2^0 **Lista de Exercício de Mat 2116- Álgebra Linear para Química**

Turma: 2017210 (2^0 semestre 2017)

Referências principais (nas quais a lista foi baseada):

1. G. Strang, *Álgebra linear e aplicações*, 4^o Edição, Cengage Learning.

2. S. Lipschutz and M. Lipson, *Álgebra linear*, 3^o Edição, Coleção Schaum.

3. Reis e Silva: *Geometria Analtica*

4. H. Anton, and C. Rorres, *Álgebra Linear com aplicações*, 10 Edição, Bookman.

1 Parte 1

1.1 IV- Projeções, base ortonormal, Gram-Schmidt, decomposição QR, distância mínima, outros produtos internos

Problema 1.1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ onde A é a matriz definida como:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule um vetor normal ao plano que é a imagem de T, i.e., o espaço coluna de A (sub espaço gerado pelas colunas de A).

(b) Calcule a área do paralelogramo contido na imagem de T que tenha como arestas as colunas da matriz A.

(c) Dado $p = (2, 2, 0)$ determine a projeção ortogonal de p no plano que é a imagem de T.

Problema 1.2. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ onde A é a matriz definida como:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule um vetor normal ao plano que é a imagem de T, i.e., o espaço coluna de A (sub espaço gerado pelas colunas de A).

(b) Calcule a área do paralelogramo contido na imagem de T que tenha como arestas as colunas da matriz A.

(c) Dado $p = (4, 1, 3)$ determine a projeção ortogonal de p no plano que é a imagem de T.

Problema 1.3. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ onde A é a matriz definida como:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule um vetor normal ao plano que é a imagem de T, i.e., o espaço coluna de A (sub espaço gerado pelas colunas de A).

(b) Calcule a área do paralelogramo contido na imagem de T que tenha como arestas as colunas da matriz A.

(c) Dado $p = (1, 2, -1)$ determine a projeção ortogonal de p no plano que é a imagem de T.

Problema 1.4. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ onde A é a matriz definida como:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule um vetor normal ao plano que é a imagem de T, i.e., o espaço coluna de A (sub espaço gerado pelas colunas de A).

(b) Calcule a área do paralelogramo contido na imagem de T que tenha como arestas as colunas da matriz A.

(c) Dado $p = (-2, 2, 1)$ determine a projeção ortogonal de p no plano que é a imagem de T.

Problema 1.5. Escreva uma equação do plano definido pelos pontos:

(a) $A = (2, -1, 3)$, $B = (0, 2, 1)$ e $C = (1, 3, 2)$

(b) $A = (0, 0, 0)$, $B = (2, 1, 0)$ e $C = (1, 0, 0)$

(c) $A = (0, 0, 2)$, $B = (1, 2, 2)$ e $C = (1, 0, 2)$

Problema 1.6. Determine a distância do ponto $(2, 1, 3)$ a cada um dos planos:

(a) $x - 2y + z = 1$

(b) $x + y - z = 0$

(c) $x - 5z = 8$

Problema 1.7. Considere $a = (1, 2, 3)$, $b = (1, 3, 1)$ e $c = (2, 6, 4)$.

(a) Determine a equação cartesiana do plano contendo os pontos a, b, c.

(b) Distância do ponto $p = (1, 1, 1)$ ao plano contendo os pontos a, b e c.

Problema 1.8. Considere $a = (0, 1, 5)$, $b = (2, 2, 3)$ e $c = (3, 3, 4)$.

((a) Determine a equação cartesiana do plano contendo os pontos a, b, c.

(b) Distância do ponto $p = (1, 2, 1)$ ao plano contendo os pontos a, b e c.

Problema 1.9. Determine a projeção ortogonal de $\vec{v} = (1, -2, 3, -4)$ no subespaço gerado por $\vec{w} = (1, 2, 1, 2)$.

Problema 1.10. Considere o subespaço vetorial W em $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores:

$$\vec{v}_1 = (1, 1, 1, 1),\ \vec{v}_2 = (1, 1, 2, 4),\ \vec{v}_3 = (1, 2, -4, -3).$$

Utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt determine uma base ortonormal para W.

Problema 1.11. Considere o espaço vetorial $P(t)$ com o produto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Seja W o subespaço vetorial de $P(t)$ gerado por $\{1, t, t^2\}$. Determine uma base ortogonal com coeficientes inteiros.

Problema 1.12. Determine a projeção ortogonal de $\vec{v} = (1, 3, 5, 7)$ no subespaço W gerado por $\{(1, 1, 1, 1), (1, -3, 4, -2)\}$

Problema 1.13. Determine se a matriz A é ou não matriz ortogonal. Em caso afirmativo determine a inversa da matriz A.

(a) A matriz de rotação por um angulo θ: $A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}\,(\theta) \\ \text{sen}\,(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$.

(b) A matriz de projeção no eixo x: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(c) A matriz de reflexão em relação ao eixo x: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 7 & -5 & 2 \end{bmatrix}$.

(e) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{26}} & \frac{3}{\sqrt{26}} & \frac{4}{\sqrt{26}} \\ \frac{7}{\sqrt{78}} & \frac{-5}{\sqrt{78}} & \frac{2}{\sqrt{78}} \end{bmatrix}$.

(f) Sejam $\vec{v}_1 = (v_{11}, v_{21}, v_{31})$, $\vec{v}_2 = (v_{12}, v_{22}, v_{32})$ e $\vec{v}_3 = (v_{13}, v_{23}, v_{33})$ vetores ortonormais em $\mathbb{R}^3$. Considere as bases $\alpha = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ e a base canônica $e = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. A matriz A em questão é a mudança de base $A = [Id]^e_\alpha$.

Problema 1.14. Por meio da ortogonalização de Gram-Schmidt obtenha a decomposição QR da matriz A abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Em outras palavras sejam $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ as colunas de A. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt aos vetores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, obtenha os vetores ortonormais $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3$. Estes serão as colunas da matriz ortogonal Q. Determine então a matriz R tal que $A = QR$.

Problema 1.15. Por meio da ortogonalização de Gram-Schmidt obtenha a decomposição QR da matriz A abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{5\sqrt{2}}{2} & \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Em outras palavras sejam $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ as colunas de A. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt aos vetores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, obtenha os vetores ortonormais $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3$. Estes serão as colunas da matriz ortogonal Q. Determine então a matriz R tal que $A = QR$.

Problema 1.16. Por meio da ortogonalização de Gram-Schmidt obtenha a decomposição QR da matriz A abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{5\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{14}}{14} & \frac{\sqrt{14}}{7} & -\frac{\sqrt{14}}{14} \\ -\frac{5\sqrt{42}}{42} & \frac{2\sqrt{42}}{21} & \frac{-\sqrt{42}}{21} \end{bmatrix}.$$

Em outras palavras sejam $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ as colunas de A. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt aos vetores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, obtenha os vetores ortonormais $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3$. Estes serão as colunas da matriz ortogonal Q. Determine então a matriz R tal que $A = QR$.

Problema 1.17 (*)**.** Demonstre que a projeção ortogonal de uma vetor $b \in \mathbb{R}^m$ no espaço coluna $C(A)$ de uma matriz A $m \times n$, cujas colunas são linearmente indepententes, é dado por

$$P(b) = A(\hat{x}) = A(A^tA)^{-1}A^tb.$$

Problema 1.18. Sejam $b = (4, 5, 6)$ e $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Determine a projeção ortogonal de b em $C(A)$.

Problema 1.19. Determine a projeção ortogonal de $v = (1, 3, 5, 7)$ no subespaço W gerado por $\{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 2)\}$

Problema 1.20. Verifique se g é produto interno do espaço vetorial V em questão.

(a) $\mathrm{g}(x, y) = \langle x, Ay \rangle = x^tAy$ para $A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}\,(\theta) \\ \mathrm{sen}\,(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ e $V = \mathbb{R}^2$

(b) $\mathrm{g}(x, y) = \langle x, Ay \rangle = x^tAy$ para $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ e $V = \mathbb{R}^2$.

(c) $\mathrm{g}(A, B) = \mathrm{tr}A^tB$ onde A e B pertencem ao espaço V das matrizes reais $n \times n$.

(d) $\mathrm{g}(f, h) = \int_0^1 f(t)h(t)dt$ onde f, h pertencem ao espaço V das funções contínuas com dominio $[0, 1]$.

(e) $g(x,y) = \langle x, Ay\rangle = x^t Ay$ para $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ e $V = \mathbb{R}^2$

Problema 1.21. Seja B matriz $m \times n$ com nucleo trivial e $A = B^t B$. Prove que

$$g(x,y) = \langle x, Ay\rangle = x^t Ay$$

é um produto interno em $\mathbb{R}^n$.

Problema 1.22. Prove que as afirmações abaixo são equivalentes para uma matriz real A $n \times n$.

(a) A é ortogonal, i.e., $AA^t = A^t A = Id$

(b) A preserva o produto escalar de $\mathbb{R}^n$, i.e., $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$ para todos os vetores x, y em $\mathbb{R}^n$.

(c) As colunas (respectivamente linhas) de A formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

Problema 1.23. Seja $\langle , \rangle$ um produto interno em um espaço vetorial U. Demonstre

(a) $\langle w, v\rangle = \frac{1}{4}\big(\|w+v\|^2 - \|w-v\|^2\big)$ (*fórmula polar*)

(b) $\|w+v\|^2 + \|w-v\|^2 = 2\|w\|^2 + 2\|v\|^2$ (*lei do paralelogramo*)

Problema 1.24. Seja V um espaço vetorial (dimensão finita) e $\alpha := \{f_1, \ldots, f_n\}$ base de V. Seja g um produto interno em V e $a_{i,j} = g(f_i, f_j)$. Seja A a *representação matricial do produto interno* g na base α, i.e., A é matriz $n \times n$ definida como $A = (a_{i,j})$. Demonstre que $g(X,Y) = X^t AY$.

Problema 1.25. Considere $P_2(t)$ o espaço dos polinômios de grau no máximo 2 e $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$.

(a) Calcule $\langle f, g\rangle$ onde $f(t) = t + 2$ e $g(t) = t^2 - 3t + 4$

(b) Calcule a representação matricial do produto interno em relação a base $\alpha = \{1, t, t^2\}$

1.2 Resposta Parte 1

Problema 1.1

(a) $(-4, 2, 0)$

(b) $2\sqrt{5}$

(c) $(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}, 0)$

Problema 1.2

(a) $(1, 2, -1)$

(b) $\sqrt{6}$

(c) $(\frac{7}{2}, 0, \frac{7}{2})$

Problema 1.3

(a) $(-3, -1, 2)$

(b) $\sqrt{14}$

(c) $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0)$

Problema 1.4

(a) $(1, -5, -2)$

(b) $\sqrt{30}$

(c) $(-\frac{23}{15}, 0, \frac{1}{15})$

Problema 1.5:

(a) $x - z + 1 = 0$

(b) $z = 0$

(c) $z = 2$

Problema 1.6

(a) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

(b) 0

(c) $\frac{21}{\sqrt{26}}$

Problema 1.7

(a) $9x - 2y - z = 2$

(b) $\frac{2\sqrt{86}}{43}$

Problema 1.8:

((a) $3x - 4y + z = 1$

(b) $\frac{5\sqrt{26}}{26}$

Problema 1.9: $P(v) = (-\frac{4}{5}, -\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{8}{5})$

Problema 1.10: $u_1 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 0, 2)$, $u_3 = \frac{1}{5\sqrt{2}}(1, 3, -6, 2)$

Problema 1.11: $\{1, 2t - 1, 6t^2 - 6t + 1\}$

Problema 1.12: $P(v) = (\frac{59}{15}, \frac{63}{5}, \frac{56}{15}, \frac{62}{15})$

Problema: 1.13:

(a) Sim. $A^{-1} = A^t = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \mathrm{sen}\,(\theta) \\ -\mathrm{sen}\,(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$.

(b) Não.

(c) Sim. $A^{-1} = A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(d) Não.

(e) Sim. $A^{-1} = A^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{26}} & \frac{7}{\sqrt{78}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{3}{\sqrt{26}} & \frac{-5}{\sqrt{78}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{26}} & \frac{2}{\sqrt{78}} \end{bmatrix}$.

(f) Sim. $A^{-1} = A^t = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \end{bmatrix}$.

Problema 1.14: $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Problema1.15: $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Problema 1.16: $Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{14}}{14} & \frac{\sqrt{14}}{7} & -\frac{3\sqrt{14}}{14} \\ -\frac{5\sqrt{42}}{42} & \frac{2\sqrt{42}}{21} & \frac{\sqrt{42}}{42} \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Problema 1.17: vide Capítulo III Strang.

Problema 1.18: $P(b) = (4, 5, 0)$

Problema 1.19: $P(v) = (7, 4, 1, 4)$.
Problema 1.20:

(a) não, A não é simétrica

(b) sim,

(c) sim,

(d) sim

(e) nao, A é singular.

Problema: 1.21: Observe primeiro que $A^t = (B^tB)^t = B^t(B^t)^t = B^tB = A$, ou seja A é simétrica.

Observe depois que

$$\begin{aligned}\langle x, Ax\rangle &= x^tB^tBx \\ &= (Bx)^tBx \\ &= \langle Bx, Bx\rangle \\ &= \|Bx\|^2\end{aligned}$$

Como nucleo de B é trivial, concluimos que para qualquer x diferente de zero, $\|Bx\|^2 > 0$ e assim $\langle x, Ax\rangle > 0$.

As duas observações implicam que A é simétrica positiva definida, logo g é produto interno.

Problema: 1.22: (a) equivale (b) segue direto de

$$\begin{aligned}\langle Ax, Ay\rangle &= (Ax)^tAy \\ &= x^tA^tAy\end{aligned}$$

(a) equivale (c) segue direto da definição de produto de matrizes.

Problema 1.23: Observe primeiro que:

$$\|w+v\|^2 = \langle w+v, w+v\rangle = \|w\|^2 + 2\langle w, v\rangle + \|v\|^2$$

$$\|w-v\|^2 = \langle w-v, w-v\rangle = \|w\|^2 - 2\langle w, v\rangle + \|v\|^2$$

Para obter (a) some a primeira equação com menos a segunda equação. Para obter (b) some as duas equações.

Problema 1.24:

$$\begin{aligned}\mathrm{g}(X, Y) &= \sum_i x_i \mathrm{g}(f_i, Y) \\ &= \sum_{i,j} x_i y_j \mathrm{g}(f_i, f_j) \\ &= \sum_{i,j} x_i y_j a_{i,j} \\ &= X^tAY\end{aligned}$$

Problema 1.25:

(a) $\frac{46}{3}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$

2 Parte 2

2.1 V-Determinantes

Problema 2.1. Enuncie as 3 propriedades que definem o determinante (denotado aqui por det).

Problema 2.2. Seja A uma matriz $n \times n$. Demonstre as afirmações abaixo:

(a) Se 2 linhas de A são iguais então $\det A = 0$

(b) Sejam i_0, j_0 fixos e B a matriz definida como $b_{i_0,j} = a_{i_0,j} - la_{j_0,j}$ e $b_{i,j} = a_{i,j}$ para qualquer $i \neq i_0$. Então $\det B = \det A$. Em particular se B é obtida por escalonamento da matriz A (sem haver mudança de linhas) então $\det A = \det B$.

(c) Se A possui uma linha nula então $\det A = 0$

(d) Se A é triangular então $\det A = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdots a_{n,n}$

(e) Se A é singular então $\det A = 0$

(f) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

(g) $\det A = \det A^t$

(h) $|\det Q| = 1$ se Q é matriz ortogonal.

Problema 2.3. Seja A uma matriz invertivel e considere a decomposição QR de A ou seja $A = QR$, onde Q é ortogonal e R triangular superior. Verifique que $|\det A| = |\det R| = |r_{1,1} \cdots r_{n,n}|$

Problema 2.4. Verifique

(a) $\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}\right) \neq \det \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

(b) $t \det \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \neq \det \begin{bmatrix} 3t & 0 \\ 0 & 5t \end{bmatrix}$

(c) $t^2 \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} at & bt \\ ct & dt \end{bmatrix}$

Problema 2.5. Calcule o determinante da matriz A.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -5 & 4 \\ 5 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -5 \\ 1 & 4 & 4 & -6 \end{bmatrix}$

Problema 2.6. Sejam $v_1 = (1,1,0), u_2 = (1,1,1), u_3 = (0,2,3)$. Calcule o volume $V(S)$ do paralelepípedo S de $\mathbb{R}^3$ determinado por esses três vetores.

Problema 2.7. Calcule área do triângulo cujos vértices são:

(a) $A = (0, 0, 0)$, $B = (2, 3, 0)$, $C = (0, 0, 5)$

(b) $A = (2, -1, 1)$, $B = (2, 1, -1)$, $C = (0, 3, -5)$

Problema 2.8. Calcule o volume do paralelepípedo definido pelos vetores $u = (2, -1, 1)$ $v = (1, 3, 2)$ e $w = (-1, 4, -3)$

Problema 2.9. Sejam $u = (2, 1, -3)$ e $v = (1, -2, 1)$

(a) Determine um vetor unitário simultaneamente perpendicular a u e v.

(b) Determine um vetor w perpendicular a u e v e tal que $\|w\| = 5$

2.2 Respostas da Parte 2

Problema 2.1:

(1) O det da matriz idêntidade é 1,

(2) O det muda de sinal quando 2 linhas são trocadas,

(3) O det depende linearmente da (primeira) linha.

Problema 2.2: Vide também Strang, Capítulo IV.

Problema 2.5

(a) -131

(b) -55

(c) 33

(d) 0

(e) 45

Problema 2.6: $V(S) = |\det A| = 2$

Problema 2.7:

(a) $\frac{\sqrt{325}}{2}$

(b) $2\sqrt{3}$

Problema 2.8: 28

Problema 2.9:

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,-1)$

(b) $\frac{5}{\sqrt{3}}(-1,-1,-1)$

3 Parte 3

3.1 VI Auto-vetores, auto-valores e aplicações

Problema 3.1. Seja $A = \begin{bmatrix} \frac{6}{4} & \frac{2\sqrt{3}}{4} \\ \frac{2\sqrt{3}}{4} & \frac{10}{4} \end{bmatrix}$.

((a) Calcule os autovalores λ_1 e λ_2 de A.

(b) Calcule autovetores ortonormais $\vec{q}_1$ e $\vec{q}_2$ associados a λ_1 e λ_2 respectivamente.

(c) Esboce o gráfico de $f(x,y) = [x,y]A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e destaque se $(0,0)$ é um ponto de máximo local, mínimo local ou ponto de sela da função f.

Problema 3.2. Seja $A = \begin{bmatrix} -\frac{6}{4} & \frac{2\sqrt{3}}{4} \\ \frac{2\sqrt{3}}{4} & -\frac{10}{4} \end{bmatrix}$.

(a) Calcule os autovalores λ_1 e λ_2 de A.

(b) Calcule autovetores ortonormais $\vec{q}_1$ e $\vec{q}_2$ associados a λ_1 e λ_2 respectivamente.

(c) Esboce o gráfico de $f(x,y) = [x,y]A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e destaque se $(0,0)$ é um ponto de máximo local, mínimo local ou ponto de sela da função f.

Problema 3.3. Seja $A = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{7}{4} \end{bmatrix}$.

(a) Calcule os autovalores λ_1 e λ_2 de A.

(b) Calcule autovetores ortonormais $\vec{q}_1$ e $\vec{q}_2$ associados a λ_1 e λ_2 respectivamente.

(c) Esboce o gráfico de $f(x,y) = [x,y]A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e destaque se $(0,0)$ é um ponto de máximo local, mínimo local ou ponto de sela da função f.

Problema 3.4. Seja $A = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{7}{4} \end{bmatrix}$.

(a) Calcule os autovalores λ_1 e λ_2 de A.

(b) Calcule autovetores ortonormais $\vec{q}_1$ e $\vec{q}_2$ associados a λ_1 e λ_2 respectivamente.

(c) Esboce o gráfico de $f(x,y) = [x,y]A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e destaque se $(0,0)$ é um ponto de máximo local, mínimo local ou ponto de sela da função f.

Problema 3.5. Determine todas as soluções da EDO $\alpha'(t) = A\alpha(t)$ para a matriz A abaixo.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$.

(c) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

Problema 3.6. Determine a única solução para a EDO $\alpha'(t) = A\alpha(t)$ com condição inicial $\alpha(0) = d$.

(a) $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $d = (1,2)$

(b) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $d = (1,2)$

Problema 3.7 (Cadeia de Markov)**.** Todo ano 1/10 de pessoas de fora de uma cidade C se mudam para a cidade C e 2/10 dos habitantes da cidade C se mudam para outros lugares.

(a) Começando com NC_0 pessoas que não moram na cidade C e C_0 habitantes da cidade C, determine (em termos de NC_0 e C_0) o número de habitantes NC_k que não moram na cidade C e o número de habitantes C_k que moram na cidade C após K anos.

(b) Com o passar dos anos, qual a tendência de distribuição da população?

Problema 3.8. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule os autovalores de A e autovetores ortonormais associados a estes autovalores.

(b) Dado a curva $1 = 2x^2 - 4xy + 5y^2$. Reescreva tal curva utilizando coordenadas ortogonais, de forma que com tais coordenadas ela se torne uma cônica padrão. Explicite tais coordenadas e esboce a curva.

Problema 3.9. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule os autovalores de A e autovetores ortonormais associados a estes autovalores.

(b) Dado a curva $1 = x^2 + 6xy - 7y^2$. Reescreva tal curva utilizando coordenadas ortogonais, de forma que com tais coordenadas ela se torne uma cônica padrão. Explicite tais coordenadas e esboce a curva.

Problema 3.10.

Determine uma substituição ortogonal que diagonaliza cada uma das formas quadráticas abaixo, determine a quadrica escrita em tais coordenadas e esboçe os gráficos de f. Diga também se $(0, 0)$ é ponto de máximo, mínimo local ou sela.

(a) $f(x,y) = 4x^2 + 8xy - 11y^2$

(b) $f(x,y) = 2x^2 - 6xy + 10y^2$

Problema 3.11. Identifique e esboce as quádricas abaixo:

(a) $4x^2 - y^2 + 8z^2 = 16$

(b) $4x^2 + y^2 - 8z^2 = 16$

(c) $x^2 + 2y^2 - z = 0$

(d) $x^2 + y + z^2 = 0$

(e) $x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$

(f) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} - \frac{z^2}{16} = 1$

(g) $z = -\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$

Problema 3.12. Calcule os autovalores e os autovetores <u>associados</u> e uma diagonalização para a matriz A.

(a) $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

Problema 3.13. Determine autovalores e autovetores de $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e conclua que A não é diagonalizável.

Problema 3.14. Determine os autovalores e autovetores de $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (matriz de rotação $\pi/2$)

Problema 3.15. Seja $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. Determine uma matriz ortogonal Q tal que $\Lambda = Q^{-1}AQ$ seja diagonal.

Problema 3.16. Calcule os autovalores e autovetores correspondentes da matriz A.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$.

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$.

Problema 3.17. Considere o operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido como $T(x, y) = (3x + 3y, x + 5y)$. Determine todos seus autovalores e autovetores correspondentes.

Problema 3.18. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$. Determine:

(a) seus autovalores e autovetores associados,

(b) uma matriz B tal que $B^2 = A$.

3.2 Respostas Parte 3

Problema: 3.1

(a) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$

(b) $\vec{q}_1 = (1/2, \sqrt{3}/2)$ e $\vec{q}_2 = (-\sqrt{3}/2, 1/2)$

(c) esboce um paraboloide elíptico com $(0, 0)$ sendo ponto de mínimo de f.

Problema 3.2

(a) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$

(b) $\vec{q}_1 = (\sqrt{3}/2, 1/2)$ e $\vec{q}_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2)$

(c) esboce um paraboloide elíptico com $(0,0)$ sendo ponto de máximo de f.

Problema 3.3

(a) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$

(b) $\vec{q}_1 = (\sqrt{3}/2, 1/2)$ e $\vec{q}_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2)$

(c) esboce um paraboloide elíptico com $(0,0)$ sendo ponto de máximo de f.

Problema 3.4

(a) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$

(b) $\vec{q}_1 = (1/2, \sqrt{3}/2)$ e $\vec{q}_2 = (-\sqrt{3}/2, 1/2)$

(c) esboce um paraboloide elíptico com $(0,0)$ sendo ponto de mínimo de f.

Problema 3.5:

(a) $\alpha(t) = c_1 \exp(t)(3,1) + c_2 \exp(-4t)(1,2)$

(b) $\alpha(t) = c_1 \exp(-t)(2,1) + c_2 \exp(-5t)(2,3)$

(c) $\alpha(t) = c_1 \exp(-t)(1,1) + c_2 \exp(-3t)(1,-1)$

Problema 3.6:

(a) $\alpha(t) = \frac{8}{3} \exp(-t)(1,1) - \frac{1}{3} \exp(2t)(5,2)$

(b) $\alpha(t) = \frac{3}{2}\exp(-t)(1,1) - \frac{1}{2}\exp(-3t)(1,-1)$

Problema 3.7:

(a) $(NC_k, C_k) = (NC_0 - 2C_0)(0,7)^k(1/3, -1/3)$

(b) $2/3$ da população não irá morar na cidade C e $1/3$ da população irá morar na cidade C.

Problema 3.8:

(a) $\lambda_1 = 6$ e autovetor (normal) $u_1 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$. O outro autovalor é $\lambda_2 = 1$ e autovetor (normal) $u_2 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$.

(b) Elipse é $1 = 6s^2 + t^2$ e o sistema de coordenada é $x = \frac{1}{\sqrt{5}}s + \frac{2}{\sqrt{5}}t$, $y = -\frac{2}{\sqrt{5}}s + \frac{1}{\sqrt{5}}t$.

Problema 3.9:

(a) $\lambda_1 = 2$ e autovetor (normal) $u_1 = (\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$. O outro autovalor é $\lambda_2 = -8$ e autovetor (normal) $u_2 = (-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}})$.

(b) Hiperbole é $1 = 2s^2 - 8t^2$ e o sistema de coordenada é $x = \frac{3}{\sqrt{10}}s - \frac{1}{\sqrt{10}}t$, $y = \frac{1}{\sqrt{10}}s + \frac{3}{\sqrt{10}}t$.

Problema 3.10:

(a) $x = \frac{4s+t}{\sqrt{17}}$, $y = \frac{-s+4t}{\sqrt{17}}$, hiperbole $f(s,t) = 5s^2 - 12t^2$. O ponto $(0,0)$ é ponto de sela (um autovalor positivo outro negativo).

(b) $x = \frac{3s-t}{\sqrt{10}}$, $y = \frac{s+3t}{\sqrt{10}}$ paraboloide $f(s,t) = s^2 + 11t^2$ O ponto $(0,0)$ é ponto de mínimo local (autovalores ambos positivos).

Problema 3.11:

(a) hiperboloide de 1 folha, interseção com plano xz é elipse, interseção com os planos xy yz são hiperboles.

(b) hiperboloide de 1 folha, interseção com plano xy é uma elipse.

(c) paraboloide elíptico, interseção com plano $\{z = 1\}$ é uma elipse

(d) paraboloide elíptico, interseção com plano $\{y = -1\}$ é uma elipse.

(e) cone, interseção com plano $\{z = 1\}$ é uma elipse.

(f) hiperboloide de 2 folhas, interseção com plano $\{y = 1\}$ é uma elipse.

(g) paraboloide hiperbólico.

Problema 3.12

(a) O primeiro autovalor é $\lambda_1 = -1$ e o autovetor associado é $v_1 = (1, 1)$. O segundo autovalor é $\lambda_2 = 2$ e o seu autovetor associado é $v_2 = (5, 2)$. Uma diagonalização para A é $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(b) O primeiro autovalor é $\lambda_1 = -1$ e o autovetor associado é $v_1 = (1, 1)$. O segundo autovalor é $\lambda_2 = -3$ e o seu autovetor associado é $v_2 = (-1, 1)$. Uma diagonalização para A é $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Problema 3.13: Os autovalores são $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e o único autovetor é $(1, 0)$. Como A não admite base de autovetores então A não é diagonalizável.

Problema 3.14: Autovalor $\lambda_1 = -i$ e autovetor associado $v_1 = (-i, 1)$. Autovalor $\lambda_2 = i$ e autovetor associado $v_2 = (i, 1)$.

Problema 3.15: $Q = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$ e $\Lambda = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

Problema 3.16:

(a) $\lambda_1 = 1$, $v_1 = (3, 1)$; $\lambda_2 = -4, v_2 = (1, 2)$

(b) $\lambda_1 = 4$, $v_1 = (2, 1)$

(c) $\lambda_1 = -1, v_1 = (2, 1)$ $\lambda_2 = -5, v_2 = (2, 3)$.

Problema 3.17: $\lambda_1 = 2, v_1 = (3, -1)$; $\lambda_2 = 6, v_2 = (1, 1)$.

Problema 3.18:

(a) $\lambda_1 = 1, v_1 = (1, 1)$; $\lambda_2 = 4, v_2 = (1, -2)$.

(b) $B = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$