MAT0147 - Cálculo Diferencial e Integral II-Noturno

Gabarito da 2^o Prova - 26/11/2018 - Provas A, B

A prova foi baseada na segunda lista de exercícios. Em particular compare:

- Questão 1 com Problema 2.4 (1) da Segunda Lista,
- Questão 2 com Problemas 3.1 da Segunda Lista
- Questão 3 com Problemas 4.4 da Segunda Lista,
- Questão 4 com Problemas 5.3 da Segunda Lista.

1 Prova A

Questão 1.1 (2,5 pt)**.** Seja $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 + 5x^2y + 7$.

(a) Determine os pontos críticos de f.

(b) Classifique os pontos críticos em pontos de sela, máximos ou mínimos locais.

Respostas:

(a) $(0,0)$, $(\frac{2\sqrt{3}}{5}, -\frac{2}{5})$, $(-\frac{2\sqrt{3}}{5}, -\frac{2}{5})$

(b) $(0,0)$ é minimo local, e $(\frac{2\sqrt{3}}{5}, -\frac{2}{5})$, $(-\frac{2\sqrt{3}}{5}, -\frac{2}{5})$ são pontos de sela.

Questão 1.2 (2,5 pt)**.** Seja $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 6y + 3$

(a) Determine o gradiente de f em um ponto (x,y).

(b) Determine os valores máximos e mínimos absolutos (e os respectivos pontos onde estes valores acontecem) da função f restrita ao disco $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 9\}$.

Respostas:

(a) $\nabla f(x,y) = (4x, 6y - 6)$

(b) 0 é valor mínimo e acontece em$(0,1)$. O valor máximo é 48 e acontece em $(0,-3)$.

Questão 1.3 (2,5pt)**.** Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (\sqrt{x^2 + y^2} - 4)^2 + z^2 = 1\}$.

(a) Esboce a curva $S \cap \{y = 0\}$

(b) Esboce a superfície regular S.

(c) Seja $p = \left(\frac{9\sqrt{3}}{4}, \frac{9}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Determine a equação do plano tangente à S no ponto p.

Respostas:

(a) dois circulos no plano x, z com centros em $(-4, 0)$ $(4, 0)$ e raio 1

(b) toro

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{9\sqrt{3}}{4}) + \frac{1}{2}(y - \frac{9}{4}) + \sqrt{3}(z - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$

Questão 1.4 (2,5 pt)**.** Seja $U(x, y, z) = x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{2}{4}} z^{\frac{1}{4}}$ a função utilidade onde x, y, z representam o número de unidades das mercadorias A, B, C consumidas mensalmente por uma pessoa. Sejam $R\$\, 2,00$, $R\$\, 5,00$ e $R\$\, 7,00$ os preços unitários de A, B, C respectivamente. Suponha que as despesas para mercadorias sejam $R\$\, 80,00$. Quantas unidades de cada mercadoria de cada tipo devem ser adquiridas para maximizar a utilidade?

Resposta $x = 10, y = 8, z = \frac{20}{7}$.

2 Prova B

Questão 2.1 (2,5 pt)**.** Seja $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 + 6x^2y + 5$.

(a) Determine os pontos críticos de f.

(b) Classifique os pontos críticos em pontos de sela, máximos ou mínimos locais.

Respostas:

(a) $(0, 0)$, $(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2})$,

(b) $(0, 0)$ é minimo local, e $(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2})$, são pontos de sela.

Questão 2.2 (2,5 pt)**.** Seja $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 2y + \frac{1}{2}$

(a) Determine o gradiente de f em um ponto (x, y).

(b) Determine os valores máximos e mínimos absolutos (e os respectivos pontos onde estes valores acontecem) da função f restrita ao disco $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Respostas:

(a) $\nabla f(x, y) = (6x, 4y - 2)$

(b) 0 é valor mínimo e acontece em $(0, \frac{1}{2})$ O valor máximo é $\frac{27}{2}$ e acontece em $(-\sqrt{3}, -1)$ e $(\sqrt{3}, -1)$.

Questão 2.3 (2,5pt)**.** Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 + z^2 = 1\}$.

(a) Esboce a curva $S \cap \{y = 0\}$

(b) Esboce a superfície regular S.

(c) Seja $p = \left(\frac{7\sqrt{3}}{4}, \frac{7}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Determine a equação do plano tangente à S no ponto p.

Respostas:

(a) dois circulos no plano x, z com centros em $(-3, 0)$ $(3, 0)$ e raio 1

(b) toro

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{7\sqrt{3}}{4}) + \frac{1}{2}(y - \frac{7}{4}) + \sqrt{3}(z - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$

Questão 2.4 (2,5 pt)**.** Seja $U(x, y, z) = x^{\frac{2}{4}} y^{\frac{1}{4}} z^{\frac{1}{4}}$ a função utilidade onde x, y, z representam o número de unidades das mercadorias A, B, C consumidas mensalmente por uma pessoa. Sejam $R\$3,00$, $R\$4,00$ e $R\$8,00$ os preços unitários de A, B, C respectivamente. Suponha que as despesas para mercadorias sejam $R\$60,00$. Quantas unidades de cada mercadoria de cada tipo devem ser adquiridas para maximizar a utilidade?

Resposta $x = 10, y = \frac{15}{4}, z = \frac{15}{8}$.