Exame de qualificação de mestrado do IME-USP

Cálculo Avançado

Data: 05 de Maio de 2006

Nome: ______________________________

Resultado: ________________________

1. **Você deve escolher somente 4 das 6 questões, marcando as escolhidas na tabela abaixo.**

Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5	Questão 6

2. **O exame tem duração de 4 horas.**
3. **As questões têm o mesmo valor.**
4. **O exame pode ser feito a lápis.**
5. **Justifique todas as afirmações, enunciando os teoremas e propriedades usados.**

Questão 1. a) Mostre que para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ existe um único $z \in \mathbb{R}$ tal que $(x^4 + y^4)z^3 + 2z(x^2 + y^2) + 2z = 1$.

b) Prove que a função $z = z(x, y)$ do item a) é de classe C^∞.

c) Dê o polinômio de Taylor de ordem 2 da função $z = z(x, y)$ em $(0, 0.)$

Questão 2. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ função de classe C^1 tal que para qualquer $x, y \in \mathbb{R}^n$ temos que $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$. Prove que f é um difeomorfismo C^1 sobre $\mathbb{R}^n$. (Sugestão: Mostre que$f(\mathbb{R}^n)$ é aberto e fechado).

Questão 3. Sejam M e N subvariedades de classe C^∞ mergulhadas em $\mathbb{R}^5$ de dimensão 3 e 4 respectivamente. Suponha que $M \cap N \neq \emptyset$ e para todo $p \in M \cap N$ o subespaço $T_pM + T_pN$ tem dimensão 5. Mostre que $M \cap N$ é subvariedade C^∞ de $\mathbb{R}^5$ e determine sua dimensão.

Questão 4. Considere a superfície definida abaixo:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0\}$$

a) Calcule a integral de $f(x, y, z) = 1 - z$ sobre S.

b) Considere o campo definido abaixo:

$$F(x, y, z) = (x + \exp(y), y\,z + \sin^2(x), 5 + z^2)$$

Calcule o fluxo do campo F através da superfície S orientada pelo vetor normal unitário n o qual tem terceira componente positiva.

Questão 5. a) Enuncie o teorema de Stokes para uma variedade M de classe C^∞ que tem dimensão m.

b) Demonstre o teorema de Stokes para os seguintes casos particulares:

b.1) $M = \mathbb{R}^2$

b.2) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0\}$

c) Utilizando partição da unidade, demonstre o teorema de Stokes para uma variedade de classe C^∞ de dimensão 2.

Questão 6. a) Sejam ω a forma volume de $\mathbb{R}^3$ e X um campo de classe C^∞ em $\mathbb{R}^3$. Defina $i_X\omega$ como sendo a 2-forma $\omega(X, \cdot, \cdot)$. Mostre que $d(i_X\omega) = \mathrm{div}\,(X)\omega$.

b) Sejam S uma superfície mergulhada em $\mathbb{R}^3$ fechada de classe C^∞ e U o sólido que tem S como fronteira. Suponha que S é orientada por um vetor normal unitário n apontando para fora. Mostre que $i_X\omega$ restrita a S é a 2-forma $< X, n > \tilde{\omega}$ onde $\tilde{\omega}$ é a 2-forma volume de S.

c) Por fim, demonstre o teorema de Gauss, i.e.,

$$\int_U \mathrm{div}\,(X)\omega = \int_S < n, X > \tilde{\omega}$$