Mudança de variáveis:

i) Cálculo 1: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ então

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_a^b (f \circ g) \cdot g'$$

Dem: F primitiva de f, $F' = f \Rightarrow (F \circ g)' = (f \circ g) \cdot g' \Rightarrow$

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_a^b (f \circ g) \cdot g'.$$

Se g é injetora então $\displaystyle\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_a^b f \circ g \cdot |g'|$.

Em geral temos:

<u>Teorema</u>: $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $g: A \to \mathbb{R}^n$ injetora de classe $\mathcal{C}^1$ com $\det g'(x) \neq 0$, $\forall x \in A$. Se $f: g(A) \to \mathbb{R}$ é integrável então

$$\int_{g(A)} f = \int_A (f \circ g) \cdot |\det g'|.$$

Obs.: 1) Se $\mathcal{O}$ é cobertura admissível de A e vale $\displaystyle\int_{g(U)} f = \int_U (f \circ g) |\det g'|$, $U \in \mathcal{O}$ e f integrável $\Rightarrow$ que o teorema vale em A.

De fato, $\mathcal{O}' = \{ g(U) : U \in \mathcal{O} \}$ é cobertura de $g(A)$. Seja Φ p.u de $\mathcal{O}'$.

Para $\varphi = 0$ fora de U então $(\varphi f) \circ g = 0$ fora de U (g é 1-1).

Então $\displaystyle\int_{g(U)} \varphi \cdot f = \int_U (\varphi \cdot f) \circ g \cdot |\det g'| \Rightarrow \int_{g(A)} \varphi \cdot f = \int_A (\varphi \cdot f) \circ g \cdot |\det g'|$

donde $\displaystyle\int_{g(A)} f = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_{g(A)} \varphi \cdot f = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_A (\varphi \cdot f) \circ g \cdot |\det g'| = \int_A f \circ g \cdot |\det g'|$.

Podemos escrever $\displaystyle\int_V f = \int_{g^{-1}(V)} (f \circ g) \cdot |\det g'|$ para cada V numa cobertura admissível de $g(A)$ pois g é difeo $\mathcal{C}^1$.

2) Basta provar o teorema para $f \equiv 1$.

Dem.: Se o teorema vale p/ $f \equiv 1$ vale para $f \equiv$ cte.

Seja V um retangulo em $g(A)$ e P partição de V.

Seja $f_S(x) \equiv \inf\{f(x) : x \in S\}$, $S \in P$. Assim

$$L(f,P) = \sum_S m_S(f).v(S) = \sum_S \int_{\mathring{S}} f_S = \sum_S \int_{g^{-1}(\mathring{S})} (f_S \circ g)|\det g'|$$

$$\leq \sum_S \int_{g^{-1}(\mathring{S})} (f \circ g)|\det g'| \leq \int_{g^{-1}(V)} (f \circ g)|\det g'|$$

$\Rightarrow \int_V f \leq$. Analogamente $\int_V f \geq$ $(f_S = \sup\{f(x) : x \in S\})$.

3) Se o teorema vale para $g : A \to \mathbb{R}^n$ e $h : B \to \mathbb{R}^n$ com $g(A) \subset B$ então vale para $h \circ g : A \to \mathbb{R}^n$.

Dem.: $$\int_{h\circ g(A)} f = \int_{h(g(A))} f = \int_{g(A)} f \circ h |\det h'| = \int_A (f \circ h) \circ g \, |\overset{\det h' \circ g}{\cancel{\quad}}||\det g'|$$

$$= \int_A f \circ (h \circ g) . |\det (h \circ g)'|$$

4) O teorema vale se g é linear:

Dem.: Basta ver que $\int_{g(U)} 1 = \int_U |\det g'|$.

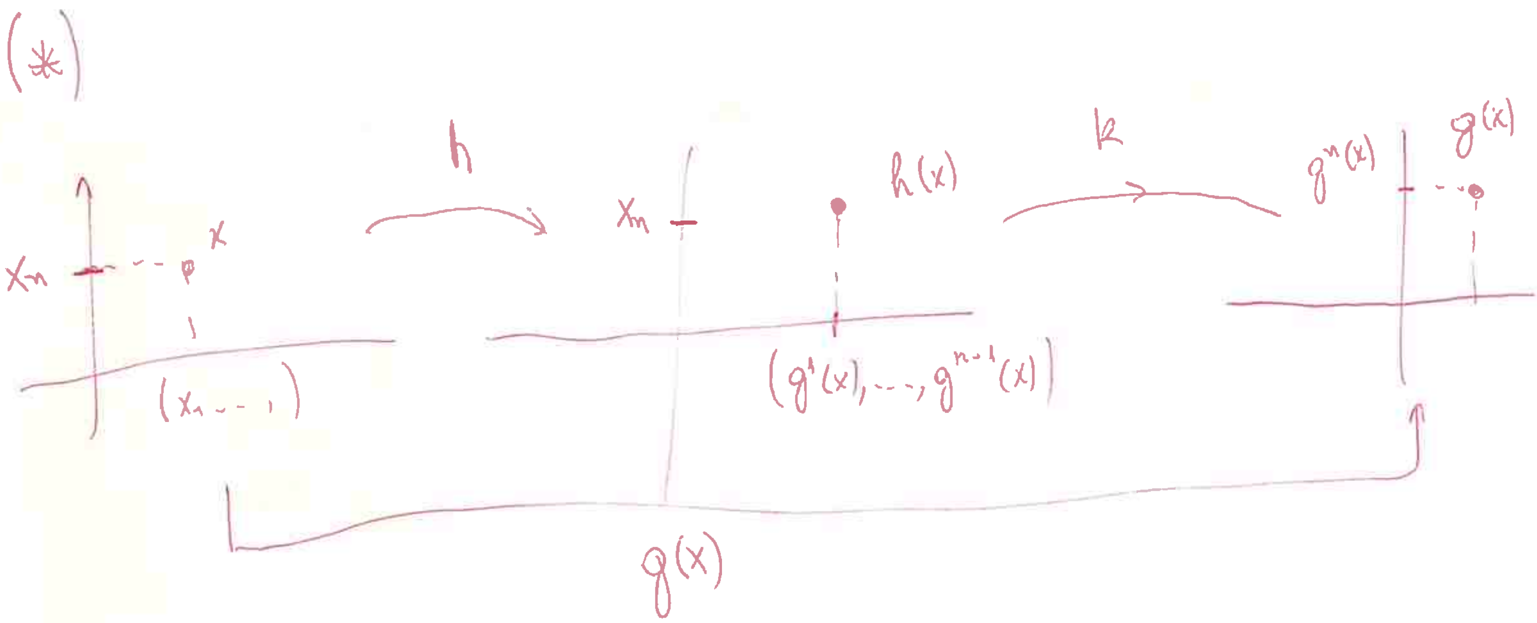
Podemos assumir no teorema que para dado $a \in A$, $g'(a) = Id$.

pois se valer para $Dg^{-1}(a) \circ g$ e vale para $Dg(a)$ então valerá para g.

A prova será por indução em n.

$n = 1$, feito.

Questão 4. (2,5 pontos) Seja $f(x,y) = (3x^2 + y^2)\, e^{-x^2-y^2}$. Determine, se existirem, o valor máximo e o valor mínimo de f no conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 9\}$.



Suponha o teorema válido para $n-1$. (4)

Para cada $a \in A$ procuramos um aberto $U \ni a$, $U \subset A$ onde vale o teorema.

Defina $h: A \to \mathbb{R}^n$ por $h(x) = (g^1(x), \dots, g^{n-1}(x), x_n)$. Então $Dh(a) = Id$.

Logo existe aberto $U' \ni a$ onde $h(x)$ é injetora e $\det h'(x) \neq 0$. Logo, $(*)$ vide pág anterior

existe $k: h(U') \to \mathbb{R}^n$ dada por $k(x) = (x^1, \dots, x^{n-1}, g^n(h^{-1}(x)))$, de classe C^1,

tal que $g(x) = (k \circ h)(x)$, escrevemos g como composta de duas funções

que fixam ao menos 1 coordenada cada.

Além disso $(g^n \circ h^{-1})'(h(a)) = (g^n)'(a) \cdot [h'(a)]^{-1} = g^{n\,\prime}(a)$, donde

$D_n(g^n \circ h^{-1})(h(a)) = D_n g^n(a) = 1 \Rightarrow Dk(h(a)) = Id$, ie,

existe aberto $V \ni h(a)$, $V \subset h(U')$, onde k é injetora e $\det k'(x) \neq 0$.

Fazendo $U = k^{-1}(V)$ temos $g = k \circ h$, com $h: U \to \mathbb{R}^n$ e $k: V \to \mathbb{R}^n$ com

$h(U) \subset V$. Basta provar o teorema para h e k.

Faremos para h:

Seja $W \subset U$ um retângulo da forma $D \times [a_n, b_n]$, D retângulo de $\mathbb{R}^{n-1}$.

Logo $$\int_{h(W)} 1 = \int_{[a_n,b_n]} \left(\int_{h(D \times \{x_n\})} 1 \, dx_1 \dots dx_{n-1} \right) dx_n$$

Seja $h_{x_n}: D \to \mathbb{R}^{n-1}$ dada por $h_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}) = (g^1(x), \dots, g^{n-1}(x))$

é injetora e $\det h'_{x_n} = \det h'(x) \neq 0$. Além disso, $\int_{h(D \times \{x_n\})} 1 \, dx^1 \dots dx^{n-1} = \int_{h_{x_n}(D)} 1 \, dx^1 \dots$

$$\int_{h(W)} 1 = \int_{[a_n,b_n]} \left(\int_{h_{x_n}(D)} 1 \, dx^1 \dots dx^{n-1} \right) dx^n = \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_D \det h_x' \, dx_1 \dots dx_{n-1} \right) dx_n$$

$$= \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_D \det h \, dx_1 \dots dx_{n-1} \right) dx_n = \int_W \det h \, dx \quad \#$$

Questão 3. (2,0 pontos) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $P = (-6, 9)$. Sabe-se que:

(i) A parábola $6y = x^2 + 18$ é a curva de nível 2 de f.

(ii) A imagem da curva $\Gamma(t) = \left(2t, t^2, \dfrac{3t^2 - 3}{t^2 + 3}\right)$, com $t \in \mathbb{R}$, está contida no gráfico de f.

Determine $\nabla f(P)$ e calcule a derivada direcional de f no ponto P e na direção e sentido do versor de $\vec{v} = (2, 1)$.

$g'(x) = 0$ pode ser descartada:

Teorema (Sard): Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $g: A \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. Então o conjunto $g(B)$, onde $B = \{x \in A : \det g'(x) = 0\}$, tem medida nula.

Mais geralmente, se $g: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é de classe C^k, então $k \geq 1 + \max(n-m, 0)$ garante que $g(B)$ tem medida nula.