



0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Utilize caneta azul ou preta e preencha completamente a quadrícula.  
Exemplo: ■. Não use ☒.

**Turma:** (somente um número; consulte a pessoa responsável se não souber)

4    5    6    7    8    9    10    11    12    13    14    20

← Marque as quadrículas ao lado para formar o seu número USP e escreva seu nome completo em letra legível na linha pontilhada abaixão. **Se seu número possui menos que 8 dígitos complete com zeros à esquerda.**

Nome:

.....

Esta prova tem duração de 120 minutos. Não desmonte a prova.

**Q1 [1,5 pontos]** Simule o código abaixo e selecione as opções correspondentes à saída impressa do programa.

```
def f(L, x):
    L.append(x)
    i = len(L)-2
    while x < L[i]:
        L[i+1] = L[i]
        i -= 1
    L[i+1] = x
def g(P):
    s = 0
    for i in range(1,len(P)):
        if P[i] > P[i-1]:
            s += 1
    return s
def main():
    L = [28, 34, 72, 10, 82, 56, 63]
    P = [1, 3, 2, 4, 0, 5]
    P.append(len(P))
    print(L[g(P)])
    temp = P[2]
    P[2] = P[5]
    P[5] = temp
    for i in range(len(P)-5):
        print(L[P[i*2]])
    f(L, 42)
    A = L[2:5]
    print(A[1])
    print(A[2])
main()
```

Rascunho

Selecione o primeiro número impresso:

42     34     56     72     63     82     10     28

Selecione o segundo número impresso:

34     82     63     42     28     72     56     10

Selecione o terceiro número impresso:

56     34     72     42     10     63     28     82

Selecione o quarto número impresso:

72     34     42     10     82     28     63     56

Selecione o quinto número impresso:

10     63     72     28     56     34     42     82

**Q2 [2,5 pontos]**

Implemente uma função chamada `frequencia_relativa(L)` que recebe como parâmetro uma lista `L` e devolve duas listas indicando a frequência relativa dos elementos de `L`. Por exemplo, para a lista `L = [3, 4, 5, 4, 5, 2, 7, 4, 4, 2]`, a função `frequencia_relativa` deve devolver as seguintes listas:

[3, 4, 5, 2, 7], [0.1, 0.4, 0.2, 0.2, 0.1]

indicando que o número 3 representa 10% dos elementos, o número 4 representa 40% dos elementos e assim por diante.

Para facilitar a implementação da função `frequencia_relativa`, primeiro implemente a função `pertence(elemento, lista)` que verifica se um inteiro `elemento` ocorre na dada lista. Se ele ocorre, a função devolve a posição da primeira ocorrência, caso contrário devolve -1.

```
def pertence(elemento, lista):
    for i in range([L1]):
        if lista[i] == [L2]:
            return [L3]
    return -1

def frequencia_relativa(L):
    elementos_distintos = []
    [L4]
    for elemento in L:
        [L5]
        if indice == -1:
            elementos_distintos.append(elemento)
            [L6]
        else:
            frequencia[indice] += 1

    for i in range(len(frequencia)):
        [L7]
    return [L8]
```

Preencha as lacunas no código acima (L1 até L8), assinalando as respostas correspondentes abaixo.

**Consideração:** Para cada lacuna, assinale no máximo uma resposta.

L1:	<input type="checkbox"/> len(lista)	<input type="checkbox"/> lista	<input type="checkbox"/> len(i)	<input type="checkbox"/> elemento	<input type="checkbox"/> lista[i]
L2:	<input type="checkbox"/> lista[elemento]	<input type="checkbox"/> elemento	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> lista[i]	<input type="checkbox"/> len(lista)
L3:	<input type="checkbox"/> lista[i]	<input type="checkbox"/> +1	<input type="checkbox"/> elemento	<input type="checkbox"/> lista	<input type="checkbox"/> i
L4:	<input type="checkbox"/> frequencia = []	<input type="checkbox"/> elementos_distintos.append(frequencia)	<input type="checkbox"/> frequencia = [[]]	<input type="checkbox"/> elementos_distintos.append(L)	<input type="checkbox"/> frequencia = 0
L5:	<input type="checkbox"/> indice = frequencia_relativa(L)	<input type="checkbox"/> indice = frequencia_relativa(elemento, elementos_distintos)	<input type="checkbox"/> indice = pertence(elementos_distintos, indice)	<input type="checkbox"/> indice = pertence(elementos_distintos, elemento)	<input type="checkbox"/> indice = pertence(elemento, elementos_distintos)
L6:	<input type="checkbox"/> frequencia.append(-1)	<input type="checkbox"/> frequencia.append(1)	<input type="checkbox"/> elemento.next()	<input type="checkbox"/> frequencia[indice] = 1	<input type="checkbox"/> frequencia.append(0)
L7:	<input type="checkbox"/> frequencia[i] /= 1/len(L)	<input type="checkbox"/> frequencia[i] +=1	<input type="checkbox"/> frequencia[i] *= len(L)	<input type="checkbox"/> frequencia[i] /= L	<input type="checkbox"/> frequencia[i] /= len(L)
L8:	<input type="checkbox"/> elemento, elementos_distintos	<input type="checkbox"/> L, frequencia	<input type="checkbox"/> frequencia, elementos_distintos	<input type="checkbox"/> frequencia, elemento	<input type="checkbox"/> elementos_distintos, frequencia



**Q3 [2,5 pontos]** A trajetória de uma nave pode ser descrita por uma lista de  $t$  pontos  $T = [P_0, P_1, \dots, P_{t-1}]$ , com as posições  $P_i = [x_i, y_i]$ ,  $0 \leq i < t$ , amostradas da nave em intervalos fixos de tempo.

Dadas as trajetórias de um conjunto de  $n$  naves, na forma de uma lista  $LN = [T_0, T_1, \dots, T_{n-1}]$ , faça uma função `nave_percorreu_maior_distancia` em Python que calcula qual nave percorreu a maior distância total. A função deve devolver o índice da nave que percorreu a maior distância e o valor desta distância.

Faça uma função `distancia` que calcula a distância de uma nave na posição  $P = [x, y]$  até a superfície de um astro (corpo celeste)  $A = [[x_c, y_c], R]$ , onde  $x_c$  e  $y_c$  são a posição do seu centro e  $R$  o valor do seu raio. Considere que a nave possui dimensões desprezíveis em relação ao tamanho do astro e que não há colisão.

Dada a trajetória de uma nave  $T = [P_0, P_1, \dots, P_{t-1}]$  e um astro  $A = [[x_c, y_c], R]$ , faça uma função `distancia_minima` que devolve qual foi a menor distância que a nave esteve do astro ao longo da sua trajetória.

Dadas as trajetórias de  $n$  naves, numeradas de 0 a  $n-1$ , na forma de uma lista  $LN = [T_0, T_1, \dots, T_{n-1}]$ , e uma lista de  $m$  astros  $LA = [A_0, \dots, A_{m-1}]$ , faça um programa que diz qual nave percorreu a maior distância e quais foram as distâncias mínimas que cada nave assumiu ao longo de sua trajetória em relação a cada um dos astros.

```
def nave_percorreu_maior_distancia(LN):
    im, dm = 0, 0.0
    for i in [L1]:
        d = 0.0
        for j in [L2]:
            L3
            L4
        L5
    return im, dm

def distancia(P, A):
    return [L6]

def distancia_minima(T, A):
    dm = -1
    for i in [L7]:
        L8
        if [L9]:
            dm = d
    return dm
```

```
def main():
    T0 = [[150000,214002],[150000,214001],[150000,214000]]
    T1 = [[20000, 20000],[20000, 20001],[20001, 20002]]
    LN = [T0, T1]
    LA = [ [[0,0], 28000], [[150000,150000], 20000] ]
    i,d = nave_percorreu_maior_distancia(LN)
    print("nave %d percorreu a maior distância de %.2f km."%(i,d))
    for i in range(len(LN)):
        for j in [L10]:
            dm = [L11]
        print("Distância (nave %d,astro %d): %.2f km."%(i,j,dm))
main()
```

#### Exemplo de execução do programa completo:

```
nave 1 percorreu a maior distância de 2.41 km.
Distância (nave 0,astro 0): 233335.03 km.
Distância (nave 0,astro 1): 44000.00 km.
Distância (nave 1,astro 0): 284.27 km.
Distância (nave 1,astro 1): 163845.64 km.
```

Para cada um dos 11 itens a seguir, correspondendo às lacunas no código acima, assinale a única resposta correta.

L1:	<input type="checkbox"/>	<code>range(1,len(LN))</code>	<input type="checkbox"/>	<code>range(len(LN))</code>	<input type="checkbox"/>	<code>range(LN)</code>	<input type="checkbox"/>	<code>len(LN)</code>	<input type="checkbox"/>	<code>range(len(LN),0,-1)</code>
L2:	<input type="checkbox"/>	<code>range(1,len(LN[i]))</code>	<input type="checkbox"/>	<code>range(len(LN[i]))</code>	<input type="checkbox"/>	<code>range(LN[i],1,-1)</code>	<input type="checkbox"/>	<code>len(LN[i])</code>	<input type="checkbox"/>	<code>range(1,LN[i]-1)</code>
L3:	<input type="checkbox"/>	<code>P,Pa = LN[i][j],LN[i][j+1]</code>	<input type="checkbox"/>	<code>P,Pa = [i,j],[i,j-1]</code>	<input type="checkbox"/>	<code>P,Pa = LN[i][j],LN[i][j-1]</code>	<input type="checkbox"/>	<code>P,Pa = LN[j][i],LN[j][i+1]</code>		
	<input type="checkbox"/>	<code>P,Pa = LN[i],LN[j]</code>	<input type="checkbox"/>	<code>P,Pa = LN[j][i],LN[j][i+1]</code>						
L4:	<input type="checkbox"/>	<code>d += ((P-Pa)**2)**1/2</code>	<input type="checkbox"/>	<code>d += ((P[0]-Pa[1])**2 + (P[0]-Pa[1])**2)**0.5</code>	<input type="checkbox"/>	<code>d += ((P[0]-Pa[0])**2 + (P[1]-Pa[1])**2)**0.5</code>	<input type="checkbox"/>	<code>d += (P[0]-Pa[0]) - (P[1]-Pa[1])</code>		
L5:	<input type="checkbox"/>	<code>if d &lt; dm:</code>	<input type="checkbox"/>	<code>if d**0.5 &lt; dm:</code>	<input type="checkbox"/>	<code>if d &gt; dm:</code>	<input type="checkbox"/>	<code>if d &gt; dm:</code>	<input type="checkbox"/>	<code>if d &gt; dm:</code>
		<code>im,dm = i,d</code>		<code>dm = d**0.5</code>		<code>im = i</code>		<code>return i,d</code>		<code>im,dm = i,d</code>
L6:	<input type="checkbox"/>	<code>((P[0]-A[0][0])**2 + (P[1]-A[1][0])**2)**0.5 - A[1]</code>	<input type="checkbox"/>	<code>((P[0]-A[0][0])**2 + (P[1]-A[0][1])**2)**0.5 - A[1]</code>	<input type="checkbox"/>	<code>((P[0]-A[0][0])**2 + (P[1]-A[0][1])**2)**0.5 - A[1]</code>	<input type="checkbox"/>	<code>((P[0]-A[0][0])**2 + (P[1]-A[1][0])**2)**0.5 - A[1]</code>	<input type="checkbox"/>	<code>((P[0]-A[0][0])**2 + (P[1]-A[1][0])**2)**0.5 - A[1]</code>
L7:	<input type="checkbox"/>	<code>range(T)</code>	<input type="checkbox"/>	<code>range(1,len(T)+1)</code>	<input type="checkbox"/>	<code>range(len(T))</code>	<input type="checkbox"/>	<code>range(len(T)-1)</code>	<input type="checkbox"/>	<code>range(len(T),1,-1)</code>
L8:	<input type="checkbox"/>	<code>d = distancia(T[i], A)</code>	<input type="checkbox"/>	<code>d = distancia(T[i][0], A)</code>	<input type="checkbox"/>	<code>d = distancia(T[i], A[0])</code>	<input type="checkbox"/>	<code>d = distancia(T[i+1], A[1])</code>	<input type="checkbox"/>	<code>d = distancia(T, A[i])</code>
L9:	<input type="checkbox"/>	<code>dm == -1 or d &gt; dm</code>	<input type="checkbox"/>	<code>not(dm == -1 and d &lt; dm)</code>	<input type="checkbox"/>	<code>dm == -1 and d &lt; dm</code>	<input type="checkbox"/>	<code>dm == -1 or d &lt; dm</code>	<input type="checkbox"/>	<code>dm != -1 or d-dm &gt; 0</code>
L10:	<input type="checkbox"/>	<code>range(1,len(LA))</code>	<input type="checkbox"/>	<code>range(LA)</code>	<input type="checkbox"/>	<code>range(len(LA)-1,0,-1)</code>	<input type="checkbox"/>	<code>range(len(LA))</code>	<input type="checkbox"/>	<code>range(len(LA)-1)</code>
L11:	<input type="checkbox"/>	<code>distancia_minima(LN[i], LA[j][0])</code>	<input type="checkbox"/>	<code>distancia(LN[i][j], LA[j][0])</code>	<input type="checkbox"/>	<code>distancia_minima(LN[i], LA[j])</code>	<input type="checkbox"/>	<code>distancia(LN[i], LA[j])</code>	<input type="checkbox"/>	<code>distancia(LN[i], LA[j])</code>



**Q4 [2,5 pontos]** Uma matriz  $M$  é dita Matriz de Hadamard se (1)  $M$  é quadrada; (2) todas as suas células contém 1 ou -1; e (3) todas as suas linhas são ortogonais entre si, ou seja, que o produto escalar de quaisquer duas linhas é 0. Lembre-se que o produto escalar de dois vetores  $(a_1, \dots, a_n)$  e  $(b_1, \dots, b_n)$  é o somatório  $\sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n$ . Queremos fazer uma função (`matriz_hadamard`) que decide se uma dada matriz é uma Matriz de Hadamard. Para isso, vamos fazer uma função auxiliar (`ortogonais`) que decide se duas linhas são ortogonais.

```
def ortogonais(linha1, linha2):
    produto_escalar = 0
    for i in range(len(linha1)):
        produto_escalar += linha1[i]*[L1]
    return [L2]

def matriz_hadamard(M):
    n,m = len(M),[L3]

    if n != m:
        return [L4]

[L5]
for i in range(n):
    for j in [L6]:
        if [L7]:
            [L8]

        if i != j and [L9]:
            é_hadamard = False

    return [L10]
```

Preencha as lacunas no código acima (L1 até L10), de forma a obter as funções descritas.

OBS: Para cada lacuna, assinale no máximo uma resposta.

L1:	<input type="checkbox"/> linha2[j]	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> linha2[i]	<input type="checkbox"/> i	<input type="checkbox"/> len(linha1)
L2:	<input type="checkbox"/> (produto_escalar != 0)	<input type="checkbox"/> (produto_escalar == 0)	<input type="checkbox"/> produto_escalar	<input type="checkbox"/> True	<input type="checkbox"/> False
L3:	<input type="checkbox"/> n	<input type="checkbox"/> len(M[0])	<input type="checkbox"/> M[0][0]	<input type="checkbox"/> len(M)	<input type="checkbox"/> M[0]
L4:	<input type="checkbox"/> m	<input type="checkbox"/> True	<input type="checkbox"/> False	<input type="checkbox"/> n != m	<input type="checkbox"/> n
L5:	<input type="checkbox"/> i,j = 0,0	<input type="checkbox"/> n = m	<input type="checkbox"/> é_hadamard = False	<input type="checkbox"/> i = 0	<input type="checkbox"/> é_hadamard = True
L6:	<input type="checkbox"/> range(i+1)	<input type="checkbox"/> M[i]	<input type="checkbox"/> range(n)	<input type="checkbox"/> range(n+1)	<input type="checkbox"/> range(2*i)
L7:	<input type="checkbox"/> M[i][j] == -1 or M[i][j] == 1	<input type="checkbox"/> M[i][j] != 1 or M[i][j] != -1	<input type="checkbox"/> M[i][j] == 1 and M[i][j] == -1	<input type="checkbox"/> M[i][j] == 1 or M[i][j] == -1	<input type="checkbox"/> M[i][j] != 1 and M[i][j] != -1
L8:	<input type="checkbox"/> é_hadamard = False	<input type="checkbox"/> j += 1	<input type="checkbox"/> i += 1	<input type="checkbox"/> é_hadamard = True	<input type="checkbox"/> é_hadamard = not é_hadamard
L9:	<input type="checkbox"/> not ortogonais(M[i],M[i])	<input type="checkbox"/> ortogonais(M[j],M[i])	<input type="checkbox"/> not ortogonais(M[j],M[j])	<input type="checkbox"/> ortogonais(M[i],M[j])	<input type="checkbox"/> not ortogonais(M[i],M[j])
L10:	<input type="checkbox"/> é_hadamard	<input type="checkbox"/> True	<input type="checkbox"/> not é_hadamard	<input type="checkbox"/> False	<input type="checkbox"/> é_hadamard == False



**Q5 [1 ponto]** Linguagens de programação permitem a definição de funções, o que ajuda na organização (modularização) do código. Algumas das principais vantagens do uso de funções são:

- (1) permitem resolver alguns problemas que seriam impossíveis de resolver computacionalmente sem funções; (2) permitem reaproveitar código existente minimizando a duplicação de código e (3) permitem esconder detalhes de implementação dentro de um trecho de código, permitindo uma visão de mais alto nível, viabilizando programas mais complexos.
- (1) permitem quebrar tarefas grandes em menores facilitando o entendimento e manutenção do código; (2) permitem reaproveitar código existente minimizando a duplicação de código e (3) permitem o uso de depuradores (debuggers), que facilitam a correção de erros.
- (1) permitem quebrar tarefas grandes em menores facilitando o entendimento e manutenção do código; (2) permitem implementar soluções mais eficientes, que chegam na solução mais rapidamente e (3) permitem esconder detalhes de implementação dentro de um trecho de código, permitindo uma visão de mais alto nível, viabilizando programas mais complexos.
- (1) permitem quebrar tarefas grandes em menores facilitando o entendimento e manutenção do código; (2) permitem reaproveitar código existente minimizando a duplicação de código e (3) permitem que o código fique mais extenso, aproveitando melhor a memória disponível.
- (1) permitem quebrar tarefas grandes em menores facilitando o entendimento e manutenção do código; (2) permitem reaproveitar código existente minimizando a duplicação de código e (3) permitem esconder detalhes de implementação dentro de um trecho de código, permitindo uma visão de mais alto nível, viabilizando programas mais complexos.

Com base nas alternativas acima, assinale a única alternativa correta.