

1 Exercícios do Lang

Referentes aos capítulos 15 e 16.

Pag 318: Ex 6, 7

Pag 329: Ex 2, 3, 6b), 10

Pag 335 Ex 1, 2, 3

Pag 345 Ex 4, 5, 6, 8

Pag 390 Ex 1, 2, 3, 4.

2 Exercícios de Exames de Qualificação para Mestrado na USP

Questão 2.1 (Fevereiro de 1983). Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ com $n \geq 2$ uma função de classe C^1 . Suponha que $f^{-1}(0)$ é um subconjunto não vazio e limitado de $\mathbb{R}^n$. Mostre que existe um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\text{grad } f(x_0) = 0$. O resultado continua válido se $n = 1$?

Questão 2.2 (Agosto de 1983). Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = |xy|$. Mostre que f é diferenciável no ponto 0. Mostre que não existe vizinhança de 0 em $\mathbb{R}^2$ onde f_x , e f_y existam em todos os pontos.

Questão 2.3 (Março de 1988). Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $K \subset U$ compacto e conexo. Mostre que se $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ é de classe C^1 , então f é lipschitziana em K .

Questão 2.4 (Março de 1989). Seja $\phi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ bilinear. Prove que ϕ é diferenciável e dê a diferencial.

3 Problema Desafio

O problema a seguir não será cobrado em prova, visto que utiliza o conceito de espaço vetorial de dimensão infinita. No entanto, o aluno que frequenta o curso de Cálculo Avançado tem plenas condições de resolvê-lo, visto que a aplicação derivada é definida, tanto no curso quanto no livro de Lang, como sendo uma aplicação linear limitada em espaço vetorial.

Questão 3.1. Seja H o espaço vetorial de todas as curvas suaves $\delta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $\delta(0) = \delta(1) = 0$ dotado da norma $\|\delta\| = \max\{\sup |\delta|, \sup |\delta'|\}$. Seja $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ curva suave e defina a função $A : H \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo $A(\delta) := \int_0^1 L(\alpha(t) + \delta(t), \alpha'(t) + \delta'(t))dt$, onde $L(q, \dot{q})$ é função suave definida em $\mathbb{R}^{2n}$. Mostre que A é diferenciável em 0 e que $DA_0\delta = \int_0^1 (\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}))\delta(t)dt$

Conclua então que se α minimiza $\int_0^1 L(\alpha(t), \alpha'(t))dt$, então α deve satisfazer as equações de Euler Lagrange i.e. $\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}})$.