1^0 **Lista de Exercício de Mat 2116- Álgebra Linear para Química**

Turma: 2017210 (2^0 semestre 2017)

Referências principais (nas quais a lista foi baseada):

1. G. Strang, *Álgebra linear e aplicações*, 4^o Edição, Cengage Learning.
2. S. Lipschutz and M. Lipson, *Álgebra linear*, 3^o Edição, Coleção Schaum.
3. Reis e Silva: *Geometria Analtica*
4. H. Anton, and C. Rorres, *Álgebra Linear com aplicações*, 10 Edição, Bookman.

1 Parte 1

1.1 Espaços Euclidianos, retas e planos

Problema 1.1. Escreva o vetor $(7, -1)$ como soma de dois vetores, um paralelo ao vetor $(1, -1)$ e outro paralelo ao vetor $(1, 1)$.

Problema 1.2. Dados $A = (1, 3)$ e $B = (2, 2)$ determine x para que a reta definida pelo ponto médio AB e o ponto $(x, 0)$ seja paralela ao vetor $v = (1, 2)$.

Problema 1.3. Os pontos $A = (1, -5)$, $B = (5, 2)$ e $C = (3, 9)$ so três vértices de um paralelogramo. Ache três pontos, cada um dos quais podendo ser o seu quarto vértice.

Problema 1.4. Sejam $u = (2, 4)$ e $v = (-3, 5)$. Determine:

(a) o produto escalar de u e v

(b) o ângulo entre u e v

Problema 1.5. Determine a equação cartesiana da reta no $\mathbb{R}^2$ passando pelos pontos a e b.

(a) $a = (1,1)$ e $b = (2,4)$

(b) $a = (2,1)$ e $b = (4,5)$

(c) $a = (3,2)$ e $b = (5,1)$

(d) $a = (2,3)$ e $b = (7,4)$

Problema 1.6. Determine a equação cartesiana do plano em $\mathbb{R}^3$ contendo os pontos a, b e c.

(a) $a = (1,2,3)$, $b = (1,3,1)$ e $c = (2,6,4)$,

(b) $a = (0,1,5)$, $b = (2,2,3)$ e $c = (3,3,4)$,

(c) $a = (1,1,4)$, $b = (2,1,2)$ e $c = (3,4,2)$,

(d) $a = (1,0,3)$, $b = (3,1,1)$ e $c = (4,2,2)$.

1.2 Respostas da Parte I

Problema: 1.1: $(7,-1) = (4,-4) + (3,3)$

Problema 1.2: $1/4$

Problema 1.3: $(-1,2)$, $(3,-12)$ e $(7,16)$

Problema 1.4:

(a) 14

(b) $\arccos(\frac{7\sqrt{170}}{170})$

Resposta do Problema: 1.5

(a) $-3x + y = -2$

(b) $-4x + 2y = -6$

(c) $x + 2y = 7$

(d) $x - 5y = -13$

Resposta do Problema 1.6

(a) $9x - 2y - z = 2$

(b) $3x - 4y + z = 1$

(c) $6x - 2y + 3z = 16$

(d) $3x - 4y + z = 6$

2 Parte 2:

2.1 II-Sistemas Lineares e Matrizes

Problema 2.1. Resolva o sistema linear, por meio da eliminação de Gauss

$$
\begin{aligned}
2u + v + w &= 5 \\
4u - 6v &= -2 \\
-2u + 7v + 2w &= 9
\end{aligned}
$$

Problema 2.2. Equilibre a equação química:

$$\mathrm{HCl} + \mathrm{Na_3PO_4} \to \mathrm{H_3PO_4} + \mathrm{NaCl}$$

Problema 2.3 (Mínimos quadrados (*))**.** Considere $(t_1, b_1), \ldots (t_m, b_m)$ dados experimentais de um fenômeno linear, e.g., dados que descrevem um objeto com velocidade uniforme que no tempo t_i está a uma distância b_i de um certo referencial. Afim de encontrar a reta que $y = ax + c$ que está mais próxima dos pontos coletados definimos a função de 2 variaveis $E(c, a) = \sum_{i=1}^{m}(b_i - c - at_i)^2$. Verifique que se $(\hat{c}, \hat{a})$ é ponto crítico de E, i.e., se $\frac{\partial E}{\partial c}(\hat{c}, \hat{a}) = 0 = \frac{\partial E}{\partial a}(\hat{c}, \hat{a})$, então $(\hat{c}, \hat{a})$ atende:

$$
\begin{bmatrix} m & \sum t_i \\ \sum t_i & \sum t_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum b_i \\ \sum t_i b_i \end{bmatrix}
$$

Problema 2.4 (Matriz de Vandermonde)**.** Dado pontos $(t_1, b_1), \ldots, (t_n, b_n)$ existe um único polinômio P de grau $n - 1$ tal $P(t_i) = b_i$. Verifique que encontrar tal polinômio P equivale a encontrar $(c_1, \ldots, c_n)$ que atende:

$$
\begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

Problema 2.5. Resolva o sistema linear, por meio da eliminação de Gauss

(a)

$$\begin{aligned} x - 3y - 2z &= 6 \\ 2x - 4y - 3z &= 8 \\ -3x + 6y + 8z &= -5 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 1 \\ 2x + 5y - 8z &= 4 \\ 3x + 8y - 13z &= 7 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 + 9x_4 &= 9 \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 + 17x_4 &= 7 \end{aligned}$$

Problema 2.6. Resolva o sistema linear, por meio da eliminação de Gauss

(a)

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ x + 3y + z &= 5 \\ 3x + 8y + 4z &= 17 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x - 2y + 4z &= 2 \\ 2x - 3y + 5z &= 3 \\ 3x - 4y + 6z &= 7 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x + y + 3z &= 1 \\ 2x + 3y - z &= 3 \\ 5x + 7y + z &= 7 \end{aligned}$$

Problema 2.7. Resolva o sistema por eliminação e retrosubstituição.

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ -x + y - 2z &= -3 \\ 2x + y + z &= 3 \end{aligned}$$

Seja $AX = B$ o sistema acima. Escreva as três matrizes de eliminação E_{21}, E_{31} e E_{32} que transformam A na matriz triangular superior U com $E_{32}E_{31}E_{21}A = U$. Calcule a matriz $M = E_{32}E_{31}E_{21}$

Problema 2.8. (a) Calcule as inversas das matrizes de eliminação abaixo:

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Calcule a inversa da matriz $M = E_{32}E_{31}E_{21}$

Problema 2.9. Determine a fatoração LU da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Problema 2.10. Determine a fatoração LU da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & 7 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Problema 2.11. Determine a fatoração LU da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -3 & -10 & 2 \end{bmatrix}$$

Problema 2.12. Utilize o método de Gauss-Jordan para calcular a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Problema 2.13. Utilize o método de Gauss-Jordan para calcular a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Problema 2.14 (**)**.** Seja

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 6 & 4 & 11 \\ 3 & 3 & -8 \end{bmatrix}$$

Calcule a fatoração LU de A se esta existir ou determine a fatoração $PA = LU$ para a matriz de permutação P adequada.

2.2 Respostas da Parte 2

Problema 2.1: $w = 2$, $v = 1$, $u = 1$

Problema 2.2: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$

Dica de solução do Problema 2.2: Sejam x_1, x_2, x_3, x_4 inteiros positivos que equilibram a equação $x_1(\mathrm{HCl}) + x_2(\mathrm{Na_3PO_4}) \to x_3(\mathrm{H_3PO_4}) + x_4(\mathrm{NaCl})$ Igualando o número de átomos de cada tipo ambos lados: $x_1 = 3x_3$ Hidrogênio (H) , $x_1 = x_4$ Cloro (Cl), $3x_2 = x_4$ Sódio (Na), $x_2 = x_3$ Fósforo(P), $4x_2 = 4x_3$ Oxigênio (O). Resolvendo o sistema linear temos: $x_1 = t$, $x_2 = t/3$, $x_3 = t/3$, $x_4 = t$. Para obter os menores valores inteiros positivos coloque $t = 3$ e obtenha $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$

Problema 2.5:

(a) $x = 1$, $y = -3$ e $z = 2$

(b) $x = -3 - a$, $y = 2 + 2a$, $z = a$ onde a é um parâmetro

(c) o sistema não possui solução.

Problema 2.6:

(a) $x = \frac{17}{3}$, $y = \frac{-2}{3}$, $z = \frac{4}{3}$

(b) O sistema não possui solução

(c) $x = -10a$ $y = 1 + 7a$, $z = a$ onde a é um parâmetro.

Problema 2.7: $z = 0$, $y = -1$, $x = 2$.

$$\begin{aligned} M &= E_{32}E_{31}E_{21} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Problema 2.8:

(a) $E_{21}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E_{31}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E_{32}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

Problema 2.9:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Problema 2.10:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{-3}{2} \end{bmatrix}$$

Problema 2.11:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Problema 2.12

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{12}{16} & -\frac{5}{16} & -\frac{6}{16} \\ \frac{4}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{2}{8} \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Problema 2.13

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Problema 2.14 Sejam

$$E_{21} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_{31} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P := P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

Observe que $PE_{31}E_{21}A = U := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -14 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Note também que $PE_{31}E_{21} = BP$ onde $B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Por fim defina $L := B^{-1} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

e conclua que $PA = LU$.

3 Parte 3

3.1 III-Espaços e Subespaços Vetoriais

Problema 3.1. Escreva o polinômio $v(t) = t^2+4t-3$ como uma combinação linear dos polinômios $p_1(t) = t^2 - 2t + 5$, $p_2(t) = 2t^2 - 3t$, $p_3(t) = t + 1$

Problema 3.2. Escreva a matriz $M = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ como combinação linear das matrizes: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.

Problema 3.3. Seja V o espaço vetorial real dos polinômios reais. Determine se W é ou não um subespaço de V onde

(a) W é composto por todos os polinômios de coeficientes inteiros.

(b) W é composto por todos os polinômios de grau menor ou igual a 6 e do polinômio nulo

(c) W é composto por todos os polinômios que possuem apenas potências pares.

Problema 3.4. Determine se cada um dos conjuntos abaixo de vetores determina ou não uma base de $\mathbb{R}^3$

(a) $(1, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$

(b) $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 5)$, $(1, 0, 1)$, $(2, 3, 0)$

(c) $(1, 1, 1)$ $(1, 2, 3)$, $(2, -1, 1)$

(d) $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 5)$, $(5, 3, 4)$

Problema 3.5. Seja S o espaço das matrizes simétricas reais 2 por 2, i.e., o espaços das matrizes reais $A = A^t$ ond A^t é a transposta de A. Determine a dimensão de S e uma base para S.

Problema 3.6. (a) Determine a dimensão e uma base para o núcleo $N(U)$ da matriz $U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) Determine a dimensão e uma base para o núcleo $N(A)$ da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Problema 3.7. Determine a dimensão e uma base do espaço de soluções dos sistemas homogêneos abaixo:

(a)

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z - s + 3t &= 0 \\ x + 2y + 3z + s + t &= 0 \\ 3x + 6y + 8z + s + 5t &= 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x + 2y + z - 2t &= 0 \\ 2x + 4y + 4z - 3t &= 0 \\ 3x + 6y + 7z - 4t &= 0 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ 2x + 3y + 3z &= 0 \\ x + 3y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

Problema 3.8. Demonstre as seguintes afirmações:

(a) Se $m < n$ então não podem haver n vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^m$.

(b) Sejam $f_1 \dots f_m$ e $g_1, \dots g_n$ bases para um mesmo espaço vetorial V. Então $m = n$.

(c) Sejam $\{f_i\}$ base de um espaço vetorial W e $v \in W$. Então existe para cada vetor f_i somente um número v_i tal que $v = \sum_i v_i f_i$

3.2 Respostas da Parte 3

Problema 3.1: $v = \frac{-17}{11}p_1 + \frac{14}{11}p_2 + \frac{52}{11}p_3$

Problema 3.2: $M = 2A + 3B - C$

Problema 3.3: (a) não, (b) e (c) sim.

Problema 3.4: (a), (b) não , pois $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. (c) Sim, pois colocando os vetores como colunas de uma matriz A três por três, podemos observar que A é não singular. (d) Não pois colocando os vetores como colunas de uma matriz A observamos que $Ax = 0$ admite mais de uma solução.

Problema 3.5: $\dim S = 3$ e uma base é: $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Problema 3.6:

(a) $\dim N(U)$ é igual ao número de variáveis livres, i.e., 2. Uma base E_1, E_2 do subespaço vetorial $N(U)$ pode ser determinada da seguinte forma: Considere as soluções de $Ux = 0$. Então E_1 é obtido tomando $x_4 = 1$ e $x_2 = 0$ e E_2 tomando-se $x_4 = 0$ e $x_2 = 1$. Assim $E_1 = (1, 0, -1, 1)$ e $E_2 = (-3, 1, 0, 0)$.

(b) Sabemos que $PA = LU$. Logo $A = P^{-1}LU$. Logo $Ax = 0$ se e somente se $Ux = 0$. Logo $N(A) = N(U)$.

Problema 3.7:

(a) Dimensão é 3. Base: $v_1 = (-2, 1, 0, 0, 0)$, $v_2 = (5, 0, -2, 1, 0)$, $v_3 = (-7, 0, 2, 0, 1)$

(b) Dimensão é 2. Base $v_1 = (-2, 1, 0, 0)$ $v_2 = (-5, 0, -1, 2)$

(c) Dimensão 0, i.e., o espaço é o espaço vetorial trivial $\{(0, 0, 0)\}$.

Problema 3.8: Demonstrado em sala de aula. Para maiores detalhes consulte livro de Strang, capítulo 2.

4 Parte 4

4.1 III- Transformações Lineares

Problema 4.1. Diga se as aplicações abaixo são ou não transformações lineares

(a) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = 7x$

(b) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = \cos(x)$

(c) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = 7x + 1$

(d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

(e) $T : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$, $T(f) = \frac{d}{dt} f$

(f) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = x^2$

(g) $T : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$, $T(f) = \int_0^t f(x)dx$

(h) $T : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$, $T(f) = \int_0^t f(x)g(x,t)dx$ onde $g(x, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

(i) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (xy, y)$

(j) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + y + z, 2x - 3y + 4z)$

(k) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x + 3, 2y, x + y)$

Problema 4.2. Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T((1, 0)) = (2, 3, 4)$ e $T((0, 1)) = (4, 6, 8)$

Problema 4.3. Determine a transformação linear $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que determina a rotação de vetores por meio de um ângulo θ.

Problema 4.4. Sejam $P(t^3)$ o espaço vetorial dos polinômios de grau 3 e $\alpha := \{p_0 = 1, p_1 = t, p_2 = t^2, p_3 = t^3\}$ base de $P(t^3)$. Considere a transformação linear $T : P(t^3) \to P(t^3)$, $T(f) = \frac{d}{dt}f$. Determine a representação matricial $[T]_\alpha^\alpha$ de T na base α.

Problema 4.5. Sejam $P(t^3)$ o espaço vetorial dos polinômios de grau 3 e $\beta := \{q_1 = t^3, q_2 = t^2, q_3 = t, q_4 = 1\}$ base de $P(t^3)$. Considere a transformação linear $T : P(t^3) \to P(t^3)$, $T(f) = \frac{d}{dt}f$. Determine a representação matricial $[T]_\beta^\beta$ de T na base β.

Problema 4.6. Sejam $P(t^3)$ o espaço vetorial dos polinômios de grau 3 e $\alpha := \{p_0 = 1, p_1 = t, p_2 = t^2, p_3 = t^3\}$ base de $P(t^3)$. Sejam $P(t^4)$ o espaço vetorial dos polinômios de grau 4 e $\tilde{\alpha} := \{p_0 = 1, p_1 = t, p_2 = t^2, p_3 = t^3, p_4 = t^4\}$ uma base de $P(t^4)$. Considere a transformação linear $T : P(t^3) \to P(t^4)$, $T(f) = \int_0^t f(x)dx$. Determine a representação matricial $[T]_\alpha^{\tilde{\alpha}}$ de T.

Problema 4.7. Sejam $v_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $v_2 = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Considere a aplicação linear $T(xv_1 + yv_2) = xv_1 - yv_2$.

(a) Considere as bases $e = \{(1,0), (0,1)\}$ (base canônica) e $v = \{v_1, v_2\}$. Determine as representações matriciais de Id (aplicação identidade) $[Id]_e^e$, $[Id]_v^v$, $[Id]_e^v$, $[Id]_v^e$.

(b) Determine a representação matricial $[T]_v^v$

(c) Determine a representação matricial $[T]_e^e$.

Problema 4.8. Considere as seguintes bases $\alpha = \{u_1, u_2\} = \{(1,2), (3,5)\}$ e $\beta = \{v_1, v_2\} = \{(1,-1), (1,-2)\}$ Determine a mudança de base da base $[Id]_\beta^\alpha$

Problema 4.9. Considere as bases $\beta = \{b_1, b_2\} = \{(1,-1), (-2,3)\}$ e a base euclidiana $\{e_1, e_2\}$ Encontre a matriz de transição (ou mudança de base) de $\{e_1, e_2\}$ para β e as coordenadas do vetor $x = (1,2)$ em relação a β.

Problema 4.10. Encontre a matriz de transição correspondente à mudança de base $\{v_1, v_2\}$ para $\{u_1, u_2\}$, na qual $v_1 = (5, 2)$, $v_2 = (7, 3)$, $u_1 = (3, 2)$ $u_2 = (1, 1)$.

Problema 4.11. Sejam $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (2, 3, 2)$, $v_3 = (1, 5, 4)$, $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 2, 0)$ $u_3 = (1, 2, 1)$. Encontre a matriz de transição (mudança de base) de $\{v_1, v_2, v_3\}$ para $\{u_1, u_2, u_3\}$

Problema 4.12. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

(a) Determine uma base e a dimensão para o espaço colunas de A.

(b) Determine uma base e a dimensão do núcleo de A.

(c) Determine uma base e a dimensão do espaço de linhas de A.

Problema 4.13. Seja $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear definida por

$$F(x, y, z, t) = (x - y + z + t, x + 2z - t, x + y + 3z - 3t)$$

(a) Determine a representação matricial A de F na base canônica.

(b) Determine uma base e a dimensão da imagem de F.

(c) Determine uma base e a dimensão do núcleo de F.

(d) Determine uma base e a dimensão do espaço de linhas de A.

Problema 4.14. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear definida por

$$F(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$$

(a) Determine a representação matricial A de F na base canônica.

(b) Determine uma base e a dimensão da imagem de F.

(c) Determine uma base e a dimensão do núcleo de F.

(d) Determine uma base e a dimensão do espaço de linhas de A.

Problema 4.15. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 8 & 13 & -3 \end{bmatrix}$.

(a) Determine uma base e a dimensão para o espaço colunas de A.

(b) Determine uma base e a dimensão do núcleo de A.

(c) Determine uma base e a dimensão do espaço de linhas de A.

Problema 4.16. Demonstre as afirmações abaixo.

(a) Seja $T : V \to W$ uma aplicação linear. Então T é determinada por $\{T(v_i)\}$ onde $\{v_i\}$ é base de V.

(b) Sejam $T : V \to W$ uma aplicação linear, $\{v_i\}$ base de V e $\{w_i\}$ base de W. Então T admite representação matricial $A = (a_{ij})$ onde $T(v_j) = \sum_i a_{ij} w_i$.

(c) Seja A uma matriz $m \times n$ de posto r. Seja $C(A)$ o espaço colunas de A. Então $\dim C(A) = r$.

(d) Seja A uma matriz $m \times n$ de posto r. Seja $N(A)$ o núcleo de A. Então $\dim N(A) = n - r$.

(e) Seja A uma matriz $m \times n$ de posto r. Então o número de linhas independentes de A é r.

(f) Seja A uma matriz $m \times n$ de posto r. Então $N(A)$ é complemento ortogonal de $C(A^t)$.

(g) Seja A uma matriz $m \times n$ de posto r. Então $N(A^t)$ é complemento ortogonal de $C(A)$.

4.2 Respostas da Parte 4

Problema 4.1

(a) Sim, T é transformação linear

(b) Não, T não é transformação linear

(c) Não, T não é transformação linear

(d) Sim, T é transformação linear

(e) Sim, T é transformação linear

(f) Não, T não é transformação linear

(g) Sim, T é transformação linear

(h) Sim, T é transformação linear

(i) Não, T não é transformação linear

(j) Sim, T é transformação linear

(k) Não, T não é transformação linear

Problema 4.2: $T(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Problema 4.3: $R_\theta(x, y) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}\,(\theta) \\ \text{sen}\,(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Problema 4.4: $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Problema 4.5: $[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Problema 4.6: $[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Problema 4.7

(a) $[Id]_e^e = [Id]_v^v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $[Id]_v^e = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $[Id]_e^v = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$,

(b) $[T]_v^v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(c) $[T]_e^e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Problema 4.8: Primeiro resolva os **dois sistemas lineares** abaixo (lembre-se v_1, v_2, u_1, u_2 são vetores)

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11}u_1 + a_{21}u_2 \\ v_2 &= a_{12}u_1 + a_{22}u_2 \end{aligned}$$

Assim obtemos $[Id]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -11 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Problema 4.9:

A mudança de base é $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

O vetor x em relação a base β é $(7, 3)$

Problema 4.10 A mudança de base é $U^{-1}V = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$.

Problema 4.11: Mudança de base é $U^{-1}V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Problema 4.12

(a) dimensão do espaço coluna de A é 2. Uma base é $\{(1,2,-1),(3,9,3)\}$

(b) dimensão do núcleo de A é 2. Uma base é $\{(-3,1,0,0),(1,0,-1,1)\}$

(c) dimensão do espaço de linhas de A é 2. Uma base é $\{(1,3,3,2),(0,0,3,3)\}$

Problema 4.13:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$.

(b) dimensão da imagem de F (espaço colunas de A) é 2. Uma base é $\{(1,1,1),(-1,0,1)$

(c) dimensão do núcleo de F (núcleo de A) é 2. Uma base é $(2,1,-1,0)$ e $(1,2,0,1)$

(d) dimensão do espaço de linhas de A é 2. Uma base é $(1,-1,1,1)$ e $(0,1,1,-2)$

Problema 4.14

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

(b) dimensão da imagem de F (espaço colunas de A) é 2 . Uma base é $\{(1,0,1),(2,1,1)\}$

(c) dimensão do núcleo de F (núcleo de A) é 1. Uma base é $\{(3,-1,1)\}$

(d) dimensão do espaço de linhas de A é 2. Uma base é $\{(1,2,-1),(0,1,1)\}$

Problema 4.15

(a) dimensão do espaço coluna de A é 2. Uma base é $\{(1,1,3),(2,3,8)\}$

(b) dimensão do núcleo de A é 2. Uma base é $\{(1,-2,1,0),(-7,3,0,1)\}$

(c) dimensão do espaço de linhas de A é 2. Uma base é $\{(1,2,3,1),(0,1,2,-3))\}$

Problema 4.16: Demonstrado em sala de aula. Maiores detalhes vide Capítulo 2 do Strang.