 2. As afirmações 1 e 2 terminam a prova do lema.

□

LEMA 6.5. *Suponha que* M *seja variedade completa com* $K \leq 0$. *Então para qualquer* $p \in M$ *a aplicação* $\exp_p : T_pM \to M$ *é um difeomorfismo local.*

Demonstração. Dado $v \in T_pM$ desejamos demonstrar que $\exp_p$ é um difeomorfismo em uma vizinhança de v. Sejam $t \to \gamma(t) = \exp_p(tv)$ e a variação $f(s,t) = \exp_p(tv(s))$ onde $s \to v(s)$ é curva em T_pM com $v(0) = v$. Visto que $K \leq 0$ note que:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\big(\mathrm{g}(J(t), J(t)\big) &= 2\mathrm{g}(J'', J) + 2\mathrm{g}(J', J') \\ &= \mathrm{g}(-2R(\gamma', J)\gamma', J) + 2\mathrm{g}(J', J') \\ &\geq 2\mathrm{g}(J', J') \end{aligned}$$

Integrando a equação acima e utlizando o fato que $\frac{d}{dt}\mathrm{g}(J,J)(0) = 2\mathrm{g}(J'(0), J(0)) = 0$ (pois $J(0) = 0$) temos

$$\frac{d}{dt}\mathrm{g}(J,J)(t) \geq 2\int_0^t \mathrm{g}(J', J') > 0, \ \forall t > 0$$

Integrando a equação mais uma vez e utlizando o fato que $J(0) = 0$, concluimos que

$$\mathrm{g}(J,J)(t) > 0, \ \forall t > 0$$

o que implica, pela Proposição 4.37, que exp é um difeo local em vizinhança de v.

□

Prova do Teorema 6.3: Pelo Lema 6.5 temos que $\exp_p : T_pM \to M$ é um difeomorfismo local e pelo teorema de Hopf Rinow é uma aplicação sobrejetora. Defina a métrica $\tilde{\mathrm{g}} := (\exp_p)^*\mathrm{g}$ em T_pM. Com tal métrica $\exp_p : T_pM \to M$ se torna uma isometria local. Note também que as retas saindo do ponto $0 \in T_pM$ são geodésicas de $(T_pM, \tilde{\mathrm{g}})$ e assim, pelo Teorema de Hopf-Rinow $(T_pM, \tilde{\mathrm{g}})$ é variedade completa. Podemos então aplicar o Lema 6.4 para concluir que $\exp_p : (T_pM, \tilde{\mathrm{g}}) \to (M, \mathrm{g})$ é recobrimento isométrico. Em particular se M for simplesmente conexa $\exp_p : (T_pM, \tilde{\mathrm{g}}) \to (M, \mathrm{g})$ se torna uma isometria.

□

EXERCÍCIO 6.6. Seja M uma variedade Riemanniana simplesmente conexa, completa com $K \leq 0$. Mostre que dados $p, q \in M$ existe uma única geodésica ligando p a q.

CAPíTULO 7

Isometrias e curvatura

Seja $F : (\widetilde{M}, \tilde{\mathrm{g}}) \to (M, \mathrm{g})$ uma isometria local. Reduzindo δ temos que $F : B_\delta(p) \to B_\delta(q)$ é uma isometria, onde $B_\delta(p)$ e $B_\delta(q)$ são bolas normais de p e $q = F(p)$. Visto que isometria leva geodésica em geodésica temos que: $F \circ \exp_p|_{B_\delta(0)} = \exp_{F(p)} dF_p|_{B_\delta(0)}$ e assim concluimos que:

$$F|_{B_\delta(p)} = \exp_{F(p)} \circ dF_p \circ \left(\exp_p|_{B_\delta(0)}\right)^{-1}$$

A equação acima motiva então a seguinte pergunta.

Suponha que $A : T_p\widetilde{M} \to T_qM$ é uma isometria entre espaços tangentes e $B_\delta(p)$ e $B_\delta(q)$ são bolas normais. Quando a aplicação definida como

$$H = \exp_q \circ A \circ \left(\exp_p|_{B_\delta(0)}\right)^{-1} \qquad (7.0.1)$$

é uma isometria?

Como veremos neste capítulo, quando $\widetilde{M}$ e M são superfícies basta que H preserve curvatura seccional, vide Exercício 7.2. No caso geral a resposta é um pouco mais elaborada mas também dependerá dos tensores curvaturas, vide Teorema 7.1.

Uma vez abordado esta questão, iremos aproveitar a descrição da aplicação H e discutir o recobrimento Riemanniano de variedades de curvatura constante, generalizando a Proposição 4.34 Aproveitaremos também para discutir a classificação de superfícies compatas via curvatura, uma bela aplicação do teorema de Gauss Bonnet, vide Teorema 7.7.

7.1. Teorema de Cartan

TEOREMA 7.1. *Sejam $\widetilde{M}$ e M variedades Riemannianas de mesma dimensão e $A : T_p\widetilde{M} \to T_qM$ uma isometria entre espaços tangentes. Defina $H : B_\delta(p) \to M$ pela eq. (7.0.1) Seja $\widetilde{P}(\tilde{x}) : T_p\widetilde{M} \to T_{\tilde{x}}\widetilde{M}$ o transporte paralelo $\|_{\tilde{\gamma}}$ ao longo da única geodésica minimizante $\tilde{\gamma}$ que liga $p = \tilde{\gamma}(0)$ a $\tilde{\gamma}(r) = \tilde{x} \in B_\delta(p)$. Defina $\gamma = H(\tilde{\gamma})$ e seja $P(x)$ o transporte paralelo $\|_\gamma$ ao longo de γ até $\gamma(r) = H(\tilde{x})$. Por fim defina $\phi(\tilde{x}) : T_{\tilde{x}}\widetilde{M} \to T_{H(\tilde{x})}M$ como $\phi = P \circ A \circ \widetilde{P}^{-1}$. Suponha que*

$$\tilde{\mathrm{g}}(\widetilde{R}(X,Y)Z, W) = \mathrm{g}(R(\phi(X), \phi(Y))\phi(Z), \phi(W))$$

Então $H : B_\delta(p) \to M$ é uma isometria e $dH_p = A$.

Demonstração. Nosso objetivo é demonstrar que

$$\tilde{g}(V,V)_{\tilde{x}} = g(dH_{\tilde{x}}V, dH_{\tilde{x}}V) \tag{7.1.1}$$

para todo $\tilde{x} \in B_\delta(p)$ e $V \in T_{\tilde{x}}\widetilde{M}$.

Defina $\tilde{f}(s,t) = \exp_p(tv(s))$ tal que $\frac{\partial f}{\partial s}(0,r) = V_{\tilde{x}}$ e $f = H \circ \tilde{f}$ e observe que

$$f(s,t) = \exp_q(tA(v(s))) \tag{7.1.2}$$

Assim a eq. (7.1.1) equivale a

$$\tilde{g}\big(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial s}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial s}\big) = g\big(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s}\big) \tag{7.1.3}$$

Sejam $\{\tilde{e}_i\}$ uma base ortonormal de $T_p\widetilde{M}$, $t \to \tilde{e}_i(t)$ o transporte paralelo destes vetores ao longo de $\tilde{\gamma} = \tilde{f}(0,\cdot)$, $e_i = A\tilde{e}_i$ e $t \to e_i(t)$ o transporte paralelo de e_i ao longo de $\gamma = f(0,\cdot)$. Observe que

$$e_i(t) = \phi\tilde{e}_i(t) \tag{7.1.4}$$

Visto que $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial s}(0,t) = \sum_i \tilde{y}_i(t)\tilde{e}_i(t)$ é campo de Jacobi temos que

$$\tilde{y}_i''(t) + \sum_j \tilde{g}(\widetilde{R}(\tilde{\gamma}', \tilde{e}_j)\tilde{\gamma}', \tilde{e}_i)\tilde{y}_j(t) = 0$$

De forma análoga $\frac{\partial f}{\partial s}(0,t) = \sum_i y_i(t)e_i(t)$ é campo de Jacobi com

$$y_i''(t) + \sum_j g(R(\gamma', e_j)\gamma', e_i)y_j(t) = 0$$

A eq. 7.1.4 e a hipótese do teorema garantem que:

$$\tilde{g}(\widetilde{R}(\tilde{\gamma}', \tilde{e}_j)\tilde{\gamma}', \tilde{e}_i) = g(R(\gamma', e_j)\gamma', e_i)$$

Concluimos então que:

Afirmação 1: y_i e $\tilde{y}_i$ atendem a mesma E.D.O de segunda ordem.

Por outro lado

$$\tilde{y}_i(0) = y_i(0) = 0. \tag{7.1.5}$$

Eq. 7.1.2 garante que:

$$\begin{aligned}
\sum_i y_i'(0)e_i &= \frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}(0,0) \\
&= Av'(0) \\
&= \sum_i v_i'(0)A\tilde{e}_i \\
&= \sum_i v_i'(0)e_i(0) \\
&= \frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial s}(0,0) \\
&= \sum_i \tilde{y}_i'(0)\tilde{e}_i
\end{aligned}$$

e assim concluimos que:

$$y_i'(0) = v_i'(0) = \tilde{y}_i'(0). \tag{7.1.6}$$

A afirmação 1, eq. (7.1.5) e eq (7.1.6) implicam que $y_i(t) = \tilde{y}_i(t)$ o que implica a eq. (7.1.3) que conclui a demonstração.

□

EXERCÍCIO 7.2. Considere a aplicação H definida na Eq.(7.0.1) entre 2 superfícies M e $\widetilde{M}$. Verifique que H é uma isometria se $K\circ H = K$ onde K é curvatura sectional.

EXERCÍCIO 7.3. Suponha que M e $\widetilde{M}$ tem curvatura seccional constante igual a c. Verifique que a aplicação H definida na Eq.(7.0.1) é isometria.

7.2. Recobrimento isométrico e curvatura constante

LEMA 7.4. *Seja $F_i : \widetilde{M} \to M$ isometrias locais com $i = 1, 2$ entre uma variedade Riemanniana conexa $\widetilde{M}$ e uma variedade Riemanniana M. Suponha que existe um $p_0 \in \widetilde{M}$ tal que $F_1(p_0) = F_2(p_0)$ e tal que $d(F_1)_{p_0} = d(F_2)_{p_0}$. Então $F_1 = F_2$.*

Demonstração. Dado $p \in M$. Seja δ tal que $F_i|_{B_\delta(p)}$ é uma isometria. Suponha que $F_1(p) = F_2(p)$ e tal que $d(F_1)_p = d(F_2)_p$. Observemos que

$$F_1|_{B_\delta(p)} = F_2|_{B_\delta(p)}. \tag{7.2.1}$$

De fato, observe que $F_1(B_\delta(p)) = B_\delta(F(p)) = F_2(B_\delta(p))$ Podemos então definir $\varphi = \left(F_2|_{B_\delta(p)}\right)^{-1} \circ \left(F_1|_{B_\delta(p)}\right)$ e assim temos que $\varphi(p) = p$ e $d\varphi_p = Id$. Visto que φ é isometria concluimos

$$\begin{aligned}
\varphi &= \exp_{\varphi(p)} \circ d\varphi \circ (\exp_p |_{B_\delta(p)})^{-1} \\
&= \exp_{\varphi(p)} \circ \mathrm{Id} \circ (\exp_p |_{B_\delta(p)})^{-1} \\
&= \mathrm{Id}
\end{aligned}$$

o que implica a eq. (7.2.1).

Fixo p_0 para cada $x \in M$ seja α a curva com $\alpha(0) = p_0$ e $\alpha(1) = x$ e defina $A = \{t \in [0,1], F_1(\alpha(t)) = F_2(\alpha(t))\ dF_1(\alpha(t)) = dF_2(\alpha(t))\}$ Este conjunto é não vazio e fechado pela hipótese e eq. (7.2.1). Também a eq. (7.2.1) e conexidade garantem que $A = [0,1]$ e que F_1 e F_2 coincidem em uma vizinhança de x.

□

TEOREMA 7.5. *Seja M variedade Riemanniana completa com curvatura seccional constante c. Então M é recoberta isometricamente por $M(c)$ (espaço forma) onde:*

$$M(c) = \begin{cases} \mathbb{H}^m & se \quad c = -1, \\ \mathbb{R}^m & se \quad c = 0, \\ \mathbb{S}^m & se \quad c = 1. \end{cases}$$

Demonstração. Seja $\widetilde{M}$ o recobrimento universal Riemanniano de M ou seja $\pi : \widetilde{M} \to M$ é o recobrimento universal e dotamos $\widetilde{M}$ com a métrica π^*g.

Consideremos primeiro $c = 0, -1$. Defina $F : M(c) \to \widetilde{M}$ como $F(x) = \exp_{\tilde{p}} A \exp_p^{-1}$ onde $A : T_pM(c) \to T_{\tilde{p}}\widetilde{M}$ é isometria linear.

Como $M(c)$ e $\widetilde{M}$ são completas, temos pelo teorema de Hadamard (vide Teorema 6.3) que F é bem definida e é um difeomorfismo. Pelo Exercício 7.3 F é uma isometria.

Vamos agora supor que $c = 1$. Sejam $p, -p \in \mathbb{S}^m$. Defina $F : \mathbb{S}^m \setminus \{-p\} \to \widetilde{M}$ como $F(x) = \exp_{\tilde{p}} A \exp_p^{-1}$ onde $A : T_pM(c) \to T_{\tilde{p}}\widetilde{M}$ é isometria linear.

Considere agora $q \in \mathbb{S}^m$ tal que $q \neq p$ e $q \neq -p$. Vamos definir então $\widehat{F} : \mathbb{S}^m \setminus \{-q\} \to \widetilde{M}$ como $\widehat{F}(x) = \exp_{F(q)} \circ dF_q \circ \exp_q^{-1}$. Novamente pelo Exercício 7.3 $\widehat{F}$ é uma isometria local. Note que $\widehat{F}(q) = F(q)$ e que $d\widehat{F}_q = dF_q$. Assim pelo Lema 7.4 temos que $\widehat{F}|_W = F|_W$ onde $W = \mathbb{S}^m \setminus \{-p, -q\}$. Podemos então definir a isometria local $G : \mathbb{S}^m \to \widetilde{M}$ como

$$G(x) = \begin{cases} F(x) & se \quad x \in \mathbb{S}^m \setminus \{-p\}; \\ \widehat{F}(x) & se \quad x \in \mathbb{S}^m \setminus \{-q\} \end{cases}$$

Como G é isometria local e $\mathbb{S}^m$ é completo concluimos (e.,g usando Lemma 6.4) que G é um recobrimento isométrico e assim como $\widetilde{M}$ e simplesmente conexo concluimos que $M(c)$ e $\widetilde{M}$ são isométricos.

□

Observe que, como frequentemente fazemos, estamos acima supondo que M tem dimensão maior ou igual a 2.

Exercício 7.6. Seja M variedade Riemanniana completa com curvatura constante c. Verifique que M é isométrica a $M(c)/\pi_1(M)$ onde $\pi_1(M)$ é o grupo fundamental de M.

7.3. Classificação de superfície via curvatura

Teorema 7.7. *Seja M superfície compacta conecta, orientável sem bordo. Então:*

(a) *M admite métrica com $K=1$ se e somente se $g(M)=0$.*
(b) *M admite métrica com $K=0$ se e somente se $g(M)=1$.*
(c) *M admite métrica com $K=-1$ se e somente se $g(M)>1$.*

onde $g(M)$ é o genus de M.

Antes de dar uma ideia da prova deste teorema necessitamos recordar alguns fatos de topologia de superfícies compactas orientáveis bem como recordar o Teorema de Gauss-Bonnet.

Lema 7.8. *$\mathcal{X}(M)=2(1-g(M))$, onde $\mathcal{X}(M)$ é a característica de Euler, i.e., $\mathcal{X}(M)=v-e+f$ onde v, e e f são os vertices, lados e faces da triangularização de M.*

Lema 7.9. *Seja M superfície compacta orientável. Então*

(1) *M é difeomorfa a $\mathbb{S}^2$ se somente se $g(M)=0$.*
(2) *M é difeomorfa ao n-torus se e somente se $g(M)=n$*

Lema 7.10. *Toda superfície compacta orientável com genus $n\geq 1$. M pode ser realizada como quociente do polígono de $4n$ lados, onde*

(1) *onde todos os vértices são indentificados uns aos outros,*
(2) *os lados são identificados em pares.*

Lema 7.11 (Teorema de Gauss-Bonnet). *Seja M superfície compacta orientável, $R\subset M$ uma região regular (i.e., R é compacta, com bordo $\partial R=\cup_i C_i$ onde C_i são curvas simples, fechadas e regulares por partes que não se interseptam). Suponha que ∂R tem orientação induzida. Sejam k_g curvatura geodésica (i.e., $k(t)=\mathrm{g}(\frac{\nabla}{dt}\alpha'(t),e_2)$ onde e_2 é ortogonal a curva curva α e α',e_2 dão orientação de M). Por fim sejam θ_i os angulos externos de C_i. Temos então que*

$$\int_R KdA+\sum_{i=1}^{n}\int_{C_i}k_g dl+\sum_{i=1}^{p}\theta_i=2\pi\mathcal{X}(R)$$

Ideia da prova do Teorema 7.7. O teorema de Gauss Bonnet garante que $\int_M KdA=2\pi\mathcal{X}(M)$. Logo pelo Lemma 7.8 concluimos a direção $(\Rightarrow)$ da prova.

Vamos agora provar a direção $(\Leftarrow)$. Se $g(M)=0$ ou $g(M)=1$ temos pelo Lemma 7.9 que M é ou a esfera ou o torus, e assim consiguimos induzir as métricas da esfera (que tem curvatura 1) e do toru-flat (i.e, $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$) que tem curvatura zero.

Sobra então o caso onde $g(M) = n > 1$ ou seja um n-torus.

Seja $\mathbb{D}^2$ o modelo hiperbólico do disco Poincaré, recorde Exercício 2.11. Pelo Lemma 7.10 M é um quociente de um poligono P_r com $4n$ lados geodésicos em $\mathbb{D}^2$ com as devidas identificações e com vertices $r\exp(\frac{2\pi k \mathbf{i}}{4n})$ onde $k = 0, 1, \cdots 4n-1$. Seja Σ_r a soma dos angulos internos de P_r.

Afirmação: Existe r_0 tal que $\Sigma_{r_0} = 2\pi$

A prova da afirmação segue dos fatos listados abaixo:

(i) $\lim_{r\to 1} \Sigma_r = 0$; que pode ser provado via geometria hiperbólica.
(ii) $\lim_{r\to 0} \Sigma_r = (4n-2)\pi$; que pode ser provado usando Gauss-Bonnet para P_r visto como região Euclidiana,i.e, $K = 0$ e levando em conta que as geodesicas hiperbólicas tendem as geodésicas euclidianas quando $r \to 0$.
(iii) $r \to \Sigma_r$ é função continua; que pode ser demonstrado usando o fato que $-\int_{P_R} +4n - \Sigma_R = 2\pi$.
(iv) $(4n-2)\pi > 2\pi$ pois $n > 1$ ou seja um n torus.

Considere P_{r_0} no disco hiperbólico e $\Pi : P_{r_0} \to M$ a projeção canônica. Iremos construir aplicações $\psi_\alpha : U \subset \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ descontínuas tais que $\varphi_\alpha = \Pi \circ \psi_\alpha$ se tornarão as parametrizações de M. Além disto $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ serão isometrias locais de $\mathbb{D}^2$. Isto dará a estrutura hiperbólica para M e terminará a prova, vide Problema 7.12.

Vizinhança do vertice: Como vimos no Lemma 7.10 os vertices de P_{r_0} são identificados com um único ponto de M. Gostariamos de descrever uma vizinhança deste ponto em M. Tal vizinhança vem da projeção de $4n$ vizinhanças V_i desconexas dos vertices do polinômio P_{r_0} ou seja a vizinhança do ponto em M será $\cup_{i=1}^{4n} \Pi(V_i)$. Como $\Sigma_{r_0} = 2\pi$ conseguimos encontrar $4n$ conjuntos U_i tais que $U = \cup_{i=1}^{4n} U_i$ se torna uma vizinhança de $(0,0)$ no disco hiperbólico (onde a ordenação das vizinhanças U_i leva em consideração a identificação dos lados de P_{r_0}) e tal que $h_i(U_i) = V_i$, onde $h_i \in Iso(\mathbb{D}^2)$. A aplicação $\psi_0 : U \to \cup_i V_i$ (descontinua) é definida então como $\psi_0(x) = h_i(x)$ se $x \in U_i$.

Vizinhança dos lados: Como vimos no Lemma 7.10, os 2 lados em pares são identificados. Dado então 2 lados abertos (i.e, sem os vertices) que projetam para o mesmo segmento vamos considerar 2 vizinhanças V_1 e V_2 tal que $\Pi(V_1) \cup \Pi(V_2)$ é vizinhança em M. Por geometria hiperbólica consiguimos encontrar 2 vizinhanças U_1 e U_2 tal que $U = U_1 \cup U_2$ é vizinhança de $(0,0)$ tal que $h_i(U_i) = V_i$. Então a aplicação ψ_α é definida novamente como $\psi_\alpha(x) = h_i(x)$ se $x \in U_i$ Aqui temos 4 parametrizações deste tipo ou seja $\alpha = 1 \cdots 4$.

Vizinhança do centro: Por fim podemos definir uma vizinhança de $(0, 0) \in \mathbb{D}^2$ como um disco e nesta caso $\psi_5 = Id$.

$\square$

EXERCÍCIO 7.12. Seja M uma superfície e $\varphi_\alpha : U_\alpha \to M$ parametrizações de M tal que $M = \cup_\alpha \varphi_\alpha(U_\alpha)$ e tal que $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ é isometria local de $\mathbb{D}^2$. Conclua que M admite métrica g com curvatura $K = -1$.

CAPíTULO 8

Variação de energia de curvas

No capítulo 4 geodésicas foram introduzidas via derivada covariante e via projeção do fluxo geodésico em M. La provamos que geodésicas minimizam localmente caminho. Afim de discutir condições necessárias para uma geodésica ser minimizante (vide Corolário 8.12) e inferir as primeiras propriedades topológica em termos da curvatura limitada por baixo (vide Teorema 8.14), vamos considerar neste capítulo as geodésicas como pontos críticos do funcional energia, recorde Exercício 4.15.

Este é um capítulo introdutório para a vasta e rica teoria das variações de energia de curvas. Em outra parte das notas iremos retornar a esta fundamental abordagem da geometria Riemanniana.

8.1. Funcional Energia

DEFINIÇÃO 8.1. Seja $\alpha : [0, a] \to M$ uma curva suave por partes. Uma função $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \to M$ continua é chamada *variação* de α se

(a) $f(0, t) = \gamma(t), \forall t \in [0, a]$,
(b) existe uma partição $0 = t_0 < t_1 < \cdots t_{k+1} = a$ de $[0, a]$ tal que $f|_{(-\epsilon,\epsilon)\times[t_i,t_{i+1}]}$ é suave, i.e., se extende a uma função suave definida em um aberto de $(-\epsilon, \epsilon) \times [t_i, t_{i+1}]$.

Uma variação f de α é chamada *própria* se $f(s, 0) = \alpha(0)$ e $f(s, 0) = \alpha(a)$ para todo s. O vetor *velocidade da variação* f é $\frac{\partial f}{\partial s}$.

LEMA 8.2. *Seja V um campo suave por partes ao longo de uma curva suave por partes $\alpha : [0, a] \to M$. Então existe uma variação f de α com $V(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$. Além disto se $V(0) = 0 = V(a)$ a variação f pode ser escolhida como variação própria.*

Demonstração. No caso da variedade ser completa a variação pode ser definida como

$$f(s, t) = \exp_{\alpha(s)}(sV(t))$$

Caso M não seja completa, pode-se cobrir α por um numero finito de vizinhanças e com isto é possível reduzir ϵ se necessário. Deixamos aqui os detalhes para o leitor. □

DEFINIÇÃO 8.3. A energia de uma variação f de uma curva $\alpha : [0, a] \to M$ é definida como

$$E_f(s) = \int_0^a \|\frac{\partial f}{\partial t}(s,t)\|^2 dt$$

Observação 8.4. Utilizando a desigualdade de Schwarz ($\langle f, g\rangle \leq \|f\|\|g\|$) temos:

$$L(\alpha)^2 = \Big(\int_0^a \|\alpha'(t)\|dt\Big)^2 \leq \int_0^a 1dt \int_0^a \|\alpha'(t)\|^2 dt$$

Concluimos assim que

$$L^2(\alpha) \leq aE(\alpha)$$

e igualdade ocorre se e somente se $\|\alpha'(t)\|$ é constante.

PROPOSIÇÃO 8.5. *Sejam $p, q \in M$ e $\gamma : [0, a] \to M$ uma geodésica minimizante ligando p a q. Então para qualquer curva $\beta : [0, a] \to M$ ligando p e q temos $E(\gamma) \leq E(\beta)$ e vale a igualdade se e somente se β for geodésica minimizante.*

Demonstração. Como $\|\gamma'\|$ é constante, temos pela Observação 8.4 que

$$aE(\gamma) = L^2(\gamma) \leq L^2(\beta) \leq aE(\beta)$$

Se β é uma geodésica minimizante, temos por definição que a primeira desigualdade acima é uma igualdade. Visto que geodésicas tem velocidade constante, a Observação 8.4 garante que a segunda também é uma igualdade.

Agora suponha que $E(\gamma) = E(\beta)$ então temos pela expressão acima que $L^2(\gamma) = L^2(\beta)$. Tal fato e Proposição 4.20 garante que β é imagem de uma geodésica minizante. Como $L^2(\beta) = aE(\beta)$ concluimos da Observação 8.4 que β tem velocidade constante e assim é de fato uma geodésica. □

A recíproca é validada quando M é variedade completa.

EXERCÍCIO 8.6. Seja M variedade completa e $\alpha : [0, a] \to M$ curva suave com velocidade constante. Suponha que para qualquer curva $\beta : [0, a] \to M$ ligando p e q temos $E(\alpha) \leq E(\beta)$. Então α é uma geodésica minizante.

EXERCÍCIO 8.7 (Primeira variação de energia). Sejam $\alpha : [0, a] \to M$ curva suave por partes, $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \to M$ uma variação de α, $E_f(s)$ a energia da variação, e $V(t) := \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$. Então

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{ds}E_f(s) &= \sum_{i=0}^{k} \mathrm{g}\Big(\frac{\partial f}{\partial s}(s,t), \frac{\partial f}{\partial t}(s,t)\Big)\Big|_{t_i^+}^{t_{i+1}^-} \\ &- \sum_{i=0}^{k}\int_{t_i}^{t_{i+1}} g\Big(\frac{\partial f}{\partial s}(s,t), \frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}(s,t)\Big)dt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{ds}E_f(0) &= -\sum_{j=1}^{k} g(V(t_j), \alpha'(t_j^+) - \alpha'(t_j^-)) \\
&+ g(V(a), \alpha'(a)) - g(V(0), \alpha'(0)) \\
&- \sum_{i=0}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(V(t), \frac{\nabla}{dt}\alpha'(t))dt
\end{aligned}
$$

PROPOSIÇÃO 8.8. *Seja (M, g) variedade Riemanniana completa. Uma curva diferenciavel por partes $\alpha : [0, a] \to M$ é uma geodésica se e somente se para toda variação própria f de α temos $\frac{d}{ds}E_f(0) = 0$.*

Demonstração. Se α é geodésica então $\alpha'(t_j^-) = \alpha'(t_j^+)$ e $\frac{\nabla}{dt}\alpha' = 0$. Além disto se f é própria, então $V(0) = V(a) = 0$. Assim substituindo na equação do Exercício 8.7 temos que $\frac{d}{ds}E_f(0) = 0$.

Suponha agora que $\frac{d}{ds}E_f(0) = 0$ para qualquer variação própria f da curva α. Seja $h : [0, a] \to \mathbb{R}^+$ função suave por partes com $h(t_j) = 0$ para qualquer j e $h|(t_j, t_{j+1}) > 0$. Defina $V(t) = h(t)\frac{\nabla}{dt}\alpha'(t)$ e seja f uma variação com velocidade V (vide Lema 8.2). Temos então pelo Exercício 8.7 que:

$$
\sum_{i=0}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} hg(\frac{\nabla}{dt}\alpha'(t), \frac{\nabla}{dt}\alpha'(t)) = \frac{1}{2}E_f'(0) = 0
$$

o que implica que α é geodésica por partes. Considere agora um outro campo $\widetilde{V}$ tal que $\widetilde{V}(t_j) = \alpha'(t_j^+) - \alpha'(t_j^-)$ e $V(0) = 0 = V(a)$. Considere uma variação $\tilde{f}$ que tenha $\widetilde{V}$ como vetor velocidade. Usando o fato já demonstrado que α é geodésica por partes junto com Exercício 8.7 temos que:

$$
0 = E_{\tilde{f}}'(0) = -\sum_{i=1}^{k} \|\alpha'(t_j^+) - \alpha'(t_j^-)\|^2.
$$

Logo $\alpha'(t_j^+) = \alpha'(t_j^-)$. Como α é geodésica por partes, concluimos por E.D.O que α é geodésica.

□

EXERCÍCIO 8.9 (Segunda variação de energia). Sejam $\gamma : [0, a] \to M$ geodésica, $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \to M$ uma variação de γ, $E_f(s)$ a energia da variação, e $V(t) := \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$. Então

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}E_f(0) &= \mathrm{g}(\frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial s}(0,a),\gamma'(a)) - \mathrm{g}(\frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial s}(0,0),\gamma'(0)) \\ &+ \sum_{i=0}^{k}\mathrm{g}(V(t),\frac{\nabla}{dt}V(t))|_{t_i^+}^{t_{i+1}^-} \\ &- \sum_{i=0}^{k}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\mathrm{g}\big(\frac{\nabla^2}{dt^2}V(t)+R(\gamma'(t),V(t))\gamma'(t),\,V(t)\big)\,dt\end{aligned}$$

ou de forma equivalente

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}E_f(0) &= \mathrm{g}(\frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial s}(0,a),\gamma'(a)) - \mathrm{g}(\frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial s}(0,0),\gamma'(0)) \\ &+ I_a(V,V)\end{aligned}$$

onde I_a é a forma do índice, i.e.,

$$I_a(V,W) := \int_0^a \mathrm{g}(\frac{\nabla}{dt}V(t),\frac{\nabla}{dt}W(t)) - \mathrm{g}(R(\gamma'(t),V(t))\gamma'(t),W(t))\,dt$$

8.2. Teorema do Indice e geodésica minimizante

Seja $\gamma:[0,a]\to M$ geodésica. Defina $\nu(0,a)$ como o espaço vetorial formado pelos campos vetoriais diferenciaveis por parte ao longo de γ, perpendiculares a γ e tal que $V(0)=0=V(a)$.

A forma do Indice I_a definida no Exercício 8.9 restrita a $\nu(0,a)$ é bilinear e simétrica. Recorde que o *indice* da forma I_a restrita a $\nu(0,a)$ é a dimensão máxima de um subespaço de $\nu(0,a)$ tal que $\nu(0,a)$ é negativa definida. A *nulidade* de I_a é a dimensão máxima do subespaço W de $\nu(0,a)$ tal que se $w\in W$ temos $I_a(w,v)=0, \forall v\in\nu(0,a)$. O espaço W é chamado *espaço nulo*. Dizemos que I_a é degenerada se $W\neq\{0\}$.

O teorema a seguir, chamado de *Teorema de Indice de Morse*, relaciona o indice de I_a com os pontos conjugados ao longo de uma geodésica, recorde Seção 4.5. Em outra parte das notas iremos demonstra-lo (em um contexto um pouco mais geral). Aqui desejamos apenas enunciar uma de suas versões e obter uma aplicação simples porém interessante.

TEOREMA 8.10. *O indice de I_a é finito e é igual ao número de pontos $\gamma(t)$ com $0<t<a$ conjugados a $\gamma(0)$, cada um contando sua multiplicidade.*

COROLÁRIO 8.11. *Os pontos conjugados ao longo de uma geodésica são isolados.*

COROLÁRIO 8.12. *Se $\gamma:[0,a]\to M$ é geodésica minimizante, então $\gamma(t)$ não é conjugado a $\gamma(0)$ para $0<t<a$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que existe $\gamma(t_0)$ conjugado a $\gamma(0)$ tal que $0 < t_0 < a$. Sabemos então pelo Teorema 8.10 que existe um campo $V \in \nu(0,a)$ com

$$I_a(V,V) < 0. \tag{8.2.1}$$

Visto que $V(0) = 0 = V(a)$ podemos encontrar uma variação própria f que tal que $\frac{\partial f}{\partial s}(0,t) = V(t)$ recorde Lema 8.2. Assim pelo Exercício 8.9 temos

$$E_f''(0) = 2I_a(V,V). \tag{8.2.2}$$

Como γ é uma geodésica temos pelo Exercício 8.7 que

$$E_f'(0) = 0. \tag{8.2.3}$$

Eq. (8.2.1), (8.2.2), (8.2.3) implicam que existe um s pequeno tal que

$$E_f(s) < E_f(0). \tag{8.2.4}$$

A eq. (8.2.4), a hipótese de γ ser minimizante contrariam a Proposição 8.5 tomando $t \to \beta(t) = f(s,t)$.

□

Observação 8.13. Seja $\gamma : [0,a] \to M$ geodésica com $\|\gamma'\| = 1$. Seja $A = \{t \in [0,\infty), \text{tal que } d(\gamma(0),\gamma(t)) = t\}$ Se $t_0 = \sup A < \infty$ então $\gamma(t_0)$ é chamado *ponto mínimo* ao longo de γ. É possível então mostrar que se $\gamma(t_0)$ é ponto mínimo de $p = \gamma(0)$ (ao longo de γ) então:

(a) ou $\gamma(t_0)$ é o primeiro ponto conjugado de $\gamma(0)$ ao longo de γ;
(b) ou existe uma geodésica β com $\|\beta'\| = 1$, $\beta(0) = p$ e $\beta(t_0) = \gamma(t_0)$

O conjunto de todos os pontos mínimos de p (ao longo de todas geodésicas γ com $\gamma(0) = p$) é chamado *cut locus*. É sabido que se $Cut(p)$ é o cut locus de p então $M \setminus Cut(p)$ é homeomorfo a um aberto de T_pM.

8.3. Teorema de Bonnet Myers

Como vimos na Definição 3.28 o *tensor de Ricci* é definido como

$$Ric(X,Y)_p = \operatorname{tr} g(R(X,\cdot)Y,\cdot).$$

Como será abordado em outros pontos destas notas variedades com Ric limitado por baixo apresentam uma rica estrutura. O primeiro resultado nesta direção é o Teorema de Bonnet-Myers abordado abaixo.

Teorema 8.14. *Seja M variedade completa de dimensão m. Suponha que existe $r > 0$ tal que:*

$$Ric(X)_p := \frac{Ric(X,X)}{m-1} \geq \frac{1}{r^2} > 0$$

para todo $p \in M$ e para todo $X \in T_pM$ com $\|X\| = 1$. Então:

(a) *A variedade M é compacta com diâmetro menor ou igual a πr.*

(b) *O recobrimento universal de M é compacto e assim $\pi_1(M)$ é finito.*

Demonstração. (a) Sejam $p, q \in M$. Como M é completa, existe geodésica $\gamma : [0,1] \to M$ com $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$ tal que $d(p,q) = L(\gamma)$. Para demonstrar o item (a) bastará demonstrar que o comprimento $L(\gamma)$ é sempre menor ou igual a πr. De fato isto implicará que $M \subset \overline{B_{\pi r}(p)}$. Como M é completa isto implica que M é compacta (vide Teorema de Hopf Rinow, Teorema 6.2). Isto também implicará (pela definição de diâmetro) que $\mathrm{diam}(M) \leq \pi r$

Vamos então supor por absurdo que existe uma $\gamma : [0,1] \to M$ minimizante tal que $\pi r < l := L(\gamma)$. Sejam $t \to e_i(t)$ $(i = 1 \cdots m-1)$ uma base ortonormal paralela ao longo de γ e defina $e_n(t) := \frac{1}{l}\gamma'(t)$. Defina $V_j(t) = \sin(t\pi)e_j(t)$ com $1 \leq j \leq m-1$. Observe que $V_j(0) = 0 = V_j(1)$. Seja f_j uma variação propria com $\frac{\partial f_j}{\partial s}(0,t) = V_j(t)$, vide Lemma 8.2.

Substituindo V_j no Exercício 8.9, utilizando o fato de e_j ser paralelo e que f_j é suave e própria concluimos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}E''_{f_j}(0) &= -\sum_0^1 \mathrm{g}\big(V_j, \frac{\nabla^2}{dt}V + R(\gamma', V)\gamma'\big)dt \\
&= \int_0^1 \sin^2(t\pi)\pi^2 - l^2\sin^2(t\pi)\mathrm{g}(R(e_m, e_j)e_m, e_j)dt \\
&= \int_0^1 \sin^2(t\pi)\big(\pi^2 - l^2K(e_m, e_j)\big)dt
\end{aligned}$$

Assim

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} E''_{f_j}(0) = (m-1)\int_0^1 \sin^2(t\pi)\big(\pi^2 - l^2Ric(e_m)\big)dt. \tag{8.3.1}$$

Por hipótese $Ric(e_m) \geq \frac{1}{r^2} > 0$ e por suposição $l^2 \geq \pi^2 r^2$. Temos assim que $l^2Ric(e_m) > \pi^2r^2Ric(e_m) \geq \pi^2$ e assim

$$0 > \pi^2 - l^2Ric(e_m) \tag{8.3.2}$$

Substituindo eq. (8.3.2) na eq. (8.3.1) temos

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} E''_{f_j}(0) < 0$$

Assim existe um j_0 tal que

$$E''_{f_{j_0}}(0) < 0$$

Visto que $E'_{f_j}(0) = 0$ (vide Exercício 8.7) concluimos que existe s pequeno tal que $E_{f_j}(s) < E_{f_j}(0)$ o que contraria Proposição 8.5. Logo $\pi r \geq l := L(\gamma)$ concluindo a prova do item (a).

(b) Considere o recobrimento universal Riemanniano $\pi : (\widetilde{M}, \tilde{\mathrm{g}}) \to (M, \mathrm{g})$, i.e, π é o recobrimento universal e $\tilde{\mathrm{g}} := \pi^* \mathrm{g}$. Então temos também para $\widetilde{M}$ que $Ric(X) \geq \frac{1}{r^2} > 0$ e assim pelo item (a) concluimos que $\widetilde{M}$ é compacto o que implica que $\pi_1(M)$ é finito.

□

Observação 8.15. Não basta no enunciado do teorema que $Ric(X) > 0$ para que M seja compato, como indica o exemplo do paraboloide em $\mathbb{R}^3$, o qual não é compacto.

Observação 8.16. Quando M é a esfera de raio r então a estimativa é atingida. Mais ainda, como veremos posteriormente, seguirá do teorema de Cheng que se a estimativa inferior for atingida, i.e., se $Ric(X) = \frac{1}{r^2}$ então M será isométrica a esfera de raio r.

Exercício 8.17. Seja G um grupo de Lie que admite métrica bi-invariante e defina forma de Killing como:

$$\Phi(X, Y) := \mathrm{tr}\,\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y)$$

onde $\mathrm{ad}(X)Y := [X, Y]$. O grupo (algebra de Lie) é chamado semi-simples se Φ é não degenerada. É possível mostar que se $\mathfrak{g}$ é semi-simples e Φ é negativa definida então $-\Phi$ é metrica bi-invariante.

(a) Mostre que $\mathrm{Ric}(X, Y) = -\frac{1}{4}\Phi(X, Y)$ para $X, Y \in \mathfrak{g}$. Em particular conclua que Ric não depende da métrica bi-invariante.
(b) Suponha que G seja semi-simples e a forma de Killing seja negativa definida. Conclua que G é compacto.

Referências Bibliográficas

1. M. M. Alexandrino and R. G. Bettiol *Lie Groups and Geometric Aspects of Isometric Actions.* Springer Verlag (2015)
2. Bishop, R. Crittenden, *Geometry of Manifolds*, AMS, Chelsea.
3. M. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides.
4. S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Universitext, Springer.
5. J. Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Universitext, Springer.
6. W. Kuhnel, *Differential Geometry, Curves-surfaces-manifolds.* American Mathematical Society, Second Edition 2005.
7. R.S. Palais, C-L Terng, *Critical Point Theory and Submanifold Geometry*, Lectures Notes in Mathematics 1353, Springer Verlag.
8. P. Petersen, *Riemannian Geometry*, Graduate texts in mathematics, Springer.
9. Spivak, *A comprehensive Introduction to Differential Geometry,* V. 1 Publish or Perish,Inc. 1979.