MAT2116- Álgebra Linear para Química -noturno

Gabarito 1^o Prova - 29/09/2017 - Provas A, B

A prova foi baseada na primeira lista de exercícios. Em particular compare:

- Questão 1 com Problemas 2.5 e 2.6 da Primeira Lista,
- Questão 2 com Problema 2.12 da Primeira Lista
- Questão 3 com Problema 4.5 da Primeira Lista,
- Questão 4 com Problema 4.12 da Primeira Lista.

1 Prova A

Questão 1.1 (2,5 pt)**.** Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(1.0 pt) (a) Resolva o sistema linear $Ax = 0$ por meio da eliminação de Gauss.

(1.5 pt) (b) Determine a fatoração LU da matriz A.

Respostas

(a) $x_1 = -\frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_6$
$x_2 = -2x_3 - x_4 - 2x_5 - x_6$

(b) $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Questão 1.2 (2,5 pt)**.** Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Utilizando o método de Gauss-Jordan, calcule a inversa da matriz A.

Resposta:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Questão 1.3 (2,5 pt). Seja $P[t^n]$ o espaço vetorial dos polinômios de grau até n. Considere a aplicação linear $T : P[t^3] \to P[t^2]$ definida como $T(f) = \frac{d}{dt}f$, ou seja a aplicação derivada (lembre-se $\frac{d}{dt}t^n = nt^{n-1}$).

(2.0 pt)(a) Para os espaços vetorias $P[t^3]$ e $P[t^2]$ considere, respectivamente as bases $\mathcal{P} = \{p_1 = 1, p_2 = t, p_3 = t^2, p_4 = t^3\}$ e $\mathcal{Q} = \{q_1 = t^2, q_2 = t+2, q_3 = 3\}$. Determine a representação matricial $[T]_{\mathcal{P}}^{\mathcal{Q}}$ de T (base de entrada $\mathcal{P}$ e base de saida $\mathcal{Q}$) .

(0.5 pt) (b) Considere outra base $\tilde{\mathcal{P}} = \{\tilde{p}_1 = t, \tilde{p}_2 = 1, \tilde{p}_3 = t^3, \tilde{p}_4 = t^2\}$ do espaço $P[t^3]$. Determine a representação matricial $[Id]_{\tilde{\mathcal{P}}}^{\mathcal{P}}$ da aplicação identidade (base de entrada $\tilde{\mathcal{P}}$, base de saida $\mathcal{P}$).

Respostas:

(a) $[T]_{\mathcal{P}}^{\mathcal{Q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 0 \end{bmatrix}$

(b) $[Id]_{\tilde{\mathcal{P}}}^{\mathcal{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Questão 1.4 (2,5 pt)**.** Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(0.5 pt) (a) Determine a dimensão do núcleo de A.

(1.0 pt) (b) Determine uma base do núcleo de A

(0.5pt) (c) Determine a dimensão para o espaço colunas de A.

(0.5 pt) (d) Determine uma base para o espaço colunas de A.

Respostas:

(a) $\dim N(A) = 4$

(b) $(-\frac{1}{2}, -2, 1, 0, 0, 0)$, $(-\frac{1}{2}, -1, 0, 1, 0, 0)$, $(0, -2, 0, 0, 1, 0)$, $(-\frac{1}{2}, -1, 0, 0, 0, 1)$

(c) $\dim C(A) = 2$

(d) $(2, 2, 4)$ e $(0, 1, 1)$. Alternativamente, qualquer 2 vetores linearmente independentes normais a $(-1, -1, 1)$

2 Prova B

Questão 2.1 (2,5 pt)**.** Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 2 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

(1.0 pt) (a) Resolva o sistema linear $Ax = 0$ por meio da eliminação de Gauss.

(1.5 pt) (b) Determine a fatoração LU da matriz A.

Respostas

(a) $x_1 = \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 - \frac{3}{2}x_6$
$x_2 = -\frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_6$

(b) $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Questão 2.2 (2,5 pt)**.** Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Utilizando o método de Gauss-Jordan, calcule a inversa da matriz A.

Resposta:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Questão 2.3 (2,5 pt)**.** Seja $P[t^n]$ o espaço vetorial dos polinômios de grau até n. Considere a aplicação linear $T : P[t^3] \to P[t^2]$ definida como $T(f) = \frac{d}{dt}f$, ou seja a aplicação derivada (lembre-se $\frac{d}{dt}t^n = nt^{n-1}$).

(2.0 pt)(a) Para os espaços vetorias $P[t^3]$ e $P[t^2]$ considere, respectivamente as bases $\mathcal{P} = \{p_1 = 1, p_2 = t, p_3 = t^2, p_4 = t^3\}$ e $\mathcal{Q} = \{q_1 = t^2, q_2 = t+1, q_3 = 4\}$. Determine a representação matricial $[T]^{\mathcal{Q}}_{\mathcal{P}}$ de T (base de entrada $\mathcal{P}$ e base de saida $\mathcal{Q}$) .

(0.5 pt) (b) Considere outra base $\tilde{\mathcal{P}} = \{\tilde{p}_1 = t, \tilde{p}_2 = t^3, \tilde{p}_3 = 1, \tilde{p}_4 = t^2\}$ do espaço $P[t^3]$. Determine a representação matricial $[Id]^{\mathcal{P}}_{\tilde{\mathcal{P}}}$ da aplicação identidade (base de entrada $\tilde{\mathcal{P}}$, base de saida $\mathcal{P}$).

Respostas:

(a) $$[T]^{\mathcal{Q}}_{\mathcal{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

(b) $$[Id]^{\mathcal{P}}_{\tilde{\mathcal{P}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Questão 2.4 (2,5 pt)**.** Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 2 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

(0.5 pt) (a) Determine a dimensão do núcleo de A.

(1.0 pt) (b) Determine uma base do núcleo de A

(0.5pt) (c) Determine a dimensão para o espaço colunas de A.

(0.5 pt) (d) Determine uma base para o espaço colunas de A.

Respostas:

(a) $\dim N(A) = 4$

(b) $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0, 0, 0)$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 1, 0, 0)$, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, 1, 0)$, $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 1)$

(c) $\dim C(A) = 2$

(d) $(1, 1, 2)$ e $(1, 3, 6)$. Alternativamente, qualquer 2 vetores linearmente independentes normais a $(0, -4, 2)$