MAT–2453 — Cálculo Diferencial e Integral I — EP–USP

Terceira Prova — 03/07/2017

Tipo de Prova: ● ○ ● ● ○ ● ○ ○

Questão Dissertativa

Questão 1 (4.0)**.** Calcule:

a. $\displaystyle\int \frac{\sin(2x)}{(\sin(x)-1)(\sin(x)-3)}\,dx$;

b. $\displaystyle\int \cos(2x)\ln(\tan^3(x))\,dx$.

Solução.

a.

$$\int \frac{\sin(2x)}{(\sin(x)-1)(\sin(x)-3)}\,dx = \int \frac{2\sin(x)\cos(x)}{(\sin(x)-1)(\sin(x)-3)}\,dx \overset{(*)}{=} \int \frac{2u}{(u-1)(u-3)}\,du = \int \frac{A}{(u-1)} + \frac{B}{(u-3)}\,du$$
$$= \int \frac{-1}{(u-1)} + \frac{3}{(u-3)}\,du = -\ln|u-1| + 3\ln|u-3| + K$$
$$= -\ln|\sin(x)-1| + 3\ln|\sin(x)-3| + K.$$

Em $(*)$ fizemos $u=\sin(x)$ e portanto $du=\cos(x)dx$.

b.

$$\int \cos(2x)\ln(\tan^3(x))\,dx = \int \cos(2x)3\ln(\tan(x))\,dx \overset{(*)}{=} \frac{\sin(2x)}{2}3\ln(\tan(x)) - \int \frac{\sin(2x)}{2}\frac{3}{\sin(x)\cos(x)}\,dx$$
$$= \frac{3}{2}\sin(2x)\ln(\tan(x)) - \int 3\,dx = \frac{3}{2}\sin(2x)\ln(\tan(x)) - 3x + K.$$

Em $(*)$, por partes: fazendo $f(x)=3\ln(\tan(x))$ e $g'(x)=\cos(2x)$, então $f'(x)=\dfrac{3}{\tan(x)}\sec^2(x)=\dfrac{3}{\sin(x)\cos(x)}$ e $g(x)=\frac{\sin(2x)}{2}$.

Testes

1. (1.0) O valor de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$ é igual a: **e.** $\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}$.

2. (1.0) O comprimento do gráfico de $y=\frac{2}{3}x^{3/2}$ no intervalo $[0,1]$ é: **d.** $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

3. (1.0) O valor de $m>0$ para que a área delimitada pela parábola $y=x^2-x$ e a reta $y=mx$ seja igual a $\dfrac{2}{3}$ é **c.** $m=\sqrt[3]{4}-1$.

4. (1.0) Considere as seguintes integrais impróprias:

$$I_1 : \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx \quad \text{e} \quad I_2 : \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+1}\,dx$$

Qual das alternativas é correta? **c.** I_1 diverge enquanto I_2 converge para $\pi/4$.

5. (1.0) Seja $\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função real derivável tal que $\varphi'(x)=x\varphi(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Seja também $\alpha:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável tal que $\alpha(0)=1$ e $(\alpha'(0))^2+\alpha''(0)=5$. Se $F(x)$ é a função

$$F(x)=\int_0^{\alpha(x)}\varphi(t)dt$$

o valor de $F''(0)$ é igual a: **e.** $5\varphi(1)$.

6. (1.0) Seja $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\le x\le 1,\ \mathrm{e}^{-x}\le y\le\sqrt{1+x^2}\right\}$. O volume do sólido obtido girando a região R ao redor do eixo x é: **b.** $\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{2\mathrm{e}^2}\right)\pi$.

Tipo de Prova: ○ ● ● ○ ○ ● ○ ●

Questão Dissertativa

Questão 2 (4.0). Calcule:

a. $\displaystyle\int \frac{\sin(2x)}{(\sin(x)-1)(\sin(x)-2)}\,dx$;

b. $\displaystyle\int \cos(2x)\ln(\tan^2(x))\,dx$;.

Solução.

a.

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin(2x)}{(\sin(x)-1)(\sin(x)-2)}\,dx &= \int \frac{2\sin(x)\cos(x)}{(\sin(x)-1)(\sin(x)-2)}\,dx \overset{(*)}{=} \int \frac{2u}{(u-1)(u-2)}\,du\\ &= \int \frac{A}{(u-1)} + \frac{B}{(u-2)}\,du = \int \frac{-2}{(u-1)} + \frac{4}{(u-2)}\,du = -2\ln|u-1| + 4\ln|u-2| + K\\ &= -2\ln|\sin(x)-1| + 4\ln|\sin(x)-2| + K\end{aligned}$$

Em $(*)$ fizemos $u=\sin(x)$ e portanto $du = \cos(x)dx$.

b.

$$\begin{aligned}\int \cos(2x)\ln(\tan^2(x))\,dx &= \int \cos(2x)2\ln(\tan(x))\,dx \overset{(*)}{=} \frac{\sin(2x)}{2}2\ln(\tan(x)) - \int \frac{\sin(2x)}{2}\frac{2}{\sin(x)\cos(x)}\,dx\\ &= \sin(2x)\ln(\tan(x)) - \int 2\,dx = \sin(2x)\ln(\tan(x)) - 2x + K.\end{aligned}$$

Em $(*)$, por partes: fazendo $f(x) = 2\ln(\tan(x))$ e $g'(x) = \cos(2x)$, então $f'(x) = \dfrac{2}{\tan(x)}\sec^2(x) = \dfrac{2}{\sin(x)\cos(x)}$ e $g(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$.

Testes

1. (1.0) O comprimento do gráfico de $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ no intervalo $[0,1]$ é: **a.** $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

2. (1.0) O valor de $m>0$ para que a área delimitada pela parábola $y = x^2 - x$ e a reta $y = mx$ seja igual a $\dfrac{3}{2}$ é **d.** $m = \sqrt[3]{9} - 1$.

3. (1.0) Seja $R = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\le x\le 1,\ \mathrm{e}^{-x}\le y\le\sqrt{1+x^2}\right\}$. O volume do sólido obtido girando a região R ao redor do eixo x é: **c.** $\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{2\mathrm{e}^2}\right)\pi$.

4. (1.0) Considere as seguintes integrais impróprias:

$$I_1 : \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx \quad \text{e} \quad I_2 : \int_0^{+\infty} \frac{4x}{x^4+1}\,dx$$

Qual das alternativas é correta? **d.** I_1 diverge enquanto I_2 converge para para π.

5. (1.0) Seja $\varphi : \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função real derivável tal que $\varphi'(x) = x\varphi(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Seja também $\alpha:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável tal que $\alpha(0)=1$ e $(\alpha'(0))^2 + \alpha''(0) = 2$. Se $F(x)$ é a função

$$F(x) = \int_0^{\alpha(x)} \varphi(t)dt$$

o valor de $F''(0)$ é igual a: **b.** $2\varphi(1)$.

6. (1.0) O valor de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$ é igual a: **a.** $\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}$.

Tipo de Prova: ● ● ● ○ ● ○ ● ○

Questão Dissertativa

Questão 3 (4.0)**.** Calcule:

a. $\displaystyle\int \frac{\sin(2x)}{(\sin(x)-1)(\sin(x)-3)}\,dx$;

b. $\displaystyle\int \cos(2x)\ln(\tan^3(x))\,dx$;

Solução.

a.

$$\int \frac{\sin(2x)}{(\sin(x)-1)(\sin(x)-3)}\,dx = \int \frac{2\sin(x)\cos(x)}{(\sin(x)-1)(\sin(x)-3)}\,dx \overset{(*)}{=} \int \frac{2u}{(u-1)(u-3)}\,du = \int \frac{A}{(u-1)} + \frac{B}{(u-3)}\,du$$
$$= \int \frac{-1}{(u-1)} + \frac{3}{(u-3)}\,du = -\ln|u-1| + 3\ln|u-3| + K$$
$$= -\ln|\sin(x)-1| + 3\ln|\sin(x)-3| + K.$$

Em $(*)$ fizemos $u=\sin(x)$ e portanto $du = \cos(x)dx$.

b.

$$\int \cos(2x)\ln(\tan^3(x))\,dx = \int \cos(2x)3\ln(\tan(x))\,dx \overset{(*)}{=} \frac{\sin(2x)}{2}3\ln(\tan(x)) - \int \frac{\sin(2x)}{2}\frac{3}{\sin(x)\cos(x)}\,dx$$
$$= \frac{3}{2}\sin(2x)\ln(\tan(x)) - \int 3\,dx = \frac{3}{2}\sin(2x)\ln(\tan(x)) - 3x + K.$$

Em $(*)$, por partes: fazendo $f(x) = 3\ln(\tan(x))$ e $g'(x)=\cos(2x)$, então $f'(x) = \dfrac{3}{\tan(x)}\sec^2(x) = \dfrac{3}{\sin(x)\cos(x)}$ e $g(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$.

Testes

1. (1.0) Seja $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real derivável tal que $\varphi'(x) = x\varphi(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Seja também $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável tal que $\alpha(0)=1$ e $(\alpha'(0))^2 + \alpha''(0) = 4$. Se $F(x)$ é a função

$$F(x) = \int_0^{\alpha(x)} \varphi(t)dt$$

o valor de $F''(0)$ é igual a: **d.** $4\varphi(1)$.

2. (1.0) Seja $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x \le 1,\ \mathrm{e}^{-x} \le y \le \sqrt{1+x^2}\right\}$.
O volume do sólido obtido girando a região R ao redor do eixo x é: **a.** $\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{2\mathrm{e}^2}\right)\pi$.

3. (1.0) O valor de $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{(1+x^2)^2}dx$ é igual a: **a.** $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$.

4. (1.0) O comprimento do gráfico de $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ no intervalo $[0,1]$ é: **e.** $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

5. (1.0) O valor de $m > 0$ para que a área delimitada pela parábola $y = x^2 - x$ e a reta $y = mx$ seja igual a $\dfrac{1}{3}$ é **b.** $m = \sqrt[3]{2} - 1$.

6. (1.0) Considere as seguintes integrais impróprias:

$$I_1 : \int_0^{+\infty} \frac{4x}{x^4+1}\,dx \quad \text{e} \quad I_2 : \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx.$$

Qual das alternativas é correta? **b.** I_1 converge para π enquanto I_2 diverge.

Tipo de Prova: ○ ● ○ ○ ● ○ ● ●

Questão Dissertativa

Questão 4 (4.0)**.** Calcule:

a. $\displaystyle\int \frac{\sin(2x)}{(\sin(x)-1)(\sin(x)-2)}\,dx$;

b. $\displaystyle\int \cos(2x)\ln(\tan^2(x))\,dx$;.

Solução.

a.

$$\int \frac{\sin(2x)}{(\sin(x)-1)(\sin(x)-2)}\,dx = \int \frac{2\sin(x)\cos(x)}{(\sin(x)-1)(\sin(x)-2)}\,dx \overset{(*)}{=} \int \frac{2u}{(u-1)(u-2)}\,du$$

$$= \int \frac{A}{(u-1)} + \frac{B}{(u-2)}\,du = \int \frac{-2}{(u-1)} + \frac{4}{(u-2)}\,du = -2\ln|u-1| + 4\ln|u-2| + K$$

$$= -2\ln|\sin(x)-1| + 4\ln|\sin(x)-2| + K$$

Em $(*)$ fizemos $u = \sin(x)$ e portanto $du = \cos(x)dx$.

b.

$$\int \cos(2x)\ln(\tan^2(x))\,dx = \int \cos(2x)2\ln(\tan(x))\,dx \overset{(*)}{=} \frac{\sin(2x)}{2}2\ln(\tan(x)) - \int \frac{\sin(2x)}{2}\frac{2}{\sin(x)\cos(x)}\,dx$$

$$= \sin(2x)\ln(\tan(x)) - \int 2\,dx = \sin(2x)\ln(\tan(x)) - 2x + K.$$

Em $(*)$, por partes: fazendo $f(x) = 2\ln(\tan(x))$ e $g'(x) = \cos(2x)$, então $f'(x) = \dfrac{2}{\tan(x)}\sec^2(x) = \dfrac{2}{\sin(x)\cos(x)}$ e $g(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$.

Testes

1. (1.0) O valor de $m > 0$ para que a área delimitada pela parábola $y = x^2 - x$ e a reta $y = mx$ seja igual a $\dfrac{1}{2}$ é **a.** $m = \sqrt[3]{3} - 1$.

2. (1.0) Considere as seguintes integrais impróprias:

$$I_1 : \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+1}\,dx \quad \text{e} \quad I_2 : \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx.$$

Qual das alternativas é correta? **a.** I_1 converge para $\pi/4$ enquanto I_2 diverge.

3. (1.0) Seja $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real derivável tal que $\varphi'(x) = x\varphi(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Seja também $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável tal que $\alpha(0) = 1$ e $(\alpha'(0))^2 + \alpha''(0) = 3$. Se $F(x)$ é a função

$$F(x) = \int_0^{\alpha(x)} \varphi(t)dt$$

o valor de $F''(0)$ é igual a: **c.** $3\varphi(1)$.

4. (1.0) Seja $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x \le 1,\ e^{-x} \le y \le \sqrt{1+x^2}\right\}$.
O volume do sólido obtido girando a região R ao redor do eixo x é: **d.** $\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{2e^2}\right)\pi$.

5. (1.0) O valor de $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{(1+x^2)^2}dx$ é igual a: **d.** $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$.

6. (1.0) O comprimento do gráfico de $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ no intervalo $[0,1]$ é: **b.** $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$.