Geometria Diferencial II

2^0 Lista de Exercícios (2^0 semestre 2017)

- Prof. Marcos Alexandrino
- Monitor: Pablo Diaz

1. Geodésicas, parte I

Ao longo desta seção (M, g) denotará variedade Riemanniana com métrica g.

Problema 1.1. Seja M uma superfície mergulhada de revolução em $\mathbb{R}^3$, onde g é métrica induzida. Demonstre que sua curva geratriz é geodésica de M. Conclua que os grandes círculos são geodésicas de $\mathbb{S}^2$.

Problema 1.2. Dado $q \in M$ demonstre que existe $\epsilon > 0$ tal que $\exp_q : B_\epsilon(0) \to M$ é difeomorfismo sobre um aberto de M.

Problema 1.3. Seja $e^{(\cdot)} : T_e SO(n) \to SO(n)$ a aplicação exponencial de matrizes, i.e., $e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}$.

(a) Verifique que $t \to e^{tA}$ é linha integral do campo invariante a esquerda $\vec{A}(g) = gA$.

(b) Dado uma métrica bi-invariante g de $SO(n)$ mostre que $t \to e^{tA}$ é a geodésica α com $\alpha(0) = e$ e $\alpha'(0) = A$. Conclua que $\exp_e A = e^A$ ou seja a exponencial Riemanniana em e (com respeito a g) coincide com a exponencial matricial.

Problema 1.4. Suponha que M é variedade Riemanniana compacta. Mostre que toda geodésica está definida para todos valores de $\mathbb{R}$.

Dica: Considere o campo geodésico $\vec{G} \in \mathfrak{X}(TM)$ restrito ao fibrado tangente unitario $T^1(M) := \{V_x \in T_x M, \|V_x\| = 1\}_{x \in M}$ e aplique o resultado que afirma que *todo campo suave definido em variedade compacta gera um grupo a 1 parametro de difeomorfismos.*

Problema 1.5 (*Lema de Gauss*)**.** Sejam $\exp_q : B_\delta(0) \to M$ bem definida, $S^{n-1}_{\tilde{\delta}}(0)$ esfera contida em $B_\delta(0)$ com $\tilde{\delta} < \delta$ e $v : (-\epsilon, \epsilon) \to S^{n-1}_{\tilde{\delta}}(0)$ curva suave. Defina $f(s,t) := \exp_q(tv(s))$. Demonstre que $g(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}) = 0$.

Problema 1.6. Seja $B_\delta(q)$ uma bola normal. Defina $\alpha : [0,1] \to B_\delta(q)$ como $\alpha(t) := \exp_q(tv)$ com $\|v\| < \delta$. Seja $\beta : [0,1] \to M$ curva suave por partes tal que $\alpha(0) = \beta(0)$ e $\alpha(1) = \beta(1)$. Demonstre que $L(\alpha) \leq L(\beta)$. Se a igualdade vale mostre que $\beta[0,1] = \alpha[0,1]$.

Problema 1.7 (*)**.** Dado $q \in M$ demonstre que existe vizinhança W de q tal que, se x, y pertencem a W então existe uma única geodésica minimizante ligando x a y.

Problema 1.8. Seja $\gamma : [0,1] \to M$ uma curva suave por partes tal que $d(\gamma(0),\gamma(1)) = L(\gamma)$. Mostre que γ é imagem de uma geodésica.

Problema 1.9.

(a) Demonstre que a curva $C := \{x = c, y > 0\}$ é imagem de uma geodésica do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^2$ (modelo do semi-plano).

(b) Utlizando o fato que aplicações $z \to T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $ad - bc = 1$ $(a,b,c,d$ reais) levam C ou em semi-circulos (com centro em $\partial\mathbb{H}^2$) ou em semi retas $x = x_0$, $y > 0$ conclua que tais curvas são imagens de geodésicas de $\mathbb{H}^2$.

Problema 1.10 (*referencial geodésico em* p_0)**.** Seja p_0 um ponto fixo de M. Demonstre que:

(a) existe uma vizinhança U de p_0 e um referencial ortonormal $\{\vec{e}_i\}$ (para $i = 1 \cdots n$) suave em U tal que $\nabla_{(\cdot)}\vec{e}_i(p_0) = 0$

(b) $\text{grad } f(p_0) = \sum_i \big(\vec{e}_i \cdot f(p_0)\big)\vec{e}_i(p_0)$

(c) $\text{div }\vec{v}(p_0) = \sum_i \vec{e}_i \cdot v_i(p_0)$, onde $\vec{v} = \sum_i v_i\vec{e}_i$

(d) $\triangle f(p_0) = \sum_i \big(\vec{e}_i \cdot (\vec{e}_i \cdot f)\big)(p_0)$

(e) $\triangle\big(fg\big)(x) = f(x) \triangle g(x) + g(x) \triangle f(x) + 2\langle \text{grad } f, \text{grad } g\rangle(x)$, para qualquer $x \in M$, onde $f, g \in C^\infty(M)$

(f) $d\big(i_{\vec{w}} vol\big) = \text{div }\vec{w}\, vol$ onde vol é forma volume de M (supondo M orientável) e $\vec{w} \in \mathfrak{X}(M)$

Problema 1.11. Sejam M variedade compacta orientável, sem bordo e $f \in C^\infty(M)$. Demonstre que se $\triangle f \geq 0$ então f é constante.

Problema 1.12 (*)**.** Sejam $\vec{F}$ campo não nulo em p e S uma hipersuperfície transversal a $\vec{F}(p)$, i.e., $p \in S$ e $T_pM = T_pS \oplus \{\mathbb{R}\vec{F}_p\}$. Reduzindo S se necessário seja $\hat{\phi} : (-\epsilon,\epsilon) \times S \to M$ a retificação do fluxo de $\vec{F}$ com respeito a S. Defina $A = (\hat{\phi})^* vol$. Mostre que $\text{div }\vec{F}(p) = \frac{d}{dt}\,[\ln A\,(t\,,\,p\,)]\,|_{\,t=0}$.

2. Geodésica Parte II

Ao longo desta seção (M,g) denotará variedade Riemanniana com métrica g.

Problema 2.1. Suponha que M é variedade Riemanniana compacta. Demonstre que:

(a) para todo $q \in M$ a aplicação exponencial $\exp_q : T_qM \to M$ está bem definida;

(b) dados q e p em M, existe um segmento de geodésica $\gamma : [0,R] \to M$ (parametrizado por comprimento de arco) ligando q a p (i.e., $\gamma(0) = q$ e $\gamma(R) = p$) que realiza distância, i.e, $L(\gamma) = R = d(q,p)$. que realiza distância (i.e,

Dica:

(a) Considere o campo geodésico $\vec{G} \in \mathfrak{X}(TM)$ restrito ao fibrado tangente unitario $T^1(M) := \{V_x \in T_xM, \|V_x\| = 1\}_{x\in M}$ e aplique o resultado que afirma que *todo campo suave definido em variedade compacta gera um grupo a 1 parametro de difeomorfismos*.

(b) Utilize os seguintes ingredientes: uma sequencia de cuvas γ_n (cada γ_n concatenação de segmentos de geodésicas) com $L(\gamma_n) \to R$; exitencia das vizinhanças completamente normais (vide Problema 1.7); o fato de M ser compacto, i.e., sequencias de pontos $\{x_n^i\}_n$ (e.,g $x_n^i \in \gamma_n$) admite subsequencia convergente.

Problema 2.2 (*). Seja M variedade Riemanniana compacta não simplesmente conexa. Demonstre que por cada q existe um loop geodésico (i.,e uma geodésica $\gamma : [0,1] \to M$ tal que $\gamma(0) = \gamma(1)$, porém $\gamma'(0)$ não precisa ser igual a $\gamma'(1)$).

Problema 2.3. Seja $f : (-\epsilon,\epsilon) \times [a,b] \to M$ uma aplicação suave tal que $f(s_0,\cdot)$ é geodésica para todo $s_0 \in (-\epsilon,\epsilon)$. Demonstre que $J(t) := \frac{\partial f}{\partial s}(0,t)$ é campo de Jacobi ao longo da geodésica $\alpha(t) := f(0,t)$.

Problema 2.4. Seja δ tal que $\exp_p : B_\delta(p) \to M$ está bem definida. Defina a curva $\alpha(t) := \exp_p(tv_0)$ com $\|v_0\| = 1$ e $|t| < \delta$. Para $w \in T_pM$ considere o campo tw ao longo do segmento $t \to tv_0$. Demonstre que $J(t) := d(\exp_p)_{tv_0} tw$ é campo de Jacobi com $J(0) = 0$ e $\frac{\nabla}{dt}J(0) = w$.

Problema 2.5 (*). Suponha que M é geodesicamente completa, i.e, $\exp_p : T_pM \to M$ está bem definida para todo $p \in M$. Seja $\alpha : (-\delta,\delta) \to M$ geodésica e J campo de Jacobi ao longo de α. Demonstre que $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0,t)$ para $f(s,t) = \exp_{\beta(s)}(tv(s))$ onde $\beta : (-\epsilon,\epsilon) \to M$ é uma curva tal que $\beta'(0) = J(0)$ e $v : (-\epsilon,\epsilon) \to M$ é um campo ao longo de β com $v(0) = \alpha'(0)$ e $\frac{\nabla}{ds}v(0) = \frac{\nabla}{dt}J(0)$.

Problema 2.6. Sejam M variedade Riemanniana com curvaturas seccionais constantes K e $\alpha : [0,a] \to M$ geodésica com vetor velocidade 1. Demonstre que o campo de Jacobi J ao longo de α com condições iniciais $J(0) = 0$ e $\frac{\nabla}{dt}J(0) = w$ para w perpendicular a $\alpha'(0)$ é $J(t) = c_K(t)w(t)$ onde $w(\cdot)$ é o transporte paralelo de w ao longo de α e c_K é a função definida como $c_K(t) := \frac{\sin(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}}$ se $K > 0$, $c_K(t) := t$ se $K = 0$ e $c_K(t) := \frac{\sinh(t\sqrt{-K})}{\sqrt{-K}}$ se $K < 0$.

Problema 2.7. Sejam (M^n, g) variedade Riemanniana com curvaturas seccionais constantes K e $\psi : (0,\delta)\times\mathbb{S}^{n-1}\to B_\delta(p)$ parametrização geodésica polar, i.e., $\psi(r,v) := \exp_p(rAv)$ onde $A : (\mathbb{R}^n, g_0)\to (T_pM, g)$ é isometria linear. Demonstre que a métrica g em coordenadas geodésicas polares é $dr^2 + (c_k(r))^2 ds^2$ onde ds^2 é a métrica canônica da esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ e a função c_K foi definida na Proposição 2.6. Em particular conclua que duas variedades Riemannianas com mesma dimensão e mesmas curvaturas seccionais constantes iguais a K são localmente isométricas.

Problema 2.8. Sejam δ tal que $\exp_p : B_\delta(p)\to M$ está bem definida. Defina $\alpha(t) = \exp_p(tv)$ com $|t| < \delta$ e $\|v\| = 1$. Então $\alpha(t_0)$ é *ponto conjugado* a $\alpha(0)$ ao longo de α (i.e, existe campo de Jacobi J com $J(0) = 0$ e $J(t_0) = 0$) se e somente se $\dim(\ker d(\exp_p)_{t_0 v}) > 0$.

Problema 2.9. Sejam $U : M\to\mathbb{R}$ função suave (potêncial) e $(s,t)\to f(s,t)$ uma variação suave própria (i.e, $f(s,0) = f(0,0)$ e $f(s,1) = f(0,1)$) onde $t\to\alpha(t) = f(0,t)$ atende $m\frac{\nabla\alpha'}{dt} = -\nabla U(\alpha(t))$ (*equação de Newton*). Verifique que $\frac{d}{ds}\mathcal{A}(0) = 0$ onde $\mathcal{A}(s) := \int_0^1 \mathcal{L}\big(\frac{\partial f}{\partial s}(s,t)\big)dt$ e $\mathcal{L}(V_x) := \frac{m}{2}g(V_x, V_x) - U(x)$;

Problema 2.10 (*)**.** Seja α curva atendendo a equação de Newton $\frac{\nabla\alpha'}{dt} = -\nabla U(\alpha(t))$. Demonstre que

(a) $E(\alpha'(t)) = c$ onde $E(V_x) = \frac{1}{2}g(V_x, V_x) + U(x)$.

(b) existe uma função h e um intervalo I tal que $\beta = \alpha\circ h|_I$ é geodésica para a métrica $\tilde{g} = (c-U)g$

Dica: compare $\widetilde{\nabla}$ com ∇ e lembre que $\frac{\widetilde{\nabla}}{dt}\beta'(t) = \alpha'(h(t))h''(t) + \frac{\widetilde{\nabla}}{dt}\alpha'(h(t))(h'(t))^2$

3. Imersões isométricas, equação de Gauss e teorema de Gauss-Bonnet

Problema 3.1. Uma subvariedade Riemanniana M de uma variedade Riemanniana $(\tilde{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é chamada totalmente geodésica, se a segunda forma se anula ao longo de M. Mostre que M é totalmente geodésica se e somente se toda geodésica de M é geodésica de $\tilde{M}$.

Problema 3.2. Seja V um subespaço de $\mathbb{R}^n$ e defina $M := V \cap \mathbb{S}^{n-1}$. Mostre que M é subvariedade totalmente geodésica de $\mathbb{S}^{n-1}$.

Problema 3.3. Seja G um grupo de Lie com métrica bi-invariante e $H \subset G$ subgrupo fechado. Mostre que H é subvariedade totalmente geodésica.

Problema 3.4 (*). Sejam M_1 e M_2 variedades Riemannianas e $M = M_1 \times M_2$ variedade com a métrica produto. Mostre que:

(a) $M_1 \times \{p_2\}$ é totalmente geodésica em M
(b) $K(X, Y) = 0$ se X, Y são vetores ortonormais tais que X é tangente a $M_1 \times \{p_2\}$ e Y é tangente a $\{p_1\} \times M_2$

Problema 3.5. Seja M subvariedade Riemanniana de uma variedade Riemanniana $(\tilde{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ e denote R, $\tilde{R}$ os tensores curvaturas de M e $\tilde{M}$ e B o $(1, 2)$ tensor segunda forma de M. Demonstre que:

$$\langle R(X, Y)X, Y \rangle - \langle \tilde{R}(X, Y)X, Y \rangle = \langle B(X, X), B(Y, Y) \rangle - \langle B(X, Y), B(X, Y) \rangle$$

Problema 3.6. Seja M hipersuperfície de $(\tilde{M}, \tilde{g})$. Conclua que $K(e_1, e_2) - \tilde{K}(e_1, e_2) = \lambda_1 \lambda_2$ onde e_1, e_2 são direções principais de T_pM associadas as curvaturas principais λ_1 e λ_2.

Problema 3.7. Mostre que as curvaturas seccionais de $\mathbb{S}^n$ são 1.

Problema 3.8. Seja M o gráfico em $\mathbb{R}^3$ de uma função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suave tal que $(0, 0) \in \Omega$, $f(0, 0) = 0$ e $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ Verifique:

(a) $T_{(0,0,0)}M = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$,
(b) se $\xi(0, 0, 0) = (0, 0, 1)$ então $S_\xi(v, 0) = (\mathrm{Hess} f(0, 0)v, 0)$, onde S_ξ é o operador forma.
(c) curvaturas principais são auto-valores λ_1 e λ_2 do $\mathrm{Hess} f(0, 0)$ e assim que M pode ser aproximado por um parabolóide (respectivamente hiperboloide) se $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ (respectivamente se $\lambda_1 \lambda_2 < 0$).

Problema 3.9. Seja M uma superfície mergulhada em $\mathbb{R}^3$ e ξ vetor normal unitário a M. Defina $\eta_{r\xi} : M \to \mathbb{R}^3$ como $\eta_{r\xi}(x) = x + r\xi$

(a) Sejam e_1 e e_2 direções principais em T_pM com curvaturas principais λ_1 e λ_2. Verifique que $d\eta_{r\xi}e_i = (1 - r\lambda_i)e_i$

(b) Conclua que se $r \neq \frac{1}{\lambda_i}$ em vizinhança $\tilde{U}$ de p, então existe vizinhança $U \subset \tilde{U}$ de p tal que $\eta_{r\xi}(U)$ é superfície mergulhada.

Problema 3.10. Enuncie o teorema de Gauss-Bonnet.

Problema 3.11. Considere um triangulo geodésico contido em um disco convexo de uma superfície M. Seja $\sum_{i=1}^{3} \varphi_i$ a soma dos angulos internos. Verifique:

(a) Se $K > 0$ então $\sum_{i=1}^{3} \varphi_i > \pi$

(b) Se $K = 0$ então $\sum_{i=1}^{3} \varphi_i = \pi$

(c) Se $K < 0$ então $\sum_{i=1}^{3} \varphi_i < \pi$

Problema 3.12 (*)**.** Seja M superfície compacta conecta, orientável e $\mathrm{g}(M)$ seu genus. Demonstre que:

(a) M admite métrica com $K = 1$ se e somente se $\mathrm{g}(M) = 0$.

(b) M admite métrica com $K = 0$ se e somente se $\mathrm{g}(M) = 1$.

(c) M admite métrica com $K = -1$ se e somente se $\mathrm{g}(M) > 1$.

Obs: A direção da esquerda para direita segue facilmente do Teorema de Gauss-Bonnet e pode cair em prova ou teste.

Problema 3.13 (**)**.** Demonstre o teorema de Gauss-Bonnet.