



0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Utilize caneta azul ou preta e preencha completamente a quadrícula.  
Exemplo: ■. **Não use** ☒.

**Turma:** (somente um número; consulte a pessoa responsável se não souber)

4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	20
---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----

← Marque as quadrículas ao lado para formar o seu número USP e escreva seu nome completo em letra legível na linha pontilhada abaixo. **Se seu número possui menos que 8 dígitos complete com zeros à esquerda.**

Nome:

.....

*Esta prova tem duração de 120 minutos. Não desmonte a prova.*

**Q1 [2 pontos]** Simule o código abaixo e selecione as opções correspondentes à saída impressa do programa.

```
x = 1
y = 1
i = 33
while i%3 != x%2:
    i = i+2*y
    if y<x:
        i = i+x
        y = x+y
    else:
        i = i-x
        x = x+y
    y = i//2
    if x>y:
        i = i+1
print(x,y)
```

Rascunho

Selecione o primeiro par de números impressos:

<input type="checkbox"/> 2 18	<input type="checkbox"/> 2 17	<input type="checkbox"/> 4 15	<input type="checkbox"/> 3 13	<input type="checkbox"/> 1 19	<input type="checkbox"/> 2 12	<input type="checkbox"/> 3 21
-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------

Selecione o segundo par de números impressos:

<input type="checkbox"/> 13 32	<input type="checkbox"/> 12 28	<input type="checkbox"/> 15 35	<input type="checkbox"/> 18 36	<input type="checkbox"/> 19 38	<input type="checkbox"/> 19 33	<input type="checkbox"/> 22 32
--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------

Selecione o terceiro par de números impressos ou N/A (não aplicável) se não há mais que 2 impressões:

<input type="checkbox"/> 52 56	<input type="checkbox"/> 53 51	<input type="checkbox"/> 55 55	<input type="checkbox"/> 53 52	<input type="checkbox"/> N/A	<input type="checkbox"/> 53 56	<input type="checkbox"/> 52 59	<input type="checkbox"/> 51 53
--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------

Selecione o quarto par de números impressos ou N/A (não aplicável) se não há mais que 3 impressões:

<input type="checkbox"/> 110 85	<input type="checkbox"/> 108 82	<input type="checkbox"/> 108 86	<input type="checkbox"/> 109 82	<input type="checkbox"/> N/A	<input type="checkbox"/> 105 84	<input type="checkbox"/> 102 86	<input type="checkbox"/> 103 83
---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------



**Q2 [2 pontos]** Cartões de crédito geralmente tem 16 dígitos. Os primeiros dígitos à esquerda estão relacionados à bandeira do cartão (Visa começa com dígito 4, Mastercard varia de 51 a 55). O último dígito (mais à direita) é um dígito verificador calculado a partir dos demais dígitos pelo algoritmo de Luhn, como medida de segurança, a fim de evitar falsificações, ou erros de digitação, conforme explicado no quadro ao lado.

Preencha as lacunas no código abaixo (L1 até L12), de forma a obter um programa que, dado um inteiro com 16 dígitos de um cartão, verifica se seu dígito verificador está correto. Caso correto, verificar também se é Mastercard.

```
cre = int(input("Digite o cartão de crédito: "))
L1
#laço da soma dos dígitos em posições pares.
while c != 0:
    L2
    if t >= 10:
        L3
    L4
    L5
L6
#laço da soma dos dígitos em posições ímpares.
while L7:
    L8
    L9
L10 #dígito verificador
if L11:
    print("cartão válido",end=" ")
    if L12:
        print("(Mastercard)")
else:
    print("cartão inválido:",end=" ")
    print("dígito verificador deveria ser",ver)
```

**Algoritmo de Luhn:** Exemplo para verificar se o dígito verificador 7 está correto no cartão de número 4984232050486427. Numerando os dígitos da direita para esquerda, iniciando em 1, tomamos os dígitos em posições pares (grifadas) multiplicados por dois. Porém, caso o produto resulte em algum número de 2 dígitos, estes devem ser somados. Logo, para o exemplo temos:  $2 \times 2$ ,  $6 \times 2$ ,  $4 \times 2$ ,  $5 \times 2$ ,  $2 \times 2$ ,  $2 \times 2$ ,  $8 \times 2$ ,  $4 \times 2 \Rightarrow 4, 12, 8, 10, 4, 4, 16, 8 \Rightarrow 4, 3, 8, 1, 4, 4, 7, 8$ . Calculamos então a soma dos valores obtidos, que resulta em  $4 + 3 + 8 + 1 + 4 + 4 + 7 + 8 = 39$ . A seguir, adicionamos ao somatório todos os dígitos em posições ímpares que não foram usados na etapa anterior, com exceção do primeiro à direita. Assim, temos  $39 + 9 + 4 + 3 + 0 + 0 + 8 + 4 = 39 + 28 = 67$ . Para 67 virar um múltiplo de 10 faltam 3 unidades. Então 3 é o nosso dígito verificador. Portanto, o valor 7 à direita está incorreto e o cartão 4984232050486427 é inválido.

**Exemplos de execução do programa completo:**

Digite o cartão de crédito: 5313153010488482  
cartão válido (Mastercard)

Digite o cartão de crédito: 4984232050486427  
cartão inválido: dígito verificador deveria ser 3

Para cada um dos **12** itens a seguir, correspondendo as lacunas no código acima, assinale a única resposta correta.

L1:	<input type="checkbox"/> c,soma = cre, 0	<input type="checkbox"/> c,soma = cre//10, cre	<input type="checkbox"/> c,soma = cre//100, cre%10	<input type="checkbox"/> c,soma = cre//10, 0	<input type="checkbox"/> c,soma = cre%10, 1
L2:	<input type="checkbox"/> t = (c % 10)*2	<input type="checkbox"/> t = (c*2)% 10	<input type="checkbox"/> t = c % 10	<input type="checkbox"/> t = c * 2	<input type="checkbox"/> t += c % 10
L3:	<input type="checkbox"/> t = t%10 + t//10	<input type="checkbox"/> t += t%10	<input type="checkbox"/> t += t//10	<input type="checkbox"/> t = t - (t//10)*10	<input type="checkbox"/> t = t - t%10
L4:	<input type="checkbox"/> soma = t * 2	<input type="checkbox"/> soma += t	<input type="checkbox"/> soma += c * 2	<input type="checkbox"/> soma = soma + c	<input type="checkbox"/> soma = t + c
L5:	<input type="checkbox"/> c = c % 10	<input type="checkbox"/> c = c - 100	<input type="checkbox"/> c = c // 10	<input type="checkbox"/> c = c % 100	<input type="checkbox"/> c = c // 100
L6:	<input type="checkbox"/> c = cre//100	<input type="checkbox"/> c = cre%100	<input type="checkbox"/> c = c//100	<input type="checkbox"/> c = c//10	<input type="checkbox"/> c = cre//10
L7:	<input type="checkbox"/> c >= 0	<input type="checkbox"/> c < 0	<input type="checkbox"/> c <= cre	<input type="checkbox"/> c == 0	<input type="checkbox"/> c != 0
L8:	<input type="checkbox"/> soma += 10 % c	<input type="checkbox"/> soma += c % 10	<input type="checkbox"/> soma = soma % 10	<input type="checkbox"/> soma = soma + c	<input type="checkbox"/> soma += c // 10
L9:	<input type="checkbox"/> c = c - 100	<input type="checkbox"/> c = c // 10	<input type="checkbox"/> c = c % 100	<input type="checkbox"/> c = c % 10	<input type="checkbox"/> c = c // 100
L10:	<input type="checkbox"/> ver = (10 - 10%soma)	<input type="checkbox"/> ver = 10 - soma//10	<input type="checkbox"/> ver = (soma%10 - 10)	<input type="checkbox"/> ver = soma%10	<input type="checkbox"/> ver = (10 - soma%10)%10
L11:	<input type="checkbox"/> cre % 10 != ver	<input type="checkbox"/> cre % 10 == ver	<input type="checkbox"/> cre == ver % 10	<input type="checkbox"/> cre // 10 == ver	<input type="checkbox"/> cre != ver % 10
L12:	<input type="checkbox"/> cre//10**14 >= 51 and cre//10**14 <= 55	<input type="checkbox"/> cre//10**14 >= 51 or cre//10**14 <= 55	<input type="checkbox"/> cre%100 == 51 and cre%100 == 55	<input type="checkbox"/> cre//100 >= 51 and cre//100 <= 55	<input type="checkbox"/> cre//100 >= 51 or cre//100 <= 55



**Q3 [3 pontos]** Divisores próprios de um número positivo  $N$  são todos os divisores inteiros positivos de  $N$  exceto o próprio  $N$ . Por exemplo, para o número 6, seus divisores próprios são 1, 2 e 3.

Considere as seguintes definições:

**Números amigos:** dizemos que dois naturais  $a$  e  $b$  são amigos se cada um deles é igual à soma dos divisores próprios do outro. Um exemplo é o par 220 e 284, uma vez que os divisores próprios de 220 são 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 e 110, que somam 284, e os divisores próprios de 284 são 1, 2, 4, 71 e 142, que somam 220.

**Números mutuamente amigos:** dois números  $a$  e  $b$  são mutuamente amigos, se a razão entre a soma de todos os divisores do número  $a$  e o número  $a$  é igual a razão entre a soma de todos os divisores do número  $b$  e o número  $b$ . Por exemplo, os números 30 e 140 são mutuamente amigos, pois:

- para 30 temos  $(1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 10 + 15 + 30) / 30 = 72/30 = 12 / 5$  e
- para 140 temos  $(1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 10 + 14 + 20 + 28 + 35 + 70 + 140) / 140 = 336/140 = 12 / 5$ .

**Números primos entre si:** dois inteiros  $a$  e  $b$  são primos entre si se o único divisor comum a ambos é 1.

Preencha as lacunas no código abaixo (L1 até L10), de forma a obter um programa que, dados dois inteiros positivos distintos  $a$  e  $b$  ( $a > 0$ ,  $b > 0$  e  $a \neq b$ ), calcula a soma dos seus divisores próprios (em  $sa$  e  $sb$ , respectivamente) e verifica se eles satisfazem as definições anteriores.

```
a = int(input("Digite a: "))
b = int(input("Digite b: "))
L1
while L2:
    if L3:
        L4
    L5
    L6
    i = i + 1
print(a,"gera soma dos divisores próprios",sa)
print(b,"gera soma dos divisores próprios",sb)
if L7:
    print("números amigos")
if L8:
    print("números mutuamente amigos")
mdc = a #máximo divisor comum
while L9:
    mdc = mdc - 1
if L10:
    print("primos entre si")
```

**Exemplos de execução do programa completo:**

```
Digite a: 220
Digite b: 284
220 gera soma dos divisores próprios 284
284 gera soma dos divisores próprios 220
números amigos
```

```
Digite a: 30
Digite b: 140
30 gera soma dos divisores próprios 42
140 gera soma dos divisores próprios 196
números mutuamente amigos
```

```
Digite a: 8
Digite b: 9
8 gera soma dos divisores próprios 7
9 gera soma dos divisores próprios 4
primos entre si
```

Para cada um dos **10** itens a seguir, correspondendo as lacunas no código acima, assinale a única resposta correta.

L1:	<input type="checkbox"/> $sa, sb, i = 1, 1, 0$	<input type="checkbox"/> $sa, sb, i = 0, 0, 2$	<input type="checkbox"/> $sa, sb, i = 0, 0, 1$	<input type="checkbox"/> $sa, sb, i = 2, 2, 0$	<input type="checkbox"/> $sa, sb, i = 1, 1, 1$
L2:	<input type="checkbox"/> $i < a - b$	<input type="checkbox"/> $i < a$ and $i < b$	<input type="checkbox"/> $i < a$	<input type="checkbox"/> $i < a$ or $i < b$	<input type="checkbox"/> $i < b$
L3:	<input type="checkbox"/> $a \% i == 0$ or $i < a$	<input type="checkbox"/> $a \% i != 0$ and $i < a$	<input type="checkbox"/> $a \% i != 0$ or $i < a$	<input type="checkbox"/> $a \% i == 0$ and $i < a$	<input type="checkbox"/> $a \% i == 0$ and $i < a$
L4:	<input type="checkbox"/> $sa = sa - 1$	<input type="checkbox"/> $sa += 1$	<input type="checkbox"/> $sa = sa + i$	<input type="checkbox"/> $sa = a - i$	<input type="checkbox"/> $sa += a$
L5:	<input type="checkbox"/> $elif b \% i == 0$ and $i <= b$ :	<input type="checkbox"/> $if b \% i != 0$ and $i < b$ :	<input type="checkbox"/> $if b \% i == 0$ and $i < b$ :	<input type="checkbox"/> $if b \% i == 0$ or $i < b$ :	<input type="checkbox"/> $if b \% i != 0$ or $i < b$ :
L6:	<input type="checkbox"/> $sb = sb + i$	<input type="checkbox"/> $sb = sb - 1$	<input type="checkbox"/> $sb += 1$	<input type="checkbox"/> $sb += b$	<input type="checkbox"/> $sb = b - i$
L7:	<input type="checkbox"/> $sa != b$ or $sb != a$	<input type="checkbox"/> $sa == sb$	<input type="checkbox"/> $sa == b$ or $sb == a$	<input type="checkbox"/> $sa == b$ and $sb == a$	<input type="checkbox"/> $sa != b$ and $sb != a$
L8:	<input type="checkbox"/> $(sa + a) // b == (sb + b) // a$	<input type="checkbox"/> $(sa + b) // a == (sb + a) // b$	<input type="checkbox"/> $(sa + a) // a == (sb + b) // b$	<input type="checkbox"/> $(sa + a) * b == (sb + b) * a$	<input type="checkbox"/> $(sa + a) * a == (sb + b) * b$
L9:	<input type="checkbox"/> $a \% mdc == b \% mdc$	<input type="checkbox"/> $a \% mdc == 0$ or $b \% mdc == 0$	<input type="checkbox"/> $not(a \% mdc == 0$ and $b \% mdc == 0)$	<input type="checkbox"/> $not(a \% mdc == 0$ or $b \% mdc == 0)$	<input type="checkbox"/> $a \% mdc == 0$ and $b \% mdc == 0$
L10:	<input type="checkbox"/> $mdc > 1$	<input type="checkbox"/> $mdc >= 1$	<input type="checkbox"/> $mdc == 1$	<input type="checkbox"/> $a \% mdc == b \% mdc$	<input type="checkbox"/> $mdc != 1$



**Q4 [3 pontos]** Preencha as lacunas no código abaixo (L1 até L11), de forma a obter um programa que lê um número inteiro  $n$  ( $n > 0$ ) e os dados de GPS de  $n$  participantes de uma corrida de rua (um número inteiro por participante) e calcula qual o participante mais rápido e sua velocidade. Os dados do GPS têm 4 dígitos, sendo os dois primeiros a distância percorrida (em metros) e os dois últimos o tempo que o participante levou para percorrer aquela distância (em segundos).

OBS: Por simplicidade, considere o cálculo da velocidade apenas com valores inteiros, descartando a parte fracionária.

```
n = int(input("Digite o número de participantes: "))
```

```
L1
```

```
L2
```

```
L3
```

```
L4
```

```
L5
```

```
L6
```

```
L7
```

```
L8
```

```
L9
```

```
L10
```

```
L11
```

```
print("O participante %d é o mais rápido (%d m/s)."%(imax, vmax))
```

**Exemplo de execução do programa:**

```
Digite o número de participantes: 2
Digite os dados para o participante 1.
4010
Digite os dados para o participante 2.
6030
O participante 1 é o mais rápido (4 m/s).
```

Para cada um dos **11** itens a seguir, correspondendo as lacunas no código acima, assinale a única resposta que torna o programa acima correto.

L1:	<input type="checkbox"/> i = 1	<input type="checkbox"/> i = 0	<input type="checkbox"/> while n>0:	<input type="checkbox"/> n = 0	<input type="checkbox"/> i = n-1
L2:	<input type="checkbox"/> vmax = gps	<input type="checkbox"/> vmax = 0	<input type="checkbox"/> i = 1	<input type="checkbox"/> if n>0:	<input type="checkbox"/> while i<n:
L3:	<input type="checkbox"/> i = 1	<input type="checkbox"/> imax = gps	<input type="checkbox"/> imax = 0	<input type="checkbox"/> if n>0:	<input type="checkbox"/> while i<n:
L4:	<input type="checkbox"/> if i<n:	<input type="checkbox"/> if n>0:	<input type="checkbox"/> while i>0:	<input type="checkbox"/> while n>0:	<input type="checkbox"/> while i<n:
L5:	<input type="checkbox"/> if i<n:	<input type="checkbox"/> if vmax>v:	<input type="checkbox"/> i=i+1	<input type="checkbox"/> while i>0:	<input type="checkbox"/> vmax = vmax+1
L6:	<input type="checkbox"/> gps = int(input())	<input type="checkbox"/> gps = gps + 1	<input type="checkbox"/> print("Digite os dados para o participante %d."%n)	<input type="checkbox"/> print("Digite os dados para o participante %d."%i)	
L7:	<input type="checkbox"/> gps=int(input())	<input type="checkbox"/> while i<n:	<input type="checkbox"/> i = i+1	<input type="checkbox"/> print("Digite os dados para o participante %d."%n)	<input type="checkbox"/> if vm>vmax:
L8:	<input type="checkbox"/> vm = (gps%100)//(gps//100)	<input type="checkbox"/> if i<n:	<input type="checkbox"/> vm = gps%100	<input type="checkbox"/> gps = gps//100	
L9:	<input type="checkbox"/> if vm>vmax:	<input type="checkbox"/> i = i+1	<input type="checkbox"/> if imax>i:	<input type="checkbox"/> while n>0:	<input type="checkbox"/> while i<n:
L10:	<input type="checkbox"/> i = i+1	<input type="checkbox"/> while vm>vmax:	<input type="checkbox"/> if vm>vmax:	<input type="checkbox"/> while i<n:	<input type="checkbox"/> vmax = vm
L11:	<input type="checkbox"/> while i<n:	<input type="checkbox"/> imax = i	<input type="checkbox"/> if imax>i:	<input type="checkbox"/> imax = imax+1	<input type="checkbox"/> i = i+1

Rascunho