

Exame de qualificação de mestrado do IME-USP

Cálculo Avançado

Data: 25 de Agosto de 2006

Nome: _____

Resultado: _____

1. Você deve escolher somente 4 das 6 questões, marcando as escolhidas na tabela abaixo.

Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5	Questão 6

2. O exame tem duração de 4 horas.
3. As questões têm o mesmo valor.
4. O exame pode ser feito a lápis.
5. Justifique todas as afirmações, enunciando os teoremas e propriedades usados.

Questão 1.

- a) Enuncie o Teorema da Função Inversa e o Teorema da Função Implícita.
- b) Demonstre o segundo teorema usando o primeiro.

Questão 1

Questão 2. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$ uma função de classe C^1 , onde $\mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$ é o espaço das aplicações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$. Considere $F(x) = f(x)(x)$ definida em $\mathbb{R}^n$.

- a) Mostre que F é de classe C^1 e explicita sua diferencial.
- b) Mostre que se $f(0)$ é um isomorfismo (linear bijetora) então F é um difeomorfismo entre 2 abertos de $\mathbb{R}^n$ que contêm 0.

Questão 2

Questão 3. Considere uma superfície S definida por $x^2 + y^2 - 2z = 0$ em $\mathbb{R}^3$ e um de seus pontos $p_0 = (0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$.

- a) Dê a família de planos normais a S por p_0 , i.e, os planos que contêm o vetor normal a S em p_0 .
- b) Ache o volume do sólido determinado por S e por um plano da família do item a).
- c) Entre todos os planos da família do item a), qual deles determina com S o sólido de menor volume?

Questão 3

Questão 4.

- a) Sejam A um conjunto aberto, $p_0 \in A$ e $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Suponha que existe $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ linear tal que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|f(p_0 + t h) - f(p_0) - T(t h)|}{|t h|} = 0$$

para qualquer $h \in \mathbb{R}^n$. Podemos concluir que f é diferenciável?

- b) Sejam A um conjunto aberto, $p_0 \in A$ e $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Suponha que $\frac{\partial f}{\partial x}(p_0)$ existe e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ existe e é contínua numa vizinhança de p_0 . Podemos concluir que f é diferenciável em p_0 ?

Questão 4

Questão 5.

- a) Enuncie e demonstre o teorema de Fubini para uma função f definida em um retângulo $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ em $\mathbb{R}^2$.
- b) Calcule o valor da integral abaixo:

$$\int_0^1 \int_x^{2x} \exp(y^2) dy dx + \int_1^2 \int_x^2 \exp(y^2) dy dx$$

Questão 5

Questão 6.

- a) Sejam ω a forma volume de $\mathbb{R}^3$ e $F = (f_1, f_2, f_3)$ um campo de classe C^∞ em $\mathbb{R}^3$. Considere a 1-forma $\hat{F} = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$. Mostre que $d\hat{F}$ é a 2-forma $\omega(\nabla \times F, \cdot, \cdot)$.
- b) Enuncie o teorema de Stokes para uma variedade M de classe C^∞ que tenha dimensão m .

Conclua que:

$$\int_{\partial S} \hat{F} = \int_S \langle (\nabla \times F), n \rangle \tilde{\omega},$$

onde S é uma superfície mergulhada em $\mathbb{R}^3$ orientada por um vetor normal unitário n , ∂S é o bordo de S com orientação induzida e $\tilde{\omega}$ é a 2-forma volume de S .

Dica: Se desejar utilize (sem demonstrar) o seguinte fato: Dado um campo X de classe C^∞ , temos que a 2-forma $\omega(X, \cdot, \cdot)$ restrita a S é a 2-forma $\langle X, n \rangle \tilde{\omega}$.

- c) Seja $F = (z + \cosh(\sin(x)), x + \sinh(\cos(y)), y + \cos(z)^4)$. Calcule o trabalho de F ao longo da curva C definida como interseção do parabolóide $x^2 + y^2 = z$ com o plano $2x + 2y + z = 1$ orientada de forma que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido horário. Em outras palavras, calcule $\int_C \hat{F}$.

Questão 6