INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
MAT-2453 — CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I (ESCOLA POLITÉCNICA)
SEGUNDA LISTA DE EXERCÍCIOS - PROFESSOR: EQUIPE DE PROFESSORES

EXERCÍCIOS

1. Calcule a derivada de cada uma das funções abaixo:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$ (c) $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$

(d) $f(x) = x^{\mathrm{e}} + \mathrm{e}^x$ (e) $f(x) = \mathrm{e}^{1/x^2} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x^2}}$ (f) $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x + 1)$

(g) $f(x) = (\ln x)^2 + (1 + 2^{x^3})^x$ (h) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ (i) $f(x) = x^\pi + \pi^x$

(j) $f(x) = 2^{x^2} + 3^{2x}$ (k) $f(x) = \ln(\operatorname{arctg} x)$ (l) $f(x) = \left(1 + \cos^2 x\right)^{\sin x}$

(m) $f(x) = (\mathrm{e}^x + 3x)^{\arcsin(x^2)}$ (n) $f(x) = (3 + \cos x)^{\operatorname{tg}(x^2)}$ (o) $f(x) = \dfrac{\ln(x^3 + 2^{x^3})}{x^2 + \mathrm{e}^{\cos x}}$

(p) $f(x) = (x^2+1)^{\sin(x^5)}$ (q) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ (r) $f(x) = (1 + \operatorname{arctg} x^2)^{1/x^4}$

Observação 0.1. As funções (a) e (b) são chamadas, respectivamente, de cosseno hiperbólico e de seno hiperbólico e são denotadas, respectivamente por cosh e sinh. Verifique que

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1, \quad \cosh'(x) = \sinh(x), \quad \text{e} \quad \sinh'(x) = \cosh(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

2. Use o TVM para provar as seguintes desigualdades:
(a) $|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \ \leq \ |b - a|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$.
(b) $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \frac{1}{2}|a - b|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \geq 1$ e $b \geq 1$.
(c) $\left|\ln \frac{a}{b}\right| \leq |a - b|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \geq 1$ e $b \geq 1$.
(d) $b^b - a^a > a^a(b - a)$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$ com $1 \leq a < b$.
(e) $\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a} \leq \frac{b-a}{a^2}$, para $1 \leq a < b \leq \mathrm{e}$.

3. Seja f uma função derivável no intervalo $]-1, +\infty[$ tal que $f(0) = 0$ e $0 < f'(x) \leq 1$, para todo $x > 0$. Mostre que $0 < f(x) \leq x$, para todos $x > 0$.

4. Mostre que $f(x) = (1 + x)^{1/x}$ é estritamente decrescente em $]0, +\infty[$. Conclua que

$$(1 + \pi)^{\mathrm{e}} < (1 + \mathrm{e})^\pi.$$

5. Prove as seguintes desigualdades:

(a) $2\sqrt{x} > 3 - \dfrac{1}{x}$, para todo $x > 1$ (b) $\mathrm{e}^\pi > \pi^{\mathrm{e}}$

(c) $\dfrac{\operatorname{tg}\, b}{\operatorname{tg}\, a} > \dfrac{b}{a}$ para $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$ (d) $x - \dfrac{x^3}{3!} < \sin x < x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$, para $x > 0$

(e) $\sqrt{1 + x} < 1 + \frac{x}{2}$, para $x > 0$ (f) $2x \operatorname{arctg} x > \ln(1 + x^2)$, para $x > 0$

6. Seja f derivável em $\mathbb{R}$ e seja g dada por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$. Suponha que x_0 é ponto crítico de g. Prove que $x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0$. Prove que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0 passa pela origem.

7. No seu livro de Cálculo de 1696, L'Hôpital ilustrou sua regra com o limite da função

$$f(x) = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$$

quando $x \to a$, $a > 0$. O valor desse limite é:
a. a
b. a^2
c. $3a/2$
d. nenhuma das anteriores.

8. Calcule, caso exista

(a) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} \dfrac{\ln(1-2x)}{\operatorname{tg}(\pi x)}$ (b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$ (c) $\lim\limits_{x \to 1^+} (\ln x)^{(x-1)}$

(d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{e^{2x}}$ (e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x e^x}{e^{x^2}}$ (f) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^p \ln x,\ p > 0$

(g) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\operatorname{tg}(x^2)}$ (h) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{e^x - 1} \right)$ (i) $\lim\limits_{x \to 0^+} (x \sin x)^{\operatorname{tg} x}$

(j) $\lim\limits_{x \to 0} (e^x + 3x)^{\frac{1}{x}}$ (k) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{1-\cos x} - \dfrac{2}{x^2} \right)$ (l) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} + \ln x \right)$

(m) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x \operatorname{arctg} x}$ (n) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} (\operatorname{tg} x \sec x - \sec^2 x)$ (o) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin x + 2x^2}{e^x + e^{-x} - 2}$

(p) $\lim\limits_{x \to 0} (1+5x)^{\frac{3}{x}}$ (q) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \sin 2x)^{\frac{1}{\sin x}}$ (r) $\lim\limits_{x \to 0^+} (\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}$

(s) $\lim\limits_{x \to 0^+} (1+3x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg}(2x)}}$ (t) $\lim\limits_{x \to 0^+} (1 - \cos x)^x$ (u) $\lim\limits_{x \to 1^-} (2-x)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

(v) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{6x+1}{6x-1} \right)^x$ (w) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln(x+3)^{x+4} - \ln(x+2)^{x+4} \right)$ (x) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}(2x^2)}{\ln(1+3x^2)}$

9. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) = f(b) = 0$. Determine qual das alternativas abaixo implica a existência de um c entre a e b tal que $f(c) = 0$.
a. $f'(a) > 0$ e $f'(b) < 0$.
b. $f'(a)f'(b) > 0$.
c. $f'(a) + f'(b) > 0$.
d. $f'(a) + f'(b) < 0$.

10. Determine c para que a função $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + c$ tenha uma única raiz real.

11. Para que valores de k a equação $2x^3 - 9x^2 + 12x = k$ tem três soluções reais distintas ?

12. Prove que existe um único $c \in \mathbb{R}$ tal que $\cos(\frac{c\pi}{2}) = 2 - 3c$.

13. Seja $f(x) = x^7 + \pi x^3 - 8x^2 + ex + 1$. Quantas soluções distintas tem a equação $f''(x) = 0$? Mostre que a equação $f(x) = 0$ tem exatamente três soluções reais distintas.

14. Dentre as alternativas abaixo, aquela que contém um polinômio que define uma função bijetora de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é:
a. $3x^5 - 5x^3 + 15x$.
b. $3x^5 - 5x^3 - 15x$.
c. $3x^5 + 5x^3 - 15x$.
d. $3x^5 - 5x^3$.
e. $5x^3 - 15x$.

15. Suponha que $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é contínua e que $0 \leq f(x) \leq 1$, para todo $x \in [0,1]$. Prove que existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$.

16. Prove que se p é um polinômio, a equação $e^x - p(x) = 0$ não pode ter infinitas soluções reais.

17. Suponha $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua, $f(0) = 1$ e $f(x)$ um número racional para todo $x \in [0,1]$. Prove que $f(x) = 1$, para todo $x \in [0,1]$.

18. Seja $f(x)$ um polinômio de grau 3, com três raízes reais distintas. Mostre que f tem um ponto de inflexão, que é a média aritmética das três raízes.

19. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e com um único ponto crítico x_0. Prove que se x_0 for ponto de mínimo (máximo) local de f, então x_0 será o único ponto de mínimo (máximo) global de f.

20. Determine todos os números positivos a tais que a curva $y = a^x$ corta a reta $y = x$.

21. (Transferência Fuvest 2012) Considere o polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, em que a, b, c são números reais. Qual a alternativa verdadeira?

a. se $c > 0$ então $p(x)$ terá pelo menos uma raiz positiva.
b. $p(x)$ sempre terá pelo menos um ponto crítico.
c. $p(x)$ sempre terá exatamente um ponto de inflexão.
d. se $a^2 < 3b$ então $p(x)$ não será injetora.
e. se $a^2 < 3b$ então $p(x)$ não será sobrejetora.

22. Determine, caso exista, a constante a para que $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ tenha

(a) um ponto de mínimo local em $x = 2$.
(b) um ponto de mínimo local em $x = -3$.

Mostre ainda que, para qualquer valor de a, a função f não terá um ponto de máximo local.

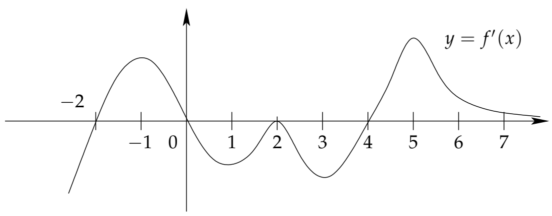
23. (Transferência Fuvest 2013) Seja $f(x) = ax + \frac{b}{x^2}$, em que a e b são números reais. Sabe-se que $x = 1$ é ponto de máximo local e que $f(1)f(-1) = -3$, Nessas condições, $a + b$ vale

a. -3; **b.** -1; **c.** 0; **d.** 1; **e.** 3.

24. Sejam I um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Assuma que vale o seguinte teorema: *se $a, b \in I$, com $a \leq b$, então para todo y entre $f'(a)$ e $f'(b)$, existe $x \in [a, b]$ tal que $f'(x) = y$.* (Observe que não supomos f de classe $\mathcal{C}^1$). Com base nesse teorema podemos afirmar que

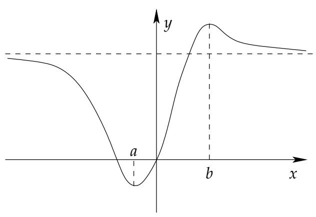
a. não existe função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivável, tal que $f'(0) = 1$ e $f'(x) = 0$ para todo $x \neq 0$.
b. toda função derivável em I possui sua derivada f' contínua em I.
c. toda função derivável em I possui f' descontínua em todo ponto de I.
d. nenhuma das alternativas anteriores é correta.

25. Seja f uma função cuja derivada tem o gráfico esboçado na figura abaixo:



(a) Em que intervalos f é crescente ou decrescente?
(b) Para quais valores de x f tem um máximo ou mínimo local?
(c) Em que intervalos f tem concavidade para cima ou para baixo?
(d) Ache os pontos de inflexão de f.
(e) Admitindo que $f(0) = 0$, faça um esboço do possível gráfico de f.

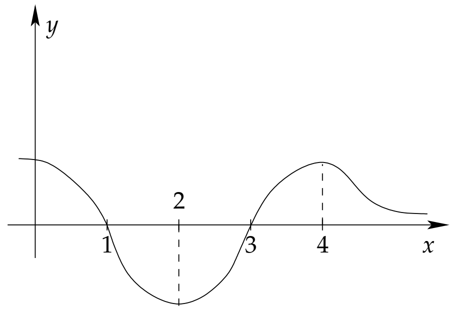
26. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$ cujo gráfico está esboçado abaixo.



Quais das seguintes afirmações podem ser obtidas a partir da figura?

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = 0$.
(b) A equação $f'(x) = 0$ possui exatamente duas soluções reais distintas.
(c) O valor máximo de f' é $f'(x_0)$ para algum $x_0 \in [a, b]$.
(d) $g(x) = f(-x)$ é uma função crescente em $[0, -a]$.
(e) Existe $c \in \mathbb{R}$ tal que f' é crescente em $[c, +\infty[$.

27. (Transferência Fuvest 2007) Seja f uma função derivável até segunda ordem e suponha que o gráfico da função derivada f' seja representado pela figura abaixo:



Pode-se afirmar que a única alternativa incorreta é

a. f possui concavidade para cima no intervalo $]1, 2[$.

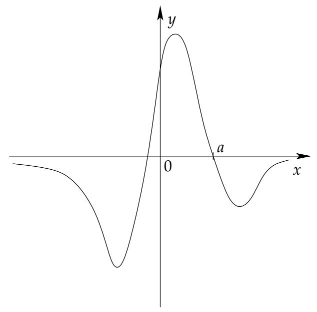
b. $x = 1$ é ponto de máximo local de f e $x = 3$ é ponto de mínimo local de f.

c. f possui concavidade para cima no intervalo $]3, 4[$.

d. f é crescente para $x < 1$ e também para $x > 3$ e decrescente para $1 < x < 3$.

e. $x = 2$ e $x = 4$ são pontos de inflexão de f.

28. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$ cujo gráfico de f' está esboçado abaixo.



Quais das seguintes afirmações podem ser obtidas a partir da figura?

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

(b) $f(x) \geq f(a)$ para todo $x \in \mathbb{R}$

(c) f possui dois pontos de inflexão no intervalo $]0, +\infty[$

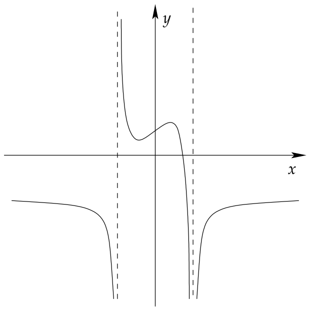
(d) $x = 0$ é um mínimo local da função $g(x) = xf(x^2)$

(e) O gráfico de f possui assíntota horizontal

29. Esboce o gráfico das funções abaixo e dê as equações das assíntotas, quando existirem.

(a) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 1$	(b) $f(x) = 3 + \dfrac{x}{x^2+1}$	(c) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 8}{x+2}$
(d) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$	(e) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$	(f) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
(g) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$	(h) $f(x) = x - 5\ln(x+2) - \dfrac{6}{x+2}$	(i) $f(x) = \operatorname{arctg}(\ln x)$
(j) $f(x) = x^2 \ln x$	(k) $f(x) = \dfrac{e^{-1/x}}{x}$	(l) $f(x) = (3 - \dfrac{6}{x})e^{\frac{2}{x}}$
(m) $f(x) = \dfrac{8\ln(x+3)}{(x+3)^2}$	(n) $f(x) = \ln(2x) - \ln(3x^2+3)$	(o) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$
(p) $f(x) = e^x - e^{3x}$	(q) $f(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$	(r) $f(x) = x^x$

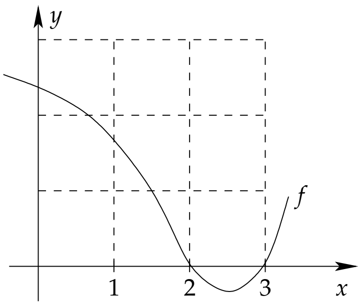
30. (Transferência Fuvest 2002) Sabendo que a figura abaixo é o esboço do gráfico de uma função $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, em que p e q são polinômios, tem-se

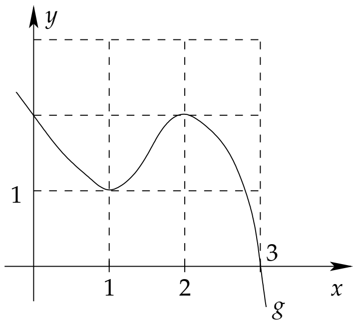


a. grau $p =$ grau $q \geq 2$.
b. grau $p =$ grau $q \leq 2$.
c. grau $p >$ grau $q > 2$.
d. grau $p >$ grau $q = 2$.
e. grau $p <$ grau $q = 2$.

31. Seja $f(x) = \dfrac{4x+5}{x^2-1}$. Prove que f tem exatamente um ponto de inflexão e que esse ponto pertence ao intervalo $]-3,-2[$. Esboce o gráfico de f.

32. (Transferência 2017) Considere as funções deriváveis f e g cujos gráficos estão esboçados abaixo:





Seja $h = f \circ g$. Sabendo que $x = 1$ é ponto de mínimo local de g e que $g(1) = 1$, é correto afirmar que
a. $h'(1) > 0$.
b. $h'(1) < 0$.
c. $x = 1$ é ponto de inflexão de h.
d. $x = 1$ é ponto de mínimo local de h.
e. $x = 1$ é ponto de máximo local de h.

33. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável e seja $a \in \mathbb{R}$ fixado. Verifique se as afirmações são **verdadeiras** ou **falsas**. Justifique.
(a) Se $f'(x) > 0$, para todo $x > a$, então $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
(b) Se f é derivável até segunda ordem com $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$, para todo $x > a$, então $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
(c) Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ então $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$.
(d) Se existe uma assíntota para f (quando $x \to +\infty$) com coeficiente angular m e se existe $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = L$, então $L = m$.
(e) Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = m \in \mathbb{R},\ m \neq 0$ então f tem uma assíntota com coeficiente angular igual a m.

34. Seja $f(x) = (x+6)e^{1/x}$. Para quais valores de k a equação $f(x) = k$ tem exatamente duas soluções reais?

35. Ache o ponto de mínimo de $f(x) = e^x/x$ no intervalo $]0,+\infty[$. Use isso para provar que $\dfrac{e^{a+b}}{ab} \geq e^2$, para todos $a > 0$ e $b > 0$.

36. Esboce o gráfico de $f(x) = x^2 e^{-x}$ e então determine, em função de k, o número de soluções reais da equação $ke^x = x^2$.

37. Achar os valores mínimo e máximo de:

(a) $f(x) = \sin x - \cos x,\ x \in [0, \pi]$ (b) $f(x) = \sqrt{3 + 2x - x^3}$, $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$, $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$ (d) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$, $-1 \leq x \leq 2$

(e) $f(x) = |x^4 - 2x^3|$, $0 \leq x \leq 3$

38. Seja $f(x) = 5x^2 + \dfrac{a}{x^5}$, $x > 0$, onde $a > 0$. Ache o menor valor de a para o qual tem-se $f(x) \geq 28$, para todo $x > 0$.

39. Qual é o menor valor da constante a para o qual a desigualdade $ax + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{2}$ é válida para todo $x > 0$?

40. (P2, 2016) Seja $f(x) = e^{2x^3 + 9x^2}$ definida no intervalo fechado $[-5, 1]$. Se a é o valor máximo de f e se b é o valor mínimo de f, então o produto ab é

a. e^{27}; **b.** e^{-14}; **c.** e^2; **d.** e^{-27}; **e.** e^{-38}.

41. (Transferência Fuvest 2012) Seja $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3}$. Então, o coeficiente angular máximo das retas tangentes ao gráfico de f é

a. $\frac{1}{4}$; **b.** $\frac{1}{8}$; **c.** 0; **d.** $-\frac{1}{8}$; **e.** $-\frac{1}{4}$.

42. (a) Latas cilíndricas fechadas devem ser feitas com um volume V especificado. Qual é a razão entre a altura e o diâmetro da base que minimiza a quantidade de metal gasto para fazer a lata?

(b) Por que as latas encontradas no mercado não são, em geral, como em (a)? Tipicamente o metal é entregue em chapas retangulares. Não há desperdício envolvido em cortar a chapa que formará a superfície lateral, mas as tampas devem ser cortadas de uma peça quadrada, e as sobras, são desprezadas (ou então recicladas). Ache a razão entre a altura e o diâmetro de uma lata de volume V que minimiza o custo do material utilizado.

43. Determine o cone circular reto de maior volume que pode ser inscrito numa esfera de raio 3.

44. Deseja-se construir uma esfera e um cubo de modo que a soma das áreas de suas superfícies seja igual a 2. Determine o raio da esfera que maximiza e o que minimiza a soma de seus volumes.

45. Um triângulo isóceles está circunscrito a um círculo de raio R. Se x é a altura do triângulo, mostre que sua área é mínima quando $x = 3R$.

46. Um cilindro é obtido girando-se um retângulo ao redor do eixo x, onde a base do retângulo está apoiada. Seus vértices superiores estão sobre a curva $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$. Qual é o maior volume que tal cilindro pode ter?

47. (Transferência Fuvest 2013) Dentre os cilindros circulares inscritos numa esfera de raio 1, seja h_1 a altura daquele que tem volume máximo e seja h_2 a altura daquele que tem superfície lateral máxima. Então, $\frac{h_1}{h_2}$ é

a. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$; **b.** $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$; **c.** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; **d.** $\sqrt{2}$; **e.** $\sqrt{3}$.

48. Sejam r e s duas retas paralelas com a distância entre elas igual a 2. Fixe um ponto C sobre a reta s. Fixe dois pontos A e B sobre a reta r de modo que a distância entre os pontos A e B seja igual a 1. É possível encontrar um ponto D na reta s, de modo que o segmento BD intercepte o segmento AC em um ponto P de forma que a soma das áreas dos triângulos ABP e DCP seja mínima? E seja máxima? Nos casos em que a resposta for afirmativa, determine a altura h do triângulo ABP.

49. Sejam $a, b > 0$. Determine, caso exista, o perímetro mínimo dos triângulos de base b e altura (relativa à base dada) a.

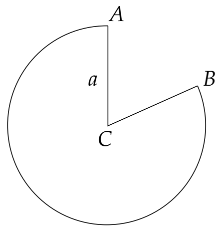
50. Para que pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 25$ a soma das distâncias a (2,0) e (-2,0) é mínima?

51. (P2, 2016) Considere todos os triângulos retângulos formados pelos semi-eixos positivos e por uma reta que passa pelo ponto $(1, 2)$. Dentre todos esses triângulos, aquele que possui área mínima tem a hipotenusa valendo:

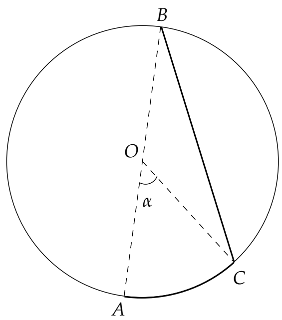
a. $\sqrt{18}$; **b.** $\sqrt{20}$; **c.** $\sqrt{38}$; **d.** $\sqrt{24}$; **e.** $\sqrt{40}$.

52. Um arame de comprimento L deve ser cortado em 2 pedaços, um para formar um quadrado e outro um triângulo equilátero. Como se deve cortar o arame para que a soma das áreas cercadas pelos 2 pedaços seja: (a) máxima?; (b) mínima? Mostre que no caso (b) o lado do quadrado é 2/3 da altura do triângulo.

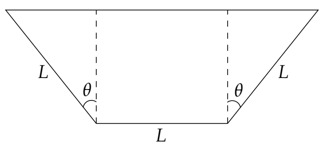
53. Um papel de filtro circular de raio a deve ser transformado em um filtro cônico cortando um setor circular e juntando as arestas CA e CB. Ache a razão entre o raio e a profundidade do filtro de capacidade máxima.



54. Para ir de um ponto A a um ponto B diametralmente oposto de uma piscina circular de $10m$ de diâmetro, uma pessoa pode caminhar (com velocidade constante) pela borda da piscina até um ponto C e nadar (com velocidade constante) em linha reta até o ponto B (veja figura abaixo). Seja α o ângulo AOC. Sabendo que ela pode caminhar duas vezes mais rápido do que pode nadar, determine, em termos de α, as trajetórias que o levam ao seu destino no maior e no menor tempo. (Observação: considere que a pessoa pode somente caminhar ou somente nadar).



55. Um reservatório tem fundo horizontal e seção transversal como se mostra na figura. Achar a inclinação dos lados com a vertical de modo a obter a máxima capacidade.



56. Um muro de 2 metros de altura está a 1 metro de distância da parede lateral de um prédio. Qual o comprimento da menor escada cujas extremidades se apóiam uma na parede, e outra no chão do lado de fora do muro?

57. Seja k um número real. Prove que todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = kf(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ são da forma ce^{kx}, com $c \in \mathbb{R}$.

58. Utilizando o polinômio de Taylor de ordem 2, calcule um valor aproximado e avalie o erro.
(a) $\sqrt[3]{8,2}$; (b) $\ln(1,3)$; (c) $\sin(0,1)$.

59. Mostre que: (a) $|\sin x - x| \leq \dfrac{|x^3|}{3!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$; (b) $0 \leq e^x - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right) < \dfrac{x^3}{2}$, $\forall x \in [0,1]$.

60. Determine o polinômio de Taylor de ordem 5 da função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ em torno de $x_0 = 1$.

61. Determine $P_3(x)$, o polinômio de Taylor de ordem 3 da função $f(x) = \sqrt[5]{x}$ em torno de x_0 e dê a fórmula para o erro $E(x) = f(x) - P_3(x)$. Use este polinômio com um x_0 conveniente para avaliar $\sqrt[5]{34}$ com erro inferior a $5^{-2} \cdot 2^{-15}$.

62. Seja $n > 1$ um inteiro. Determine $P_n(x)$, o polinômio de Taylor de ordem n da função $f(x) = \sin(2x)$ em torno de $x = 0$.

63. Seja $n > 0$ um inteiro ímpar. Mostre que

$$\left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} x^n}{n!}\right)\right| \le \frac{|x^{n+2}|}{(n+2)!}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Avalie $\sin 1$ com erro inferior a 10^{-5}.

64. Determine o polinômio de Taylor de ordem n da função $f(x) = e^x$ em torno de $x_0 = 0$ e avalie e com erro, em módulo, inferior a 10^{-5}.

Mostre ainda que $\left|e^{x^2} - \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!}\right)\right| \le \frac{e^{x^2} x^{2n+2}}{(n+1)!}, \forall x \in \mathbb{R}$ e então avalie $e^{0,25}$ com erro inferior a 2^{-18}.

65. Seja $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ e suponha que $x_0 \in]a, b[$ seja um ponto crítico de f. Mostre que:

(a) se $f''(x_0) > 0$, então x_0 é um ponto de mínimo local de f;

(b) se $f''(x_0) < 0$, então x_0 é um ponto de máximo local de f.

Exercícios Complementares

66. Sejam I um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável.

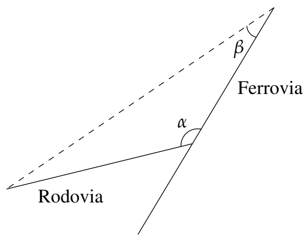
(a) (Teorema de Darboux) Mostre que se $a, b \in I$, com $a \le b$, então para todo y entre $f'(a)$ e $f'(b)$, existe $x \in [a, b]$ tal que $f'(x) = y$.

Observação 0.2. Não supomos f de classe $\mathcal{C}^1$. Isso tornaria o exercício trivial.

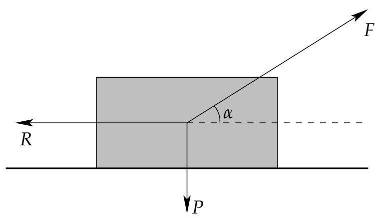
(b) Conclua que não existe função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivável, tal que $f'(0) = 1$ e $f'(x) = 0$ para todo $x \neq 0$.

(c) Determine uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivável em todo ponto, tal que f' não seja contínua.

67. Deve-se construir uma estrada ligando uma fábrica A a uma ferrovia que passa por uma cidade B. Assumindo-se que a estrada e a ferrovia sejam ambas retilíneas, e que os custos de frete por unidade de distância sejam m vezes maiores na estrada do que na ferrovia, encontre o ângulo α a que a estrada deve ser conectada à ferrovia de modo a minimizar o custo total do frete da fábrica até a cidade. Assuma $m > 1$.



68. Um corpo de peso P apoiado sobre um plano horizontal deve ser deslocado horizontalmente pela aplicação de uma força de intensidade F. Qual o ângulo α com a horizontal deve formar a força para que a intensidade da mesma necessária para mover o corpo seja mínima, admitindo coeficiente de atrito $\mu > 0$?



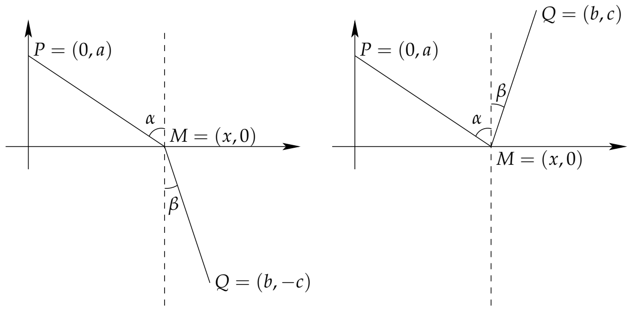
Observação 0.3. Para cada $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ fixo, o valor mínimo da força F para movimentar o bloco é tal que a diferença entre a componente horizontal de F e a força de atrito R seja positiva, i.e.
$F \cos\alpha - \mu(P - F \sin\alpha) \ge 0$, ou seja, $F \ge \frac{\mu P}{\cos\alpha + \mu \sin\alpha}$.

69. Um corredor de largura a forma um ângulo reto com um segundo corredor de largura b. Uma barra longa, fina e pesada deve ser empurrada do piso do primeiro corredor para o segundo. Qual o comprimento da maior barra que pode passar a esquina?

70. (LEI DE REFRAÇÃO DE SNELLIUS) O objetivo desta questão é demonstrar como a *lei da refração de Snellius*, da Óptica Geométrica, pode ser obtida como conseqüência do *princípio de Fermat*, segundo o qual "a trajetória dos raios de luz é aquela que minimiza o tempo de percurso".

Sejam $P \in \mathbb{R}^2$ um ponto no semi-plano superior e $Q \in \mathbb{R}^2$ um ponto no semi-plano inferior, fixos (vide figura abaixo). Uma partícula vai de P a um ponto $M = (x, 0)$ sobre o eixo Ox com velocidade constante u e movimento retilíneo; em seguida, vai de M até Q com velocidade constante v, também em movimento retilíneo. Seja $T \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $T(x)$ é o tempo de percurso de P a Q. Mostre que T possui um único ponto de mínimo $x_0 \in \mathbb{R}$. Verifique que $x_0 \in (0, b)$ e que, se $x = x_0$, então $\dfrac{\sin\alpha}{u} = \dfrac{\sin\beta}{v}$.

Observação 0.4. A *lei da reflexão plana* também pode ser obtida como conseqüência do mesmo princípio (verifique!).



(A) Refração (B) Reflexão

71. (CONSERVAÇÃO DE ENERGIA) Uma partícula de massa m desloca-se sobre uma reta real sob ação do campo de forças f, onde f é uma função contínua $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (isso significa que, para cada $x \in \mathbb{R}$, quando a partícula estiver no ponto de abscissa x, a força que atua sobre ela é $f(x)$). Seja V uma função derivável $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $V'(x) = -f(x)$ (diz-se que a força F "deriva do potencial V"). Seja $x : I \to \mathbb{R}$ a função horária da partícula, definida no intervalo $I \subset \mathbb{R}$ (i.e. para cada instante $t \in I$, $x(t) \in \mathbb{R}$ é a posição da partícula no referido instante). Assuma que o movimento da partícula é governado pela lei de Newton:

$$mx''(t) = f\big(x(t)\big).$$

Demonstre que existe uma constante $E \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $t \in I$:

$$\frac{1}{2}mx'(t)^2 + V\big(x(t)\big) = E.$$

8.

(a) 0	(b) 0	(c) 1	(d) 0	(e) 0
(f) 0	(g) 1	(h) 1	(i) 1	(j) e^4
(k) $\frac{1}{6}$	(l) $+\infty$	(m) 1	(n) $-\frac{1}{2}$	(o) 3
(p) e^{15}	(q) e^2	(r) e	(s) $e^{\frac{3}{2}}$	(t) 1
(u) $e^{\frac{2}{\pi}}$	(v) $\sqrt[3]{e}$	(w) 1	(x) $\frac{2}{3}$	

7. (d)
9. (b)
11. $4 < k < 5$
14. (a)
20. $a \leq e^{\frac{1}{e}}$
21. (c)
22. (a) $a = 16$; (b) $a = -54$
23. (a)
24. (a)
26. (a), (b), (c), (e)
27. (a)
28. (c)
30. (a)
32. (e)
33. Verdadeiras: (b) e (d)
34. $0 < k < 4e^{-1/2}$ ou $k > 9\sqrt[3]{e}$
35. (a) 1
36. Não há soluções se $k < 0$; tem 1 solução se $k = 0$ ou $k > \frac{4}{e^2}$; tem 2 soluções se $k = \frac{4}{e^2}$; tem 3 soluções se $0 < k < \frac{4}{e^2}$.
37. (a) -1; $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{\frac{17}{8}}$; $\sqrt{3 + \sqrt{\frac{32}{27}}}$ (c) $1; \frac{1}{4} + \ln 4$ (d) $\sqrt[3]{-3}$; 0 (e) $0; 27$
38. $a = 2^8$
39. $a = 2$
40. (c)
41. (b)
42. (a) 1; (b) $\frac{4}{\pi}$
43. altura: 4; raio: $2\sqrt{2}$
44. $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi + 12}}$
46. $\frac{\pi}{4}$
47. (c)
48. soma mínima: $h = \sqrt{2}$; a soma nunca é máxima.
49. $b + \sqrt{b^2 + 4a^2}$
50. $(5, 0)$ e $(-5, 0)$
51. (b)
52. (a) Deve-se formar apenas um quadrado; (b) o lado do quadrado é $\dfrac{\sqrt{3}L}{9 + 4\sqrt{3}}$.
53. $\sqrt{2}$
54. menor tempo $\alpha = \pi$; maior tempo $\alpha = \frac{\pi}{3}$
55. $\theta = \frac{\pi}{6}$
56. $\left(1 + \sqrt[3]{4}\right)^{3/2}$
69. $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$