O bordo de uma variedade:

Teorema: M k-variedade de $\mathbb{R}^n$ de classe C^r. Se $\alpha_0: U_0 \to V_0$ e $\alpha_1: U_1 \to V_1$ são sistemas de coordenadas em M e $W = V_0 \cap V_1 \neq \emptyset$ então

$$\alpha_1^{-1} \circ \alpha_0 : \underset{\alpha_0^{-1}(W)}{\underset{\parallel}{W_0}} \to \underset{\alpha_1^{-1}(W)}{\underset{\parallel}{W_1}} \text{ é } C^r \text{ com diferencial não-singular}$$

Dem.: Mostremos que se $\alpha: U \to V$ é sist. coords. então $\alpha^{-1}: V \to \mathbb{R}^k$ é C^r. Isto basta pois se α_0 e α_1^{-1} são C^r então $\alpha_1^{-1} \circ \alpha_0$ o é e analogamente $\alpha_0^{-1} \circ \alpha_1$ é C^r logo $\alpha_0^{-1} \circ \alpha_1 \circ \alpha_1^{-1} \circ \alpha_0 = id$ é C^r $\Rightarrow$ $\alpha_0^{-1} \circ \alpha_1$ e $\alpha_1^{-1} \circ \alpha_0$ tem diferencial não singular.

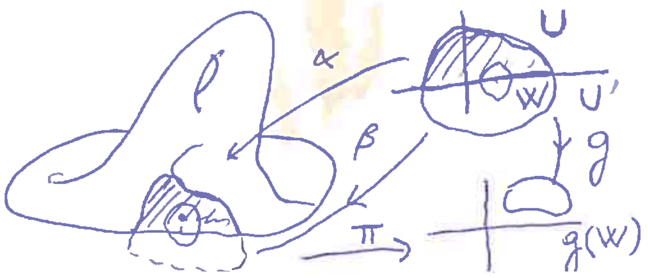
Vejamos que α^{-1} é localmente C^r:

Seja $p_0 \in V$ e $x_0 := \alpha^{-1}(p_0)$ e suponha que U é aberto de H^k mas não de $\mathbb{R}^k$.

$\alpha: U \to V$ estende-se a $\beta: U' \to \mathbb{R}^n$, U' aberto de $\mathbb{R}^k$, $U \subset U'$.

$D\alpha(x_0)$ tem posto k $\Rightarrow$ existem k linhas l.i. na matriz de $D\alpha(x_0)$, suponha que sejam as k-primeiras e seja $\pi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ a projeção nas k-primeiras coordenadas então $g := \pi \circ \beta : U' \to \mathbb{R}^k$ tem $Dg(x_0)$ não singular

$\Rightarrow$ g tem inversa difvel num aberto W contendo x_0.



Mostremos que $h: g^{-1} \circ \pi$ é extensão C^r de α^{-1} numa vizinhança de p_0: ⑥

$U_0 = W \cap U$ é aberto em U $\Rightarrow$ $V_0 = \alpha(U_0)$ é aberto em V

$\Rightarrow V_0 = A \cap V$ para algum aberto $A \subset \mathbb{R}^n$.

A pode ser escolhido no domínio de h (intercepte com $\pi^{-1}(g(W))$).

$h: A \to \mathbb{R}^k$ é C^r e se $p \in A \cap V = V_0$ e $x = \alpha^{-1}(p)$ então

$$h(p) = h(\alpha(x)) = g^{-1}(\pi(\alpha(x))) = g^{-1} \circ g(x) = x = \alpha^{-1}(p)$$

$\Rightarrow h$ é extensão de α^{-1}.

Se U for aberto de $\mathbb{R}^k$ repita o argumento acima com $U' = U$ e $\beta = \alpha$.

<u>Definição</u>: Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ k-vdd. e $p \in M$.

p é ponto interior de M se existe $\alpha: U \to V$, $p \in V$ com U aberto em $\mathbb{R}^k$.

p é ponto do bordo de M em caso contrário.

$\partial M = \{p \in M : p$ é ponto do bordo de $M\}$ é o bordo de M.

$M - \partial M$ é o interior de M.

<u>Lema</u>: Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ k-vdd e $\alpha: U \to V$ sist. de coords. em torno de $p \in M$.

(a) se U é aberto de $\mathbb{R}^k$ então p é interior

(b) se U é aberto de H^k e $p = \alpha(x_0)$ com $x_0 \in H^k_+$ então p é interior.

(c) se U é " de H^k e $p = \alpha(x_0)$ com $x_0 \in \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}$ então p é do bordo.

Dem: (a) ☺

(b) Se $\alpha: U \to V$ é como em (b) sejam $U_0 = U \cap H^k_+$ e $V_0 = \alpha(U_0)$

$\Rightarrow \alpha_0 = \alpha|_{U_0}$ é sist. de coords. em torno de p com U_0 aberto de $\mathbb{R}^k$.

(c) $\alpha_0 : U_0 \to V_0$ parst. coords. em torno de p. com U_0 aberto de H^k

e $p = \alpha_0(x_0)$ com $x_0 \in \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}$.

Suponha que $\alpha_1 : U_1 \to V_1$ é parst. de coords em torno de p

com U_1 aberto de $\mathbb{R}^k$.

Seja $W = V_0 \cap V_1 \subset M$. W é aberto e contém p

Sejam $W_0 = \alpha_0^{-1}(W)$ e $W_1 = \alpha_1^{-1}(W)$,

W_0 é aberto de H^k contendo x_0 e W_1 é aberto de $\mathbb{R}^k$.

Então $\alpha_0^{-1} \circ \alpha_1 : W_1 \to W_0$ é ~~bijetora~~ bijetora e de classe C^r com diferencial

não singular, donde a imagem de $\alpha_0^{-1} \circ \alpha_1$, W_0, é aberto em $\mathbb{R}^k$!

<u>Exemplo:</u> H^k é k-vdd em $\mathbb{R}^n$, de classe C^∞. $\partial H^k = \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}$.

<u>Teorema:</u> M k-vdd de $\mathbb{R}^n$ de classe C^r. Se $\partial M \neq 0$ então ∂M

é $k-1$ vdd de $\mathbb{R}^n$ sem bordo de $\mathbb{R}^n$.

Dem.: Sejam $p \in \partial M$ e $\alpha : U \to V$ parst. de coords em torno de p.

U é aberto de H^k e $p = \alpha(x_0)$ com $x_0 \in \partial H^k$. Pelo lema acima,

$x \in U \cap H^k_+$ satisfaz $\alpha(x) \in M - \partial M$ e $x \in U \cap \partial H^k$ satisfaz

$\alpha(x) \in \partial M$.

Logo $\alpha|_{U \cap \partial H^k}$ é bijeção de $U \cap \partial H^k$ em $\overset{V_0}{\overset{\shortparallel}{V \cap \partial M}}$, aberto de ∂M.

seja U_0 o aberto de $\mathbb{R}^{k-1}$ tq $U_0 \times \{0\} = U \cap \partial H^k$, se $x \in U_0$

defina $\alpha_0(x) = \alpha(x, 0)$. Então $\alpha_0 : U_0 \to V_0$ é parst. de coords. de ∂M

entorno de p; pois α_0 é restrição de α $\Rightarrow$ α_0 é C^r

$D\alpha_0(x)$ é dada pelas $k-1$ primeiras colunas de $D\alpha(x,0)$, tendo posto $k-1$.

α_0^{-1} é restrição a V_0 de α^{-1} projetada nas $k-1$ primeiras

coordenadas, logo α_0^{-1} é contínua.

Teorema: Seja M K-variedade em $\mathbb{R}^n$ de classe C^r. Se $\partial M \neq \emptyset$ então ∂M é K-1-variedade sem bordo em $\mathbb{R}^n$ de classe C^r.

Dem.: Seja $p \in \partial M$ e $\alpha: U \to V$ sistema de coordenadas em torno de p. Então U é aberto em H^k e $p = \alpha(x_0)$ para algum $x_0 \in \partial H^k$. Pelo lema anterior, se $x \in U \cap H^k_+$ então $\alpha(x)$ é ponto interior de M e se $x \in U \cap \partial H^k$ então $\alpha(x) \in \partial M$. Logo $\alpha|_{U \cap \partial H^k}$ é bijeção sobre $V_0 = V \cap \partial M$, aberto de ∂M. Seja $U_0 \subset \mathbb{R}^{k-1}$ aberto tal que $U_0 \times \{0\} = U \cap \partial H^k$ e defina $\alpha_0: U_0 \to V_0$ por $\alpha_0(x) = \alpha(x,0)$. Então α_0 é sistema de coordenadas para ∂M pois α_0 é de classe C^r, pois α o é; $D\alpha_0(x)$ tem posto $k-1$, pois contém as $k-1$ primeiras colunas de $D\alpha(x,0)$ e α_0^{-1} é contínua pois é restrição a V_0 de α^{-1}, seguida da projeção nas $k-1$ primeiras coordenadas.

Teorema: Seja A aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f: A \to \mathbb{R}$ de classe C^r. Seja $M = f^{-1}(0)$ e $N = f^{-1}(\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\})$. Se M é não vazio e $Df(x)$ tem posto 1 para todo $x \in M$ então N é n-variedade em $\mathbb{R}^n$ e $\partial N = M$.

Dem.: Seja $p \in N$ tal que $f(p) > 0$. Seja U o aberto tal que $x \in U \Leftrightarrow f(x) > 0$ e $\alpha: U \to U$ a identidade. Então α é um sistema de coordenadas em torno de p. Suponha agora $f(p) = 0$. Como $Df(x)$ tem posto 1 então alguma $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \neq 0$, digamos $i = n$. Definindo $F: A \to \mathbb{R}^n$ por $F(x) = (x_1, \dots, x_{n-1}, f(x))$ temos

$$DF = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ ? & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \Rightarrow \det DF = \frac{\partial f}{\partial x_n} \neq 0.$$

Logo F é difeomorfismo de uma vizinhança de $p \in A$ em $B \ni f(p) \subset \mathbb{R}^n$. Além disso, $F(A \cap N) = B \cap H^n$ e $F(A \cap M) = B \cap \partial H^n \Rightarrow F^{-1}: B \cap H^n \to A \cap N$ é sistema de coords em N.

$(x \in N \Leftrightarrow f(x) \geq 0)$ $(x \in M \Leftrightarrow f(x) = 0)$

Exemplo: $B^n(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq a\}$ é n-variedade C^∞ com $\partial B^n = S^{n-1}(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = a\}$ ②

Tome $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a - |x|^2$; $Df(x) = [-2x_1 \; \dots \; -2x_n]$.

Teorema: Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ uma k-variedade de classe C^r e $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se $f(U) \subset V$, onde V é aberto de M coberto por $\alpha : U_0 \to V$, então $\alpha^{-1} \circ f : U \to \mathbb{R}^k$ é de classe C^r. $\lrcorner$ X

O espaço tangente: Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ k-variedade de classe C^k.

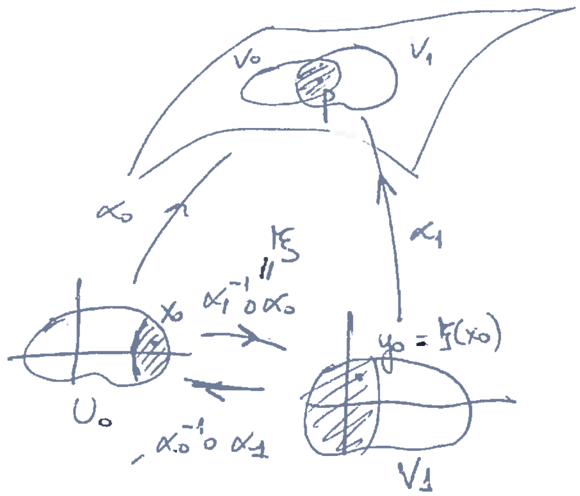
Para cada $p \in M$, o espaço vetorial tangente a M em p é o subespaço vetorial $T_pM \subset \mathbb{R}^n$ dado pel um sistema de coordenadas local em torno de p, isto é, se $\alpha : U \to V$ é sist. de coords. em torno de $p \in M$ com $\alpha(x_0) = p$

$$T_pM = D\alpha(x_0)(\mathbb{R}^k).$$

Teorema: Sejam $\alpha_0 : U_0 \to V_0$ e $\alpha_1 : U_1 \to V_1$ sistemas de coordenadas de uma k-variedade $M \subset \mathbb{R}^n$, de classe C^r, com $V_0 \cap V_1 \neq \emptyset$.

Se $p \in V_0 \cap V_1$, então T_pM independe do sistema de coordenadas utilizado.

Dem.:



Seja $W = V_0 \cap V_1$.

Sabemos que

$\alpha_1^{-1} \circ \alpha_0 : \alpha_0^{-1}(W) \to \alpha_1^{-1}(W)$ é difeomorfismo

Então $\left\{ \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_k} \right\}$ é base para T_pM

Agora mostremos que cada $\frac{\partial \alpha_0}{\partial x_j} \in \operatorname{span}\left\{ \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_i} \right\}$

Se $p \in W$ então $p = \alpha_0(x_0)$ e $p = \alpha_1(y_0)$, onde $y_0 = \alpha_1^{-1} \circ \alpha_0(x_0) = \xi(x_0)$

$$\alpha_0(x) = (\alpha_1 \circ \xi)(x) \Rightarrow \frac{\partial \alpha_0}{\partial x_j}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_i}(\xi(x)) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(x).$$

\#

Em particular a Matriz de mudança de base entre as bases $\left\{ \frac{\partial \alpha_0}{\partial x_i} \right\}$ e $\left\{ \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_j} \right\}$ é a Jacobiana de $\xi = \alpha_1^{-1} \circ \alpha_0$ e $\dim T_pM = k$, $\forall p \in M$.