INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
MAT-2453 — CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I (ESCOLA POLITÉCNICA)
PRIMEIRA LISTA DE EXERCÍCIOS - PROFESSOR: EQUIPE DE PROFESSORES

1. LIMITES DE FUNÇÕES

EXERCÍCIOS

1.1. Calcule, quando existirem, os limites abaixo:

a. $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{2x^3+9x^2+12x+4}{-x^3-2x^2+4x+8}$

b. $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{x^2+16}-5}{x^2+3x}$

c. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+12}-4}{2-\sqrt{x^3-4}}$

d. $\displaystyle\lim_{x\to 1/2} \frac{\sqrt[4]{2x}-1}{\sqrt{2x}-1}$

e. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^4+1}-1}{x^4}$

f. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}$

g. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 20x}{\sin 301x}$

h. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin 2x)}{x}$

i. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \tan(3x)\,\mathrm{cossec}(6x)$

j. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}$

k. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$

l. $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$

m. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sin(3x^2-5x+2)}{x^2+x-2}$

n. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x^3-x^2}$

o. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$

p. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^4+x^2}}{x}$

q. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}-\frac{3}{1-x^3}$

r. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{\sin(x^3-1)\cos\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\sqrt{x-1}}$

s. $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$

t. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x+1}}$

u. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}$

v. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{9x+1}}$

w. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x-\sin x}{x+\sin x}$

x. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^4-1}$

y. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^5+2x-8}{\sqrt{x^6+x+1}}$

z. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+9}+x+3$

α. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-2x)\sin(x^2-4)}{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{4x}}$

β. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^3+x\cos\sqrt{x}}{x^4\sin\left(\frac{1}{x}\right)+1}$

γ. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}\left(\sin x+\sqrt{x}\cos x\right)}{x\sqrt{x}-\sin\left(x\sqrt{x}\right)}$

δ. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt[4]{7x^{12}+5x^4+7}}{2x^3+2}$

ϵ. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

ζ. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^3+x^2-5x+3}}{x^2-1}$

η. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x+2x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x-\sqrt{1+x^2}}$

1.2. A resolução abaixo está incorreta. Indique onde ocorrem os erros e então calcule o limite corretamente.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x &= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x \\
&= \lim_{x\to+\infty} x\underbrace{\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}}-1\right)}_{\to 0} \\
&= \lim_{x\to+\infty} x\cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

1.3. Sejam $c, L \in \mathbb{R}$ tais que $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{2x^3+cx+c}{x^2-1} = L$. Determine c e L.

1.4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função.

a. Supondo que $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x^2} = 1$, calcule $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x}$.

b. Supondo que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, calcule $\lim_{x\to 0} f(x)$.

c. Supondo que $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x^2+x} = +\infty$, calcule $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

1.5. Decida se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa, justificando ou apresentando um contra-exemplo.

a. Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao funções tais que f é limitada e positiva e $\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$, então tem-se que $\lim_{x\to +\infty} f(x)g(x) = +\infty$.

b. Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao funções tais que f é limitada e $\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$, então tem-se que $\lim_{x\to +\infty} f(x) + g(x) = +\infty$.

c. Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao funções tais que $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, então $\lim_{x\to +\infty} f(x) - g(x) = +\infty$.

1.6. Dê exemplos de funções f e g tais que

a. $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$;

b. $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 0} f(x) - g(x) = 1$;

c. $\lim_{x\to 0} f(x) - g(x) = 0$ e $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 1$;

d. $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ e $\lim_{x\to 0} f(x) - g(x) \neq 0$.

1.7. Mostre que se $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ e g é limitada então $\lim_{x\to a} f(x) - g(x) = 0$.

1.8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $|f(x)| \leq 2|x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{f(x^3)}{x}$.

1.9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $1 + x^2 + \frac{x^6}{6} \leq f(x) + 1 \leq \sec x^2 + \frac{x^6}{3}$, para todo x no intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Calcule $\lim_{x\to 0} f(x)$ e $\lim_{x\to 0} f(x) \cos\left(\frac{1}{x^2+x}\right)$.

1.10. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $|\sin x| \leq f(x) \leq 3|x|$ e $0 \leq g(x) \leq 1 + |\sin(x)|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) + \cos x$.

1.11. Sejam C o círculo de raio 1 e centro em $(1,0)$ e C_r o círculo de raio r, $0 < r < 2$, e centro em $(0,0)$. Sejam ainda P_r o ponto $(0,r)$ e Q_r o ponto de interseção dos círculos C e C_r situado no primeiro quadrante.

Se L_r é a interseção da reta P_rQ_r com o eixo Ox, o que acontecerá com L_r, quando C_r encolher arbitrariamente?

2. Continuidade de Funções

Exercícios

2.1. Determine, se existir, o valor de $L \in \mathbb{R}$ para que cada uma das funções abaixo sejam contínuas.

a. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+2) - \sin(x+2)}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ L, & \text{se } x = 0. \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^8+x^4}}{x^2}, & \text{se } x \neq 0 \\ L, & \text{se } x = 0. \end{cases}$

2.2. Determine os pontos de continuidade de cada uma das funções abaixo.

a. $f(x) = \begin{cases} \sin(x^2-4)+5, \text{ se } x > 2 \\ \dfrac{x^2+x-6}{x-2}, \text{ se } x < 2 \\ 5, x = 2. \end{cases}$ **b.** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^2-4x+3|}{x-3}, \text{ se } x \neq 3 \\ 1, \text{ se } x = 3. \end{cases}$

c. $f(x) = \dfrac{1+(-1)^{\lfloor x \rfloor}}{2} \sin(\pi x)$ **d.** $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \text{ é irracional e } 0 < x < 1, \\ \frac{1}{q}, \text{ se } x = \frac{p}{q}, \text{com } \mathrm{mdc}(p,q) = 1. \end{cases}$

Obs.: $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x.

2.3. Decida se a afirmacão é verdadeira ou falsa, justificando ou apresentando um contra-exemplo.

a. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $|f|$ é contínua em $x = 0$, então f é contínua em $x = 0$.
b. Se f e g são funções descontínuas em $x = 0$, então a função fg é descontínua em $x = 0$.

2.4. Construa uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que é contínua em um único ponto.

2.5. Construa uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que é contínua somente em dois pontos.

3. Derivadas

Exercícios

3.1. Sejam f e g funções deriváveis em um intervalo aberto I, $a \in I$ e $h(x) = \begin{cases} f(x), \text{ se } x \geq a, \\ g(x), \text{ se } x < a. \end{cases}$
Mostre que h é derivável em a se e somente se $f(a) = g(a)$ e $f'(a) = g'(a)$. Construa contra-exemplos removendo uma das condições de cada vez.

3.2. Verifique se cada uma das funções abaixo é contínua e se é derivável no ponto x_0 indicado.

a. $f(x) = \begin{cases} (x^2+x)\cos\left(\frac{1}{x}\right), \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$; **b.** $f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right), \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$;

c. $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right), \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$; **d.** $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, \text{ se } x \neq 0 \\ 1, \text{ se } x = 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$.

3.3. Construa uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável num único ponto.

3.4. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(3+x)^2 - \tan 9}{x}$.

3.5. Calcule $f'(0)$, sendo $f(x) = \begin{cases} g(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right), \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}$ e $g(0) = g'(0) = 0$.

3.6. Explicite as derivadas de
a. $f(x) = \tan x$; **b.** $f(x) = \cot x$; **c.** $f(x) = \sec x$; **d.** $f(x) = \operatorname{cosec} x$.

3.7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq |x^3 + x^2|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é derivável em $x_0 = 0$.

3.8. Sabendo-se que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável em $a \in]0, +\infty[$, calcule $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$ em termos de $f'(a)$.

3.9. Considere a função $f(x) = x|x|$. Decida se f é derivável em $x_0 = 0$ e calcule $f'(0)$ em caso afirmativo.

3.10. Derive:

a. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ **b.** $f(x) = \dfrac{4x - x^4}{(x^3+2)^{2015}}$ **c.** $f(x) = x \sin\left(\sqrt[3]{x^5 - x^2}\right)$

d. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}\cos x}{(x^4 + \tan^2(x) + 1)^2}$ **e.** $f(x) = \sec(\tan x)$ **f.** $f(x) = x(\sin x)(\cos x)$

g. $f(x) = \dfrac{(x+a)^5}{x^5 - b^5}$ **h.** $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x - \operatorname{sen} x)}$ **i.** $f(x) = \cot(3x^2 + 5)$.

3.11. Decida em que pontos as funções a seguir são deriváveis.
a. $f(x) = \sqrt{x^4 + x^6}$; **b.** $f(x) = \sqrt{x^4 + x^2}$.

3.12. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável em $x_0 = 0$ tal que $f(0) = f'(0) = 0$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função limitada (não necessariamente derivável em $x_0 = 0$). A função $h(x) = f(x)g(x)$ é derivável em $x_0 = 0$? Exiba $h'(0)$ em caso afirmativo.

3.13. Responda, justificando:
a. Se $f + g$ é derivável em x_0, é verdade que necessariamente que f e g também são deriváveis em x_0?
b. Se $f \cdot g$ é derivável em x_0, quais condições sobre f garantem a derivabilidade de g em x_0?

3.14. Prove que:
a. Se f é derivável em x_0 então $|f(x)|$ é derivável em x_0, desde que $f(x_0) \neq 0$. Dê contra-exemplo no caso em que $f(x_0) = 0$.
b. Se f, g são duas funções deriváveis em x_0 então as funções $h_1(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ e $h_2(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ são deriváveis em x_0, desde que $f(x_0) \neq g(x_0)$. Dê contra-exemplo no caso em que $f(x_0) = g(x_0)$.

3.15. Encontre uma função $g(x)$ tal que $g'(x) = f(x)$ quando
a. $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.
b. $f(x) = \frac{b_2}{x^2} + \frac{b_3}{x^3} + \ldots + \frac{b_k}{x^k}$.
c. Ache mais uma g para cada um dos itens acima.
d. Existe alguma função da forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 + \frac{b_1}{x^1} + \frac{b_2}{x^2} + \frac{b_3}{x^3} + \ldots + \frac{b_k}{x^k}$$

tal que $f'(x) = \frac{1}{x}$? Justifique.

3.16. Dizemos que x_0 é uma *raiz dupla* de uma função polinomial f se $f(x) = (x - x_0)^2 g(x)$, para alguma outra função polinomial g.
a. Mostre que x_0 é raiz dupla de f se e somente se x_0 é raiz tanto de f quanto de f'.
b. Quando $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem raiz dupla? Interprete geometricamente.

3.17. Seja f uma função derivável em x_0 e considere a função $d(x) = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$. Calcule $d(a)$ e $d'(a)$.

3.18. Suponha que $f(x) = xg(x)$, onde g é uma função contínua em $x_0 = 0$. Mostre que f é derivável em $x_0 = 0$ e calcule $f'(0)$ em termos de g.

3.19. Suponha que f é uma função derivável em $x_0 = 0$ e que $f(0) = 0$. Mostre que $f(x) = xg(x)$ para alguma função g que é contínua em $x_0 = 0$.

Dica. O que acontece se você tentar escrever $g(x) = \frac{f(x)}{x}$?

3.20. Prove que é impossível escrever $x = f(x)g(x)$ com f, g deriváveis tais que $f(0) = g(0) = 0$.

Dica. Que tal derivar?

3.21. Interprete geometricamente os resultados obtidos no exercício 17.

3.22. Determine todos os pontos (x_0, y_0) sobre a curva $y = 4x^4 - 8x^2 + 16x + 7$ tais que a tangente à curva em (x_0, y_0) seja paralela à reta $16x - y + 5 = 0$.

3.23. Mostre que qualquer par de retas tangentes à parábola $y = ax^2$, $(a \neq 0)$ tem como interseção um ponto que esta numa reta vertical que passa pelo ponto médio do segmento que une os pontos de tangência destas retas.

3.24. Seja $y = f(x)$ uma função dada implicitamente pela equação $x^2 = y^3(2 - y)$. Admitindo que f é derivável, determine a reta tangente ao grafico de f no ponto $(1, 1)$.

3.25. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável, onde I é um intervalo aberto contendo $x = -1$. Suponha que $f^3(x) - f^2(x) + xf(x) = 2$, para todo $x \in I$. Encontre $f(-1)$ e a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $\big(-1, f(-1)\big)$.

4. Taxas Relacionadas

Exercícios

4.1. Um objeto circular tem seu raio variando de maneira desconhecida, mas sabe-se que quando seu raio é $6m$, a taxa de variação deste é $4m/s$. Determine a taxa de variação da área do objeto no instante em que seu raio é $6m$.

4.2. Suponha agora que o objeto circular do exercício 1 é, na verdade, um equador de um objeto esférico. Determine a taxa de variação do volume do objeto e de sua área, quando o raio é $6m$.

Dica. Você pode expressar o volume em termos do raio da esfera, ou então a partir da área

4.3. A área entre dois círculos concêntricos variáveis é constante igual a $9\pi m^2$. A taxa de variação da área do círculo maior é de $10\pi m^2/s$. Qual a taxa de variação do raio em relação ao tempo do círculo menor quando ele tem área 16π?

4.4. A partícula A se move ao longo do semi-eixo positivo Ox e a partícula B move-se ao longo do gráfico da função $f(x) = -\sqrt{3}x$, $x \leq 0$. Num certo instante, a partícula A está no ponto $(5, 0)$ e afasta-se da origem com velocidade 3 unidades por segundo e a distância de B até a origem é 3 unidades, afastando-se da origem com velocidade 4 unidades por segundo. Qual a taxa de variação da distância entre A e B nesse instante?

4.5. Num certo instante t_0, a altura de um triangulo cresce à razão $1cm/min$ e sua área aumenta à razão de $2cm^2/min$. No instante t_0, sabendo que sua altura á $10cm$ e sua área é $100cm^2$, qual a taxa de variação em relação ao tempo da base do triângulo?

4.6. Despeja-se areia sobre o chão fazendo um monte que tem, a cada instante, a forma de um cone com diâmetro da base igual a três vezes a altura. Quando a altura do monte é de $1.2m$, a taxa de variação com que a areia é despejada é de $0,081m^3/min$. Qual a taxa de variação da altura do monte neste instante?

4.7. Uma lâmpada está acesa no solo a $15m$ de um edifício. Um homem de $1.8m$ de altura anda a partir da luz em direcão ao edifício a $1.2m/s$. Determine a velocidade com que o comprimento de sua sombra sobre o edifício diminui quando ele esta a $12m$ do edifício e quando ele está a $9m$ do edifício.

4.8. Num motor à combustão, uma biela de $7cm$ tem uma de suas extremidades acoplada a uma manivela cujo raio é de $3cm$. Na outra extremidade da biela está um pistão que se move quando a manivela gira (vide 1). Sabendo que a manivela gira no sentido anti-horário a uma taxa constante de 200 rotacões por minuto, calcule a velocidade do pistão quando o ângulo de rotação do disco é $\pi/3$ (medido a partir da posição em que o pistão está mais afastado do disco).

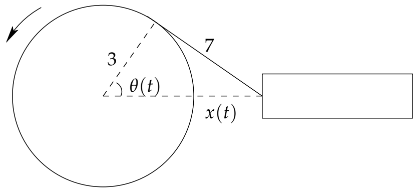


FIGURA 1. Pistão para a questão 8

4.9. Uma escada de bombeiro com $25m$ está encostada na parede de um prédio e sua base se afasta da parede. Num certo instante, a base da escada se encontra a $7m$ da parede e sua velocidade é de $2m/s$.

a. Qual a velocidade com a qual o topo da escada se move nesse instante?

b. Considere o triângulo formado pela parede da casa, a escada e o chão. Calcule a taxa de variação da área deste triângulo no instante em que a base da escada se encontra a $7m$ da parede.

c. Calcule a taxa de variação do ângulo formado entre a parede da casa e a escada, quando a base da escada estiver a $7m$ da parede.

4.10. Uma mangueira está enchendo um tanque de gasolina que tem o formato de um cilindro "deitado" de diâmetro $2m$ e comprimento $3m$. A figura 2 representa uma seçãoo transversal do tanque no instante t. O ângulo θ varia de zero (tanque vazio) a π (tanque cheio). No instante em que a altura h do líquido é de $0.5m$, a vazão é de $0.9m^3/min$. Determine a taxa de variação do ângulo θ nesse instante. Determine também a taxa de variação da altura h do neste mesmo instante.

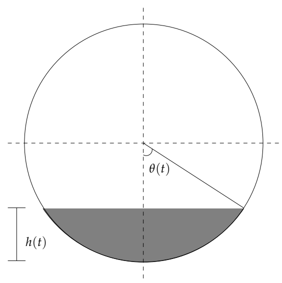


FIGURA 2. Tanque para a questão 10

4.11. Num filtro com formato de cone, como na figura 3, um líquido escoa da parte superior para a parte inferior passando por um orifício de dimensões desprezíveis. Num certo instante, a altura H do líquido depositado na parte inferior é $8cm$, a altura h do líquido da parte superior é $10cm$ e h está diminuindo a uma taxa de variação instantânea de $2cm/min$. Calcule a taxa de variacão de H em relação ao tempo nesse instante.

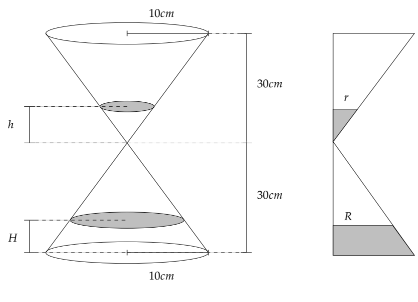


FIGURA 3. Filtro para a questão 11

5. Derivadas de Funções Inversas

Exercícios

5.1. Suponha que f seja uma função injetora, derivável, e que sua inversa, f^{-1}, também seja derivável. Mostre que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}.$$

5.2. Calcule a derivada das seguintes funções:

a. $f(x) = \arctan(x)$; **b.** $f(x) = \arcsin(x)$; **c.** $f(x) = \arccos(x)$.

5.3. Derive:

a. $f(x) = \cos\big(\arctan(x)\big)$; **b.** $f(x) = \frac{\tan(3x)}{\arctan(3x)}$; **c.** $f(x) = \sqrt{1-x^2}\arcsin(x)$.

6. Miscelânea de Testes

Exercícios

6.1. Considere a afirmação "Sejam f, g funções tais que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e g é limitada. Então $\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) = +\infty$.".

É correto dizer que

a. tal afirmação é verdadeira;

b. tal afirmação é verdadeira se supomos que $\lim_{x\to+\infty} g(x) \neq 0$;

c. tal afirmação é verdadeira se supomos que exista algum $r > 0$ tal que $|g(x)| > r$ para todo $x \in \mathbb{R}$;

d. tal afirmação é verdadeira supondo que exista algum $r > 0$ tal que $g(x) > r$ para todo $x \in \mathbb{R}$;

e. tal afirmação é falsa para toda g limitada.

6.2. Seja f uma função real tal que $|f(x)| \leq |\sin(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então

a. f pode ser descontínua em $x = 0$;

b. f é contínua em $x = 0$, mas pode não ser derivável em $x = 0$;

c. f é derivável em $x = 0$ e $f'(0) = 0$;

d. f é derivável em $x = 0$ e $f'(0) = 1$;

e. f é derivável em $x = 0$ mas podemos apenas afirmar que $-1 \leq f'(0) \leq 1$.

6.3. Qual das equações abaixo é a da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \cos(x) - \tan(x)$ em $x = 0$?

a. y=1;

b. y=1+x;

c. y=1-x;

d. y=1+2x;

e. y=1-2x.

6.4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, \text{ se } x \in \mathbb{Q}, \\ \frac{x}{3}, \text{ se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Sendo D o conjunto descontinuidades de f então D é

a. $\emptyset$; **b.** $\mathbb{Q}$; **c.** $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; **d.** $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; **e.** $\mathbb{R}$.

6.5. Dizemos que duas funções reais f e g são equivalentes se $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. Indicamos isso escrevendo $f \sim g$. Qual das afirmações abaixo **NÃO** é consequência de $f \sim g$?

a. $\sin(f) \sim \sin(g)$; **b.** $f^2 \sim g^2$; **c.** $\sqrt{f} \sim \sqrt{g}$; **d.** $f + g \sim 2g$; **e.** $g \sim f$.

6.6. Seja ABC um trângulo tal que $AB = 1$, $AC = x$, $BC = y$ e $B\hat{A}C = 120^{\text{o}}$. Quanto vale $\lim_{x\to\infty} x - y$?

a. 0; **b.** não existe; **c.** $-\dfrac{1}{2}$; **d.** $-\infty$; **e.** $\dfrac{1}{2}$.

6.7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right), \text{se } x \neq 0 \\ 0, \text{se } x = 0. \end{cases}$ Para quantos valores de x o gráfico de f tem reta tangente horizontal?

a. Nenhum; **b.** 1; **c.** 2; **d.** 3; **e.** Infintos.

6.8. **(P1-2016)** Seja f uma função derivável definida em um intervalo aberto centrado em $x = 0$ e dada implicitamente pela equação

$$y^3 + xy^2 + y = 2\sin(x) + 2.$$

O valor de $f'(0)$ é

a. $\dfrac{1}{4}$; **b.** $\dfrac{1}{2}$; **c.** $-\dfrac{3}{4}$; **d.** $-\dfrac{14}{13}$; **e.** $\dfrac{6}{13}$.

6.9. **(P1-2016)** Para que a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2+2x-3|}{x-1}, & \text{se } x < 1; \\ x + k, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

seja contínua em $\mathbb{R}$ o valor da constante k deve ser:

a. -7; **b.** 1; **c.** 3; **d.** -1; **e.** -5.

6.10. **(P1-2016)** Dentre todas as retas tangentes ao gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$, a única que passa pelo ponto $(1, 0)$ é

a. $x = 1 + 4y$; **b.** $x = 1 - y$; **c.** $x = 1 + 2y$; **d.** $x = 1 + 3y$; **e.** $x = 1 + 5y$.

6.11. **(P1-2016)** Um ponto desloca-se sobre o gráfico da curva $y = \frac{1}{x}$. No instante em que ele se encontra no ponto $(2, \frac{1}{2})$, a taxa de variação de sua abscissa é $10m/s$. A taxa de variação da distância do ponto até a origem neste mesmo instante é

a. $-\dfrac{1}{4}$; **b.** $40\sqrt{\dfrac{2}{17}}$; **c.** $\dfrac{75}{2\sqrt{17}}$; **d.** $-\dfrac{75}{2\sqrt{17}}$; **e.** $-40\sqrt{\dfrac{2}{17}}$.

6.12. **(P1-2016)** Considere as seguintes afirmações:

I. Se g é limitada e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ então $\lim_{x\to+\infty} |g(x)f(x)| = +\infty$.

II. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um função tal que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$ então f é derivável.

III. Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é descontínua em x_0 e limitada então $f(x) = xg(x)\sin(x)$ é derivável em $x_0 = 0$.

São corretas

a. nenhuma das afirmações;
b. todas as afirmações;
c. somente as afirmações (I) e (II);
d. somente as afirmações (I) e (III);
e. somente as afirmações (II) e (III).

6.13. (P1-2016) Os limites $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(3x)-1}{x^2}$ e $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sin\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-x}$

a. valem $-\frac{9}{2}$ e $+\infty$, respectivamente;
b. valem $-\frac{9}{2}$ e $-\infty$, respectivamente;
c. valem $\frac{9}{2}$ e $+\infty$, respectivamente;
d. valem $\frac{9}{2}$ e $-\infty$, respectivamente;
e. não existem.

6.14. (P1-2016) Considere a função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 \sin(\frac{1}{|x|})}{|x|}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$ Em $x_0 = 0$ pode-se afirmar que f é

a. descontínua;
b. derivável e $f'(0) = 1$;
c. contínua mas não derivável;
d. derivável e $f'(0) = 0$;
e. derivável e $f'(0) = -1$.

6.15. (Exame de Transferência - Fuvest - 2016) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(1) = -1$, $f(2) = 2$ e existe $k \in \mathbb{R}$ de modo que para todos $a > 0$ e $b > -a$ temos

$$f(a+b) - f(a) = \frac{kb}{a^2 + ab}.$$

Então $f'(3)$ é igual a:

a. $1/6$; **b.** $1/3$; **c.** $1/2$; **d.** $2/3$; **e.** $5/6$.

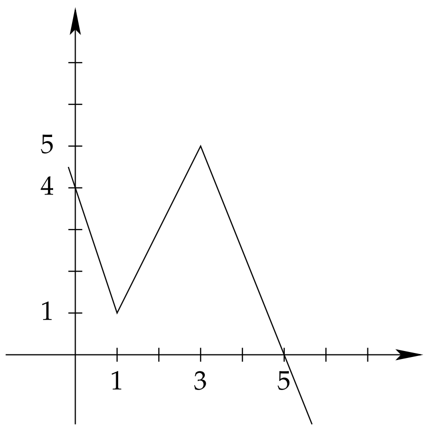
6.16. (Exame de Transferência - Fuvest - 2014) Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que:
(i) f é contínua em $x = 0$ e
(ii) g é descontínua em $x = 0$.
Pode-se concluir corretamente que é descontínua em $x = 0$ a função:

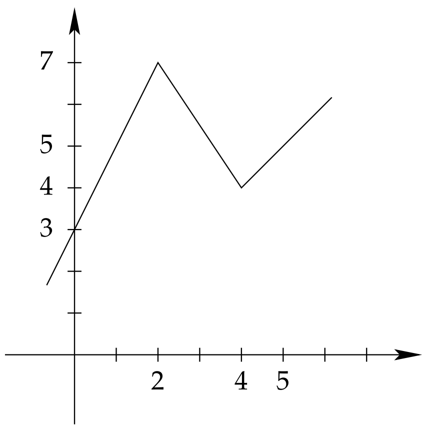
a. $f + g$; **b.** fg; **c.** $f \circ g$; **d.** $g \circ f$; **e.** $|g|$.

6.17. (Exame de Transferência - Fuvest - 2013) Considere todas as retas que são simultaneamente tangentes às parábolas $y = x^2 + 1$ e $y = -x^2 - 1$. Então o produto dos coeficientes angulares dessas retas é:

a. $-1/4$; **b.** -1; **c.** $-9/4$; **d.** -4; **e.** $-25/4$.

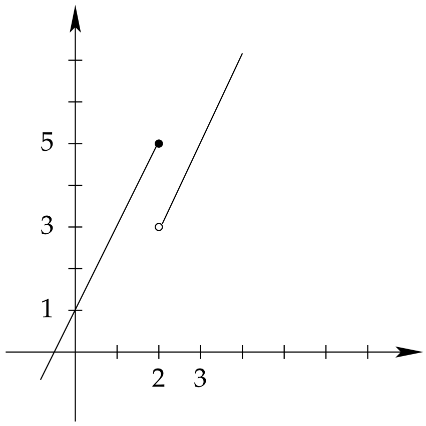
6.18. (Exame de Transferência - Fuvest - 2012) Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cujos gráficos são

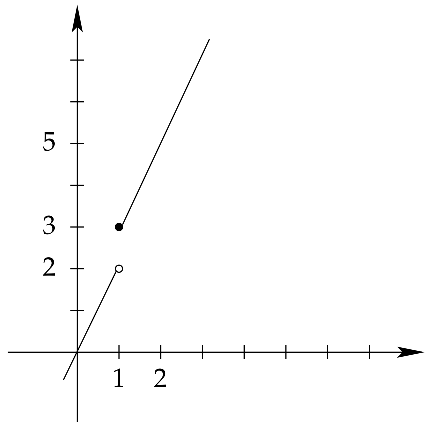




Sejam $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $p(x) = f(g(x))$ e $q(x) = f(x)g(x)$. O valor $p'(1) + q'(0)$ é:
a. -11; **b.** -6; **c.** -1; **d.** 4; **e.** 11.

6.19. (Exame de Transferência - Fuvest - 2016) Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cujos gráficos são





Então pode-se dizer que $f \circ g$

a. não é derivável somente em $x = 1$;
b. não é derivável somente em $x = 2$;
c. não é derivável somente em $x = 1$ e $x = 2$;
d. é derivável em todos os pontos e $(f \circ g)'(1) = 2$;
e. é derivável em todos os pontos e $(f \circ g)'(1) = 4$;

6.20. Considere a seguinte função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{se } x \leq 0 \\ e^{-x}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$

Podemos afirmar que:

a. $\nexists\ f'(0)$; **b.** $f'(0) = -1$; **c.** $f'(0) = -9$; **d.** $f'(0) = -4$; **e.** $f'(0) = -2$.

RESPOSTAS

1. 1. **a.** $-\frac{3}{4}$; **b.** $\frac{1}{5}$; **c.** $-\frac{1}{6}$; **d.** 0; **e.** $\frac{1}{3}$; **f.** $\sqrt{2}$; **g.** $\frac{20}{301}$; **h.** 2; **i.** $\frac{1}{2}$; **j.** $\frac{1}{6}$; **k.** -1; **l.** -1; **m.** $\frac{1}{3}$; **n.** $-\infty$; **o.** 0; **p.** $\nexists$; **q.** $\nexists$; **r.** 0; **s.** $-\infty$; **t.** ∞; **u.** 0; **v.** $\frac{1}{3}$; **w.** 1; **x.** $-\infty$; **y.** $-\infty$; **z.** 3; $\boldsymbol{\alpha}$. $32\sqrt{2}$; $\boldsymbol{\beta}$. 3; $\boldsymbol{\gamma}$. 0; $\boldsymbol{\delta}$. $-\frac{\sqrt[4]{7}}{2}$; $\boldsymbol{\epsilon}$. $\frac{1}{2}$; $\boldsymbol{\zeta}$. $\nexists$; $\boldsymbol{\eta}$. $-\infty$.
1. 3. $c = -1$ e $L = \frac{5}{2}$.
1. 4. **a.** 2; **b.** 0; **c.** $+\infty$.
1. 5. **a.** Falsa; **b.** Verdadeira; **c.** Falsa.
1. 8. 0.
1. 9. 0 e 0.
1. 10. 1.
1. 11. $(4, 0)$.
2. 1. **a.** $-\cos(2)$; **b.** 1.
2. 2. **a.** $\mathbb{R}$; **b.** $\mathbb{R} \setminus \{3\}$; **c.** $\mathbb{R}$; **d.** ☺.
2. 3. **a.** Falsa; **b.** Falsa.
3. 2. Contínuas em x_0: todas;
Deriváveis em x_0: **c. d.**.
3. 4. $6\sec^2 9$.
3. 8. $2\sqrt{a} f'(a)$.
3. 11. **a.** Todos; **b.** todos, exceto $x_0 = 0$.
3. 12. Sim, $h'(0) = 0$.
3. 22. $(-1, -13) : y = 16x + 3$;
$(0, 7) : y = 16x + 7$;
$(1, 19) : y = 16x + 3$.
3. 25. $f(-1) = 2$ e $r : y - 2 = -\frac{2}{7}(x + 1)$.
4. 1. $48\pi m^2/s$.
4. 2. $A'(t_0) = 192\pi m^2/s$ e
$V'(t_0) = 576\pi m^3/s$.
4. 3. $\frac{5}{4} m/s$.
4. 4. $\frac{83}{14}$.
4. 5. $-1.6 cm/min$.
4. 6. $\frac{1}{40\pi} m/min$.
4. 7. $3.6 m/s$ e $0.9 m/s$.
4. 8. $\frac{-9600\pi\sqrt{3}}{13}$.
4. 9. **a.** $\frac{7}{12}$; **b.** $\frac{527}{24}$; **c.** $\frac{1}{12}$.
4. 10. $0.2 rad/min$; $\frac{\sqrt{3}}{10} m/min$.
4. 11. $\frac{50}{121} cm/min$.
Testes: **6. 1. d.**; **6. 2. b.**; **6. 3. c.**; **6. 4. d.**; **6. 5. a.**; **6. 6. c.**; **6. 7. e.**; **6. 8. a.**; **6. 9. e.**; **6. 10. c.**; **6. 11. c.**; **6. 12. e.**; **6. 13. b.**; **6. 14. d.**; **6. 15. d.**; **6. 16. a.**; **6. 17. b.**; **6. 18. b.**; **6. 19. e.**; **6. 20. b.**