• Produto vetorial:

$v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Defina $\varphi \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ por $\varphi(w) = \det(v_1, \dots, v_{n-1}, w)$

$\varphi \in V^* \Rightarrow \exists!\, z \in \mathbb{R}^n$ tq $\varphi(w) = \langle w, z \rangle$.

z é denotado por $z = v_1 \times \dots \times v_{n-1}$ é chamado produto vetorial

Propriedades:

1) $v_{\sigma(1)} \times \dots \times v_{\sigma(n-1)} = \operatorname{sgn}\sigma \,(v_1 \times \dots \times v_n)$

2) $v_1 \times \dots \times \alpha v_i \times \dots \times v_{n-1} = \alpha\,(v_1 \times \dots \times v_n)$

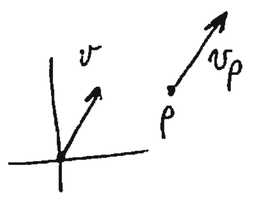
3) $v_1 \times \dots \times v_i + w_i \times \dots \times v_{n-1} = v_1 \times \dots \times v_i \times \dots v_{n-1} + v_1 \times \dots \times w_i \times \dots \times v_{n-1}$

4) $\langle v_1 \times \dots \times v_{n-1}, v_i \rangle = 0$, $1 \leq i \leq n-1$.

Campos de vetores e formas diferenciais

• $p \in \mathbb{R}^n$. O espaço tangente a $\mathbb{R}^n$ em p é o conjunto

$\mathbb{R}^n_p = \{(p, v) : v \in \mathbb{R}^n\}$.



operações: $(p, v) + (p, w) = (p, v+w)$

$\alpha(p, v) = (p, \alpha v)$

Notação: $v_p = (p, v)$

Produto interno em $\mathbb{R}^n_p$: $\langle v_p, w_p \rangle_p = \langle v, w \rangle$

orientação usual em $\mathbb{R}^n_p$: $[(e_1)_p, \dots, (e_n)_p]$.

$T\mathbb{R}^n = \{(p, v_p) : p \in \mathbb{R}$ e $v_p \in \mathbb{R}^n_p\}$

Um campo de vetores em $\mathbb{R}^n$ é uma função $F : \mathbb{R}^n \to T\mathbb{R}^n$,

$\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) = \{F : F$ é campo de vetores em $\mathbb{R}^n\}$

$F(p) = v_p = F^1(p).(e_1)_p + \dots + F^n(p)(e_n)_p$,

$F^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

F é difível se cada F^i o for.

Usamos a mesma definição para abertos de $\mathbb{R}^n$.

Operações com campos de vetores: $(F+G)(p) = F(p)+G(p)$

$$\langle F, G\rangle(p) = \langle F(p), G(p)\rangle_p$$

$$(f.F)(p) = f(p).F(p).$$

Se $F_1, \dots, F_{n-1} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ definimos:

$$(F_1 \times \dots \times F_{n-1})(p) = F_1(p) \times \dots \times F_{n-1}(p).$$

Se $F \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ $\operatorname{div} F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F^i}{\partial x^i} \in \mathbb{R}.$

Notação: definimos o operador $\nabla = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot e_i$ e assim $\operatorname{div} F = \langle \nabla, F\rangle$

Se $n=3$ o rotacional de F é o campo $(\nabla \times F)$ dado por

$$(\nabla \times F)(p) = DF^1 \times DF^2 = \left(\frac{\partial F^3}{\partial x^2} - \frac{\partial F^2}{\partial x^3}\right)(e_1)_p + \left(\frac{\partial F^3}{\partial x_1} - \frac{\partial F^1}{\partial x^3}\right)(e_2)(p) + \left(\frac{\partial F^2}{\partial x_1} - \frac{\partial F^1}{\partial x_2}\right)(e_3)$$

Analogamente podemos pensar em ~~...~~: $\Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)$

$\Lambda^k(\mathbb{R}^n_p) = \{(p,\omega) : p \in \mathbb{R}^n, \omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)\}$ Notação $\omega_p = (p,\omega)$

Uma k-forma em $\mathbb{R}^n$ é uma função $\omega : \mathbb{R}^n \longrightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)$

dada por $\omega(p) = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \omega_{i_1 \dots i_k}(p) \cdot \varphi_{i_1}(p) \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}(p)$,

onde $\{\varphi_1(p), \dots, \varphi_n(p)\}$ é base dual de $\{e_1(p), \dots, e_n(p)\}$.

ω é difível se cada $\omega_{i_1 \dots i_k}$ o for

Operação com k-formas: $(\omega+\eta)(p)$; $(f.\omega)(p)$ e $(\eta \wedge \omega)(p)$.

$\Lambda^0(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in C^\infty\}$. Com isso $f \wedge \omega = f \cdot \omega$, $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$

Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é difível em $p \Rightarrow Df(p) \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$. Podemos considerar a 1-forma

$df(p)(v_p) = Df(p)(v)$,

Em particular, se $f_e(x) = \pi^i(x) = x_i$ temos

$$dx_i(p)(v_p) = d\pi^i(p)(v_p) = D\pi^i(p)(v) = v^i.$$

Logo $\{dx_1(p), \dots, dx_n(p)\}$ é base dual de $\{e_1(p), \dots, e_n(p)\}$. Então,

se $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \omega = \sum \omega_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$.

Em particular $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$.

De fato $df(p)(v_p) = Df(p)(v) = \langle v_i, Df(p) \rangle = \sum v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$

$$= \sum dx_i(p)(v_p) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

<u>Pull back de formas diferenciais:</u>

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ difvel, $Df(p) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Definimos $f_*: \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^m_p$ por $f_*(v_p) = Df(p)(v_p) = (Df(p)(v))_{f(p)} \in \mathbb{R}^m$.

Isso induz transf. linear $f^*: \Lambda^k(\mathbb{R}^m_{f(p)}) \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)$ dada por

$$(f^*\omega)(p) = f^*(\omega(f(p))) \text{ para toda } \omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^m_{f(p)}).$$

Ou seja, $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n_p$ $(f^*\omega)(p)(v_1, \dots, v_k) = \omega(f(p))(f_*(v_1), \dots, f_*(v_k))$

$$= \omega(f(p))(Df(p)(v_1), \dots, Df(p)(v_k))$$

<u>Teorema</u>: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ difvel então

(i) $f^*(dx_i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x_j} dx_j$

(ii) $f^*(\omega_1 + \omega_2)$

(iii) $f^*(g\omega) = (g \circ f) f^*\omega$

(iv) $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$.

Dem.: (i) $f^*(dx_i)(p)(v_p) = dx_i(f(p))(f_* v_p)$

$= dx_i(f(p))(Df_{(p)}(v_p))_{f(p)}$

$= dx_i(f(p))\left(\sum \frac{\partial f^1}{\partial x_j}(p) v_j, \ldots, \sum \frac{\partial f^n}{\partial x_j}(p) v_j\right)_{f(p)}$

$= \sum \frac{\partial f^i}{\partial x_j}(p) \cdot v_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x_j} dx_j(v)$.

(ii) ...

(iii) $f^*(g\omega)(p)(v_p) = (g\omega)(f(p))(f_* v_p)_{f(p)}$

$= g(f(p))\,\omega(f(p)).(f_* v_p)_{f(p)} = (g \circ f)(p)\,(f^*\omega)(p)(v_p)$

(iv) ...

Teorema: Se $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é difvel então

$f^*(h \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n) = (h \circ f) \cdot \det f' \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$.

Dem.: $f^*(h \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n) = (h \circ f)\, \underbrace{f^*(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n)}_{?}$

$p \in \mathbb{R}^n$ e $A = (a_{ij})$ a matriz de $Df(p)$. Então

$f^*(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n)(e_1, \ldots, e_n) = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n(Df(e_1), \ldots, Df(e_n))$

$= dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n\left(\sum a_{i1} e_i, \ldots, \sum a_{in} e_n\right)$

$= \det(a_{ij})\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n(e_1, \ldots, e_n)$.