

MAT0147 - Cálculo Diferencial e Integral II-Noturno

Gabarito da 1^o Prova - 05/10/2018 - Provas A, B

A prova foi baseada na primeira lista de exercícios. Em particular compare:

- Questão 1 com Problemas 1.1 e 1.9(b) da Primeira Lista,
- Questão 2 com Problemas 3.4, 3.2, 2.5(3) da Primeira Lista
- Questão 3 com Problemas 3.11, 1.2 da Primeira Lista,
- Questão 4 com Problemas 3.12. 2.3 (7) da Primeira Lista.

1 Prova A

Questão 1.1 (2,5pt). Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ onde A é a matriz definida como:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine a equação Cartesiana do plano que é a imagem de T , i.e., o espaço coluna de A (sub espaço gerado pelas colunas de A).
- (b) Dado $p = (1, 1, 1)$ determine a projeção ortogonal de p no plano que é a imagem de T .
- (c) Determine a distância do ponto p ao plano dado pela imagem de T .

Respostas:

- (a) $-x - y + z = 0$
- (b) $\frac{1}{3}(2, 2, 4)$
- (c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Questão 1.2 (2,5 pt). Considere a função $f(x, y) = -\ln(3x^2 + 3y^2)$.

- (a) Esboce o gráfico de f .
- (b) Determine a derivada $df(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{2})$.
- (c) Determine a equação Cartesiana do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{2}, 0)$.

Respostas:

- (b) $df(p) = [-3, -\sqrt{3}]$
- (c) $z = -3(x - \frac{1}{2}) - \sqrt{3}(y - \frac{\sqrt{3}}{6})$

Questão 1.3 (2,5 pt). Seja f uma função de duas variáveis que tenha derivadas parciais contínuas e considere os pontos $A = (1, 2)$, $B = (2, 3)$, $C = (0, 3)$ e $D = (3, 3)$. A derivada direcional em A na direção do vetor $v = \frac{AB}{\|AB\|}$ é $\frac{3}{\sqrt{2}}$ e a derivada direcional em A na direção $w = \frac{AC}{\|AC\|}$ é $\frac{2}{\sqrt{2}}$.

- (a) Determine a derivada direcional de f em A na direção do vetor $\frac{AD}{\|AD\|}$.
- (b) Determine a equação Cartesiana da *reta normal* a curva de nível $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = f(A)\}$ no ponto A i.e., a reta perpendicular a reta tangente em A .

Respostas:

- (a) $\frac{7\sqrt{5}}{10}$
- (b) $-5(x - 1) + (y - 2) = 0$

Questão 1.4 (2,5 pt). Considere a função $f(x, y) = -2x^2 + y^2$.

- (a) Esboce a curva de nível $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 2\}$.
- (b) Determine a equação Cartesiana da reta tangente a curva C no ponto $p = (1, 2)$
- (c) Determine a curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha'(t) = \nabla f(\alpha(t))$ com $\alpha(0) = p$.

Respostas:

- (b) $-4(x - 1) + 4(y - 2) = 0$
- (c) $t \rightarrow \alpha(t) = (\exp(-4t), 2 \exp(2t))$

2 Prova B

Questão 2.1 (2,5pt). Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ onde A é a matriz definida como:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine a equação Cartesiana do plano que é a imagem de T , i.e., o espaço coluna de A (sub espaço gerado pelas colunas de A).
- (b) Dado $p = (1, 1, 1)$ determine a projeção ortogonal de p no plano que é a imagem de T .
- (c) Determine a distância do ponto p ao plano dado pela imagem de T .

Respostas:

- (a) $-4x + y + z = 0$
- (b) $\frac{1}{9}(5, 10, 10)$
- (c) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

Questão 2.2 (2,5 pt). Considere a função $f(x, y) = -\ln(2x^2 + 2y^2)$.

- (a) Esboce o gráfico de f .
- (b) Determine a derivada $df(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
- (c) Determine a equação Cartesiana do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.

Respostas:

- (b) $df(p) = [-2, -2]$
- (c) $z = -2(x - \frac{1}{2}) - 2(y - \frac{1}{2})$

Questão 2.3 (2,5 pt). Seja f uma função de duas variáveis que tenha derivadas parciais contínuas e considere os pontos $A = (1, 2)$, $B = (2, 3)$, $C = (0, 3)$ e $D = (3, 3)$. A derivada direcional em A na direção do vetor $v = \frac{AB}{\|AB\|}$ é $\frac{4}{\sqrt{2}}$ e a derivada direcional em A na direção $w = \frac{AC}{\|AC\|}$ é $\frac{2}{\sqrt{2}}$.

- (a) Determine a derivada direcional de f em A na direção do vetor $\frac{AD}{\|AD\|}$.
- (b) Determine a equação Cartesiana da *reta normal* a curva de nível $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = f(A)\}$ no ponto A , i.e., a reta perpendicular a reta tangente em A .

Respostas:

- (a) $\sqrt{5}$
- (b) $-3(x - 1) + (y - 2) = 0$

Questão 2.4 (2,5 pt). Considere a função $f(x, y) = -x^2 + 3y^2$.

- (a) Esboce a curva de nível $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = -6\}$.
- (b) Determine a equação Cartesiana da reta tangente a curva C no ponto $p = (3, 1)$.
- (c) Determine a curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha'(t) = \nabla f(\alpha(t))$ e $\alpha(0) = p$.

Respostas:

- (b) $-6(x - 3) + 6(y - 1) = 0$
- (c) $t \rightarrow \alpha(t) = (3 \exp(-2t), \exp(6t))$