Geometria Diferencial II

1^0 Lista de Exercícios (2^0 semestre 2017)

- Prof. Marcos Alexandrino
- Monitor: Pablo Diaz

1. Variedades e Cálculo no $\mathbb{R}^n$

Problema 1.1.

a) Sejam $F : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ de classe C^n e $p \in \Omega$. Prove que existe $\delta > 0$ tal que para todo $q \in B_\delta(p)$ temos que $\operatorname{Rank} DF(q) \geq \operatorname{Rank} DF(p)$.

b) Seja $G : \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}^k$ uma aplicação suave. Prove que:

G é uma submersão se e somente se $\{\nabla g_1, \nabla g_2, \ldots, \nabla g_{k-1}, \nabla g_k\}$ são linearmente independentes.

Onde $G(p) = (g_1(p), g_2(p), \ldots, g_{k-1}(p), g_k(p))$, para cada $p \in \mathbb{R}^{m+k}$.

Problema 1.2. Prove os teoremas de Imersão, de Submersão, da Função Implícita e do Posto.

Problema 1.3. Parametrize as superfícies abaixo:

a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$
b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$
c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y + 3z = 10, x^2 + y^2 \leq 1\}$
d) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 9, 0 \leq z \leq 20 + 2x - y\}$
e) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\}$
f) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y^2 + x^2 - z^2 = 1\}$
g) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}$

Problema 1.4. Seja $G : \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}^k$ uma submersão suave, e $G(p) = (g_1(p), g_2(p), \ldots, g_{k-1}(p), g_k(p))$, para cada $p \in \mathbb{R}^{m+k}$. Sejam c um valor regular de G, $M := G^{-1}(c)$ e $q \in M$. Dado que

$$T_q M := \{v \in \mathbb{R}^{m+k} \ : \ \langle \nabla g_i(q), v \rangle = 0, \ \text{para cada} \ i = 1, 2, \ldots, k-1, k\}$$

prove que

a) se $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, com $\epsilon > 0$, e α é diferenciável, então $\dot{\alpha}(0) \in T_{\alpha(0)} M$.
b) Dado $v \in T_q M$, existe uma curva diferenciálvel $\beta : (-\delta, \delta) \to M$ tal que $\beta(0) = q$ e $\dot{\beta}(0) = v$.

Problema 1.5. Seja $G : \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}^k$ uma submersão suave e $M := G^{-1}(c)$. Dado $p \in M$ prove que M é localmente descrito como gráfico em relação ao espaço tangente $T_p M$.

Problema 1.6. Seja $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ a aplicação definida por $f(A) = A\,A^t$, onde $M_n(\mathbb{R})$ são as matrizes quadradas $n \times n$ com entradas reais, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ são as matrizes simétricas com entradas reais, e A^t denota a matriz transposta de A.
Prove que:
a) $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial real;
b) f é de clase C^∞;
c) $\mathbb{O}_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,:\, A\,A^t = I\}$ é uma subvariedade mergulhada de $M_n(\mathbb{R})$.
Pode dizer alguma coisa sobre a dimensão de $\mathbb{O}_n(\mathbb{R})$? É $\mathbb{O}_n(\mathbb{R})$ uma variedade compacta? É $\mathbb{SO}_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,:\, A\,A^t = I$ e $det(A) = 1\}$ uma variedade? É compacta? É $\mathbb{G}l_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,:\, det(A) \neq 0\}$ uma variedade? É $\mathbb{S}l_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,:\, det(A) = 1\}$ uma variedade? São $\mathbb{S}l_n(\mathbb{R})$ e $\mathbb{G}l_n(\mathbb{R})$ compactas?

Problema 1.7. Determine $T_I\mathbb{O}_n(\mathbb{R})$, $T_A\mathbb{O}_n(\mathbb{R})$, onde A é qualquer matriz em $\mathbb{O}_n(\mathbb{R})$ e I é o a matriz identidade de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. O que você pode dizer sobre $T_I\mathbb{SO}_n(\mathbb{R})$? E sobre $T_B\mathbb{SO}_n(\mathbb{R})$, para $B \in \mathbb{SO}_n(\mathbb{R})$?

Problema 1.8. Seja $f : \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}$ uma função suave. Seja $G : \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}^k$ uma submersão suave, com $G(p) = (g_1(p), g_2(p), \ldots, g_{k-1}(p), g_k(p))$, para cada $p \in \mathbb{R}^{m+k}$. Sejam c um valor regular de G, e definamos $M := G^{-1}(c)$. Prove que se $f|_M$ tem um máximo ou mínimo local em $q \in M$ então $\nabla f(q) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla g_i(q)$.

Problema 1.9. Seja $G : \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}^k$ uma submersão C^∞, com $G(p) = (g_1(p), g_2(p), \ldots, g_{k-1}(p), g_k(p))$, para cada $p \in \mathbb{R}^{m+k}$. Sejam c um valor regular de G, e definamos $M := G^{-1}(c)$. Seja $a \in \mathbb{R}^{m+k} \setminus M$, e definamos $h_a : \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}$ como $h_a(x) = ||x - a||^2$. Prove que se q é ponto mínimo para h_a então $a - p$ é ortogonal a M.

Problema 1.10. Sejam $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \frac{(x-2)^2}{9} + y^2 + z^2 = 1\}$ e $f(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2$.

a) Determine a equação do plano tangente a superfície S no ponto $(3, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$
b) Determine o <u>valor máximo</u> e o <u>valor mínimo</u> da função f restrita a superfície S e os <u>pontos</u> onde f assume tais valores.

Problema 1.11. Determine o volume da maior caixa retangular com arestas paralelas aos eixos e que pode ser inscrita no elipsóide $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 = 36$.

Problema 1.12. Sejam H e K dois subgrupos fechados de $\mathbb{O}_n(\mathbb{R})$, e suponha que eles são variedades. Seja $\phi : K \longrightarrow H$ um homomorfismo de grupos que é de classe C^∞. Prove que $d\phi$ tem posto constante.

Problema 1.13. Definamos $\mathfrak{so}_n := T_I\mathbb{O}_n(\mathbb{R})$. Fixe $A \in \mathfrak{so}_n$, e seja a curva

$$\begin{array}{cccc} \alpha_A : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \\ & t & \longrightarrow & exp(tA) \end{array}$$

Prove que α_A é uma curva suave e que $\alpha_A(t)$ está em $\mathbb{SO}_n(\mathbb{R})$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Problema 1.14. Seja $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$, e defina A_ξ como a matriz $\begin{pmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix}$.

Prove que:

a) $A_\xi(v) = \xi \times v$, para todo $v \in \mathbb{R}^3$.

b) Dada a curva

$$\begin{array}{cccc} \alpha_A : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \\ & t & \longrightarrow & exp(tA_\xi), \end{array}$$

fixando $t \in \mathbb{R}$, $\alpha(t)$ é uma rotação que fixa ξ e tem velocidade angular $||\xi||$.

Problema 1.15. Seja $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$. Prove que:

a) Existem matrices $B, C \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ tais que B é simétrica, C é antisimétrica e $A = B + C$;

b) $\text{Div}\,\vec{A}(x) = \text{Div}\,\vec{B}(x)$;

c) $\text{Rot}\,\vec{A}(x) = \text{Rot}\,\vec{C}(x)$;

d) dado $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$, e definindo A_ξ como seguinte matriz $\begin{pmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix}$, prove que se $F(x) = \vec{A}_\xi(x)$, então $\text{Rot}\,F = 2\,\xi$. Conclua que $||\text{Rot}\,F|| = 2$ vezes a velocidade angular.

Problema 1.16. Seja $\vec{F}(x_1, x_2) = f_1(x_1, x_2)\,\vec{e}_1 + f_2(x_1, x_2)\,\vec{e}_2$, onde $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são suaves. Suponha que para $\epsilon_0 > 0$ temos que $\vec{F}(\epsilon_0, 0) = a\,\vec{e}_1$ onde $a \neq 0$. Seja ϕ_t o fluxo de $\vec{F}$. Verifique que existe uma vizinhança Ω_0 de $(0,0)$ tal que a aplicação $\hat{\phi} : \Omega_0 \to \Omega_1$, definida por $\hat{\phi}(t, x_2) = \phi_t(\epsilon_0, x_2)$ é um difeomorfismo. A aplicação $\hat{\phi}$ costuma ser chamada **retificação do fluxo**.

Problema 1.17. Considere o campo linear $\vec{F}$ em $\mathbb{R}^2$, definido como

$$\vec{F}(x) = \lambda_1 x_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 x_2 \vec{e}_2,$$

i.e.,

$$F(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

a) Esboce o fluxo para $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$.

b) Seja $\hat{\phi}$ a retificação do fluxo, vide Problema 1.16. Definindo $A(t, s) = \det(D\,\hat{\phi}(t, s))$ como o elemento de área, verifique que

$$\text{Div}\,\vec{F}(\epsilon, 0) = \frac{d}{dt}\,[\ln A(t, 0)]\,|_{t=0}.$$

Problema 1.18. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ a trajetoria de uma partícula sobe a ação de uma força conservativa com energia potêncial U, i.e, $m\alpha^{''}(t) = -\nabla U(\alpha(t))$. Seja $E(q,v)$ a energia total, i.e., $E(q,v) = \frac{1}{2}m\langle v, v\rangle + U(q)$. Verifique que $E(\alpha, \alpha^{'})$ é constante, i.e., a energia total é constante ao longo de α.

Problema 1.19. Seja $\vec{F} \in \mathfrak{X}(\Omega)$ onde Ω é aberto conexo em $\mathbb{R}^n$. Prove que as afirmações abaixo são equivalentes:

1. $\vec{F}$ é conservativo,
2. o trabalho de $\vec{F}$ independe do caminho,
3. o trabalho ao longo de um caminho fechado é zero.

Problema 1.20. Dado aberto Ω em $\mathbb{R}^n$, considere campos $\vec{F}, \vec{G} \in \mathfrak{X}(\Omega)$ definidos como $\vec{F} = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $\vec{G} = \sum_j g_j \frac{\partial}{\partial x_j}$. Seja $[\vec{F}, \vec{G}]$ o campo definido como $[\vec{F}, \vec{G}]\, h = \vec{F}\vec{G}\, h - \vec{G}\vec{F}\, h$, para todo $h \in C^{\infty}(\Omega)$. Prove que $[\vec{F}, \vec{G}] = \nabla_{\vec{F}}\vec{G} - \nabla_{\vec{G}}\vec{F}$, onde $\nabla_X \vec{F}_p := (p\,,\, D(F)_p X\,)$.

2. Variedades e métricas

Problema 2.1. Seja M^2 superfície mergulhada em $\mathbb{R}^3$ invariante por rotação no eixo x_3, ou seja, uma superfície de rotação. Seja g a métrica induzida em M do espaço Euclidiano, i.e., $g = i^* g_0$ onde g_0 é a métrica Euclidiana e $i : M \to \mathbb{R}^3$ é a inclusão. Considere a parametrização $\varphi : \Omega \to M$ definida como $\varphi(t\,,\,\theta\,) = (r\,(t\,)\cos(\theta\,)\,;\, r(t)\sin(\theta\,)\,;\, h\,(t\,)\,)$ onde $(r\,(t\,)\,;\,0\,;\,h\,(t\,))$ é uma paramatrização da curva geratriz. Determine $\varphi^* g$, i.e., descreva a *primeira forma* em termos de dt e $d\theta$.

Problema 2.2. Sejam $X, Y \in \mathfrak{so}(\mathfrak{n}) := T_e SO(n)$ e considere os difeomorfismos $L_g : SO(n) \to SO(n)$ e $R_g : SO(n) \to SO(n)$ definidos como $L_g(x) = gx$ e $R_g(x) = xg$. Verifique:

1. $dL_g X = gX$ e $dR_g X = Xg$.
2. $\mathrm{Ad}(g)Y := \frac{d}{dt}(g\exp(tY)g^{-1})|_{t=0} = gYg^{-1} \in \mathfrak{so}(\mathfrak{n})$
3. Usando o fato (não precisa demonstrar) que $\frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(\exp(tX))Y|_{t=0} = [\vec{X}, \vec{Y}](e)$ onde $\vec{X}(g) := dL_g X$ e $\vec{Y}(g) := dL_g Y$ mostre que $[\vec{X}, \vec{Y}](e) = XY - YX$ (comutador de matrizes).

Problema 2.3. Considere $\mathfrak{so}(n) = T_e SO(n)$ com produto interno definido como $\langle X, Y\rangle_e = \mathrm{Re}\,\mathrm{tr} XY^t$ onde $X, Y \in \mathfrak{so}(n)$. Defina uma métrica em $SO(n)$ como $\langle \tilde{X}, \tilde{Y}\rangle_g := \langle dL_{g^{-1}}\tilde{X}, dL_{g^{-1}}\tilde{Y}\rangle_e$. Conclua que tal métrica é bi-invariante, ou seja L_g e R_g são isometrias para todo $g \in SO(n)$.

Problema 2.4. Prove que toda variedade M admite uma métrica Riemanniana.

Problema 2.5. Considere um difeomorfismo $F : (M, g) \to (M, g)$ de uma variedade Riemanniana (M, g). Prove que se $F^* g = g$ (i.e, se ele é uma isometria) então F preserva distância, ou seja $d\big(F(x), F(y)\big) = d(x, y)$ para todo $x, y \in M$.

Problema 2.6. Considere $\mathbb{H}^2$ o modelo hiperbólico do semi-plano superior, ou seja $\mathbb{H}^2 := \{x+iy \mid y > 0\}$ com métrica $g = \frac{1}{y^2}\big(dx^2 + dy^2\big)$. Considere o difeomorphismo $F : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ definido como $F\,(z\,) = \frac{az+b}{cz+d}$ onde $ad - bc = 1$ e $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Prove que F é uma isometria.

Dica: Verifique que $\mathrm{Im}(F(z)) = \frac{\mathrm{Im(z)}}{|cz+d|^2}$ e utilize o fato de variável complexa que $\frac{d}{dt}(F \circ \alpha\,) = \frac{dF}{dz}(\alpha(t))\alpha'(t)$ para $t \to \alpha\,(t\,) = x\,(t\,){+}iy\,(t\,)$, afim de concluir que $\sqrt{g(\frac{d}{dt}F \circ \alpha\,,\, \frac{d}{dt}F \circ \alpha\,)} = \sqrt{g(\alpha'(t\,)\,,\,\alpha'(t\,)\,)}$

Problema 2.7. Sejam g_1 e dr^2 métricas canônicas de $\mathbb{S}^{n-1}$ e $I = (0, \infty)$, respectivamente. Defina em $\mathbf{S}^{n-1} \times I$ a metrica $g_{(m,r)} := r^2 g_1 + dr^2$.

(a) A métrica g é métrica produto?

(b) Mostre $(\mathbb{S}^{n-1} \times I\,, g)$ é isométrico a $(\mathbb{R}^n \setminus 0\,, \mathrm{can})$ e que $(\mathbb{S}^{n-1} \times I, g_1 \times dr^2)$ é isométrico ao cilindro $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1, \mathrm{e}\, x_0 > 0\}$.

Problema 2.8 (*)**.** Sejam (E, π, B) e $(\tilde{E}, \tilde{\pi}, B)$ fibrados vetorias de posto n. Dizemos que eles são *isomorfos* se existe uma aplicação $F : E \to \tilde{E}$ tal que $\pi = \tilde{\pi} \circ F$ e $F : E_p \to \tilde{E}_p$ é um isomorfismo. Em particular um fibrado (E, π, B) de posto n é chamado *fibrado trivial* se ele é isomorfo a $B \times \mathbb{R}^n$.

(1) Mostre que $SO(n)$ tem fibrado tangente trivial.

(2) Mostre que o fibrado tangente da esfera $\mathbb{S}^2$ não é trivial.

Problema 2.9. Seja $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ uma atlas de uma variedade M. Utilize tal atlas para construir um atlas para o fibrado tangente $TM := \cup_{p \in M} T_p M$ demonstrando que TM é uma variedade. Qual seria uma parametrização para uma vizinhança do fibrado cotangente $TM^* = \cup_{p \in M} T_p M^*$?

Problema 2.10. Considere (M, g) variedade Riemanniana e considere o Lagrangeano $L : TM \to \mathbb{R}$ definido como $L(v_q) = \frac{1}{2} g(v_q, v_q)$. Defina a transformada de Legendre $\mathcal{L} : TM \to TM^*$ como $\mathcal{L}(v_q) w_q := \frac{d}{dt} L(v_q + t\, w_q)|_{t=0}$. Verifique que $\mathcal{L}$ é bijetora.

3. Formas diferenciáveis

Problema 3.1. a) Sejam η um $(0, n)$ tensor aleternado em $\mathbb{R}^n$.
Verifique que $\eta = c\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1} \wedge dx_n$, onde c é uma constante real. Conclua que se ω é uma n- forma suave em $\mathbb{R}^n$, então $\omega = f\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1} \wedge dx_n$, onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é suave.

b) Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Prove que se ω é $(0, n)$ tensor alternado em $\mathbb{R}^n$, então

$$\omega(A v_1, A v_2, \ldots, A v_n) = det(A)\, \omega(v_1, v_2, \ldots, v_n).$$

Conclua que se $\phi : \Omega_0 \subset \mathbb{R}^n \to \Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação suave e ω é uma n-forma

$$f\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots dx_{n-1} \wedge dx_n,$$

então

$$\phi^* \omega = f \circ \phi\; det(D\phi)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots dx_{n-1} \wedge dx_n.$$

Problema 3.2.
a) Sejam $\alpha\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada e $\hat{F}(\cdot) = \langle \vec{F}, \cdot \rangle$. Verifique que

$$\alpha^* \hat{F} = \langle \vec{F}(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle\, dt$$

b) Sejam

$$\begin{array}{rcc} \psi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\mu_1, \mu_2) & \longrightarrow & \Big(\psi_1(\mu_1,\mu_2), \psi_2(\mu_1,\mu_2), \psi_3(\mu_1,\mu_2)\Big) \end{array}$$

um mergulho e $\omega = f_1\, dx_2 \wedge dx_3 - f_2\, dx_1 \wedge dx_3 + f_3\, dx_1 \wedge dx_2$, i.e.,

$$i_{\vec{F}}\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3(V_1, V_2) = \omega(V_1, V_2) = det \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \end{bmatrix},$$

onde cada $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é suave. Verifique que $\psi^* \omega = \langle \vec{F} \circ \psi, \frac{\partial \psi}{\partial \mu_1} \times \frac{\partial \psi}{\partial \mu_2} \rangle\, d\mu_1 \wedge d\mu_2$, onde $\vec{F} = \sum_{i=1}^3 f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Problema 3.3. Prove que
a) $d(i_{\vec{F}}\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) = div\, \vec{F} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$.

b) $d\hat{F} = i_{rot \vec{F}}\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

Problema 3.4. Sejam

$$\vec{E}(t, \cdot) = \sum_{i=1}^{3} E_i(t, \cdot) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad \vec{B}(t, \cdot) = \sum_{i=1}^{3} B_i(t, \cdot) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

e F uma 2-forma em $\mathbb{R}^4$ definida como

$$F([t, x_1, x_2, x_3]; [\tilde{t}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3]) = \begin{bmatrix} t_1, & x_1, & x_2, & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{t}_1 \\ \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix}.$$

a) Descreva F em termos de dt e dx_i;

b) verifique que $dF = 0$ se e somente se $\frac{dB}{dt} = -\nabla \times E$ e $\operatorname{div}(B) = 0$;

c) seja $\epsilon_\mu = \begin{cases} 1 & se \quad \mu = 0; \\ -1 & se \quad \mu = 1, 2, 3. \end{cases}$

e considere o operador linear $* \, \Omega^2(\mathbb{R}^4) \to \Omega^2(\mathbb{R}^4)$ definido como

$$* dx^\mu \wedge dx^\nu = \epsilon_\mu \epsilon_\nu \, dx^\rho \wedge dx^\sigma,$$

onde (μ, ν, ρ, σ) é uma permutação par de $(0, 1, 2, 3)$ e $dt = dx_0$. Verifique que $d * F = 0$ se e somente se $\frac{dE}{dt} = \nabla \times B$ e $\operatorname{div}(E) = 0$.

Problema 3.5. Sejam (M^m, g) variedade Riemanniana orientada e ω a m-forma volume (i.e, a única m-forma tal que $\omega(e_1, \ldots, e_m)_p = 1$ para qualquer referencial ortonormal $\{e_i\}$ de T_pM coerente com a orientação de T_pM). Mostre que em coordenadas $\omega = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$.

Problema 3.6.

a) Enuncie o teorema de Stokes para formas diferenciáveis em variedade com bordo.
b) Prove o teorema de Stokes em dimensão 2.

Problema 3.7. Seja S superfície mergulhada orientável em $\mathbb{R}^3$ e $\vec{n}$ o vetor unitário normal a S dando sua orientação. Seja $I : S \to \mathbb{R}^3$ a inclusão e considere $\mathcal{A}$ o elemento de área de S ou seja, $\mathcal{A}$ é a 2-forma definida como $\mathcal{A} := I^*(i_{\vec{n}} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)$. Mostre que: $\langle \vec{F}, \vec{n} \rangle \mathcal{A} = I^*(i_{\vec{F}} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)$

Problema 3.8. Sejam M^3 uma variedade orientável com bordo em $\mathbb{R}^3$ e $\vec{F} = \sum_{i=1}^3 f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.
Prove que

$$\int_M \operatorname{div}(\vec{F})\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = \int_{\partial M} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle \mathcal{A},$$

onde $\vec{n}$ é unitário, ortogonal a ∂M apontando para fora, e ∂M tem orientação induzida.

Problema 3.9. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superficie mergulhada orientável com bordo. Então

$$\int_S \langle Rot(\vec{F}), \vec{n} \rangle \mathcal{A} = \int_{\partial S} \langle \vec{F}, \vec{t} \rangle \mathcal{L},$$

onde $\vec{F} = \sum_{i=1}^3 f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, o bordo ∂S tem orientação induzida, $\mathcal{A}$ é o elemento de área e $\mathcal{L}$ é o elemento de comprimento de ∂S, ou seja a 1-forma volume de ∂S dual ao vetor $\vec{t}$ que dá a orientação de ∂S.

Problema 3.10. Calcule $\int_{\mathbb{S}^2}\langle \vec{F}\,,\,\vec{n}\,\rangle\,\mathcal{A}$, onde $\vec{n}$ é vetor unitário apontando para fora da esfera $\mathbb{S}^2$ e $\vec{F}=(x^3+z^3)\frac{\partial}{\partial x}+(y^3+z^3)\frac{\partial}{\partial y}+\cos(x^2+y^4)\frac{\partial}{\partial z}$

Resposta: $8\pi/5$.

Problema 3.11. Calcule $\int_C\langle \vec{F}\,,\,\vec{t}\,\rangle\,\mathcal{L}$, onde C é a curva que é a interseção da esfera de raio 1 com $z=\frac{1}{2}$ orientada no sentido anti-horário quando visto de cima e $\vec{F}=(-y+\cos(x^2))\frac{\partial}{\partial x}+(x+\sin(y^2))\frac{\partial}{\partial y}$.

Resposta: $3\pi/2$.

Problema 3.12. Considere a 1-forma $\omega\in\Omega^1(\mathbb{R}^2-\{0,0\})$ definida como $\omega:=\frac{1}{x^2+y^2}\big(-ydx+xdy\big)$.

(a) verifique que ω é fechada, ou seja $d\omega=0$,
(b) verifique que $\int_{S^1}\omega=2\pi$,
(c) conclua que ω não é exata, ou seja não existe η tal que $d\eta=\omega$.

Problema 3.13 (**Lema de Poincaré). Dado um aberto $U\subset\mathbb{R}^n$ denotamos $H^k(U)$ o grupo de cohomologia de de Rham, i.e., o conjunto das k-formas fechadas em U (i.e, $d\omega=0$ onde ω é k-forma em U) quociente pelas formas exatas (i.e., $\omega=d\eta$ onde η é $k-1$ forma).

a) Sejam

$$\begin{array}{rcl} s:\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n\times\mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & (x\,,\,0\,) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \pi:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x\,,\,t\,) & \rightarrow & x. \end{array}$$

Prove que se $\pi^*\circ s^*:H^k(\mathbb{R}^{n+1})\to H^k(\mathbb{R}^{n+1})$ é um isomorfismo então $s^*:H^k(\mathbb{R}^{n+1})\to H^k(\mathbb{R}^n)$ é um isomorfismo.

b) Toda forma em $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ pode ser vista como combinação de 2 tipos de formas:

(I) $\pi^*\phi\, f(x\,,\,t\,)$
(II) $\pi^*\phi\, f(x\,,\,t\,)\,dt$,

onde ϕ é forma em $\mathbb{R}^n$. Seja $K:\Omega^k(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})\to\Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ operador linear definido da seguinte maneira:

(I) $K(\pi^*\phi\, f(x\,,\,t\,))\;=\;0$
(II) $K(\pi^*\phi\, f(x\,,\,t\,))\;=\;\pi^*\phi\int_0^t f\,(x\,,\,s\,)\,d\,s$

Prove que $1\;-\;\pi^*\,s^*\;=\;(-1)^{k-1}d\,K\;-\;K\,d$.

c) Conclua que

$$H^k(\mathbb{R}^n\,)\;=\;\begin{cases} 0 & se\quad k>0; \\ \mathbb{R} & se\quad k\;=\;0. \end{cases}$$

Problema 3.14. Seja $\vec{F}\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$. Prove que $\mathrm{Rot}\,(\vec{F}\,)\;=\;0$ se e somente se $\vec{F}$ é conservativo.

4. Conexão e Curvatura

Problema 4.1. Sejam (E, M, π) um fibrado vetorial com conexão ∇ e $\{\xi_i\}$ um referencial local definido em uma vizinhança coordenada U em M. Para $V = \sum_k v_k \xi_k$ denote $D_X V := \sum X \cdot v_k \xi_k$.

(a) Mostre que $\nabla_X V = D_X V + A(X)V$ determinando a matriz de 1-formas A em função dos simbolos de Christoffel ($\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \xi_j = \sum_k \Gamma_{i\,j}^k \xi_k$);

(b) descreva A e em termos das 1-formas de conexão ($\nabla \xi_i = \sum_j \omega_{i\,j} \otimes \xi_j$).

Problema 4.2. Sejam (E, M, π) um fibrado vetorial com conexão ∇ e $\alpha : [0, 1] \to M$ uma curva suave. Considere $V_0 \in E_{\alpha(0)}$. Demonstre que existe uma única seção V ao longo de α tal que $\frac{\nabla}{dt} V = 0$ (seção paralela) e $V(0) = V$.

Problema 4.3. Seja (M, g) variedade Riemanniana. Demonstre que ela admite uma única conexão Riemanniana, i.e, conexão em TM compatível com a métrica e livre de torção.

Problema 4.4. Sejam (M, g) e $(\tilde{M}, \tilde{g})$ variedades Riemannianas com conexões Riemannianas ∇ e $\tilde{\nabla}$. Seja $F : M \to \tilde{M}$ isometria. Mostre que:

(1) $dF_p \nabla_W V = (\tilde{\nabla}_{dFW} dFV)_{F(p)}$

(2) F preserva transporte paralelo.

Problema 4.5. Seja (M, g) variedade Riemanniana e ∇ sua conexão Riemanniana. Demonstre que as afirmações abaixo são equivalentes:

(1) Para todo $p \in M$ existe uma vizinhança U de p em M e um referencial local $\{\xi_i\}$ definido em U tal que $\nabla \xi_i = 0$.

(2) O tensor curvatura R é nulo, onde $R(X, Y)\xi = \nabla_{[X,Y]}\xi - \nabla_X \nabla_Y \xi + \nabla_Y \nabla_X \xi$.

(3) Para todo $p \in M$ existe uma vizinhança U de p em M tal que o transporte paralelo em U independe do caminho.

Problema 4.6. Seja (E, M, π) fibrado vetorial com conexão ∇. Sejam $\{\xi_i\}$ um refencial local definido em uma vizinhança U de M e $\omega_{i\,j}$ as 1-formas de conexão em relação ao referencial $\{\xi_i\}$, i.e., $\nabla \xi_i = \sum_j \omega_{i\,j} \otimes \xi_j$. Considere um outro referencial local $\{\tilde{\xi}_i\}$ na vizinhança U de M. Sejam $b_{i,j}$ as funções tais $\tilde{\xi}_i = \sum_j b_{i\,j} \xi_j$. Demonstre que $\tilde{\omega} = (db)b^{-1} + b\omega b^{-1}$ onde $\tilde{\omega}$ denota a matriz de formas de conexão em relação ao referencial $\{\tilde{\xi}_i\}$.

Problema 4.7. Seja (E, M, π) fibrado vetorial com conexão ∇. Sejam $\{\xi_i\}$ um refencial local definido em uma vizinhança U de M, $\omega_{i\,j}$ as 1-formas de conexão em relação ao referencial $\{\xi_i\}$ e $\Omega_{i\,j}$ as 2-formas de curvatura em relação ao referencial $\{\xi_i\}$, i.e, $R(\cdot, \cdot)\xi_i = \sum_j \Omega_{i\,j} \otimes \xi_j$. Demonstre que $-\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega$

Problema 4.8. Sejam (M, g) variedade Riemanniana e ∇ sua conexão Riemanniana. Sejam $\{e_i\}$ um referencial ortonormal definido em uma vizinhança U, θ_i as suas 1-formas duais, i.e, $\theta_i(e_j) = \delta_{ij}$, e ω_{ij} as 1-formas de conexão em relação ao referencial $\{e_i\}$. Demonstre que:

(a) $\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$
(b) $d\theta_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \theta_j$.

Problema 4.9. Considere $SO(n)$ com uma métrica bi-invariante (vide Problema 2.3) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ campos invariantes a esquerda (recorde Problema 2.2). Mostre que:

(a) $\langle [\vec{X}, \vec{Y}], \vec{Z} \rangle = -\langle \vec{Y}, [\vec{X}, \vec{Z}] \rangle$
(b) $\nabla_{\vec{X}} \vec{Y} = \frac{1}{2}[\vec{X}, \vec{Y}]$
(c) $R(\vec{X}, \vec{Y})\vec{Z} = \frac{1}{4}[[\vec{X}, \vec{Y}], \vec{Z}]$
(d) $\langle R(\vec{X}, \vec{Y})\vec{X}, \vec{Y} \rangle = \frac{1}{4}\langle [\vec{X}, \vec{Y}], [\vec{X}, \vec{Y}] \rangle$. Em particular conclua que a curvatura sectional K é sempre maior ou igual a 0.

Problema 4.10. Seja M aberto de $\mathbb{R}^2$. Suponha que $\theta_1 = A(x, y)dx$ e $\theta_2 = B(x, y)dy$, onde θ_i foi definida em Problema 4.8. Verifique

(a) $\omega_{1\,2} = \frac{-A_y}{B}\, dx + \frac{B_x}{A} dy$ onde $A_y := \frac{\partial A}{\partial y}$ e $B_x := \frac{\partial B}{\partial x}$

(b) $K = \frac{-1}{AB}\Big(\big(\frac{A_y}{B}\big)_y + \big(\frac{B_x}{A}\big)_x \Big)$

(c) Conclua que $K = -1$ quando M é o semi-plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$, vide definição no Problema 2.6.