2^0 **Lista de Exercício de MAT2110** (1^0 **semestre 2018)**

Turma: 2012102

1 Parte 1

1.1 VII- Integração

Problema 1.1. Esboce a região A limitada pelas curvas $y = -x^2 + 4x$ e $y = x^2$ e encontre a area de A.

Problema 1.2. Esboce a região limitada pela parabola $y^2 = 2x + 6$ e pela reta $y = x - 1$, decida se é melhor integrar em relação a x ou y e calcule a área da região.

Problema 1.3. O volume de um sólido de revolução obtido pela rotação ao redor do eixo y da região limitada por $y = 0$ e $y = f(x)$ (onde f é positiva e definida em intervalo $[a, b]$ com $a \geq 0$) é

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

(1) Esboce a região A limitada por $y = 2x^2 - x^3$ e $y = 0$ e ache o volume do sólido obtido pela rotação da região A em torno do eixo y.

(2) Esboce a região A limitada por $y = x$ e $y = x^2$ e ache o volume do sólido obtido pela rotação da região A em torno do eixo y.

Problema 1.4. A capacidade cardíaca do coração é o volume de sangue bombeado pelo coração na aorta por unidade de tempo. A capacidade cardiaca pode ser medida pelo método da diluição de contraste. É possivel mostrar que a capacidade cardiaca F pode ser dada por

$$F = \frac{A}{\int_0^T c(t)dt}$$

onde A mede a quantidade de contraste e $c(t)$ é a concentração de contraste no tempo t. Suponha que $A = 8mg$ e as concentrações de contrastes, em mg são modeladas por $c(t) = \frac{1}{4}t(12 - t)$ com $0 \leq t \leq 12$, onde t é medido em segundos. Calcule a capacidade cardíaca.

Problema 1.5. Calcule:

(1) $\int_0^1 x(x^2 + 1)^3 \, dx$

(2) $\int_0^{\pi/2} \sin^3(x) \cos(x) \, dx$

(3) $\int_0^3 x\sqrt{1 + x} \, dx$

(4) $\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}} \, dx$

Problema 1.6. Calcule

(1) $\int_1^2 t^2\sqrt{t^3 + 1} \, dx$

(2) $\int_0^1 \frac{(y^2+2y)}{\sqrt[3]{y^3+3y^2+4}} \, dx$

(3) $\int_0^{15} \frac{w}{(1+w)^{\frac{3}{4}}} \, dw$

(4) $\int_{-2}^5 |x - 3| \, dx$

(5) $\int_{-1}^1 \sqrt{|x| - x} \, dx$

(6) $\int_0^3 (x + 2)\sqrt{x + 1} \, dx$

(7) $\int_1^2 \frac{x^3+2x^2+x+2}{(x+1)^2} \, dx$

(8) $\int_0^1 \sin(\pi x) \cos(\pi x) \, dx$

(9) $\frac{d}{dx} \int_x^3 \sqrt{\sin(t)} \, dt$

(10) $\frac{d}{dx} \int_{-x}^x \frac{1}{3+t^2} \, dt$

(11) $\frac{d}{dx}\int_1^{x^3}\sqrt[3]{t^2+1}\,dt$

(12) $\frac{d}{dx}\int_2^{\tan(x)}\frac{1}{1+t^2}\,dt$

Problema 1.7. Utilizando o teorema do valor médio e o teorema fundamental do Cálculo I prove que se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é contínua então existe $c\in(a,b)$ tal que $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

Problema 1.8. Calcule:

(1) $\int x\exp(x)\,dx$

(2) $\int \ln(x)\,dx$

(3) $x^2\sin(x)\,dx$

(4) $\int \frac{2x}{(x+1)^2}\,dx$

(5) $\int \tan(x)\,dx$

(6) $\int \cos^2(x)\,dx$

(7) $\int \sin^2(x)\,dx$

(8) $\int \cos^3(x)\,dx$

(9) $\int \sin^3(x)\,dx$

Problema 1.9. Calcule:

(1) $\int \frac{x\exp(x)}{(1+x)^2}\,dx$

(2) $\int x^2\exp(x)\,dx$

(3) $\int t\ln(t)\,dt$

(4) $\int \exp(x)(x+1)^2\,dx$

(5) $\int \frac{x+1}{(x+1)^2+4}\, dx$

(6) $\int \exp(x) \cos(x)\, dx$

(7) $\int x^2 \exp(-x)\, dx$

(8) $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}\, dx$

Problema 1.10. Esboce a região limitada pelas curvas dadas. Decida quando integrar em relação a x ou a y e calcule a área da região.

(1) $y = x + 1$, $y = 9 - x^2$, $x = -1$, $x = 2$.

(2) $y = 12 - x^2$, $y = x^2 - 6$

(3) $x = 2y^2$, $x + y = 1$

(4) $x = 1 - y^2$ $x = y^2 - 1$

Problema 1.11. O átomo de hidrogênio é composto por um próton no núcleo e um elétron, que se move ao redor do núcleo. Na teoria quântica de estrutura atômica supõe-se que o elétron não se mova em uma órbita bem definida. Ao contrário, ele ocupa um estado conhecido como orbital, que pode ser pensado como uma "nuvem" de carga negativa rodeando o núcleo. No estado de energia mais baixa, chamado estado fundamental presume-se que o formato do orbital é uma esfera com núcleo. Essa esfera é descita em termos da função de densidade de probabilidade

$$f(r) = \frac{4}{a_0^3} r^2 \exp(-2r/a_0)$$

com $r \geq 0$ e onde a_0 é o raio de Bohr ($a_0 = 5,59 \times 10^{-11} m$). A integral

$$P(r) = \int_0^r f(s) ds$$

dá a probabilidade do elétron ser encontrado dentro da esfera de raio r centrada no núcleo.

(1) Calcule $\lim_{r\to\infty} f(r)$. Para que valor de r a função $f(r)$ tem seu valor máximo?

(2) Calcule a probabilidade do elétron estar dentro da esfera de raio $4a_0$ centrada no núcleo.

1.2 Respostas da Parte 1

Problema 1.1: $\frac{8}{3}$.

Problema 1.2: 18

Problema 1.3

(1) $\frac{16\pi}{5}$

(2) $\frac{\pi}{6}$

Obs: Problema 1.3 resolvido na Seção 6.3 do livro Stewart

Problema 1.4: $\frac{1}{9}L/s$

Problema 1.5

(1) $\frac{15}{8}$

(2) $\frac{1}{4}$

(3) $\frac{116}{15}$

(4) $\frac{16}{3}$

Problema 1.6

(1) $\frac{2}{9}(27-2\sqrt{2})$

(2) $2-\sqrt[3]{2}$

(3) $\frac{104}{5}$

(4) $\frac{29}{2}$

(5) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$

(6) $\frac{256}{15}$

(7) $\frac{11}{6}$

(8) 0

(9) $-\sqrt{\sin(x)}$

(10) $\frac{2}{3+x^2}$

(11) $3x^2\sqrt[3]{x^6+1}$

(12) 1

Problema 1.7: Defina $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Pelo teorema do valor médio existe c tal que

$$\begin{aligned} F'(c) &= \frac{F(b)-F(a)}{b-a} \\ &= \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \end{aligned}$$

Por outro lado, o teorema fundamental do Cáculo I implica que

$$F'(c) = f(c)$$

O resultado segue então das equações acima.

Problema 1.8

(1) $x\exp(x) - \exp(x) + C$

(2) $x\ln(x) - x + C$

(3) $-\cos(x)x^2 + 2x\sin(x) + 2\cos(x) + C$

(4) $2\ln|x+1| + \frac{2}{|x+1|} + C$

(5) $-\ln|\cos(x)| + C$

(6) $\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C$

(7) $\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$

(8) $\sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3} + C$

(9) $-\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{3} + C$

Problema 1.9:

(1) $\frac{exp(x)}{1+x} + C$

(2) $\exp(x)(x^2 - 2x + 2) + C$

(3) $\frac{1}{2}(t^2\ln(t) - \frac{1}{4}t^2 + C$

(4) $\exp(x)(x^2 + 1) + C$

(5) $\frac{1}{2}\ln((x+1)^2 + 4) + C$

(6) $\frac{1}{2}\exp(x)(\sin(x) + \cos(x)) + C$

(7) $-\exp(-x)(x^2 + 2x + 2) + C$

(8) $2(x+1)^{1/2}(\ln(x+1) - 2) + C$

Problema1.10

(1) $19,5$

(2) 72

(3) $9/8$

(4) $8/3$

Problema 1.11

(1) $0, a_0$

(2) $1 - 41\exp(-8)$

2 Parte 2

2.1 VIII Equações Diferenciais Ordinárias

Problema 2.1. Resolva as equações diferenciais abaixo.

(1) $y\,y' = x$

(2) $\frac{dy}{d\,t} = \frac{t\exp(t)}{y\sqrt{1+y^2}}$

Problema 2.2. Encontre a solução da equação diferencial que satisfaz a condição inicial dada:

$$x\exp(-t)\frac{d\,x}{d\,t} = t,\ x(0) = 1$$

Problema 2.3. Uma solução de glicose é administrada por via intravenosa na corrente sangüínea a uma taxa constante r. À medida que a glicose é adicionada ela é convertida em outras substâncias e romovida da corrente sangüínea a uma taxa que é proporcional à concentração naquele instante. Então um modelo para a concentração $C = C(t)$ da solução de glicose na corrente sangüínea é

$$\frac{d\,C}{d\,t} = r - kC$$

onde k é uma constante positiva.

(a) Suponha que a concentração no tempo $t = 0$ é C_0. Determine a concentração em um tempo qualquer t resolvendo a equação diferencial.

(b) Assumindo que $C_0 < r/k$, calcule $\lim_{t\to\infty} C(t)$ e interprete sua resposta.

Problema 2.4. Resolva a equação diferencial

(1) $y' + 2y = 2\exp(x)$

(2) $\frac{d\,y}{d\,x} + 2x\,y = x^2$

Problema 2.5. Resolva o problema de valor inicial.

(1) $\frac{dv}{dt} - 2t\,v = 3\,t^2 \exp(t^2), \;\; v(0) = 5$

(2) $x^2 \frac{dy}{dx} + 2x\,y = \cos(x) \;\;\; y(\pi) = 0$

Problema 2.6. Um tanque contém 100 l de água. Uma solução com uma concentração de sal de $0,4$ kg/l é adicionada a uma taxa de 5 l/min. A solução é mantida misturada e é retirada do tanque a uma taxa de 3 l/min. Determine a equação y que dá a quantidade de sal em um tempo de t minutos.

2.2 Respostas da Parte 2

Problema 2.1:

(1) $x^2 - y^2 = C$

(2) $y = \pm\sqrt{(3(t\exp(t) - \exp(t) + C))^{2/3} - 1}$

Problema 2.2:

$$x = \sqrt{2(t-1)\exp(t) + 3}$$

Problema 2.3:

(a) $C(t) = (C_0 - r/k)\exp(-k\,t) + r/k$

(b) r/k; a concentração tende a r/k independentemente do valor de C_0.

Problema 2.4

(1) $y = (2/3)\exp(x) + C\exp(-2x)$

(2) $y = (1/2)x + C\exp(-x^2) - (1/2)\exp(-x^2)\int \exp(x^2)dx$

Problema 2.5

(1) $v = t^3 \exp(t^2) + 5\exp(t^2)$

(2) $y = (\operatorname{sen}(x))/x^2$

Problema 2.6

$$y(t) = (2/5)(100 + 2t) - 40000(100 + 2t)^{-3/2}$$