MAT2116- Álgebra Linear para Química -noturno

Gabarito 2º Prova - 28/11/2017 -

A prova foi baseada na segunda lista de exercícios. Em particular compare:

- Questão 1 com Problemas 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.6, 1.7 da Segunda Lista,
- Questão 2 com Problemas 1.14, 1.15, 1.16 da Segunda Lista
- Questão 3 com Problemas 2.6, 2.8 da Segunda Lista,
- Questão 4 com Problemas 3.4, 3.5, 3.6, da Segunda Lista.

Questão 1 (3,0 pt)**.** Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ onde A é a matriz definida como:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1,0 pt)(a) Calcule um vetor normal ao plano que é a imagem de T, i.e., o espaço coluna de A (sub espaço gerado pelas colunas de A).

(0,5 pt) (b) Calcule a área do paralelogramo contido na imagem de T que tenha como arestas as colunas da matriz A.

(1,0 pt) (c) Dado $q = (1, 1, 1)$ determine a projeção ortogonal de q no plano que é a imagem de T.

(0,5 pt)(d) Determine a distância do ponto $q = (1, 1, 1)$ ao plano definido pela imagem de T.

Respostas:

(a) $N = (2, 1, -2)$

(b) $\|N\| = 3$

(c) $\frac{(7,8,11)}{9}$

(d) $\frac{1}{3}$

Questão 2 (3,0 pt)**.** Por meio da ortogonalização de Gram-Schmidt obtenha a decomposição QR da matriz A abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Em outras palavras sejam $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ as colunas de A. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt aos vetores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, obtenha os vetores ortonormais $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3$. Estes serão as colunas da matriz ortogonal Q. Determine então a matriz R tal que $A = QR$. No campo resposta é obrigatório escrever a matriz Q e a matriz R.

Respostas: $Q = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$.

Questão 3 (1,0 pt)**.** Determine o volume do paralelepípedo definido pelos vetores $\vec{a}_1 = (1, 2, 2)$, $\vec{a}_2 = (1, 0, 1)$ e $\vec{a}_3 = (1, 1, 1)$.

Resposta: 1.

Problema 4 (3,0 pt)**.** Seja $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

(1,0 pt)(a) Calcule os autovalores λ_1 e λ_2 de A.

(1,0 pt) (b) Calcule autovetores ortonormais $\vec{q}_1$ e $\vec{q}_2$ associados a λ_1 e λ_2 respectivamente.

(0,5 pt) (c) Determine todas as soluções da E.D.O $\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = A\vec{x}(t)$

(0,5 pt) (d) Resolva a E.D.O $\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = A\vec{x}(t)$ com condição inicial $\vec{x}(0) = (2, 0)$

Respostas:

(a) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$

(b) $\vec{q}_1 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$, $\vec{q}_2 = (\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$

(c) $x\vec{(t)} = c_1 \exp(3t)(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) + c_2 \exp(-2t)(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$

(d) $x\vec{(t)} = \frac{2}{\sqrt{5}} \exp(3t)(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) - \frac{4}{\sqrt{5}} \exp(-2t)(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$