**MAT–2453 — Cálculo Diferencial e Integral I — EP–USP**

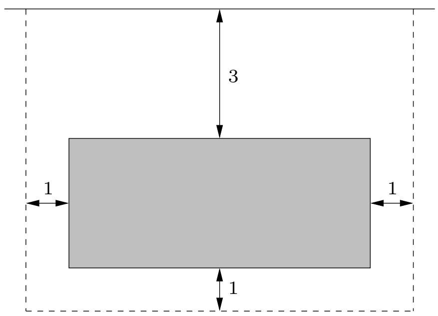
**Segunda Prova — 29/05/2017**

Tipo de prova: ● ○ ● ● ○ ○ ● ○

TESTES

**1.** (1.0) O valor de $\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen}(3x))^{\frac{1}{\operatorname{sen}(2x)}}$ é: **a.** 1 **b.** $e^2$ **c.** $e^3$ **d.** $e^{\frac{2}{3}}$ **e.** $e^{\frac{3}{2}}$

**2.** (1.0) Deseja-se construir uma piscina retangular com $18m^2$ de área (da superfície) a $3m$ de distância de um muro. Paralela aos demais lados da piscina será construída uma cerca, deixando um corredor de circulação de $1m$ de largura.



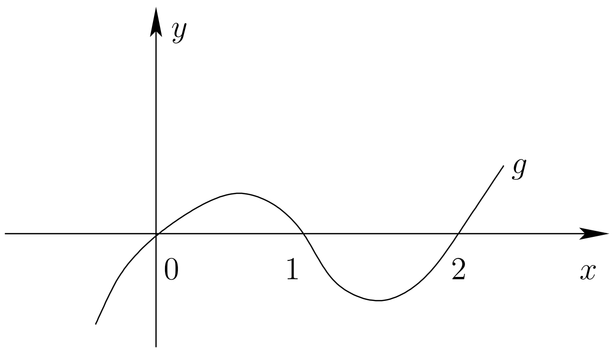

Sabe-se que os lados da piscina paralelos ao muro devem ter no mínimo $2m$ e no máximo $6m$. Sejam $a$ e $A$ as áreas mínima e máxima que a região cercada pode ter. Então, $a + A$ vale:

**a.** $100m^2$ **b.** $102m^2$ **c.** $104m^2$ **d.** $106m^2$ **e.** $108m^2$

**3.** (1.0) A função $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + 4}{x + 3}$ possui $y = 2x + 5$ como assíntota. Então, $a + b$ vale: **a.** 10 **b.** 11 **c.** 12 **d.** 13 **e.** 14

**4.** (1.0) O número de soluções reais da equação $x^6 + 2x^4 + 3x^2 + x - 4 = 0$ é: **a.** 0 **b.** 1 **c.** 2 **d.** 3 **e.** 6

**5.** (1.0) A curva $y = g(x)$ representada abaixo é o gráfico de uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua com exatamente 3 raízes reais distintas.




Se $g$ é a derivada de uma função $f$, conclui-se que, necessariamente,

**a.** $f(0) \cdot f(2) > 0$. **b.** $f(1)$ é um número positivo. **c.** $f$ possui três pontos de inflexão. **d.** $f$ possui um único ponto de máximo local. **e.** $f$ possui pelo menos duas raízes reais distintas.

**6.** (1.0) Seja $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 7$. O ponto $x = -2$ é ponto de

**a.** máximo local mas não global. **b.** mínimo local mas não global. **c.** máximo global. **d.** mínimo global. **e.** inflexão.

**MAT–2453 — Cálculo Diferencial e Integral I — EP–USP**

**Gabarito da P2 — 29 de Maio de 2017**

TESTES

Tipo ● ○ ● ● ○ ○ ● ○ : e – d – d – c – d – d

Tipo ○ ● ○ ● ○ ● ○ ○ : d – b – d – c – d – b

Tipo ● ● ● ○ ● ○ ● ○ : d – c – c – d – c – a

Tipo ○ ● ○ ● ● ● ○ ● : d – d – c – e – a – c

**Questão 1** (2.5). Esboce o gráfico da função $f$ sabendo que $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^3+1}$, $f'(x) = \dfrac{6x^2}{(x^3+1)^2}$ e $f''(x) = \dfrac{12x - 24x^4}{(x^3+1)^3}$, determinando os intervalos de crescimento e decrescimento e de concavidade para cima e para baixo. Indique também as assíntotas, todos os pontos de máximo e mínimo locais e os pontos de inflexão, caso existam.

$\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} = ]-\infty, -1[ \cup ]-1, +\infty[$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3(1-\frac{1}{x^3})}{x^3(1+\frac{1}{x^3})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}} = 1$$

Analogamente, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$. Portanto, $y = 1$ é assíntota no $+\infty$ e no $-\infty$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{\overbrace{x^3-1}^{\to -2}}{\underbrace{x^3+1}_{\to 0^+}} = -\infty$$

Analogamente, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ Portanto, $x = -1$ é assíntota vertical.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

| | $-1$ | $0$ | |
|---|---|---|---|
| $6x^2$ | + | + | + |
| $(x^3+1)^2$ | + | + | + |
| $f'(x)$ | + | + | + |
| $f$ | ↗ | ↗ | ↗ |

Portanto, $f$ é estritamente crescente nos intervalos $]-\infty,-1[$ e $]-1,+\infty[$ e não possui máximos ou mínimos locais.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

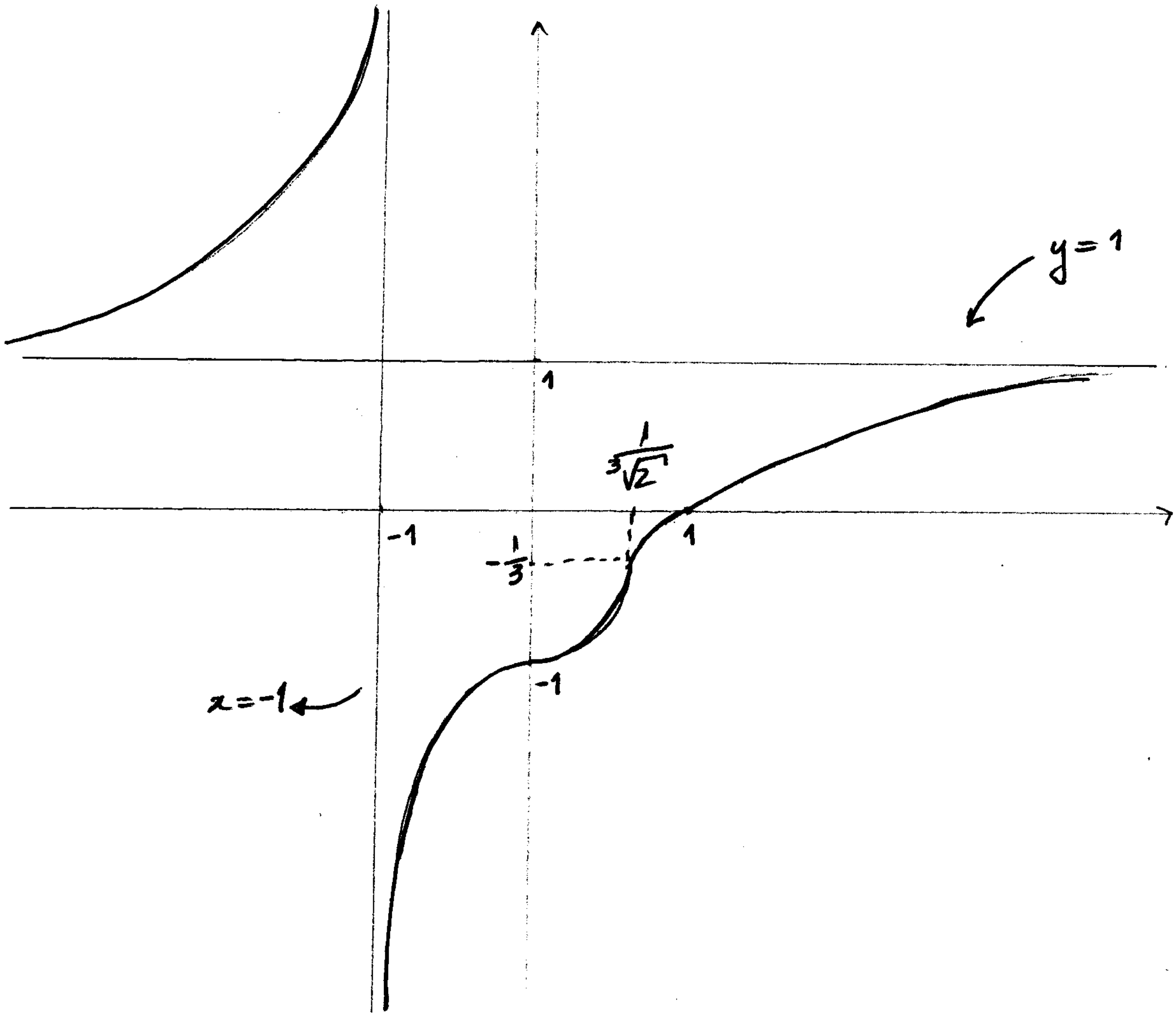
| | $-1$ | $0$ | $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ | |
|---|---|---|---|---|
| $12x$ | − | − | + | + |
| $1-2x^3$ | + | + | + | − |
| $(x^3+1)^3$ | − | + | + | + |
| $f''(x)$ | + | − | + | − |
| $f$ | $\cup$ | $\cap$ | $\cup$ | $\cap$ |

Portanto, $f$ tem concavidade para cima nos intervalos $]-\infty,-1[$ e $]0,\frac{1}{\sqrt[3]{2}}[$ e tem concavidade para baixo em $]-1,0[$ e $]\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty[$.

$0$ e $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ são pontos de inflexão

$f(0) = -1$

$f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = -\frac{1}{3}$



y = 1
1
1/∛2
-1
1
-1/3
-1
x = -1

**Questão 2** (1.5). Prove que, para todo $x \geq 1$,

$$|\operatorname{arctg}(x) - \frac{\pi}{4} - \frac{x-1}{2}| \leq \frac{(x-1)^2}{2}.$$

Se $x = 1$, vale a igualdade.

Seja $x > 1$ e considere $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

$f$ é derivável (em $x = 1$) até segunda ordem (pelo menos)

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad e \quad f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

O polinômio de Taylor de $f$ em torno do ponto $a = 1$ é

$$P_1(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1).$$

$$f(x) - P_1(x) = E_1(x) = \frac{f''(c)}{2}(x-1)^2, \text{ para algum } c \text{ entre } 1 \text{ e } x.$$

Portanto, existe $c > 1$ (já que $1 < c < x$) tal que

$$|E_1(x)| = \frac{c}{1+c^2} \cdot \frac{1}{1+c^2}(x-1)^2.$$

Como $c > 1$, temos $c < c^2 < c^2 + 1$ e $1 + c^2 > 2$

logo, $\frac{c}{c^2+1} < 1$ e $\frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{2}$

Assim,

$$|\operatorname{arctg}(x) - \frac{\pi}{4} - \frac{x-1}{2}| = |f(x) - P_1(x)| = |E_1(x)| \leq \frac{1}{2}(x-1)^2$$